

Научная статья

УДК 531.01

doi: 10.17223/19988621/96/10

Динамический анализ трехмассового кривошипно-ползунного механизма на базе его двухмассового аналога

Сергей Викторович Савелькаев

*Сибирский государственный университет геосистем и технологий, Новосибирск, Россия,
sergei.savelkaev@yandex.ru*

Аннотация. Проведен динамический анализ плоского трехмассового кривошипно-ползунного механизма. Он сведен к двухмассовому аналогу, а затем к одномассовому эквиваленту, движение которого описывается вторым законом Ньютона, учитывающим действие сил инерции рабочих тел этого механизма и действие диссипативных сил на его ползун. Исследована зависимость смещения центра масс механизма от диссипации внешней среды и найден ее минимальный уровень, до которого смещение центра масс механизма постоянно и ниже которого оно всегда стремится к нулю.
Ключевые слова: трехмассовый кривошипно-ползунный механизм, двухмассовый аналог, одномассовый эквивалент, диссипативная среда, уравнения движения, эффект смещения центра масс

Для цитирования: Савелькаев С.В. Динамический анализ трехмассового кривошипно-ползунного механизма на базе его двухмассового аналога // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 96. С. 118–130. doi: 10.17223/19988621/96/10

Original article

Dynamic analysis of a three-mass crank-slider mechanism based on its two-mass analog

Sergey V. Savel'kaev

*Siberian State University of Geosystems and Technologies, Novosibirsk, Russia,
sergei.savelkaev@yandex.ru*

Abstract. This paper presents a dynamic analysis of a planar three-mass crank–slider mechanism of the “Tolchin inertioïd” type. Based on the axiom of constraints applied to inertial forces – the inertial forces of two interacting bodies are mutually applied to these bodies and act on them through their constraints, which can be discarded, and its reactions replaced by the inertial forces of these bodies, – a mathematical model of this mechanism is obtained in terms of Newton's second law written in an inertial frame of reference with account for the inertial domain formed by the resulting inertial force of the counter syn-

chronous rotational motion of the working bodies of the mechanism relative to its slider and the dissipative forces acting on this slider. The displacement of the center of mass of this mechanism is simulated numerically. The minimum level of dissipation of the external environment up to which the displacement of the center of mass is constant and below which it tends to zero, is recorded. In practice, the revealed effect can be used as a basis when developing devices for directed discrete motion in a medium with low dissipation, for instance, in a liquid medium and on solid horizontal surfaces with low linear viscous resistance to motion.

Keywords: three-mass crank–slider mechanism, two-mass analogue, single-mass equivalent, dissipative medium, equations of motion, center of mass moving effect

For citation: Savel'kaev, S.V. (2025) Dynamic analysis of a three-mass crank–slider mechanism based on its two-mass analog. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 96. pp. 118–130. doi: 10.17223/19988621/96/10

Введение

В работе проведен динамический анализ плоского трехмассового кривошипно-ползунного механизма (КПМ) типа «инерциод Толчина» [1], содержащего два рабочих тела, которые с помощью кривошипов установлены на общем основании в виде ползуна с возможностью их встречного синхронного вращательного движения в его плоскости.

Цель работы – исследование амплитудных и фазовых характеристик движения ползуна (опорного тела) m_1 и двух рабочих тел m_2 КПМ, включая и движение его центра масс C в неподвижной системе отсчета K . Исследование показало, что смещение Δx_C ЦМ C КПМ остается постоянным ($\Delta x_C = \text{const}$) в случае, когда уровень диссипации внешней среды превышает ее пороговый уровень $\xi \geq \xi_{\text{п}}$, где $\xi_{\text{п}}$ – пороговое значение диссипативного параметра ξ , физический смысл которого будет определен в работе на основе математической модели КПМ, а его пороговое значение $\xi_{\text{п}}$ определено методами численного моделирования. При этом показано, что для любых значений $\xi < \xi_{\text{п}}$ смещение Δx_C ЦМ C КПМ стремится к нулю: $\Delta x_C \rightarrow 0$.

Динамический анализ КПМ

Кинематическая схема и конструкция КПМ показаны на рис. 1, *a*, *b*. Основными элементами КПМ (см. рис. 1, *b*) являются ползун (опорное тело) 1 с массой m_1 и два рабочих тела 2 с одинаковой массой m_2 , которые с помощью кривошипов 3 с длиной $R = \text{const}$ и шкивов 4 с радиусом r установлены на осях 5 ползуна 1 с возможностью их встречного синхронного вращательного движения в его плоскости из положения x_{21} в положение x_{22} с помощью нити 6 и пружины 7 с жесткостью k .

Для проведения динамического анализа КПМ введем неподвижную систему отсчета K , лежащую в плоскости рисунка (см. рис. 1, *a*). Начало координат этой системы отсчета K свяжем с начальным положением $x_{1\text{н}}$ ползуна m_1 в момент времени $t = 0$. Также введем собственную систему K_1 ползуна m_1 , лежащую в его плоскости, которая вместе с ним может совершать движение вдоль оси x неподвижной системы отсчета K .

КПМ имеет три степени свободы по следующим обобщенным координатам: декартовой координате x_1 поступательного движения ползуна m_1 вдоль оси x непо-

движной системы отсчета K и двум полярным координатам $\pm\varphi_{21}$ встречного синхронного вращательного движения тел m_2 в собственной системе отсчета K_1 ползуна m_1 , где знак $+\varphi_{21}$ – для верхнего тела m_2 , а знак $-\varphi_{21}$ – для нижнего. Рабочие тела m_2 установлены на ползуне m_1 с помощью прямолинейных кривошипов 3 с массой $m_R \ll m_2$ каждого, которые закреплены на шкивах 4 с массой $m_{ш} \ll m_2$ каждого. Сами шкивы 4 шарнирно установлены на осях 5 ползуна m_1 (см. рис. 1, б), что обеспечивает возможность встречного синхронного вращательного движения рабочих тел m_2 в плоскости ползуна m_1 из положения x_{21} в положение x_{22} с помощью нерастяжимой нити 6 (ее свободные концы намотаны на шкивы 4) и пружины 7.

