Научная статья
УДК 517.982.3 MSC: 2020: 46E35; 35J30
doi: 10.17223/19988621/96/3

Представление линейного функционала в гильбертовом пространстве Соболева

Игорь Витальевич Корытов

Томский политехнический университет, Томск, Россия, korytov@tpu.ru

Аннотация. Введена оригинальная норма для гильбертова пространства Соболева. Установлено представление линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве с введенной нормой. Показано, что для финитного функционала представляющая функция выражается через свертку функционала с фундаментальным решением дифференциального оператора, связанного со структурой нормы рассматриваемого пространства.
Ключевые слова: гильбертово пространство, пространство Соболева, линейный финитный функционал, представление функционала

Для цитирования: Корытов И.В. Представление линейного функционала в гильбертовом пространстве Соболева // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 96. С. 28–41. doi: 10.17223/19988621/96/3

Original article

Representation of a linear functional in a Hilbert Sobolev space

Igor V. Korytov

Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation, korytov@tpu.ru

Abstract. In this paper, a representation of a linear functional in the Hilbert case of a Sobolev space is obtained. The space is normed by expression that is introduced for the first time and that has not been considered anywhere before.
First, the intermediate problems of substantiating the legality of the norm, the inner product generating the norm, and the metrics generated with the norm are solved. As necessary, the proof of concomitant inequalities and identities is given.
Second, a finite linear functional is considered. The finiteness makes it possible to establish explicit structural elements included in the representation. Solution of the problem of finding a representing function belonging to the same space that a test function belongs to is based on the property of uniform convexity of a unit sphere using a limit element matching the functional. Such a way leads to a partial differential equation in generalized functions. The operator of the equation is linear and includes constant coefficients, which makes it possible to find a solution as a convolution of its fundamental solution and its right-hand side term. It is shown that the solution exists and is the required function representing the functional.
Keywords: Hilbert space, Sobolev space, linear finite functional, functional representation

For citation: Korytov, I.V. (2025) Representation of a linear functional in a Hilbert Sobolev space. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 96. pp. 28–41. doi: 10.17223/19988621/96/3

Введение

Источником материала для данной работы являются работы С.Л. Соболева по оценке погрешности кубатурных формул – формул численного интегрирования функций нескольких переменных. Погрешность приближенного вычисления интеграла рассматривается как линейный функционал над банаховыми пространствами функций, от которых интеграл приближенно вычисляется. Оценивающей константой в произведении с нормой функции выступает норма функционала в сопряженном пространстве. Одна из промежуточных задач на пути нахождения нормы функционала – нахождение его представления. Из теоремы Рисса известно, что в гильбертовом пространстве существует элемент, представляющий данный функционал в составе скалярного произведения. Помимо подтверждения данного факта для пространства Соболева с конкретной нормой, рассмотрим путь его нахождения.

С.Л. Соболев указывал способ нормирования пространств типа $W_p^{(m)}$ через проекционные операторы [1, 2] как наиболее генерализованный путь. В конкретных ситуациях чаще всего практикуется включение самой функции и частных производных наивысшего заданного порядка m. Например, В.Г. Мазья [3] применяет нормы в виде:

$$\left\| f \left| W_p^m(\Omega) \right\| = \left[\int_\Omega \left(\sum_{|\alpha|=m} \left| D^\alpha f(x) \right|^2 \right)^{p/2} dx \right]^{1/p} + \left[\int_\Omega \left| f(x) \right|^p dx \right]^{1/p}\right.$$

и

$$\left\| f \left| V_p^m(\Omega) \right\| = \sum_{k=0}^{m} \left[\int_\Omega \left(\sum_{|\alpha|=k} \left| D^\alpha f(x) \right|^2 \right)^{p/2} dx \right]^{1/p}\right. .$$

М.С. Агранович [4], отмечая, что в подынтегральных функциях можно оставить только $\alpha = (0, ..., 0)$ и $\alpha = (m, 0, ..., 0), ..., (0, ..., 0, m)$, приводит структуру нормы без конкретизации коэффициентов при каждой из производных:

$$\left\| f \left| W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n) \right\| = \sum_{|\alpha|\le m} \left[\int_{\mathbf{R}_n} \left| D^\alpha f(x) \right|^p dx \right]^{1/p}\right. .$$

Что касается пространства Соболева с гильбертовым показателем, то подобным же образом без конкретизации коэффициентов вводит норму М.А. Шубин [5]:

$$\left\| f \left| H^{(m)}(\Omega) \right\| = \sum_{|\alpha|\le m} \left[\int_\Omega \left| D^\alpha f(x) \right|^2 dx \right]^{1/2}\right. .$$

Здесь функции заданы на Ω – открытом подмножестве $\mathbf{R}^n$, а само пространство, обозначенное $H^{(m)}$, определяется через замыкание пространства D финитных бесконечно дифференцируемых на Ω функций.

