

Научная статья

УДК 517.98

doi: 10.17223/19988621/96/2

MSC: 46B20, 46E30

Свойства геометрических Пирсовских разложений гранево симметричных пространств

Мухтар Мамутович Ибрагимов¹, Аллабай Джалгасович Арзиев²

¹ *Каракалпакский государственный университет имени Бердаха,
Нукус, Узбекистан*

² *Институт математики им. В.И. Романовского Академии наук
Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан*

¹ *m.ibragimov1909@gmail.com*

² *allabayarziev@inbox.ru*

Аннотация. Исследована взаимосвязь между понятиями, соответствующими различным геометрическим трипотентам на гранево симметричных пространствах, и на основе этого изучены свойства геометрических Пирсовских разложений. Точнее, доказано, что геометрические Пирсовские проекторы, соответствующие некоторому классу геометрических трипотентов, совпадают. Более того, установлено, что геометрическое Пирсовское пространство $Z_2(u)$, соответствующее минимальному геометрическому трипотенту u , является линейно изометричным Гильбертовому пространству.
Ключевые слова: слабо и сильно гранево симметричные пространства, симметричная грань, геометрический трипотент, геометрические треугольник и четырехугольник, геометрические Пирсовские проекторы

Для цитирования: Ибрагимов М.М., Арзиев А.Д. Свойства геометрических Пирсовских разложений гранево симметричных пространств // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 96. С. 14–27.
doi: 10.17223/19988621/96/2

Original article

Properties of geometric Peirce decompositions of facially symmetric spaces

Mukhtar M. Ibragimov¹, Allabay D. Arziev²

¹ *Karakalpak State University named after Berdakh, Nukus, Uzbekistan*

² *V.I. Romanovsky Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences,
Tashkent, Uzbekistan*

¹ *m.ibragimov1909@gmail.com*

² *allabayarziev@inbox.ru*

Abstract. In this paper, we consider problems of the theory of facially symmetric spaces which was introduced in the 1980s by Y. Friedman and B. Russo as a geometrical model

of quantum mechanics. These spaces are determined based on the study of the structure of the predual space of the JBW^* -triple, guided by geometric introductions to the measurement process in the set of observables in quantum mechanical systems. The main example of facially symmetric spaces is the Banach space whose dual space is a JBW^* -triple. The main goal of this project was the geometric characterization of Banach spaces admitting an algebraic structure. More precisely, facially symmetric spaces provide the corresponding structure, where the problem of characterization of the unit ball of a predual space of a JBW^* -triple is studied, describing important properties of a convex set in geometric terms such as orthogonality, projective unit, normed face, symmetric face, generalized (or geometric) tripotent and generalized (or geometric) Peirce projectors, etc.

One of the key concepts in facially symmetric spaces is the concept of geometric tripotent. In this paper, we study the relationship between the notions corresponding to different geometric tripotents on facially symmetric spaces and, on this basis, we study properties of geometric Peirce decompositions. More precisely, it is proved that geometric Peirce projectors corresponding to a certain class of geometric tripotents coincide. It is also shown that the geometric Peirce subspace corresponding to the minimal geometric tripotent is linearly isometric to the Hilbert space.

Keywords: weakly and strongly facially symmetric spaces, symmetric face, geometric tripotent, geometric triangle and quadrilateral, geometric Peirce projectors

For citation: Ibragimov, M.M., Arziev, A.D. (2025) Properties of geometric Peirce decompositions of facially symmetric spaces. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 96. pp. 14–27. doi: 10.17223/19988621/96/2

1. Введение

Аксиоматический подход к квантовой теории направлен на формализацию и обоснование основных принципов и законов квантовой механики с помощью набора аксиом, что важно для глубокого понимания квантовой теории и ее применения в различных областях физики и математики. В настоящее время существует несколько направлений в исследованиях по аксиоматике квантовой теории. Один из первых – алгебраический подход, который основывается на алгебре наблюдаемых физической системы. В этой модели предполагается, что множество наблюдаемых имеет две алгебраические структуры: сумму и возведение в квадрат. Это приводит к структуре Йордановой алгебры, где состояния представляют собой положительные функционалы с единичной нормой. Математический аппарат модели включает теорию топологических алгебр (в частности, операторных) и их представления, такие как теория C^* -алгебр, алгебр фон Неймана, JB , JBW -алгебр и др. (подробнее см.: [1–5]).

Другой моделью является «выпуклая модель», возникшая в 1970-х гг. и представляющая собой далеко идущее логическое развитие статистической интерпретации квантовой механики. В основе этой модели лежат физически наиболее естественные аксиомы, и ее основным понятием являются выпуклые множества состояний физических систем. В рамках данной модели были изучены геометрические характеристики проективных выпуклых множеств (подробнее см.: [6–10]). В работах [11–15] найдены геометрические и физические условия на выпуклое множество, обеспечивающие его аффинную изоморфность пространству состояний C^* -алгебры или JB^* -алгебры.

Во избежание некоторых неестественных алгебраических предположений в упомянутых моделях Я. Фридман и Б. Руссо предложили геометрическую модель для квантовой механики [16–20]. Отправной точкой в этой модели было предположение, что состояния физической системы являются единичными векторами некоторого нормированного пространства Z . В результате исследования были введены понятия слабо и сильно гранево симметричных пространств. Эти пространства обеспечивают соответствующую структуру, где изучается проблема характеристики единичного шара предсопряженного пространства JBW^* -тройки.

В работах [21–25] в процессе исследования граневой структуры единичных шаров гранево симметричных пространств были изучены различные свойства геометрических трипотентов в сопряженных пространствах. В [21. Лемма 4.5] доказано, что в сильно гранево симметричном пространстве Z для любого геометрического трипотента u и любого $\alpha \in K$ ($K = \mathbb{R}$ или $K = \mathbb{C}$) с $|\alpha| = 1$ элемент αu является геометрическим трипотентом.