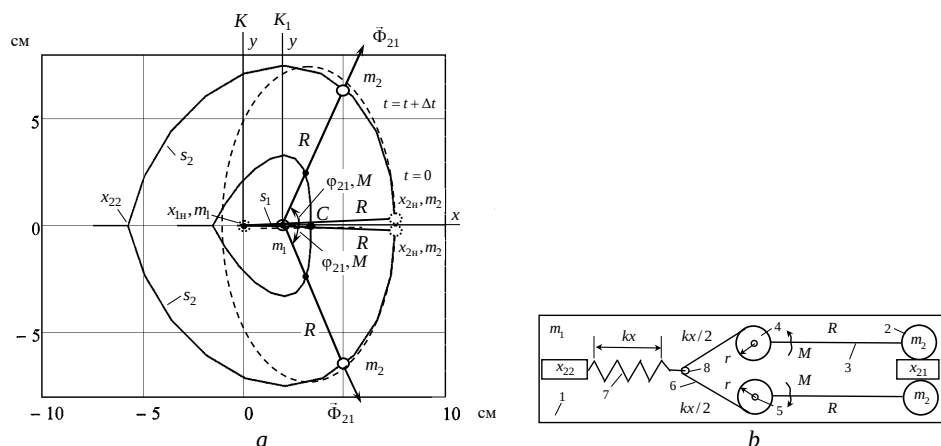


Рис. 1. Кинематическая схема КПМ (а) и его конструкция (б):

1 – основание с массой m_1 ; 2 – рабочее тело с массой m_2 ; 3 – кривошип с длиной R ; 4 – шкив с радиусом r ; 5 – ось; 6 – нить; 7 – пружина с жесткостью k ; 8 – ролик

Fig. 1. (a) Kinematic diagram of the crank–slider mechanism (CSM) and (b) its design:

1, base with mass m_1 ; 2, working body with mass m_2 ; 3, crank with length R ;

4, pulley with radius r ; 5, axis; 6, thread; 7, spring with stiffness k ; and 8, roller

В неподвижной системе отсчета K (см. рис. 1, а) для момента времени $t = 0$ ползун m_1 находится в начальном положении $x_{1н}$, а рабочие тела m_2 в положении $x_{2н}$. В этих положениях $x_{1н}$ и $x_{2н}$ скорости $\dot{x}_{1н}$, $\dot{y}_{2н}$ ползуна m_1 и рабочих тел m_2 равны нулю: $\dot{x}_{1н} = 0$ и $\dot{y}_{2н} = 0$. Коэффициент вязкого сопротивления движению ползуна m_1 составляет μ_1 . Его величина лежит в пределах $0 \leq \mu_1 \leq \infty$ и зависит от геометрической формы и размеров ползуна m_1 . Для рабочих тел m_2 его величина всегда равна нулю: $\mu_2 = 0$, что можно обеспечить, выполнив ползун m_1 в виде герметичного полого корпуса, в котором размещены тела m_2 .

В собственной системе отсчета K_1 ползуна m_1 (см. рис. 1, б) в начальный момент времени $t = 0$ тела m_2 заблокированы в положении x_{21} . Пружина 7 растянута. Ролик 8 на конце пружины 7 обеспечивает одинаковое натяжение T нити 6 на симметрично расположенных шкивах 4. При разблокировке тел m_2 пружина 7 будет сжиматься. И так как один ее конец закреплен на опоре x_{21} ползуна m_1 , на котором одновременно закреплены и оси 5 шкивов 4, то ролик 8 посредством одинаковых натяжений T нити 6 создаст на шкивах 4 двунаправленный уравновешенный момент

$M = \pm \frac{kxr}{2 \cos \alpha}$, где k – жесткость пружины 7; $x = r(\pi - \varphi_{21})$ – величина ее

растяжения в зависимости от угла φ_{21} поворота рабочих тел m_2 ; $\alpha \approx 30^\circ$ – угол наклона нити 6 к оси x системы отсчета K_1 . Под действием двунаправленного момента M тела m_2 будут совершать встречное синхронное вращательное движение из положения x_{21} в положение x_{22} на угол $\varphi_{21} = \pm\pi$. При этом угол α изменяется на малую величину $\Delta\alpha = \pm 3^\circ$. Так как натяжения T нити 6 для верхнего и нижнего шкивов 4 равны, то они создают равные, но различные по знаку моменты

$M = \pm \frac{kxr}{2 \cos \alpha}$. При этом результирующий активный момент, действующий на пол-

зуне m_1 , будет равен нулю: $\sum M = 0$, и, следовательно, будет сохраняться кинетический момент $dK_z / dt = \text{const}$ КПМ относительно оси z системы отсчета K_1 (ось z направлена ортогонально к плоскости чертежа в сторону наблюдателя и на рис. 1 не показана). Сохранность $dK_z / dt = \text{const}$ будет подробно проанализирована при математическом моделировании КПМ.

Жесткость k пружины 7 выбирается так, чтобы время поворота тел m_2 на угол $\varphi_{21} = \pm\pi$ для любых μ_1 и параметров КПМ составляло $t_1 \leq 2\pi / \omega_{21} \leq 0.5$ с. Такой выбор сводит к минимуму влияние малого трения скольжения в шарнирном соединении шкивов 4 и осей 5 и влияние диссипативных потерь КПМ при его движении в диссипативной среде на угловую скорость ω_{21} вращательного движения тел m_2 в системе отсчета K_1 .

