

Научная статья

УДК 539.376

doi: 10.17223/19988621/96/11

Аналитический принцип соответствия упругих и вязкоупругих задач

Александр Андреевич Светашков¹, Михаил Сергеевич Павлов²,
Ольга Сергеевна Пустовых³

^{1, 2, 3} *Томский политехнический университет, Томск, Россия*

² *Томский государственный университет, Томск, Россия*

¹ *svetashkov@tpu.ru*

² *mmpavlov@tpu.ru*

³ *BOS1983@tpu.ru*

Аннотация. Рассмотрено теоретическое обоснование подхода к решению задач расчета прочности конструкций из вязкоупругих материалов. Сформулирован аналитический метод решения вязкоупругих задач. Суть его в том, что найдены функции времени, при которых определяющие уравнения упругости и вязкоупругости тождественны в любой момент времени. При реализации предложенного принципа нет ограничений на представление упругого решения в виде аналитической функции упругих постоянных.

Ключевые слова: эффективные по времени модули, тождественность определяющих уравнений, взаимобратимость определяющих уравнений упругости и вязкоупругости, граничные задачи I и II рода

Для цитирования: Светашков А.А., Павлов М.С., Пустовых О.С. Аналитический принцип соответствия упругих и вязкоупругих задач // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 96. С. 131–144. doi: 10.17223/19988621/96/11

Original article

Analytical correspondence principle for the elastic and viscoelastic problems

Aleksandr A. Svetashkov¹, Mikhail S. Pavlov², Ol'ga S. Pustovykh³

^{1, 2, 3} *Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation*

² *Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*

¹ *svetashkov@tpu.ru*

² *mmpavlov@tpu.ru*

³ *BOS1983@tpu.ru*

Abstract. This paper deals with the development of a method for solving the problems of isotropic and anisotropic viscoelastic bodies based on the separation of spatial and

temporal variables. In contrast to the classical method of separation of variables implying the transformation of systems of partial differential equations, a specific scheme of transformation of the constitutive equations for a viscoelastic body is proposed. As a result of these transformations, the elastic body equations are obtained, in which some known time functions are used in terms of the material constants of elasticity.

First, the constitutive equations of a linear viscoelastic body are considered. Using identical transformations, the equivalence of the constitutive equations for a viscoelastic medium and a comparative elastic medium is proved if the stresses are set at the boundary. In the same manner, the equivalence of viscoelastic and elastic media is proved if the displacements are specified at the boundary. Finally, a relation is identified between the parameters of the comparative elastic media for these two cases, and their mutual converse is justified. The real-problem example is solved and presented at the end of the paper.

Keywords: time-efficient moduli, identity of constitutive equations, interchangeability of constitutive equations of elasticity and viscoelasticity, the first and second boundary-value problems

For citation: Svetashkov, A.A., Pavlov, M.S., Pustovykh, O.S. (2025) Analytical correspondence principle for the elastic and viscoelastic problems. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 96. pp. 131–144. doi: 10.17223/19988621/96/11

Введение

Первые исследования по механике вязкоупругих материалов, обладающих как упругими, так и вязкими свойствами, были проведены Дж. Максвеллом [1], Л. Больцманом [2], В. Вольтерра [3, 4]. В середине прошлого века были опубликованы классические работы Т. Алфрея [5], Д. Ферри [6], А.Р. Ржаницына [7] Д. Бленда [8], Н.Х. Арутюняна [9].

В связи с широким применением полимерных и композитных материалов дальнейшее развитие теории вязкоупругости было продолжено в работах J. Reddy [10], A. Pipkin [11], W. Flugge [12], R. Christensen [13], М.А. Колтунова [14], R. Schapery [15], А.А. Ильюшина, Б.Е. Победри [16], И.И. Бугакова [17], Ю.Н. Работнова [18, 19], В.В. Москвитина [20] и др. В настоящее время развитие методов анализа изделий из материалов, проявляющих вязкоупругие свойства, продолжается [21, 22], в том числе с применением нейросетей [23, 24].

Известны основные методы, составляющие основу математического аппарата решения граничных задач вязкоупругости. Широко известен аналитический метод Вольтерра [3, 4], суть которого в замене в упругом решении материальных констант на интегральные операторы и последующей расшифровке полученного решения. Единственным ограничением на его применение является необходимость иметь упругое решение в виде аналитической функции материальных постоянных. Также весьма распространен метод преобразования Лапласа, А.А. Ильюшиным сформулирован метод аппроксимаций, основой которого служит некоторый способ задания зависимости упругих решений от упругих постоянных [25]. В.И. Малый, Н.А. Труфанов [26] предложили метод квазиконстантных операторов, который состоит в обосновании возможности выноса ядра из подынтегрального выражения, входящего в определяющие уравнения вязкоупругого тела.