В настоящей работе мы исследовали свойства таких геометрических трипотентов и доказали (Предложение 3.1), что геометрические Пирсовские разложения, соответствующие геометрическим трипотентам u и αu , совпадают. С помощью этого результата установили взаимосвязь между понятиями, соответствующими геометрическим трипотентам u и αu , а также αu и βv (Следствия 3.2., 3.6), где $\alpha, \beta \in K$ с $|\alpha| = |\beta| = 1$. Кроме того, исследовали свойства геометрических треугольников (Предложение 3.10) и четырехугольников (Предложение 3.12) геометрических трипотентов. Установлено, что геометрическое Пирсовское подпространство $Z_2(u)$, соответствующее минимальному геометрическому трипотенту u , является линейно изометричным Гильбертовому пространству (Теорема 3.14).

2. Предварительные сведения

В данном разделе мы приведем некоторые необходимые сведения из теории гранево симметричных пространств (подробно см.: [16–20]).

Пусть Z – действительное или комплексное нормированное пространство. Элементы $f, g \in Z$ называются *ортгональными*, обозначаются $f \diamond v$, если $\|f + g\| = \|f - g\| = \|f\| + \|g\|$. Выставленной по норме гранью единичного шара Z_1 пространства Z является непустое множество (обязательно $\neq Z_1$), имеющее вид: $F_x = \{f \in Z_1 : \langle x, f \rangle = 1\}$, где $x \in Z^*$, $\|x\| = 1$. Для любого подмножества $S \subset Z$ через $S^\diamond$ обозначим множество всех элементов, ортгональных каждому элементу S . Элемент $u \in Z^*$ называется *проективной единицей*, если $\|u\| = 1$ и $\langle u, F_u^\diamond \rangle = 0$. Через $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{U}$ обозначим множества всех выставленных по норме граней Z_1 и проективных единиц в Z_1^* соответственно.

Определение 2.1. $F \in \mathfrak{F}$ называется *симметричной гранью*, если существует линейная изометрия S_F из Z на Z с $S_F^2 = I$ такая, что множеством неподвижных

точек S_F является $\overline{sp}F \oplus F^\diamond$. В частности, $F^\diamond$ является замкнутым линейным подпространством. Мы называем S_F *симметрией*.

Исходя из определения 2.1, через S_{F_u} обозначим симметрию, соответствующую симметричной грани F_u , а через $S_{F_u}^*$ – сопряженное отображение к S_{F_u} .

Определение 2.2. $u \in \mathfrak{U}$ называется *геометрическим трипотентом*, если F_u является симметричной гранью и $S_{F_u}^* u = u$ для симметрии S_{F_u} .

Через $S\mathfrak{F}$ и $G\mathfrak{U}$ обозначим множества всех симметричных граней Z_1 и геометрических трипотентов в Z_1^* соответственно

Определение 2.3. Действительное или комплексное нормированное пространство Z называется *слабо гранево симметричным пространством* (WFS-пространством), если каждая выставленная по норме грань из Z_1 является симметричной.

На WFS-пространстве Z для каждой симметричной грани F определим сжимающие проекторы $P_k(F_u)$ ($k \in \{0, 1, 2\}$) следующим образом:

$$P_1(F_u) = \frac{1}{2}(I - S_{F_u}), \quad P_1(F_u)(Z) = \{f \in Z : S_{F_u} f = -f\};$$

$P_0(F_u)$ и $P_2(F_u)$ проектируют Z на $F_u^\diamond$ и $\overline{sp}F_u$ соответственно. Эти проекторы называются *геометрическими* (или *обобщенными*) *Пирсовскими проекторами*.

Для удобства вводятся следующие обозначения:

$$P_k(u) = P_k(F_u), \quad Z_k(u) = P_k(u)Z, \quad U_k(u) = Z_k^*(u), \quad S_u = S_{F_u},$$

где $k \in \{0, 1, 2\}$. Очевидно, что

$$P_0(u) + P_2(u) = \frac{1}{2}(I + S_u), \quad P_0(u) + P_1(u) + P_2(u) = I, \\ P_0(u) - P_1(u) + P_2(u) = S_u.$$

Для $u, v \in G\mathfrak{U}$ будем писать $u \leq v$, если $F_u \subset F_v$. $u \in G\mathfrak{U}$ называется *минимальным*, если $\dim U_2(u) = 1$. Через M обозначим множество всех минимальных геометрических трипотентов. $u \in G\mathfrak{U}$ называется *неразложимым*, если для $v \in G\mathfrak{U}$ из $v \leq u$ вытекает $v = u$. Через $\mathfrak{J}$ обозначим множество всех неразложимых геометрических трипотентов.

Определение 2.4. WFS-пространство Z называется *сильно гранево симметричным пространством* (SFS-пространством), если для каждой симметричной грани F_u из Z_1 и для каждого $v \in Z^*$ с $\|v\| = 1$ и $F_u \subset F_v$ имеем $S_u^* v = v$.

Сжимающий проектор Q на нормированном пространстве Z называется *нейтральным*, если для любого $f \in Z$ из равенства $\|Qf\| = \|f\|$ вытекает $Qf = f$. Нормированное пространство Z называется *нейтральным*, если для каждой симметричной грани F_u соответствующий проектор $P_2(u)$ является нейтральным.

Пусть Z – нейтральное сильно гранево симметричное пространство, и $u, v \in G\mathfrak{U}$. Мы скажем, что

$$- u \leq_2 v, \text{ если } u \in U_2(v);$$

- $u \leq_0 v$, если $U_0(v) \subset U_0(u)$;
- $u \sim_k v$, если $u \leq_k v$ и $v \leq_k u$, где $k \in \{0, 2\}$.

Геометрический трипотент u называется

- *максимальным*, если $U_0(u) = \{0\}$;
- *полным*, если $U_2(u) = U$;
- *абелевым*, если $U_1(v) = \{0\}$ для любого $v \in G\mathfrak{U}$, $v \leq u$.

Назовем геометрический трипотент $e \in G\mathfrak{U}$ *конечным*, если произвольный геометрический трипотент $u \in U_2(e)$, который максимален в $U_2(e)$, является полным в $U_2(e)$. Если произвольный геометрический трипотент в Z^* конечен, мы скажем, что Z – конечен.