Математическая модель идеализированного КПМ

Выразим кинетическую энергию КПМ через сумму кинетических энергий ее двух зеркальных относительно x частей с массами $\frac{1}{2}m_1$ и m_2 . Для этого выразим скорости этих масс $\frac{1}{2}m_1$ и m_2 через их координаты в системе отсчета K следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{x}_1; \dot{x}_2 = \dot{x}_1 - R\dot{\varphi}_{21} \sin \varphi_{21}; x_1 = x_1; x_2 = x_1 + R \cos \varphi_{21}; \\ \dot{y}_1 &= \dot{y}_1; \dot{y}_2 = \dot{y}_1 + R\dot{\varphi}_{21} \cos \varphi_{21}; y_1 = y_1; y_2 = y_1 + R \sin \varphi_{21}. \end{aligned} \quad (1)$$

Скорости $\dot{x}_1$ и $\dot{x}_2$ (1) позволяют выразить кинетическую энергию КПМ

$$T = T^+ + T^- = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\tilde{m}_2\dot{\varphi}_{21}^2 R^2 - \tilde{m}_2\dot{x}_1\dot{\varphi}_{21}R \sin \varphi_{21}, \quad (2)$$

здесь суммарная масса КПМ $m = m_1 + \tilde{m}_2$ условно сосредоточена в опорном теле m_1 , в которой $\tilde{m}_2 = 2m_2$ – суммарная масса рабочих тел m_2 ;

$$T^\pm = \frac{1}{2}(0.5m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\varphi}_{21}^2 R^2 - m_2\dot{x}_1\dot{\varphi}_{21}R \sin \varphi_{21}.$$

Записывая лагранжиан $L = T - U(R) - \Pi(x)$, где $\Pi(x) = \frac{1}{2}0.5kx^2$ – потенциальная энергия пружины 7 (см. рис. 1, b) для каждой из двух симметричных частей

КПМ, а также составляя уравнения Лагранжа по координатам x_2, y_2 и φ_{21} , получим следующую систему уравнений движения КПМ в стационарном состоянии:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\gamma_1 \dot{x}_1 = a\dot{\varphi}_{21}^2 \cos \varphi_{21}; y_1 = 0; \\ \frac{d}{dt} K_z^\pm = \pm m_2 R [\ddot{\varphi}_{21} R + \sin \varphi_{21} (2\gamma_1 \dot{x}_1 - a\dot{\varphi}_{21}^2 \cos \varphi_{21})] = \pm M, \end{cases} \quad (3)$$

аналогичную приведенной в работе [2], где $\gamma_1 = \frac{\mu_1}{2(m_1 + \tilde{m}_2)}$ – коэффициент затухания и $a = \frac{\tilde{m}_2 R}{m_1 + \tilde{m}_2}$.

Для стационарного состояния в уравнении для кинетического момента $K_z^\pm$ (3) следует принять $\ddot{\varphi}_{21} = 0$.

Система уравнений (3) сводит КПМ к ее двухмассовому аналогу МС2 с массами m_1 и $\tilde{m}_2 = 2m_2$. При этом система сил, действующая на КПМ в стационарном состоянии, образует ИД с равнодействующей $\vec{F}_{10} = \vec{\Phi}_{21} + \vec{F}_1$ (1) (см. рис. 1, с [2]), образованный проекцией суммарной силы инерции $\vec{\Phi}_{21} = -\tilde{m}_2 \omega_{21}^2 \vec{r}_{21}$ относительного вращательного движения тела с массой $\tilde{m}_2 = 2m_2$ (верхнего) в собственной системе отсчета K_1 ползуна m_1 на ось координат x системы отсчета K и диссипативной силой $\vec{F}_1 = -\mu_1 \vec{v}_1$, действующей на ползун m_1 вдоль этой же оси x . То, что в ползуне условно сосредоточена вся масса $m = m_1 + \tilde{m}_2$ (2), сводит трехмассовую КПМ к одномассовому эквиваленту ($m = m_1 + \tilde{m}_2$) с двумя с двумя степенями свободы по обобщенным координатам x_1 и φ_{21} (1), движущемуся в поле ИД под действием силы $\vec{F}_{10} = \vec{\Phi}_{21} + \vec{F}_1$ [2].

Суммирование последнего уравнения (3) для двух зеркальных относительно x частей КПМ даст

$$\frac{d}{dt} K_z = \frac{d}{dt} K_z^+ + \frac{d}{dt} K_z^- = M - M = 0. \quad (4)$$

Из него следует равенство $dK_z^+ / dt = -dK_z^- / dt$, показывающее, что любому изменению $\ddot{\varphi}_{21} = \dot{\omega}_{21}$ угловой скорости ω_{21} рабочего тела m_2 КПМ (кинетического момента dK_z^+ / dt его одной части), вызванному действием момента M (см. рис. 1, а), соответствует равное по величине и обратное по знаку изменение момента $-dK_z^- / dt$ ее зеркальной части так, что результирующий кинетический момент КПМ для любых постоянных значений μ_1 , лежащих в пределах $0 \leq \mu_1 \leq \infty$, сохраняется, $K_z = \text{const}$, что обосновывает приемлемость допущения $\omega_{21} = \omega_{cp} = \text{const}$. В результате у КПМ (в отличие от МС2 [2]) для любых $\ddot{\varphi}_{21}$ отсутствует вращение (откат) ползуна m_1 .

При учете факторов неидеальности в виде веса шкива 4 и кривошипа 3 с длиной R следует:

- добавить к массе ползуна m_1 суммарную массу $2 m_{ш}$ шкивов 4 ($m_1 + 2m_{ш}$);
- учесть смещение центра тяжести системы кривошип 3 – тело m_2 в сторону шкива 4 по формуле $R_3 = (m_R x_R + m_2 x_2) / (m_R + m_2)$, где R_3 – эквивалентная длина

кривошипа 3; $x_R = R/2$ – координата центра тяжести кривошипа 3, отсчитываемая от шкива 4; $x_2 = R + l_2/2$ – координата центра тяжести тела m_2 , также отсчитываемая от шкива 4; l_2 – длина рабочего тела m_2 .

Весом нити 6 и пружины 7 можно пренебречь, так как вес каждой из них более чем на 5–10 порядков меньше суммарного веса КПМ.