Наиболее близкий к нашему способ нормирования применен в работе Ц.Б. Шойнжурова [6]

$$\left\| f \left| W_2^{(m)}\left(\mathbf{R}^n\right)\right\| = \left[\int\limits_{\mathbf{R}^n} \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} a_\alpha \left(D^\alpha f\left(x\right)\right)^2 dx\right]^{1/2}.\right.$$

Здесь присутствуют числовые коэффициенты a_α, зависящие от мультииндекса.

Вышеперечисленные способы не исчерпывают весь список нормировок пространства Соболева. Отметим, что при нормировании обязательным является включение функции и всех частных производных наивысшего заданного порядка в выражение нормы. Включение производных промежуточных порядков, а также коэффициентов при них остается произвольным.

Представление функционала непосредственно связано с видом нормы и выводится через порожденное этой структурой дифференциальное уравнение. Для гильбертовых пространств такие уравнения относятся к эллиптическому типу, и их дифференциальные операторы могут быть тем или иным образом выражены через оператор Лапласа.

Уравнение с оператором Лапласа вида $\Delta^m u = l$, которое использовал С.Л. Соболев для получения представления функционала в пространстве $L_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$, было названо им полигармоническим. В работе Ц.Б. Шойнжурова [6] уравнение с оператором Лапласа $\sum_{k=0}^{m} \Delta^k u = l$, содержащее все производные четных промежуточных порядков от 0 до $2m$, называлось m-метагармоническим. Такими наименованиями мы будем пользоваться в дальнейшем. Отметим, что в Математической энциклопедии под редакцией И.М. Виноградова[1] термины «полигармоническая», «метагармоническая» и «гипергармоническая» употребляются как синонимы по отношению к функции, удовлетворяющей уравнению вида $\Delta^m u = l$. Решение однородного m-метагармонического уравнения $\sum_{k=0}^{m} \Delta^k u = 0$ является нулевым, в то время как решение однородного полигармонического уравнения $\Delta^m u = 0$ отлично от нуля. Первое из этих уравнений естественным образом возникает при решении задач с функциями из пространств типа $W_2^{(m)}$, а второе – $L_2^{(m)}$.

Фундаментальные решения эллиптических операторов входят в состав представлений функционалов. Их аналитические выражения и асимптотические оценки сильно зависят от соотношений между размерностью пространства аргумента и порядком производных, от четности или нечетности некоторых выражений, их содержащих.

1. Скалярное произведение и норма с биномиальными коэффициентами

Пространство Соболева функций, суммируемых в квадрате, у которых частные производные всех порядков до m включительно также суммируемы в квадрате, строится как замыкание пространства $S(\mathbf{R}^n)$ бесконечно дифференцируемых функций, убывающих на бесконечности быстрее любой отрицательной степени аргумента, по некоторой норме. Иными словами, $f \in W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$, если существуют

[1] Математическая энциклопедия / гл. ред. И.М. Виноградов. М., 1977. Т. 4. 1215 с.

обобщенные производные $D^\alpha f = \dfrac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{\alpha_n}}$ всех порядков $|\alpha| \le m$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, и каждая частная производная суммируема в квадрате, т.е. $D^\alpha f \in L_2(\mathbf{R}^n)$.

Структура нормы пространства $L_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$, введенной С.Л. Соболевым в [1], с точки зрения принадлежности частных производных наивысшего порядка пространству $L_2(\mathbf{R}^n)$ следующая:

$$\left\| f \middle| L_2^{(m)}\left(\mathbf{R}^n\right) \right\|^2 = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \left\| D^\alpha f \middle| L_2\left(\mathbf{R}^n\right) \right\|^2 = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \int_{\mathbf{R}^n} \left(D^\alpha f\right)^2 dx .$$

Данную норму можно рассматривать как сумму с единичными коэффициентами, тогда как во вводимой нами норме будут присутствовать коэффициенты биномиальные. Кроме того, учтем, что $L_2^{(m)} = W_2^{(m)}/P_{m-1}$ является факторпространством пространства $W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$ по множеству многочленов степени не выше $m - 1$.

Покажем, что вводимая нами норма генерирует гильбертово пространство. Все рассматриваемые в последующих разделах утверждения справедливы для пространства $S(\mathbf{R}^n)$ и переносятся на пространство $W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$ путем предельного перехода. С другой стороны, можно доказать справедливость нижестоящих утверждений на основе свойства линейности интеграла Лебега. И тот и другой путь конструирования пространства $W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$ приводит к одному и тому же запасу функций [1].