3. Основной результат

Как уже было отмечено во введении, в сильно гранево симметричном пространстве Z для любого $u \in G\mathfrak{U}$ и любого $\alpha \in K$ ($K = \mathbb{R}$ или $K = \mathbb{C}$) с $|\alpha| = 1$ элемент αu является геометрическим трипотентом. Более того, выполняется равенство $F_u = \alpha F_{\alpha u}$. Эти факты и обозначение $T = \{\lambda \in K : |\lambda| = 1\}$ будем иметь в виду в дальнейшем.

Предложение 3.1. Пусть Z является SFS-пространством. Тогда для любого $u \in G\mathfrak{U}$ и любого $\alpha \in T$ имеет место равенство $Z_k(\alpha u) = \bar{\alpha} Z_k(u)$, где $k \in \{0, 1, 2\}$.

Доказательство. Рассмотрим случаи, когда $k = 0, 1, 2$.

$k = 0$. Пусть $\forall f \in Z_0(\alpha u) = F_{\alpha u}^\diamond$, т.е. $f \in (\bar{\alpha} F_u)^\diamond$, следовательно, $f \diamond (\bar{\alpha} g)$, для любого $g \in F_u$, и $\left\| f \pm \frac{1}{\alpha} g \right\| = \|f\| + \left\| \frac{1}{\alpha} g \right\|$. Тогда $\|\alpha f \pm g\| = \|\alpha f\| + \|g\|$, т.е. $(\alpha f) \diamond g$, откуда следует, что $f \in \frac{1}{\alpha} F_u^\diamond$, следовательно, $Z_0(\alpha u) \subset \bar{\alpha} Z_0(u)$. Обратное включение доказывается аналогично. Таким образом, $Z_0(\alpha u) = \bar{\alpha} Z_0(u)$.

$k = 2$. Справедливо следующее:

$$Z_2(\alpha u) = \overline{sp} F_{\alpha u} = \overline{sp} (\bar{\alpha} F_u) = \bar{\alpha} \overline{sp} F_u = \bar{\alpha} Z_2(u).$$

$k = 1$. Поскольку для произвольного $v \in G\mathfrak{U}$ имеем $Z = Z_0(v) + Z_1(v) + Z_2(v)$ и $Z_k(\alpha u) = \bar{\alpha} Z_k(u)$ при $k \in \{0, 2\}$, то

$$Z_1(\alpha u) = \bar{\alpha} Z_1(u). \quad \blacksquare$$

Из доказанного предложения следует следующее утверждение.

Следствие 3.2. Пусть Z является нейтральным SFS-пространством и $u \in \mathfrak{U}$. Тогда для любого $\alpha \in T$ справедливы следующие соотношения:

(i) $P_k(\alpha u) = P_k(u)$, где $k \in \{0, 1, 2\}$;

(ii) $u \sim_k \alpha u$, где $k \in \{0, 2\}$;

(iii) u является максимальным тогда и только тогда, когда αu является максимальным;

- (iv) u является полным тогда и только тогда, когда αu является полным;
- (v) u является абелевым тогда и только тогда, когда αu является абелевым;
- (vi) u является конечным тогда и только тогда, когда αu является конечным;
- (vii) u является минимальным тогда и только тогда, когда αu является минимальным;
- (viii) u является неразложимым тогда и только тогда, когда αu является неразложимым.

Доказательство. (i) Поскольку $Z_k(\alpha u) = \bar{\alpha} Z_k(u)$, где $k \in \{0, 1, 2\}$, то $Z_k(\alpha u) = Z_k(u)$, т.е. $U_k(\alpha u) = U_k(u)$. Тогда из [26. Предложение 3.3] следует, что $P_k(\alpha u) = P_k(u)$.

(ii), (iii), (iv) и (vii) и вытекают из (i), точнее, из равенства $U_k(\alpha u) = U_k(u)$, когда $k \in \{0, 2\}$.

(v) Пусть u является абелевым. Если $v \in G\mathcal{U}$ и $v \leq \alpha u$, то $F_v \subset F_{\alpha u} = \bar{\alpha} F_u$, т.е. $F_{\bar{\alpha}v} = \alpha F_v \subset F_u$, следовательно, $\bar{\alpha}v \leq u$. Поскольку u является абелевым, то $U_1(\bar{\alpha}v) = \{0\}$. Помимо этого, имеем $U_1(\bar{\alpha}v) = U_1(v)$. Таким образом, $U_1(v) = \{0\}$, т.е. αu является абелевым.

Обратное, пусть αu является абелевым. Если $v \in G\mathcal{U}$ и $v \leq u$, то $F_v \subset F_u = \alpha F_{\alpha u}$, т.е. $\bar{\alpha} F_v = F_{\alpha v} \subset F_{\alpha u}$, следовательно, $\alpha v \leq \alpha u$. Поскольку αu является абелевым, то $U_1(\alpha v) = \{0\}$. Кроме этого, имеем $U_1(\alpha v) = U_1(v)$. Таким образом, $U_1(v) = \{0\}$, т.е. u является абелевым.

(vi) Пусть u является конечным, и геометрический трипотент $v \in U_2(\alpha u)$ максимален в $U_2(\alpha u)$, т.е. $U_0(v) \cap U_2(\alpha u) = \{0\}$. Из равенства $U_2(\alpha u) = U_2(u)$ имеем $U_0(v) \cap U_2(u) = \{0\}$, т.е. v максимален в $U_2(u)$, следовательно, полный в $U_2(u)$. Поэтому

$$U_2(v) \cap U_2(\alpha u) = U_2(v) \cap U_2(u) = U_2(u) = U_2(\alpha u),$$

т.е. v является полным в $U_2(\alpha u)$, следовательно, αu является конечным.

Обратное доказывается аналогичным образом.

(viii) Пусть u является неразложимым, и $v \leq \alpha u$ для некоторого $v \in G\mathcal{U}$. Тогда $F_v \subset F_{\alpha u} = \bar{\alpha} F_u$, т.е. $F_{\bar{\alpha}v} = \alpha F_v \subset F_u$, следовательно, $\bar{\alpha}v \leq u$. Поскольку u неразложимый, то $\bar{\alpha}v = u$. Тогда $\alpha F_v = F_{\bar{\alpha}v} = F_u$, поэтому $F_v = F_{\alpha u}$, следовательно, $v = \alpha u$, т.е. αu является неразложимым.