Для продолжения динамического анализа КПМ выделим из общего времени $0 \leq t \leq \infty$ его движения в системе отсчета K вдоль ее оси x две фазы. Активная фаза – это движение КПМ за время $0 \leq t < t_1$ (см. рис. 1, а), когда осуществляется вращательное перемещение его рабочих тел m_2 из положения x_{21} в положение x_{22} в собственной системе отсчета K_1 ползуна m_1 (см. рис. 1, б). Пассивная фаза движения – это затухающее движение КПМ за время $t_1 \leq t \leq \infty$ как целого после абсолютно неупругого уравновешенного центрального удара рабочих тел m_2 в положении x_{22} (см. рис. 1, а, б).

Активная фаза движения КПМ

Движение основания m_1 КПМ в системе отсчета K (см. рис. 1, а) описывается первым уравнением (3). Его решение было получено в работах [2, 3]:

$$\begin{aligned} x_1(\varphi_{21}) &= A_1 \left(\cos \varepsilon - \frac{\omega_{21}}{2\gamma_1} (1 - \exp(-\frac{2\gamma_1}{\omega_{21}} \varphi_{21})) \sin \varepsilon - \cos(\varphi_{21} + \varepsilon) \right); \\ \dot{x}_1(\varphi_{21}) &= -A_1 \omega_{21} \left(\exp(-\frac{2\gamma_1}{\omega_{21}} \varphi_{21}) \sin \varepsilon - \sin(\varphi_{21} + \varepsilon) \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где $A_1 = a / \sqrt{1 + \xi^2}$ – амплитудный коэффициент; $\varepsilon = \arctg(\xi)$ – угол диссипативных потерь; $\xi = 2\gamma_1 / \omega_{21}$ – диссипативный параметр.

Координаты $x_1(\varphi_{21})$ и скорости $\dot{x}_1(\varphi_{21})$ ползуна m_1 во время $0 \leq t < t_1$ ($t_1 = 0.5$ с) активной фазы движения КПМ были рассчитаны по решениям (5), а координаты x_C и скорости $\dot{x}_C$ его ЦМ C – по известным формулам [4]

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{m_1 x_1 + \tilde{m}_2 x_2}{m_1 + \tilde{m}_2}; y_C = y_C^+ + y_C^- = 0; \\ \dot{x}_C &= \frac{m_1 \dot{x}_1 + \tilde{m}_2 \dot{x}_2}{m_1 + \tilde{m}_2}; \dot{y}_C = \dot{y}_C^+ + \dot{y}_C^- = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где координаты $x_2 = x_1 + \cos \varphi_{21}$, $y_2 = \sin \varphi_{21}$ и определенные по ним скорости

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 - \omega_{21} \sin \varphi_{21}, \quad \dot{y}_2 = \omega_{21} \cos \varphi_{21}; \quad y_C^\pm = \pm \frac{\tilde{m}_2 y_2}{m_1 + \tilde{m}_2} \quad \text{и} \quad \dot{y}_C^\pm = \pm \frac{\tilde{m}_2 \dot{y}_2}{m_1 + \tilde{m}_2}$$

и скорости ЦМ C отдельно для верхней и нижней частей КПМ, зеркальных относительно x .

На рис. 2, а, б показаны траектории движения ползуна m_1 и тел m_2 , а также ЦМ C , а на рис. 2, в, д – графики рассчитанных из (5) и (6) координат (положений) $x_1(\varphi_{21})$, $x_C(\varphi_{21})$ и скоростей $\dot{x}_1(\varphi_{21})$ ползуна m_1 и тел m_2 , для углов их встречного поворота на угол $0 \leq \varphi_{21}(t) \leq \pi$ за время $0 \leq t < t_1$; $t_1 = 0.5$ с активной фазы. Их расчет

выполнен для собственных параметров КПМ: $m_1 = 0.14$ кг; $\tilde{m}_2 = 2m_2 = 0.11$ кг; $R = 7.5$ см, которые в дальнейшем неизменны.

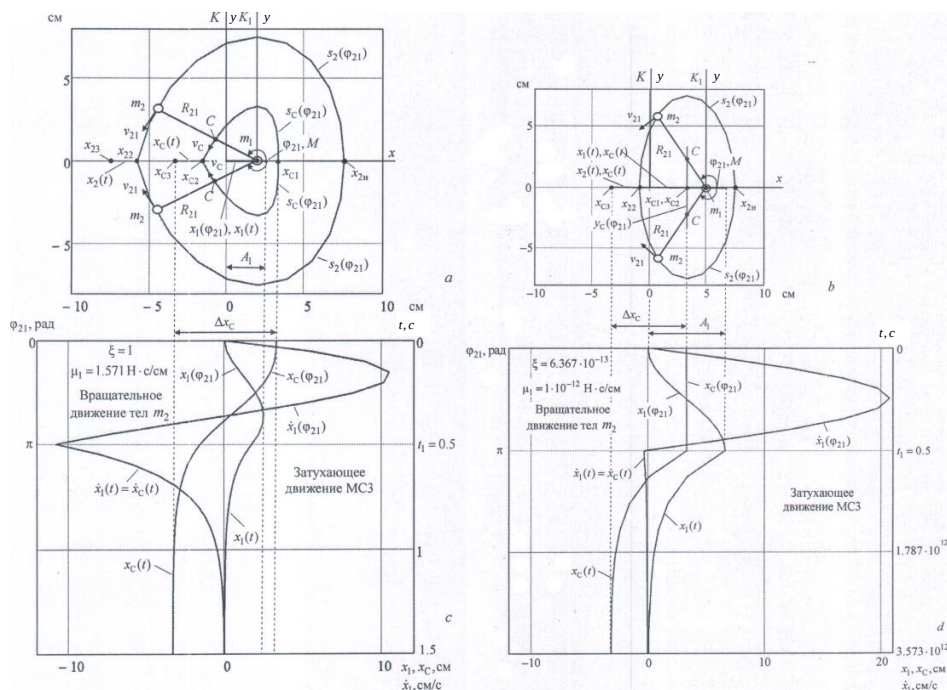


Рис. 2. Кинематическая схема КПМ (a, b) и графики положения x_1 и скорости $\dot{x}_1$ его ползуна m_1 , а также положения x_C его ЦМ C за общее время активной и пассивной фаз его движения: $0 \leq t \leq 1.5$ с при $\xi = 1$ ($\mu_1 = 1.571$ Н · с/см) (c); $0 \leq t \leq 3.573 \cdot 10^{12}$ с при $\xi = 6.367 \cdot 10^{-13}$ ($\mu_1 = 1 \cdot 10^{-12}$ Н · с/см) (d)