Рассматривая пространство $W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$ как гильбертово, введем скалярное произведение. Выражение

$$\left(f, g\right) = \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f\, D^\alpha g \, dx \qquad (1)$$

удовлетворяет свойствам скалярного произведения.

Предложение 1. Интеграл (1) является скалярным произведением в пространстве $W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$, и для любой пары функций $f, g \in W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$ справедливы утверждения

1) $(f, g) = (g, f)$;
2) $(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$;
3) $(\lambda f, g) = \lambda (f, g)$;
4) $(f, f) > 0$, $(f, f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

Последнее свойство определяет скалярный квадрат. Извлекая из него квадратный корень, получаем выражение

$$\sqrt{\left(f, f\right)} = \left(\int_{\mathbf{R}^n} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \left(D^\alpha f\right)^2 dx \right)^{1/2},$$

которое примем за норму в рассматриваемом пространстве.

Предложение 2 (неравенство Коши–Буняковского). Для скалярного произведения (1) справедливо неравенство

$$\left|\left(f, g\right)\right| \le \left\| f \middle| W_2^{(m)}\left(\mathbf{R}^n\right) \right\| \cdot \left\| g \middle| W_2^{(m)}\left(\mathbf{R}^n\right) \right\| .$$

Скалярное произведение (1), введенное в пространстве $W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$, порождает норму

$$\left\| f \middle| W_2^{(m)}\left(\mathbf{R}^n\right) \right\| = \left(\int_{\mathbf{R}^n} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \left(D^\alpha f\right)^2 dx \right)^{1/2} \qquad (2)$$

Предложение 3. Для любой функции $f \in W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$ справедливы утверждения:
1) $\|f\,|W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)\| \geq 0$, $\|f\,|W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$;
2) $\|f + g\,|W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)\| \leq \|f\,|W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)\| + \|g\,|W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)\|$, $\forall f, g \in W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$;
3) $\|\lambda f\,|W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)\| = |\lambda|\,\|f\,|W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)\|$, $\forall\,\lambda \in \mathbf{R}$.
Норма (2) порождает метрику

$$\rho(f,g) = \left\| f - g \middle| W_2^{(m)}\left(\mathbf{R}^n\right) \right\| = \left(\int\limits_{\mathbf{R}^n} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \left(D^\alpha\left(f-g\right)\right)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Предложение 4. Для любых $f, g \in W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$ справедливы утверждения:
1) $\rho\,(f, g) > 0$, $\rho\,(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g$;
2) $\rho\,(f, g) = \rho\,(g, f)$;
3) $\rho\,(f, g) \leq \rho\,(f, h) + \rho\,(h, g)$, $\forall\, f, g, h \in W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$.

Тождество параллелограмма представляет собой пограничный случай неравенств Кларксона между утверждениями для показателя суммируемости в нижеследующих интервалах [7].

Предложение 5. При $1 < p \leq 2$ справедливо первое неравенство Кларксона

$$\left\| \frac{f+g}{2} \middle| W_p^{(m)}\left(\mathbf{R}^n\right) \right\|^p + \left\| \frac{f-g}{2} \middle| W_p^{(m)}\left(\mathbf{R}^n\right) \right\|^p \leq \frac{1}{2}\left(\left\| f \middle| W_p^{(m)}\left(\mathbf{R}^n\right) \right\|^p + \left\| g \middle| W_p^{(m)}\left(\mathbf{R}^n\right) \right\|^p \right).$$

Предложение 6. При $2 \leq p < \infty$ справедливо второе неравенство Кларксона

$$\left\| \frac{f+g}{2} \middle| W_p^{(m)}\left(\mathbf{R}^n\right) \right\|^q + \left\| \frac{f-g}{2} \middle| W_p^{(m)}\left(\mathbf{R}^n\right) \right\|^q \leq \left(\frac{1}{2}\left\| f \middle| W_p^{(m)}\left(\mathbf{R}^n\right) \right\|^p + \frac{1}{2}\left\| g \middle| W_p^{(m)}\left(\mathbf{R}^n\right) \right\|^p \right)^{q-1}.$$

Здесь q – сопряженный показатель, связанный с показателем p соотношением $1/p + 1/q = 1$. Для гильбертова пространства $p = q = 2$, что и превращает каждое из неравенств в тождество параллелограмма. Неравенства позволяют утверждать, что середина всякой хорды лежит существенно в глубине единичного шара. Это свойство называется равномерной выпуклостью единичного шара [2]. Геометрически равномерная выпуклость означает отсутствие спрямленных участков на поверхности единичного шара.