Обратное, пусть αu является неразложимым и $v \leq u$ для некоторого $v \in G\mathcal{U}$. Тогда $F_v \subset F_u = \alpha F_{\alpha u}$, т.е. $F_{\alpha v} \subset F_{\alpha u}$, следовательно, $\alpha v \leq \alpha u$. Поскольку αu неразложимый, то $\alpha v = \alpha u$. Тогда $\bar{\alpha} F_v = F_{\alpha v} = F_{\alpha u} = \bar{\alpha} F_u$, поэтому $F_v = F_u$, следовательно, $v = u$, т.е. u является неразложимым. ■

Теперь кратко приведем сведения из теории JBW^* -троек, необходимые для разъяснения понятий, определяемых на гранево симметричных пространствах.

Определение 3.3. Банахово пространство U над $\mathbb{C}$ называется JB^* -тройкой, если оно снабжено тройным произведением $(a, b, c) \mapsto \{a, b, c\}$, отображающим $U \times U \times U$ на U таким, что

- (i) $\{a, b, c\}$ линейно относительно a и c , сопряжено линейно относительно b ;
- (ii) $\{a, b, c\}$ симметрично относительно крайних переменных, т.е. $\{a, b, c\} = \{c, b, a\}$;
- (iii) для всякого $x \in U$ оператор $L(x, x)$ из U , на U определенный как $L(x, x): y = \{x, x, y\}$, где $y \in U$, является эрмитовым с неотрицательным спектром;
- (iv) тройное произведение удовлетворяет следующему тождеству, называемому *главным тождеством*:

$$L(x, x)\{a, b, c\} = \{L(x, x)a, b, c\} - \{a, L(x, x)b, c\} + \{a, b, L(x, x)c\};$$

- (v) имеет место следующее равенство для всякого $x \in U$:

$$\|\{x, x, x\}\| = \|x\|^3.$$

Ненулевой элемент u из JB^* -тройки U называется *трипотентом*, если $u = \{u, u, u\}$. Элементы a и b называются *взаимно ортогональными* ($a \perp b$), если $\{abx\} = 0$ для любого $x \in U$. Обозначим через Q *квадратичный оператор* на U (см.: [27. §1]):

$$Q(x)y = \{x, y, x\} \text{ для } x, y \in U.$$

Пирсовские проекторы $P_k(u)$ ($k = 0, 1, 2$), соответствующие трипотенту u , определяются следующим образом:

$$P_2(u) = Q(u)^2, \quad P_1(u) = 2(L(u, u) - Q(u)^2), \quad P_0(u) = I - 2L(u, u) + Q(u)^2.$$

JB^* -тройка U , предсопряженное пространство U^* которого является банаховым пространством, называется *JBW^* -тройкой*.

Такие понятия, как ортогональность, регулярность и коллинеарность геометрических трипотентов, аналогичным образом определяются и в сопряженном пространстве Z^* слабо гранево симметричного пространства Z , а именно следующим образом.

Определение 3.4 [16. §2]. Пусть Z – нормированное пространство. Элементы $a, b \in Z^*$ называются *ортогональными*, если существует симметричная грань $F \subset Z_1$ такая, что либо

$$(i) \quad a \in \text{im} P_2(F)^* \text{ и } b \in \text{im} P_0(F)^*,$$

или

$$(ii) \quad a \in \text{im} P_0(F)^* \text{ и } b \in \text{im} P_2(F)^*.$$

В этом случае мы будем писать $a \diamond b$ и $b \diamond a$.

Определение 3.5 [18. Определение 2.1]. Пусть Z является *WFS-пространством*, и u, v – геометрические трипотенты. Говорят, что u *регулирует* v , если $u \in U_1(v)$ и $v \in U_2(u)$, обозначается $u \vdash v$. Мы скажем, что u и v являются *коллинеарными*, если $u \in U_1(v)$ и $v \in U_1(u)$, обозначается $u \top v$.

Теперь приведем еще одно утверждение, вытекающее из Предложения 3.1.

Следствие 3.6. Пусть Z является нейтральным *SFS-пространством*, и $u, v \in G\mathcal{U}$. Тогда для любых $\alpha, \beta \in T$ справедливы следующие соотношения:

$$(i) \quad u \diamond v \Leftrightarrow \alpha u \diamond \beta v;$$

(ii) $u \top v \Leftrightarrow \alpha u \top \beta v$;

(iii) $u \vdash v \Leftrightarrow \alpha u \vdash \beta v$.

Доказательство. (i) Если $u \diamond v$, то из [16. Лемма 2.5 (3), (4)] имеем $u \in U_0(v)$ и $v \in U_0(u)$. Тогда $\alpha u \in U_0(v) = U_0(\beta v)$ и $\beta v \in U_0(u) = U_0(\alpha u)$, следовательно, из [16. Лемма 2.5 (1), (3), (4)], вытекает, что $\alpha u \diamond \beta v$.

Обратное утверждение доказывается аналогично.

(ii) Если $u \top v$, т.е. $u \in U_1(v)$ и $v \in U_1(u)$, то $\alpha u \in U_1(v) = U_1(\beta v)$ и $\beta v \in U_1(u) = U_1(\alpha u)$, следовательно, $\alpha u \top \beta v$.

Аналогичным образом доказывается и обратное утверждение.

(iii) Если $u \vdash v$, т.е. $u \in U_1(v)$ и $v \in U_2(u)$, то $\alpha u \in U_1(v) = U_1(\beta v)$ и $\beta v \in U_2(u) = U_2(\alpha u)$, следовательно, $\alpha u \vdash \beta v$.

Обратное утверждение доказывается подобным образом. ■

Теперь приведем определение треугольника трипотентов в JBW^* -тройке (см.: [28]).