Fig. 2. (a), (b) Kinematic diagrams of the CSM and graphs of position x_1 and speed $\dot{x}_1$ of its slider m_1 , as well as position x_C of its center of mass (CM) C for the total time of the active and passive phases of motion: (c) $0 \leq t \leq 1.5$ s with $\xi = 1$ ($\mu_1 = 1.571$ N · s/cm) and (d) $0 \leq t \leq 3.573 \cdot 10^{12}$ s with $\xi = 6.367 \cdot 10^{-13}$ ($\mu_1 = 1 \cdot 10^{-12}$ N · s/cm)

Пассивная фаза движения КПМ

В результате встречного абсолютно неупругого центрального удара рабочих тел m_2 в положении x_{22} (см. рис. 1, a, b) при их повороте на угол $\varphi_{21} = \omega_{21}t_1 = \pi$ угловая скорость ω_{21} их вращательного перемещения обратится в нуль: $\omega_{21} = 0$. Тогда во время $t_1 \leq t \leq \infty$; $t_1 = 0.5$ с пассивной фазы движения КПМ он будет совместно с его ЦМ C совершать в системе отсчета K вдоль ее оси x затухающее поступательное движение (см. рис. 2, c, d) по инерции как единое целое со скоростью

$$\dot{x}_1(t) = \dot{x}_2(t) = \dot{x}_C(t). \quad (7)$$

Как известно, затухающее движение КПМ во время $t_1 \leq t \leq \infty$; $t_1 = 0.5$ с пассивной фазы движения можно представить однородным уравнением $\ddot{x}_1 + 2\gamma_1 \dot{x}_1 = 0$ с решениями

$$x_1(t) = C_1 + C_2 \exp(-2\gamma_1(t - t_1)); \quad x_C(t) = C_3 + C_2 \exp(-2\gamma_1(t - t_1)). \quad (8)$$

Дифференцирование $dx_1(t)/dt$ и $dx_C(t)/dt$ решений (8) по времени t позволяет представить равенство (7) в виде:

$$\dot{x}_1(t) = \dot{x}_C(t) = -2C_2\gamma_1 \exp(-2\gamma_1(t - t_1)). \quad (9)$$

Подстановка времени $t = t_1$ в решения (8) и равенство (9) позволяет определить коэффициенты C_1 – C_3 в виде:

$$\begin{aligned} x_1(t_1) = x_1(\alpha) = C_1 + C_2; \quad x_C(t_1) = x_C(\alpha) = C_3 + C_2; \\ \dot{x}_1(t) = \dot{x}_C(t_1) = \dot{x}_C(\alpha) = -2C_2\gamma_1, \end{aligned} \quad (10)$$

здесь начальное положение $x_1(\alpha)$ и $x_C(\alpha)$ ползуна m_1 и ЦМ C , а также его начальная скорость $\dot{x}_C(\alpha)$ определены решениями (5) и формулами (6) при фиксированном повороте рабочих тел m_2 на угол $\varphi_{21} = \omega_{21}t = \alpha = \pi$.

Решая уравнения (10), получим

$$C_1 = x_1(\alpha) + \dot{x}_C(\alpha) / 2\gamma_1; \quad C_2 = -\dot{x}_C(\alpha) / 2\gamma_1; \quad C_3 = x_C(\alpha) + \dot{x}_C(\alpha) / 2\gamma_1. \quad (11)$$

Подстановка (11) в (8) и (9) дает

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(\alpha) + \frac{\dot{x}_C(\alpha)}{2\gamma_1} [1 - \exp(-2\gamma_1(t - t_1))]; \\ \dot{x}_1(t) &= \dot{x}_C(t) = \dot{x}_C(\alpha) \exp(-2\gamma_1(t - t_1)); \\ x_C(t) &= x_C(\alpha) + \frac{\dot{x}_C(\alpha)}{2\gamma_1} [1 - \exp(-2\gamma_1(t - t_1))]. \end{aligned} \quad (12)$$

В решении (12) допустимое время $t \geq t_1$. Положения $x_1(\alpha)$, $x_C(\alpha)$ и скорость $\dot{x}_C(\alpha)$ рассчитаны из (5) и (6) при $t_1 = 0.5$ с, $\alpha = \pi$. Их рассчитанные значения составляют: для рис. 2, с при $\xi = 1$ – $x_1(\pi) = 1.72$ см, $x_C(\pi) = -1.58$ см и $\dot{x}_C(\pi) = -10.82$ см/с; для рис. 2, d при $\xi = 1$ – $x_1(\pi) = 6.6$ см, $x_C(\pi) = 3.3$ см и $\dot{x}_C(\pi) = -2.64 \cdot 10^{-11}$.

Рассчитанные из решений (5), (12) и формул (6) значения $x_1(t)$, $\dot{x}_1(t)$, $x_C(t)$ показаны графиками на рис. 2, с в системе отсчета K для времени $t_1 \leq t \leq 1.5$; $t_1 = 0.5$ с активной фазы движения КПМ и на рис. 2, с для времени $t_1 \leq t \leq 3.573 \cdot 10^{12}$; $t_1 = 0.5$ с пассивной фазы его движения. Расчет произведен с использованием двух значений диссипативного параметра ξ (5): для рис. 2, с – $\xi = 1$, $\mu_1 = 1.571$ Н·с/см и для рис. 2, d – $\xi = 6.367 \cdot 10^{-13}$, $\mu_1 = 1 \cdot 10^{-12}$ Н·с/см при ранее заданных собственных параметрах КПМ.