Предложение 7. Для любых двух элементов f и g гильбертова пространства $W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$ с нормой (2) выполняется равенство

$$\left\| f+g \middle| W_2^{(m)}\left(\mathbf{R}^n\right) \right\|^2 + \left\| f-g \middle| W_2^{(m)}\left(\mathbf{R}^n\right) \right\|^2 = 2\left(\left\| f \middle| W_2^{(m)}\left(\mathbf{R}^n\right) \right\|^2 + \left\| g \middle| W_2^{(m)}\left(\mathbf{R}^n\right) \right\|^2 \right).$$

2. Вариационная задача

Рассмотрим линейный непрерывный функционал $l(f)$ на функциях из пространства $f \in W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$. Далее в выкладках для нормы функции f будем применять краткое обозначение $\|f|W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)\| = \|f\|$.

Равномерная выпуклость единичной сферы пространства $W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$, подтвержденная выше, дает основание для постановки задачи о представлении функционала. Именно, если взять предельный элемент $f_0 \in W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$, для которого $\|f_0\| = 1$, $l(f_0) = \sup |l(f)|$ при $\|f\|=1$, и для любой $f \in W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$ построить функцию одного аргумента $F(\lambda)$

$$F(\lambda) = l\left(\frac{f_0 + \lambda f}{\|f_0 + \lambda f\|} \right), \tag{3}$$

то при $\lambda = 0$

$$F(0) = l\left(\frac{f_0}{\|f_0\|}\right) = l(f_0) = \sup_{\|f\|=1}|l(f)| = \max_{\lambda} l\left(\frac{f_0 + \lambda f}{\|f_0 + \lambda f\|}\right). \tag{4}$$

Иными словами, начало и конец цепочки равенств (4) представляет условие экстремума функции одной переменной. Значение $\lambda = 0$ представляет собственно критическую точку.

Найдем производную составленной функции (3) по λ. Норма является константой по отношению к функционалу, поэтому

$$F'(\lambda) = l\left(\frac{f_0 + \lambda f}{\|f_0 + \lambda f\|}\right)' = \left(\frac{l(f_0 + \lambda f)}{\|f_0 + \lambda f\|}\right)'.$$

Далее выполняем действия, как с производной частного:

$$F'(\lambda) = \frac{\left(l(f_0 + \lambda f)\right)'\|f_0 + \lambda f\| - l(f_0 + \lambda f)\|f_0 + \lambda f\|'}{\|f_0 + \lambda f\|^2}. \tag{5}$$

Взятие производной нормы требует обоснования. Вначале выполним формальное дифференцирование:

$$\begin{aligned}
\|f_0 + \lambda f\|' &= \left(\left(\int_{\mathbf{R}^n}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}\left(D^\alpha(f_0 + \lambda f)\right)^2 dx\right)^{1/2}\right)' = \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbf{R}^n}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}\left(D^\alpha(f_0 + \lambda f)\right)^2 dx\right)^{-1/2} \times \\
&\times\left(\int_{\mathbf{R}^n}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}\left(D^\alpha(f_0 + \lambda f)\right)^2 dx\right)' = \\
&= \frac{1}{2\|f_0 + \lambda f\|}\int_{\mathbf{R}^n}\left(\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}\left(D^\alpha(f_0 + \lambda f)\right)^2\right)' dx.
\end{aligned} \tag{6}$$

Поскольку постоянный множитель перед интегралом не повлияет на дальнейшие выкладки, продолжим дифференцирование по параметру подынтегрального выражения:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^n}\left(\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}\left(D^\alpha(f_0 + \lambda f)\right)^2\right)' dx = \\
&= \int_{\mathbf{R}^n}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}\left(\left(D^\alpha(f_0 + \lambda f)\right)^2\right)' dx = \\
&= \int_{\mathbf{R}^n}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}2D^\alpha(f_0 + \lambda f)\left(D^\alpha(f_0 + \lambda f)\right)' dx = \\
&= 2\int_{\mathbf{R}^n}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}D^\alpha(f_0 + \lambda f)\left(D^\alpha f_0 + D^\alpha(\lambda f)\right)' dx =
\end{aligned}$$

$$= 2\int\limits_{\mathbf{R}^n}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}D^{\alpha}\left(f_0+\lambda f\right)\left(\left(D^{\alpha}f_0\right)'+\left(\lambda D^{\alpha}f\right)'\right)dx =$$

$$= 2\int\limits_{\mathbf{R}^n}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}D^{\alpha}\left(f_0+\lambda f\right)\left(D^{\alpha}f\right)dx. \tag{7}$$

Соединяя (6) и (7), имеем производную нормы по параметру

$$\|f_0+\lambda f\|' = \frac{1}{\|f_0+\lambda f\|}\int\limits_{\mathbf{R}^n}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}D^{\alpha}\left(f_0+\lambda f\right)\left(D^{\alpha}f\right)dx\ . \tag{8}$$