Определение 3.7 [28. С. 297]. Порядковая тройка трипотентов $(v, u, \tilde{v})$ называется *треугольником*, если $v \perp \tilde{v}$, $u \vdash v$, $u \vdash \tilde{v}$ и $\tilde{v} = Q(u)v$.

Поскольку в сопряженном пространстве Z^* слабо гранево симметричного пространства Z тройное произведение элементов не определено, то, чтобы понять значение равенства $\tilde{v} = Q(u)v = \{u, v, u\}$ из Определения 3.7, рассмотрим в JBW^* -тройке следующие равенства, вытекающие из взаимно равносильных формул $\tilde{v} = Q(u)v$ и $v = Q(u)\tilde{v}$:

$$P_2(u)\tilde{v} = Q(u)Q(u)\tilde{v} = Q(u)v = \tilde{v}.$$

Имея в виду это и тот факт, что аналогами Пирсовских проекторов являются соответствующие проекторы, сопряженные к геометрическим Пирсовским проекторам на WFS -пространстве Z , мы в пространстве Z^* вместо равенств $\tilde{v} = Q(u)v$ или $v = Q(u)\tilde{v}$ будем использовать равенства $P_2^*(u)v = v$ и $P_2^*(u)\tilde{v} = \tilde{v}$.

Предложение 3.8. Пусть Z – нейтральное сильно гранево симметричное пространство и $u, v \in G\mathcal{U}$. Тогда

$$P_2^*(u)v = v \Leftrightarrow v \in U_2(u).$$

Доказательство. $P_2^*(u)v = v \Rightarrow v \in U_2(u)$: Поскольку $P_2^*(u)v = v$, то для любого $f \in F_v$ имеем $1 = \langle v, f \rangle = \langle P_2^*(u)v, f \rangle = \langle v, P_2(u)f \rangle$, поэтому $P_2(u)f \in F_v$. Так как $\|P_2(u)f\| = \|f\|$, то из нейтральности пространства Z вытекает, что $P_2(u)f = f$, следовательно, $f \in \overline{sp}F_u$, поэтому $F_v \subseteq \overline{sp}F_u = Z_2(u)$. Тогда из [17. Теорема 2.3] имеем $v \in U_2(u)$.

$v \in U_2(u) \Rightarrow P_2^*(u)v = v$: Из [17. Следствие 3.4 (b) (i)] имеем $P_2(u)P_2(v) = P_2(v)$. Поскольку $v \in U_2(u)$, то по [17. Теорема 3.3] получаем, что геометрические трипотенты u и v являются взаимно совместимыми, следовательно, $P_2^*(u)P_2^*(v) = P_2^*(v)$. Так

как $F_v \subset F_v$, то из [17. Теорема 4.2] имеем $P_2^*(v)v = v$. Таким образом, $P_2^*(u)v = P_2^*(u)P_2^*(v)v = P_2^*(v)v = v$. ■

Из данного предложения непосредственно вытекает, что

$$u \in U_1(v) \text{ и } P_2^*(u)v = v \Leftrightarrow u \vdash v.$$

Теперь дадим определение аналога треугольника трипотентов в сопряженном пространстве нейтрального SFS-пространства.

Определение 3.9. В сопряженном пространстве Z^* нейтрального SFS-пространства Z упорядоченную тройку геометрических трипотентов $(v, u, \tilde{v})$ назовем *геометрическим треугольником*, если $v \diamond \tilde{v}$, $u \vdash v$, $u \vdash \tilde{v}$.

Имеет место следующее

Предложение 3.10. Пусть Z является нейтральным SFS-пространством и $u, v, \tilde{v} \in G\mathcal{U}$. Тройка $(v, u, \tilde{v})$ является геометрическим треугольником тогда и только тогда, когда тройка $(\alpha v, \beta u, \gamma \tilde{v})$ является геометрическим треугольником при всех $\alpha, \beta, \gamma \in T$.

Доказательство. Если тройка $(v, u, \tilde{v})$ является геометрическим треугольником, то из Следствия 3.6, (i), (iii) вытекает, что $\alpha v \diamond \gamma \tilde{v}$, $\beta u \vdash \alpha v$ и $\beta u \vdash \gamma \tilde{v}$, следовательно, $(\alpha v, \beta u, \gamma \tilde{v})$ является геометрическим треугольником.

Обратное утверждение доказывается аналогично. ■

Теперь рассмотрим определение геометрического четырехугольника трипотентов в сопряженном пространстве слабо граниво симметричного пространства (см.: [18]).

Определение 3.11 [18. Определение 4.14]. Порядковая четверка (u_1, u_2, u_3, u_4) минимальных геометрических трипотентов называется *геометрическим четырехугольником*, если

$$u_1 \diamond u_3, \quad u_2 \diamond u_4, \quad u_1 \top u_2, \quad u_2 \top u_3, \quad u_3 \top u_4, \quad u_4 \top u_1,$$

и $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 u_i$ является минимальным геометрическим трипотентом. Порядковая тройка (u_1, u_2, u_3) минимальных геометрических трипотентов называется *геометрическим предчетырёхугольником*, если $u_1 \diamond u_3$, $u_1 \top u_2$, $u_2 \top u_3$.

Предложение 3.12. Пусть Z является нейтральным SFS-пространством и $u_1, u_2, u_3, u_4 \in M$. Тогда

(i) (u_1, u_2, u_3, u_4) является геометрическим четырехугольником тогда и только тогда, когда $(\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3, \alpha u_4)$ является геометрическим четырехугольником, где $\alpha \in T$;

(ii) (u_1, u_2, u_3) является геометрическим предчетырёхугольником тогда и только тогда, когда $(\alpha_1 u_1, \alpha_2 u_2, \alpha_3 u_3)$ является геометрическим предчетырёхугольником, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in T$.

Доказательство. (i) Если (u_1, u_2, u_3, u_4) является геометрическим четырехугольником, то из Следствия 3.6 вытекает, что $\alpha u_1 \diamond \alpha u_3$, $\alpha u_2 \diamond \alpha u_4$, $\alpha u_1 \top \alpha u_2$,

$\alpha u_2 \top \alpha u_3$, $\alpha u_3 \top \alpha u_4$, $\alpha u_4 \top \alpha u_1$. Кроме того, поскольку $\alpha \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 u_i \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \alpha u_i$ и $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 u_i$ являются минимальным геометрическими трипотентами, то из Следствия 3.2, (vii) имеем, что $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \alpha u_i$ является минимальным геометрическим трипотентом, следовательно, $(\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3, \alpha u_4)$ является геометрическим четырехугольником.