Эффект смещения ЦМ МСЗ

Величину смещения Δx_C ЦМ C МСЗ в системе отсчета K выразим для двух значений диссипативного параметра $\xi = 1$ и $\xi = 6.367 \cdot 10^{-13}$, которые приведены на

рис. 2, с, d. Для $\xi = 1$ (см. рис. 2, с) его величина за общее время $0 \leq t \leq 1.5$ с складывается из времени $0 \leq t < 0.5$ с активной фазы движения КПМ и времени $0.5 \leq t \leq 1.5$ с пассивной фазы его движения (см. рис. 2, с). Аналогично для $\xi = 6.367 \cdot 10^{-13}$ за общее время $0 \leq t \leq 3.573 \cdot 10^{12}$ с активной $0 \leq t < 0.5$ с и пассивной $0.5 \leq t \leq 3.573 \cdot 10^{12}$ с фаз (см. рис. 2, d). Для этих двух случаев величина смещения Δx_C ЦМ С составляет [3]

$$\Delta x_C = x_{C3} - x_{C1} = \Delta x_r + \Delta x_e. \quad (13)$$

Первое слагаемое $\Delta x_r = -a(1 - \cos \alpha)$ (13) есть относительное смещение ЦМ С в системе отсчета K_1 за время $0 \leq t < 0.5$ с активной фазы движения КПМ. Знак «минус» этого слагаемого указывает на то, что смещение ЦМ С происходит в сторону отрицательных значений координатной оси x системы отсчета K_1 . Второе слагаемое $\Delta x_e = x_{C3} - x_{C2} = \Delta x_1$ является переносным смещением ЦМ С в системе отсчета K . Оно в системе отсчета K равно смещению Δx_1 опорного тела m_1 за общее время активной и пассивной фаз движения КПМ.

Согласно рис. 2, с, d, смещение Δx_1 опорного тела m_1 за общее время действия и последствий $0 \leq t \leq 1.5$ с (для рис. 2, с) и $0 \leq t \leq 3.573 \cdot 10^{12}$ с (для рис. 2, d) для $1 \cdot 10^{-12} \leq \mu_1 \leq 1.571$ Н·с/см равно нулю: $\Delta x_1 = 0$. Следовательно, смещение Δx_C (13) ЦМ при $\xi_{\pi} \leq \xi \leq \infty$ сохраняется постоянным: $\Delta x_C = \text{const} = 0$. Величина ξ_{π} является некоторым пороговым значением диссипативного параметра $\xi = 2\gamma_1 / \omega_{21}$ (5). Это пороговое значение ξ_{π} для выбранной модели МСЗ будет определено ниже. При $\xi \geq \xi_{\pi}$ смещение ЦМ С $\Delta x_C = \Delta x_r = -a(1 - \cos \alpha) = \text{const}$ и не зависит от коэффициента сопротивления μ_1 диссипативной среды движению ползуна m_1 [3].

Эффект постоянного смещения $\Delta x_C = \Delta x_r = -a(1 - \cos \alpha) = \text{const}$ (13) ЦМ С при $\xi_{\pi} \leq \xi \leq \infty$ обеспечивает вклад угла диссипативных потерь $\varepsilon = \arctg(\xi)$ (5) в угол $\varphi = \varphi_{10} - \varphi_{21} = \pi + \varepsilon$, характеризующий запаздывание фазы $\varphi_{10} = \varphi_{21} + \pi + \varepsilon$ прямолинейного движения ползуна m_1 (вдоль оси x) относительно фазы φ_{21} встречного вращательного движения рабочих тел m_2 в системе координат K_O , связанной с центром О ИД (1). При таком запаздывании скорость $\dot{x}_1(\varphi_{21} = \pi) = \dot{x}_C(\varphi_{21} = \pi) < 0$ основания m_1 при $\varphi_{21} = \alpha = \pi$ является отрицательной, как показано на рис. 2, с, d. Для отрицательного значения скорости $\dot{x}_1(\varphi_{21} = \pi) = \dot{x}_C(\varphi_{21} = \pi) < 0$ всегда выполняется условие

$$x_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[x_1(\alpha) + \frac{\dot{x}_C(\alpha)}{2\gamma_1} [1 - \exp(-2\gamma_1(t - t_1))] \right] = x_1(\alpha) + \frac{\dot{x}_C(\alpha)}{2\gamma_1} = 0; \quad \xi \geq \xi_{\pi}. \quad (14)$$

Условие (14) получено из (12) при $t \rightarrow \infty$. Согласно ему, смещение Δx_C ЦМ С КПМ для всех $\xi \geq \xi_{\pi}$ равно $\Delta x_C = \text{const}$, а при $\xi < \xi_{\pi}$ оно $\Delta x_C \rightarrow 0$.

Условие (14) отражает тот факт, что ползун m_1 при $t \rightarrow \infty$ асимптотически стремится к началу координат неподвижной системы отсчета K , которое определено начальном положением ползуна m_1 в момент времени $t = 0$ (см. рис. 2, с, d). Такое поведение КПМ не противоречит выводам работ [3, 5, 6].

Пороговое значение ξ_n было найдено на основе численного моделирования смещения Δx_C (13) ЦМ С. Оно искалось как функция от коэффициента сопротивления μ_1 , который определяет коэффициент затухания $\gamma_1 = \mu_1 / [2(m_1 + \tilde{m}_2)]$ (3) и одновременно диссипативный параметр $\xi = 2\gamma_1 / \omega_{21}$ (5). На рис. 3 приведен алгоритм численного моделирования.