Подынтегральная функция в (8) удовлетворяет условиям теоремы о первообразной по параметру от несобственного интеграла [8], поэтому выполненное нами формальное дифференцирование законно. Продолжим действия с остальными членами (5):

$$\frac{\left(l\left(f_0\right)+l\left(\lambda f\right)\right)'}{\|f_0+\lambda f\|} = \frac{\left(l\left(f_0\right)\right)'+\left(l\left(\lambda f\right)\right)'}{\|f_0+\lambda f\|} = \frac{\left(\lambda l\left(f\right)\right)'}{\|f_0+\lambda f\|} = \frac{l\left(f\right)}{\|f_0+\lambda f\|}\ ,$$

а затем подставим в (5) результат (8):

$$F'\left(\lambda\right) = \frac{l\left(f\right)}{\|f_0+\lambda f\|} - \frac{l\left(f_0+\lambda f\right)\|f_0+\lambda f\|'}{\|f_0+\lambda f\|^2} =$$

$$= \frac{l\left(f\right)}{\|f_0+\lambda f\|} - \frac{l\left(f_0+\lambda f\right)}{\|f_0+\lambda f\|^2}\cdot\frac{1}{\|f_0+\lambda f\|}\int\limits_{\mathbf{R}^n}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}D^{\alpha}\left(f_0+\lambda f\right)\left(D^{\alpha}f\right)dx =$$

$$= \frac{l\left(f\right)}{\|f_0+\lambda f\|} - \frac{l\left(f_0+\lambda f\right)}{\|f_0+\lambda f\|^3}\int\limits_{\mathbf{R}^n}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}D^{\alpha}\left(f_0+\lambda f\right)\left(D^{\alpha}f\right)dx\ .$$

Из условия экстремума функции одной переменной $F'(0) = 0$. Таким образом,

$$\left.\frac{l\left(f\right)}{\|f_0+\lambda f\|} - \frac{l\left(f_0+\lambda f\right)}{\|f_0+\lambda f\|^3}\int\limits_{\mathbf{R}^n}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}D^{\alpha}\left(f_0+\lambda f\right)\left(D^{\alpha}f\right)dx\right|_{\lambda=0} = 0\ .$$

Далее, подставив $\lambda = 0$, получим

$$\frac{l\left(f\right)}{\|f_0\|} - \frac{l\left(f_0\right)}{\|f_0\|^3}\int\limits_{\mathbf{R}^n}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}D^{\alpha}f_0 D^{\alpha}f dx = 0\ ,$$

или

$$\frac{l\left(f\right)}{\|f_0\|} = \frac{l\left(f_0\right)}{\|f_0\|^3}\int\limits_{\mathbf{R}^n}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}D^{\alpha}f_0 D^{\alpha}f dx\ .$$

Избавимся от общего множителя в обеих частях равенства:

$$l\left(f\right) = \frac{l\left(f_0\right)}{\|f_0\|^2}\int\limits_{\mathbf{R}^n}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}D^{\alpha}f_0 D^{\alpha}f dx\ .$$

С учетом $\|f_0\| = 1$ имеем

$$l\left(f\right) = l\left(f_0\right)\int\limits_{\mathbf{R}^n}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}D^{\alpha}f_0 D^{\alpha}f dx\ .$$

По отношению к интегралу и производным, в него входящим, $l(f_0)$ является константой, поэтому

$$l(f) = \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha \left(l(f_0) f_0 \right) D^\alpha f dx .$$

Переобозначив $u = l(f_0)f_0$, получаем окончательное выражение

$$l(f) = \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha u \, D^\alpha f dx . \tag{9}$$

Поскольку по условию $f_0 \in W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$, то $u \in W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$. Таким образом, (9) является скалярным произведением в $W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$, а следовательно, и представлением функционала в этом пространстве.

Выясним, чему равна норма функции u:

$$\|u\| = \left(\int_{\mathbf{R}^n} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \left(D^\alpha u \right)^2 dx \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\int_{\mathbf{R}^n} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \left(D^\alpha \left(l(f_0) f_0 \right) \right)^2 dx \right)^{1/2} = \left| l(f_0) \right| \cdot \| f_0 \| = \left| l(f_0) \right| .$$

Далее, по определению, функционал является ограниченным, если найдется такое $M > 0$, что для любой $f \in W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$ выполняется неравенство

$$\left| l(f) \right| \le M \, \| f \| ,$$

а наименьшее из чисел M является нормой функционала.

Оценим представление (9):

$$\left| l(f) \right| = \left| \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha u D^\alpha f dx \right| \le \|u\| \cdot \| f \| . \tag{10}$$

Так как $l(f_0) = \sup |l(f)|$ при $\|f\| = 1$, то число, меньшее $l(f_0)$, не может быть нормой функционала в $W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$. Следовательно, $\|u\|$ в неравенстве (10) есть наименьшая из констант, ограничивающих функционал. Отсюда, $\|u\| = \|l\|^*$.