Обратное утверждение доказывается аналогично.

(ii) Если (u_1, u_2, u_3) является геометрическим предчетыреугольником, то из Следствия 3.6, (i), (ii) вытекает, что $\alpha_1 u_1 \diamond \alpha_3 u_3$, $\alpha_1 u_1 \top \alpha_2 u_2$, $\alpha_2 u_2 \top \alpha_3 u_3$, следовательно, $(\alpha_1 u_1, \alpha_2 u_2, \alpha_3 u_3)$ является геометрическим предчетыреугольником.

Аналогично доказывается и обратное утверждение. ■

Предложение 3.13. Пусть Z является нейтральным комплексным SFS-пространством и $u, v \in G\mathcal{U}$. Если существует $\alpha \in T$ такое, что $\alpha u \leq v$, то

- (a) $v = \alpha u + P_0^*(u)v$;
- (b) $P_k^*(u)v = P_k^*(\alpha u)v$, где $k \in \{0, 1, 2\}$;
- (c) $S_u^* v = S_{\alpha u}^* v = v$.

Доказательство. (a) Из [21. Лемма 4.5] имеем

$$\alpha u \leq v \Rightarrow \frac{1}{\alpha} F_u = F_{\alpha u} \subset F_v \Rightarrow F_u \subset \alpha F_v = F_{\frac{1}{\alpha} v} \Rightarrow u \leq \frac{1}{\alpha} v.$$

Тогда по [16. Лемма 2.8] получим

$$\frac{1}{\alpha} v = u + P_0^*(u) \frac{1}{\alpha} v, \text{ т.е. } v = \alpha u + P_0(u)v.$$

(b) Сразу следует из Следствия 3.2, (i).

(c) Поскольку $P_1^*(u)v = P_1^*(\alpha u)v$, то $(I - S_u^*)v = (I - S_{\alpha u}^*)v$, следовательно,

$$S_u^* v = S_{\alpha u}^* v.$$

Из $\alpha u \leq v$ имеем $S_{\alpha u}^* v = v$. ■

Напомним, что выпуклое множество называется *строго выпуклым*, если все точки его границы являются выставленными по норме.

Нормированное пространство Z называется *атомическим*, если каждая симметричная грань F единичного шара Z_1 содержит экстремальную точку.

Говорят, что слабо гранево симметричное пространство обладает свойством (PE), если каждая экстремальная точка единичного шара является выставленной по норме точкой.

Теорема 3.14. Пусть Z является нейтральным SFS-пространством и $u \in M$. Тогда $Z_2(u)$ является линейно изометричным действительному или комплексному Гильбертовому пространству.

Перед тем как доказать данную теорему, докажем для начала следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3.15. Пусть Z является нейтральным SFS-пространством и $u \in M$. Тогда единичный шар $(Z_2(u))_1$ подпространства $Z_2(u)$ является строго выпуклым.

Доказательство. Из [19. Предложение 2.4] вытекает, что F_u является выставленной по норме точкой. Пусть $F_u = \{f_u\}$, следовательно,

$$Z_2(u) = \{\lambda f_u : \text{для всех } \lambda \in K\}.$$

Тогда для любого $f \in \partial(Z_2(u))_1$ имеем, что $f = \alpha_f f_u$ для некоторого $\alpha_f \in K$ с $|\alpha_f| = 1$. Поскольку из Следствия 2, (vii) вытекает, что геометрический трипотент $\bar{\alpha}_f u$ является минимальным и $f(\bar{\alpha}_f u) = \bar{\alpha}_f f(u) = \bar{\alpha}_f \alpha_f f_u(u) = 1$, то из [19. Предложение 2.4] получим, что $\{f\} = F_{\bar{\alpha}_f u}$, т.е. $\{f\}$ является выставленной по норме точкой единичного шара Z_1 . Из [19. Предложение 2.1] имеем, что $\bar{\alpha}_f u \in G\mathfrak{U}_{Z_2(u)}$. Поскольку $U_2(u) = U_2(\bar{\alpha}_f u)$, то $\bar{\alpha}_f u \in M_{Z_2(u)}$, т.е. $\{f\}$ является выставленной по норме точкой единичного шара $(Z_2(u))_1$, следовательно, $(Z_2(u))_1$ является строго выпуклым. ■

Доказательство теоремы. Из [17. Теорема 3.6, Предложение 4.1] вытекает, что $Z_2(u)$ является нейтральным SFS-пространством. А из строго выпуклости $(Z_2(u))_1$ сразу вытекает, что $Z_2(u)$ является атомическим с условием (PE). Более того, $Z_2(u)$ является пространством ранга 1. Действительно, предположим обратное. Пусть существуют такие элементы $f, g \in Z_2(u)$, что $f \diamond g$. Тогда, как было показано в доказательстве Леммы 3.15, существуют такие $\alpha, \beta \in K$ с $|\alpha| = |\beta| = 1$, что $\left\{ \frac{f}{\|f\|} \right\} = F_{\alpha u}$, $\left\{ \frac{g}{\|g\|} \right\} = F_{\beta u}$ и $F_{\alpha u} \diamond F_{\beta u}$, следовательно, из [16. Лемма 2.5] имеем $\alpha u \diamond \beta u$. Тогда из Следствия 3.6, (i) вытекает, что $u \diamond u$. Это противоречие, т.е. $Z_2(u)$ является пространством ранга 1.

Таким образом, $Z_2(u)$ является нейтральным атомическим SFS-пространством ранга 1 с условием (PE). Тогда из [19. Следствие 2.11] вытекает, что $Z_2(u)$ является линейно изометричным действительному или комплексному Гильбертовому пространству.