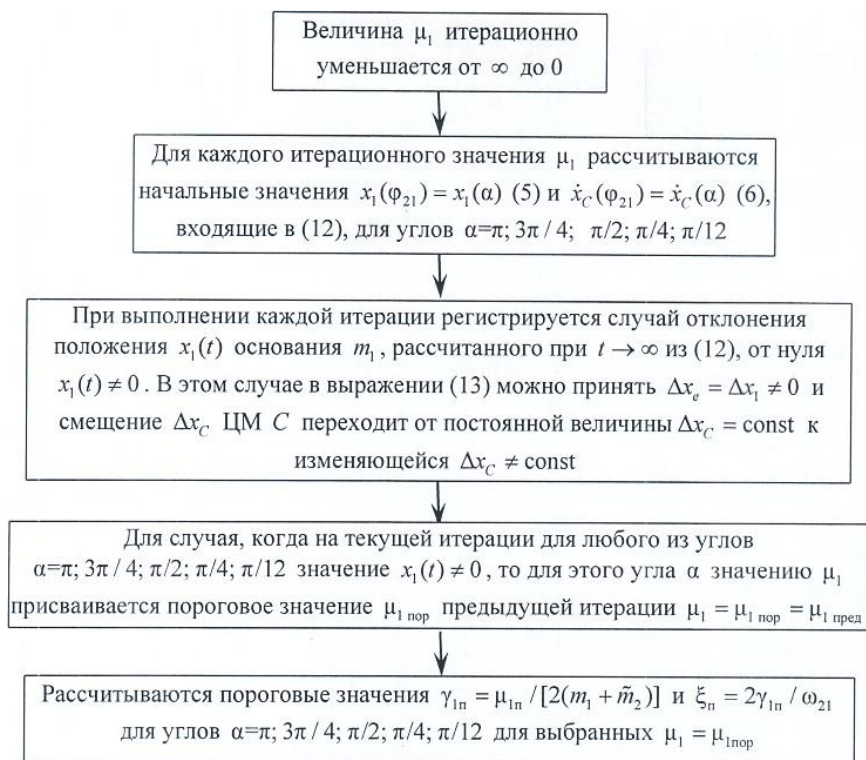


Рис. 3. Блок-схема алгоритма численного моделирования

Fig. 3. Block diagram for a numerical simulation algorithm

Результаты численного моделирования приведены на рис. 4.

В дополнение к рис. 4 в таблице приведены рассчитанные значения смещений Δx_C ЦМ С МСЗ для различных углов поворота α в виде функций от диссипативного параметра $\xi \geq \xi_n$.

Согласно рис. 4 и таблице, величина смещения Δx_C ЦМ С для каждого из углов $\alpha = \pi; 3\pi/4; \pi/2; \pi/4; \pi/12$ в диапазоне изменения $\xi_n \leq \xi \leq \infty$ диссипативного параметра ξ сохраняется постоянным, $\Delta x_C = \text{const}$. Из рис. 3 видно, что в малом интервале $\Delta \xi = 0.061 \cdot 10^{-13} - \alpha = \pi$ и $\Delta \xi = 0.084 \cdot 10^{-4} - \alpha = 3\pi/4; \pi/2; \pi/4; \pi/12$ уменьшения диссипативного параметра ξ смещение Δx_C ЦМ С линейно стремится к нулю, $\Delta x_C \rightarrow 0$ (в интервале $\Delta \xi$ график на рис. 3 показан штрихпунктирной линией).

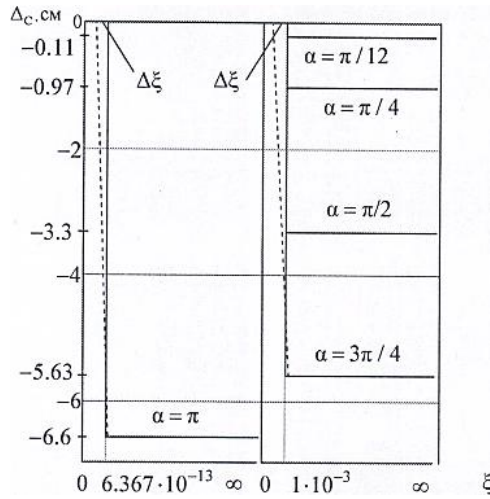


Рис. 4. Смещение Δx_C ЦМ C для фиксированных углов α в виде функции от диссипативного параметра ξ

Fig. 4. Offset Δx_C of the CM C for fixed angles α as a function of dissipative parameter ξ

Смещения центра масс для различных углов поворота α

Рисунок	Угол	Диссипативный параметр	Смещение ЦМ C	Общее время
Рис. 2, c	$\alpha = \pi$	$\xi = 1$	$\Delta x_C = -6.6 \text{ см} = \text{const}$	$t = 1.5 \text{ с}$
Рис. 2, d	$\alpha = \pi$	$\xi = \xi_{\text{п}} = 6.367 \cdot 10^{-13}$	$\Delta x_C = -6.6 \text{ см} = \text{const}$	$t = 3.543 \cdot 10^{12} \text{ с}$
Рис. 4	$\alpha = 3\pi/4; \pi/2; \pi/4; \pi/12$	$\xi_{\text{п}} \leq \xi \leq 1$ $\xi_{\text{п}} = 1 \cdot 10^{-3}$	$\Delta x_C = -5.633; -3.3; -0.967; -0.112 \text{ см}$	$t = 2 \cdot 10^3$

Также согласно рис. 4, рис. 2, c , d и таблице, наименьшее пороговое значение $\xi_{\text{п min}} = 6.367 \cdot 10^{-13}$ диссипативного параметра ξ наблюдается при угле $\alpha = \pi$, когда смещение $\Delta x_{C \text{ max}} = -6.6 \text{ см} = \text{const}$, ЦМ C максимально. При стремлении $\xi \rightarrow \xi_{\text{п}}$ начальная скорость $\dot{x}_1(\varphi_{21}) = \dot{x}_1(\pi)$, изменяясь по закону $-\sin 2\alpha$, стремится к нулю: $\dot{x}_1(\varphi_{21}) = \dot{x}_1(\pi) \rightarrow 0$. Она за малый интервал $\Delta \xi$ приращения ξ обращается в нуль: $\dot{x}_1(\varphi_{21}) = \dot{x}_1(\pi) = 0$. При этом в этом же малом интервале $\Delta \xi$ смещение ЦМ C Δx_C также стремится к нулю, $\Delta x_C \rightarrow 0$, обращаясь в нуль, $\Delta x_C = 0$, при $\xi_{\text{п}} - \Delta \xi$ (см. рис. 4).