Если рассмотреть аналогичную задачу о представлении линейного непрерывного функционала в пространстве $L_2(\mathbf{R}^n)$ и выполнить такие же выкладки, как (3)–(10), то функционал будет представлен через предельный элемент $\varphi_0 \in L_2(\mathbf{R}^n)$:

$$l(f) = \int_{\mathbf{R}^n} l(\varphi_0) \cdot \varphi_0 \cdot f dx = \int_{\mathbf{R}^n} u_0 f dx . \tag{11}$$

По аналогии здесь также $l(\varphi_0) = \|u_0|L_2(\mathbf{R}^n)\| = \|l|L_2^*(\mathbf{R}^n)\|$.

Поскольку $f \in W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$ принадлежит также и пространству $L_2(\mathrm{R}^n)$, то на основании (11) будут справедливыми выкладки и результаты, излагаемые ниже.

3. Метагармоническое дифференциальное уравнение

Интегрируя по частям (9), получаем дифференциальное уравнение в обобщенных функциях

$$l(f) = \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (-1)^k D^{2\alpha} u \cdot f \, dx .$$

Для дальнейшего изложения будет удобным переобозначение функции из (11) $u_0(x) = l(x)$, имея в виду, что функционал $l(x)$ представлен функцией $u_0(x)$ в $L_2(\mathrm{R}^n)$ и как обобщенная функция может быть записан через аргумент x основных функций. Иными словами, так как $W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n) \subset L_2(\mathrm{R}^n)$, то

$$l(f) = \int_{\mathbf{R}^n} l(x)\cdot f(x)\,dx\,,$$

где

$$l(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (-1)^k D^{2\alpha} u(x)\,. \tag{12}$$

Для решения дифференциального уравнения (12) используем результаты [9]. Оператор

$$L\left(D^{\alpha}\right) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (-1)^k D^{2\alpha}$$

является линейным с постоянными коэффициентами. Известно [9], что для уравнения с правой частью и таким оператором существует единственное решение, равное свертке правой части с фундаментальным решением оператора

$$u = G * l\,. \tag{13}$$

Свертка существует не для всякой обобщенной функции l, поэтому класс рассматриваемых функционалов будет сужен. Известно [9], что для финитного функционала свертка существует. Фундаментальное решение G оператора $L(D^{\alpha})$ найдем, опираясь на теоремы [9] и свойства преобразования Фурье обобщенных функций

$$F\left[\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (-1)^k D^{2\alpha} u(x)\right] = F\left[\delta(x)\right],$$

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (-1)^k (-i\xi)^{2k} F\left[G(x)\right] = 1\,.$$

Здесь $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Преобразуем выражение слева, перегруппировав множители:

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (-1)^k (-i\xi)^{k} (-i\xi)^{k} F\left[G(x)\right] = 1\,,$$

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (-1)^{2k} (i\xi)^{k} (-i\xi)^{k} F\left[G(x)\right] = 1\,,$$

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (i\xi)^{k} (-i\xi)^{k} F\left[G(x)\right] = 1\,.$$

Далее, степени комплексных выражений представим в виде покомпонентного произведения

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \prod_{j=1}^{n} \left(i\xi_j\right)^{\alpha_j} \left(-i\xi_j\right)^{\alpha_j} F\left[G(x)\right] = 1\,.$$

Произведение комплексно-сопряженных чисел с нулевой действительной частью дает квадрат модуля мнимой части:

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}\prod_{j=1}^{n}\left|\xi_j\right|^{2\alpha_j}F\left[G(x)\right]=1.$$

Развернув полиномиальный коэффициент и покомпонентное произведение степеней квадратов модулей

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\sum_{|\alpha|=k}\frac{(\alpha_1+\ldots+\alpha_n)!}{\alpha_1!\cdot\ldots\cdot\alpha_n!}\left(\left|\xi_1\right|^2\right)^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\left(\left|\xi_n\right|^2\right)^{\alpha_n}F\left[G(x)\right]=1,$$

видим, что внутренняя сумма есть не что иное, как степень полинома от квадратов модулей комплексных компонент:

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\xi_j\right|^2\right)^k F\left[G(x)\right]=1.$$

Полином же, в свою очередь, есть квадрат модуля вектора с комплексными компонентами:

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\left(|\xi|^2\right)^k F\left[G(x)\right]=1.$$

Далее становится очевидным, что выражение, полученное после всех преобразований, представляет собой разложение бинома Ньютона:

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\left(|\xi|^2\right)^k\cdot 1^{m-k}F\left[G(x)\right]=1,$$

$$\left(1+|\xi|^2\right)^m F\left[G(x)\right]=1.$$

Отсюда преобразование Фурье фундаментального решения

$$F\left[G(x)\right]=\frac{1}{\left(1+|\xi|^2\right)^m}.$$

Обратное преобразование Фурье такого выражения известно [10]:

$$G(x)=F^{-1}\left[\left(1+|\xi|^2\right)^{-m}\right],$$

$$G(|x|)=\frac{K_{n/2-m}(|x|)}{2^{m-1}\Gamma(m)|x|^{n/2-m}}.$$

Здесь $K_{n/2-m}(|x|)$ – функция Макдональда, $\Gamma(m)$ – гамма-функция.