Список источников

1. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Тодоров Н.Т. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М.: Наука, 1969.
2. Браттели У., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. М.: Мир, 1982.
3. Эмх. Ж. Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля. М.: Мир, 2009.
4. Jordan P., von Neumann J., Wigner E. On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism // Ann. of Math. 1934. V. 35 (1). P. 29–64. doi: 10.2307/1968117
5. Сигал А. Математические проблемы релятивистской физики. М.: Мир, 1968.

6. Аюпов Ш.А., Ядгоров Н.Ж. Спектральные выпуклые множества в конечномерных пространствах // Известия АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1989. № 3. С. 3–7.
7. Аюпов Ш.А., Ядгоров Н.Ж. Геометрия пространства состояний модулярных йордановых алгебр // Известия Российской академии наук. Сер. математическая. 1993. Т. 57 (6). С. 199–211.
8. Аюпов Ш.А., Ядгоров Н.Ж. Свойства спектральных выпуклых множеств // Доклады АН УзССР. 1989. № 7. С. 3–4.
9. Ajupov Sh., Iochum B., Yadgorov N. Symmetry versus facial homogeneity for self-dual cones // Linear Algebra and its Applications. 1990. V. 142. P. 83–89. doi: 10.1016/0024-3795(90)90257-D
10. Аюпов Ш.А., Иокум В., Ядгоров Н.Ж. Геометрия пространств состояний конечномерных йордановых алгебр // Известия АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1990. № 3. С. 19–22.
11. Alfsen E.M., Hanche-Olsen H., Shultz F.W. Space spaces of C^* -algebras // Acta Math. 1980. V. 144. P. 267–305. doi: 10.1007/BF02392126
12. Alfsen E.M., Shultz F.W. On non-commutative spectral theory and Jordan algebras // Proc. London Math. Soc. 1979. V. s3-38 (3). P. 497–516. doi: 10.1112/plms/s3-38.3.497
13. Alfsen E.M., Shultz F.W. State Spaces of Jordan algebras // Acta Math. 1978. V. 140. P. 155–190. doi: 10.1007/BF02392307
14. Araki H. On the characterization of the state space of quantum mechanics // Commun. Math. Physics. 1980. V. 75. P. 1–24. doi: 10.1007/BF01962588
15. Iochum B., Shultz F.W. Normal state spaces of Jordan and von Neumann algebras // Journal of Functional Analysis. 1983. V. 50 (3). P. 317–328. doi: 10.1016/0022-1236(83)90008-3
16. Friedman Y., Russo B. A geometric spectral theorem // The Quarterly Journal of Mathematics. 1986. V. 37 (3). P. 263–277. doi: 10.1093/qmath/37.3.263
17. Friedman Y., Russo B. Affine structure of facially symmetric spaces // Mathematical Proc. of the Cambridge Philosophical Society. 1989. V. 106 (1). P. 107–124. doi: 10.1017/S030500410006802X
18. Friedman Y., Russo B. Classification of atomic facially symmetric spaces // Canadian Journal of Mathematics. 1993. V. 45 (1). P. 33–87. doi: 10.4153/CJM-1993-004-0
19. Friedman Y., Russo B. Geometry of the Dual ball of the Spin Factor // Proc. Lon. Math. Soc. 1992. V. s3-65 (1). P. 142–174. doi: 10.1112/plms/s3-65.1.142
20. Friedman Y., Russo B. Some affine geometric aspects of operator algebras // Pacific Journal of Mathematics. 1989. V. 137 (1). P. 123–144. doi: 10.2140/pjm.1989.137.123
21. Ibragimov M. Geometric properties of geometric tripotents and split faces in neutral SFS-space // Science and Education in Karakalpakstan. 2023. № 2/2. P. 43–49.
22. Ибрагимов М.М., Кудайбергенов К.К. Геометрическое описание L_1 -пространств // Известия вузов. Математика. 2013. № 9. С. 21–27.
23. Ибрагимов М.М., Кудайбергенов К.К., Тлеумуратов С.Ж., Сейпуллаев Ж.Х. Геометрическое описание предсопряженного пространства к атомической коммутативной алгебре фон Неймана // Математические заметки. 2018. № 93 (5). С. 728–735. doi: 10.4213/mzm9314
24. Ibragimov M.M., Tleumuratov S.J., Seypullaev J.X. Some geometric properties of a strongly facially symmetric space // Methods of functional analysis and topology. 2005. V. 11 (3). P. 234–238 ().
25. Yadgorov N.Dj., Ibragimov M.M., Kudaybergenov K.K. Geometric characterization of L_1 -spaces // Studia Mathematica. 2013. V. 219. P. 97–107. doi: 10.4064/sm219-2-1
26. Seypullaev J.X. Finite strongly facially symmetric spaces // Uzb. Math. Journal. 2020. № 4. P. 140–148. doi: 10.29229/uzmj.2020-4-15
27. Friedman Y., Russo B. Structure of the predual of a JBW^* -triple // Journal für die Reine und Angewandte Mathematik. 1985. Bd. 356. S. 67–89. doi: 10.1515/crll.1985.356.67
28. Dang T., Friedmann Y. Classification of JBW^* -triple factors and applications // Mathematica Scandinavica. 1987. V. 61. P. 292–330. doi: 10.7146/math.scand.a-12206