Заключение

Таким образом, получено решение задачи для трехмассового КПМ типа «инерциод Толчина» [1]. Показано, что КПМ сводится к двухмассовому аналогу, а затем к одномассовому эквиваленту [2], масса m которого движется в центральном поле инерционного домена с уравнением движения (1) и его решением (5). Показано, что смещение Δx_C (13) центра O_C масс C КПМ в среде со значением

диссипативного параметра больше порогового $\xi_n \leq \xi \leq \infty$ остается постоянным: $\Delta x_C = -a(1 - \cos \alpha) = \text{const}$, что согласуется с работой [3]. Это обеспечивает эффективное движение инерциоида Толчина [1] посредством выбора разных угловых скоростей ω_{21} для прямого и обратного перемещения его рабочих тел m_2 . Например, для одного из них $\xi = 2\gamma_1 / \omega_{21} \geq \xi_n$, когда смещение Δx_C его ЦМ С постоянно, $\Delta x_C = \text{const}$, а для другого $\xi = 2\gamma_1 / \omega_{21} < \xi_n$, когда оно стремится к нулю, $\Delta x_C \rightarrow 0$. Полученные результаты базируются на аксиоме связей для сил инерции, которая является обобщением результатов работы [2], позволяют наиболее наглядно продемонстрировать физический принцип действия КПМ и ставят под сомнение выводы работ [7–9].

Список источников

1. Толчин В.Н. Инерциоид. Силы инерции как источник поступательного движения. Пермь: Кн. изд-во, 1977. 100 с.
2. Савелькаев С.В. Динамический анализ двухмассовой механической системы в диссипативной среде с учетом сил инерции // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 87. С. 135–149. doi: 10.17223/19988621/87/11
3. Савелькаев С.В. Эффект независимости величины смещения центра масс механической системы от диссипативности внешней среды // Механика машин, механизмов и материалов. 2011. № 4 (17). С. 42–48.
4. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. М.: Высш. школа, 1990. 607 с.
5. Егоров А.Г., Захарова О.С. Энергетически оптимальное движение вибратора в среде с наследственным законом сопротивления // Известия РАН. Теория и системы управления. 2015. № 3. С. 168–176.
6. Черноусько Ф.Л. Оптимальные периодические движения двухмассовой системы в сопротивляющейся среде // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72, вып. 2. С. 202–215.
7. Гулиа Н.В. Инерция. М.: Наука, 1982. 152 с. (Наука и технический прогресс).
8. Шипов Г.И. Теория физического вакуума. М.: НТ-Центр, 1993. 362 с.
9. Иванов Н.И. Ритмодинамика. М.: Энергия, 2007. 221 с.

References

1. Tolchin V.N. (1977) Inertsoid. Sily inertsii kak istochnik postupatel'nogo dvizheniya [Inertioid. Forces of inertia as a source of translational motion]. Perm: Permskoe knizhnoe izdatel'stvo.
2. Savel'kaev S.V. (2024) Dinamicheskiy analiz dvukhmassovoy mekhanicheskoy sistemy v dissipativnoy srede s uchetom sil inertsii [Dynamic analysis of a two-mass mechanical system in a dissipative medium taking into account inertial forces]. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. 87. pp. 135–149. doi: 10.17223/19988621/87/11
3. Savel'kaev S.V. (2011) Effekt nezavisimosti velichiny smeshcheniya tsentra mass mekhanicheskoy sistemy ot dissipativnosti vneshney sredy [The effect of independence of the displacement of the center of mass of a mechanical system from the dissipativity of the external environment]. Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov – Mechanics of Machines, Mechanisms, and Materials. 4(17).
4. Nikitin N.N. (1990) Kurs teoreticheskoy mekhaniki [Course of theoretical mechanics]. Moscow: Vysshaya shkola.
5. Egorov A.G., Zakharova O.S. (2015) Energeticheski optimal'noe dvizhenie vibratora v srede s nasledstvennym zakonom soprotivleniya [Energetically optimal movement of a vibrator in

- a medium with a hereditary law of resistance]. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya* – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Theory and Control Systems. 3. pp. 168–176.
6. Chernous'ko F.L. (2008) *Optimal'nye periodicheskie dvizheniya dvukhmassovoy sistemy v so-protivlyayushcheysya srede* [The optimal periodic motions of a two-mass system in a resisting medium]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* – Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 72(2). pp. 202–215.
7. Gulia N.V. (1982) *Inertsia* [Inertia]. Moscow: Nauka.
8. Shipov G.I. (1993) *Teoriya fizicheskogo vakuuma* [Theory of physical vacuum]. Moscow: NT-Tsentr.
9. Ivanov N.I. (2007) *Ritmodinamika* [Rhythmodynamics]. Moscow: Energiya.

Сведения об авторе:

Савелькаев Сергей Викторович – доктор технических наук, доцент ВАК, профессор кафедры специальных устройств, инноватики и метрологии Сибирского государственного университета геосистем и технологий (Новосибирск, Россия). E-mail: sergei.savelkaev@yandex.ru

Information about the author:

Savel'kaev Sergey V. (Doctor of Technical Sciences, Professor, Innovations and Metrology of the Siberian State University of Geosystems and Technologies, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: sergei.savelkaev@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 28.03.2024; принята к публикации 01.08.2025

The article was submitted 28.03.2024; accepted for publication 01.08.2025