4. Фундаментальное решение и его свертка

Предложение 8. Функция (13) в условиях $2m > n$ принадлежит пространству $W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$ с нормой вида (2).

Доказательство. Для доказательства утверждения потребуется установить суммируемость в квадрате частных производных всех порядков $|\alpha| \le m$ свертки (13). Вначале докажем это утверждение для производных функции G. Соответствующие оценочные неравенства для произвольных m и n приведены в [10]:

$$\left|D^{\alpha}G\right| \le C\begin{cases} \dfrac{e^{-|x|}}{|x|^{\frac{n-2m+1}{2}}}, & |x|>1, \qquad \forall n,m,\alpha; \\ 1-\ln|x|, & |x|<1, \quad n-2m+|\alpha|=0, |\alpha| - \text{ чётное}; \\ \dfrac{1}{|x|^{n-2m+|\alpha|}}, & |x|<1, \quad n-2m+|\alpha|=0, |\alpha| - \text{ нечётное} \\ & \qquad \text{или } n-2m+|\alpha|>0; \\ 1, & |x|<1, \qquad n-2m+|\alpha|<0, \end{cases} \tag{14}$$

где C – произвольная константа. На основании оценок (14)

$$|D^{\alpha}G| \le C_{\infty}\, e^{-|x|}\, |x|^{(2m-n-1)/2}, \ |x| > 1,$$

все частные производные убывают на бесконечности по экспоненциальному типу, и несобственные интегралы вне единичного шара от каждой производной сходятся. Здесь символом C_{∞} обозначена константа, соответствующая оценке на бесконечности.

Оценка внутри единичного шара разбивается на три случая.

При $n - 2m + |\alpha| = 0$ и четном $|\alpha|$ несобственный интеграл от оценивающей функции

$$|D^{\alpha}G| \le C_1\,(1 - \ln|x|), \ |x| < 1,$$

сходится.

При $n - 2m + |\alpha| < 0$ интеграл от оценки

$$|D^{\alpha}G| \le C_2, \ |x| < 1,$$

является собственным.

При $n - 2m + |\alpha| = 0$ и нечетном $|\alpha|$ или $n - 2m + |\alpha| > 0$ несобственный интеграл от оценки

$$\left|D^{\alpha}G\right| \le C_3 \frac{1}{|x|^{n-2m+|\alpha|}}, \quad |x|<1,$$

возведенной в квадрат

$$\int\limits_{|x|<1} \left|D^{\alpha}G\right|^2 dx \le C_3^2 \int\limits_{|x|<1} \left|\frac{1}{|x|^{n-2m+|\alpha|}}\right|^2 dx,$$

сводится к однократному путем перехода к сферическим координатам:

$$C_4 \int_0^1 \left|\frac{1}{r^{n-2m+|\alpha|}}\right|^2 r^{n-1} dr \le C \int_0^1 \frac{1}{r^{2(n-2m+|\alpha|)-n+1}}\, dr.$$

Здесь в константу C_4 перешли все повторно взятые интегралы от тригонометрических множителей, а $C = C_3^2$. Несобственный интеграл от неограниченной функции одной переменной сходится на указанном интервале при $2(n - 2m + |\alpha|) - n + 1 < 1$.

Таким образом, получаем сходимость интеграла, оценивающего каждую производную при условии $2(2m - |\alpha|) > n$. Следовательно, интегралы от производных наивысшего порядка функции G оцениваются сходящимся несобственным интегралом при $2m > n$.

Для установления существования свертки используем ограниченность линейного функционала в L_2 [1]:

$$\left\| D^{\alpha} G * l \middle| L_2\left(\mathbf{R}^n\right) \right\|^2 = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \left| D^{\alpha} G * l \right|^2 dx \le M \int\limits_{\mathbf{R}^n} \left| D^{\alpha} G \right|^2 dx .$$

Таким образом, для всех $|\alpha| \le m$ интегралы от производных свертки, возведенных в квадрат, сходятся при $2m > n$, следовательно $D^{\alpha}G*l \in L_2(\mathbf{R}^n)$, $|\alpha| \le m$, и $G*l \in W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$, т.е. свертка и ее производные всех порядков существуют.