References

1. Bogolubov N.N., Logunov A.A., Todorov I.T. (1969) *Osnovy aksiomaticheskogo podkhoda v kvantovoy teorii polya* [Fundamentals of the axiomatic approach to quantum field theory]. Moscow: Nauka.
2. Bratelli O., Robinson D. (1987) *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1. C^* - and W^* -Algebras. Symmetry Groups. Decomposition of States*. Berlin: Springer.
3. Emch G.G. (2009) *Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory*. Mineola: Dover Publications.
4. Jordan P., von Neumann J., Wigner E. (1934) On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism. *Annals of Mathematics*. 35(1). pp. 29–64. DOI: 10.2307/1968117.
5. Segal I.E. (1963) *Mathematical Problems of Relativistic Physics*. American Mathematical Society.
6. Ayupov Sh.A., Yadgorov N.Zh. (1989) Spektral'nyye vypuklyye mnozhestva v konechnomernyykh prostranstvakh [Spectral convex sets in finite-dimensional spaces]. *Izvestiya Akademii Nauk UzSSR. Seriya Fiziko-Matematicheskikh Nauk*. 3. pp. 3–7.
7. Ayupov Sh.A., Yadgorov N.Zh. (1994) Geometry of the state space of modular Jordan algebras. *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics*. 43(3). pp. 581–592. DOI: 10.1070/IM1994v043n03ABEH001581.
8. Ayupov Sh.A., Yadgorov N.Zh. (1989) Svoystva spektral'nykh vypuklykh mnozhestv [Properties of spectral convex sets]. *Doklady Akademii Nauk UzSSR*. 7. pp. 3–4.
9. Ajupov Sh., Iochum B., Yadgorov N. (1990) Symmetry versus facial homogeneity for self-dual cones. *Linear Algebra and Its Applications*. 142. pp. 83–89. DOI: 10.1016/0024-3795(90)90257-D.
10. Ayupov Sh.A., Iochum B., Yadgorov N.Zh. (1990) Geometriya prostranstv sostoyaniy konechnomernyykh yordanovyykh algebr [Geometry of spaces of states of finite-dimensional Jordan algebras]. *Izvestiya Akademii Nauk UzSSR. Seriya Fiziko-Matematicheskikh Nauk*. 3. pp. 19–22.
11. Alfsen E.M., Hanche-Olsen H., Shultz F.W. (1980) State spaces of C^* -algebras. *Acta Mathematica*. 144. pp. 267–305. DOI: 10.1007/BF02392126.
12. Alfsen E.M., Shultz F.W. (1979) On non-commutative spectral theory and Jordan algebras. *Proceedings of the London Mathematical Society*. s3-38(3). pp. 497–516. DOI: 10.1112/plms/s3-38.3.497.
13. Alfsen E.M., Shultz F.W. (1978) State spaces of Jordan algebras. *Acta Mathematica*. 140. pp. 155–190. DOI:10.1007/BF02392307.
14. Araki H. (1980) On the characterization of the state space of quantum mechanics. *Communications in Mathematical Physics*. 75. pp. 1–24. DOI:10.1007/BF01962588.
15. Iochum B., Shultz F.W. (1983) Normal state spaces of Jordan and von Neumann algebras. *Journal of Functional Analysis*. 50(3). pp. 317–328. DOI: 10.1016/0022-1236(83)90008-3.
16. Friedman Y., Russo B. (1986) A geometric spectral theorem. *Quarterly Journal of Mathematics*. 37(3). pp. 263–277. DOI:10.1093/qmath/37.3.263.
17. Friedman Y., Russo B. (1989) Affine structure of facially symmetric spaces. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 106(1). pp. 107–124. DOI: 10.1017/S030500410006802X.
18. Friedman Y., Russo B. (1993) Classification of atomic facially symmetric spaces. *Canadian Journal of Mathematics*. 45(1). pp. 33–87. DOI: 10.4153/CJM-1993-004-0.
19. Friedman Y., Russo B. (1992) Geometry of the dual ball of the spin factor. *Proceedings of the London Mathematical Society*. s3-65(1). pp. 142–174. DOI:10.1112/plms/s3-65.1.142.
20. Friedman Y., Russo B. (1989) Some affine geometric aspects of operator algebras. *Pacific Journal of Mathematics*. 137(1). pp. 123–144. DOI: 10.2140/pjm.1989.137.123.
21. Ibragimov M. (2023) Geometric properties of geometric tripotents and split faces in neutral SFS-space. *Science and Education in Karakalpakstan*. 2/2. pp. 43–49.

22. Ibragimov M.M., Kudaibergenov K.K. (2013) Geometric description of L_1 -spaces. *Russian Mathematics*. 57. pp. 16–21. DOI: 10.3103/S1066369X1309003X.
23. Ibragimov M.M., Kudaibergenov K.K., Tleumuratov S.Z. et al. (2013) Geometric description of the preduals of atomic commutative von Neumann algebras. *Mathematical Notes*. 93. pp. 715–721. DOI: 10.1134/S0001434613050076.
24. Ibragimov M.M., Tleumuratov S.J., Seypullaev J.X. (2005) Some geometric properties of a strongly facially symmetric space. *Methods of functional analysis and topology*. 11(3). pp. 234–238.
25. Yadgorov N.Dj., Ibragimov M.M., Kudaibergenov K.K. (2013) Geometric characterization of L_1 -spaces. *Studia Mathematica*. 219. pp. 97–107. DOI: 10.4064/sm219-2-1.
26. Seypullaev J.X. (2020) Finite strongly facially symmetric spaces. *Uzbek Mathematical Journal*. 4. pp. 140–148. DOI: 10.29229/uzmj.2020-4-15.
27. Friedman Y., Russo B. (1985) Structure of the predual of a JBW*-triple. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 1985(356). pp. 67–89. DOI: 10.1515/crll.1985.356.67.
28. Dang T., Friedmann Y. (1987) Classification of JBW*-triple factors and applications. *Mathematica Scandinavica*. 61. pp. 292–330. DOI: 10.7146/math.scand.a-12206.

Сведения об авторах:

Ибрагимов Мухтар Мамутович – кандидат физико-математических наук, доцент математического факультета Каракалпакского государственного университета им. Бердаха (Нукус, Узбекистан). E-mail: m.ibragimov1909@gmail.com.

Арзиев Аллабай Джалгасович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (Ташкент, Узбекистан). E-mail: allabayarziev@inbox.ru

Information about the authors:

Ibragimov Mukhtar M. (PhD, Associate Professor, Faculty of Mathematics, Karakalpak State University named after Berdakh, Nukus, Uzbekistan). E-mail: m.ibragimov1909@gmail.com.

Arziev Allabay D. (PhD, Senior Researcher, V.I. Romanovsky Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences. Tashkent. Uzbekistan). E-mail: allabayarziev@inbox.ru.

The article was submitted 08.07.2024; accepted for publication 01.08.2025

Статья поступила в редакцию 08.07.2024; принята к публикации 01.08.2025