5. Представление линейного функционала

На основании изложенного можно сформулировать окончательные утверждения.

Теорема 1. Для всякого линейного функционала l на $W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$ существует единственный элемент $u \in W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$ такой, что

$$l(f) = (u, f) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^{\alpha} u D^{\alpha} f dx, \quad f \in W_2^{(m)}\left(\mathbf{R}^n\right), \tag{15}$$

причем $\|l|W_2^{(m)*}(\mathbf{R}^n)\| = \|u|W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)\|$. Обратно, если $u \in W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$, то (15) определяет такой линейный функционал l, что $\|l|W_2^{(m)*}(\mathbf{R}^n)\| = \|u|W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)\|$.

Доказательство. Данное утверждение представляет собой теорему об общем виде линейного функционала на гильбертовом пространстве [11], перефразированную для конкретного случая $W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$ с нормой (2). Выкладки по доказательству утверждения приведены выше при рассмотрении вариационной задачи.

Теорема 2. Для любого линейного финитного функционала $l \in W_2^{(m)*}(\mathbf{R}^n)$ при $2m > n$ справедливо представление

$$l(f) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^{\alpha} G * l \, D^{\alpha} f dx ,$$

$$f \in W_2^{(m)}\left(\mathbf{R}^n\right), G * l \in W_2^{(m)}\left(\mathbf{R}^n\right) .$$

Доказательство. Из теоремы 1 и конкретизации функции $u = G*l$ с учетом установления условий существования и суммируемости свертки следует утверждение теоремы.

Список источников

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. 808 с.
2. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 333 с.
3. Мазья В.Г. Пространства С.Л. Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. 416 с.
4. Агранович М.С. Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. М.: Изд-во МЦНМО, 2013. 378 с.

5. Шубин М.А. Лекции об уравнениях математической физики. М.: Изд-во МЦНМО, 2003. 303 с.
6. Шойнжуров Ц.Б. Оценка функционалов погрешности кубатурной формулы в пространствах с нормой, зависящей от младших производных: дис. … канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1967. 83 с.
7. Clarkson J.A. Uniformly convex spaces // Transactions of the American Mathematical Society. 1936. V. 40 (3). P. 396–414.
8. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М. : Наука, 1992. 431 с.
9. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2008. 398 с.
10. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977. 456 с.
11. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 572 с.

References

1. Sobolev S.L. (1974) *Vvedeniye v teoriyu kubaturnykh formul* [Introduction to the theory of cubature formulas]. Moscow: Nauka.
2. Sobolev S.L. (1988) *Nekotoryye primeneniya funktsional'nogo analiza v matematicheskoy fizike* [Some applications of functional analysis in mathematical physics]. Moscow: Nauka.
3. Maz'ya V.G. (1985) *Prostranstva S.L. Soboleva* [S.L. Sobolev spaces]. Leningrad: LGU.
4. Agranovich M.S. (2013) *Sobolevskiye prostranstva, ikh obobshcheniya i ellipticheskiye zadachi v oblastyakh s gladkoy i lipshitsevoy granitsey* [Sobolev spaces, their generalizations and elliptical problems in domains with a smooth and Lipschitz boundary]. Moscow: Moscow Center for Continuous Mathematical Education.
5. Shubin M.A. (2003) *Lektsii ob uravneniyakh matematicheskoy fiziki* [Lectures on equations of mathematical physics]. Moscow: Moscow Center for Continuous Mathematical Education.
6. Shoinzhurov Ts.B. (1967) *Otsenka funktsionalov pogreshnosti kubaturnoy formuly v prostranstvakh s normoy, zavisyashchey ot mladshikh proizvodnykh* [Estimation of the error functionals of the cubature formula in spaces with a norm dependent on the lowest derivatives]. Dissertation. Institute of Mathematics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences.
7. Clarkson J.A. (1936) Uniformly convex spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*. 40(3). pp. 396–414.
8. Sobolev S.L. (1992) *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow: Nauka.
9. Vladimirov V.S., Zharinov V.V. (2008) *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow: Fizmatlit.
10. Nikol'skii S.M. (1977) *Priblizheniye funktsiy mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniya* [Approximation of multivariate functions and embedding theorems]. Moscow: Nauka.
11. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. (2004) *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of function theory and functional analysis]. Moscow: Fizmatlit.

***Сведения об авторе*:**
Корытов Игорь Витальевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент отделения математики и математической физики Томского политехнического университета (Томск, Россия). E-mail: korytov@tpu.ru

***Information about the author*:**
Korytov Igor V. (Associate Professor, Mathematics and Mathematical Physics Division, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: korytov@tpu.ru

Статья поступила в редакцию 01.06.2024; принята к публикации 01.08.2025

The article was submitted 01.06.2024; accepted for publication 01.08.2025