Настоящая публикация посвящена развитию подхода к решению задач вязкоупругости изотропных [27] и анизотропных [28] тел, основанного на разделении

пространственных и временных переменных. В отличие от классического метода разделения переменных, в котором проводится преобразование систем уравнений в частных производных, предложена схема преобразований определяющих уравнений вязкоупругого тела. В результате проведенных преобразований получены уравнения упругого тела, в которые вместо постоянных упругости входят некоторые известные функции времени. С учетом условий на границе имеем два типа модулей, эффективных по времени [27, 29]. В последующем изложении будем обозначать и называть их $g_c(t)$, $k_c(t)$ и $g_l(t)$, $k_l(t)$, подразумевая, что данные функции времени относятся соответственно к типу Кастильяно и типу Лагранжа [30].

1. Постановка задачи

Рассмотрим граничную задачу линейной теории вязкоупругости II рода. Напряжения и деформации связаны уравнениями

$$s_{ij} = 2G^* e_{ij}, \quad (1)$$

$$\sigma = 3K^* \theta. \quad (2)$$

Здесь s_{ij} , e_{ij} – девиаторы напряжений и деформаций, σ , θ – первые инварианты тензора напряжений и деформаций соответственно, G^* , K^* – интегральные операторы релаксации, сдвиговой и объемной соответственно.

$$\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}, \quad \theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33},$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma \delta_{ij}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \theta \delta_{ij},$$

σ_{ij} , ε_{ij} – соответственно тензоры напряжений и деформаций, δ_{ij} – символ Кронекера.

$$G^* e_{ij} \equiv G \left[e_{ij}(t) - \int_0^t R(t-\tau) e_{ij}(\tau) d\tau \right],$$

$$K^* \theta \equiv K \left[\theta(t) - \int_0^t R_1(t-\tau) \theta(\tau) d\tau \right].$$

Здесь K – модуль объемного сжатия, G – модуль сдвига. $R(t)$, $R_1(t)$ – ядра операторов релаксации (или функции памяти), определяемые из опыта.

Уравнения равновесия в перемещениях при отсутствии объемных сил

$$\left(K^* + \frac{1}{3} G^* \right) \theta_{,i} + G^* \Delta u_i = 0, \quad \langle i = 1, 2, 3 \rangle. \quad (3)$$

Здесь $u_i(u, v, w)$ – компоненты вектора перемещений, Δ – оператор Лапласа, запятая означает дифференцирование по пространственной координате x_i , соответствующей индексу после запятой:

$$\theta_{,i} = \frac{\partial \theta}{\partial x_i}.$$

Если в тексте встречаются индексы, помещенные в круглые скобки, то это подразумевает суммирование от 1 до 3. Если же упомянутые индексы заключены в угловые скобки, то суммирование не производится.

Условия на границе в напряжениях:

$$\sigma_{ij} n_j \Big|_{\Gamma} = S_i^0(x_1, x_2, x_3, t), \quad \langle i = 1, 2, 3 \rangle, \quad (j = 1, 2, 3). \quad (4)$$

Здесь n_j – косинусы углов между осями координат и нормалью к границе, S_i^0 – граничные нагрузки, зависящие от пространственных координат x_1, x_2, x_3 и времени t .

Относительно вида внешних граничных нагрузок S_i^0 принимаются следующие предположения:

$$S_i^0(x_1, x_2, x_3, t) = \tilde{S}_i^k(x_1, x_2, x_3) H_i^k(t), \quad \langle i = 1, 2, 3 \rangle, \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (5)$$

где $\tilde{S}_i^k(x_1, x_2, x_3)$ – некоторые функции, определяющие усилия на границе и зависящие только от пространственных координат, $H_i^k(t)$ – функции, зависящие только от времени, n – число членов разложения в аналитическом представлении нагрузки на границе. Если представление (5) невыполнимо, мы можем потребовать выполнение условий разложимости $S_i^0 = S_i^0(x_1, x_2, x_3, t)$ в ряд Фурье.

В дальнейших рассуждениях примем более простую форму граничных условий в напряжениях:

$$S_i^0(x_1, x_2, x_3, t) = \tilde{S}_i^0(x_1, x_2, x_3) H(t), \quad (6)$$

где $H(t)$ – какая-либо из входящих в (5) функций $H_i^k(t)$. Для линейных задач справедлив принцип суперпозиции, следовательно, результаты, полученные для задачи с граничными условиями вида (6), легко распространяются на задачи с граничными условиями вида (5).

2. Процедура получения эффективных по времени модулей на основе анализа физических уравнений

Рассмотрим некоторую задачу вязкоупругости, постановка которой определяется уравнениями (1)–(3). Пусть на границе заданы только напряжения (задача II рода). Выражения $g_c(t)$, $k_c(t)$, $g_l(t)$, $k_l(t)$ эффективных по времени модулей для этого случая найдены в [27] на основе решений двух вариационных задач о близости функционалов потенциальных энергий напряжений исходной вязкоупругой среды и упругой среды сравнения.

Получим теперь выражения эффективных по времени модулей для этой задачи путем преобразований определяющих уравнений. Таким образом будет доказана тождественность определяющих уравнений линейно вязкоупругой среды и упругой среды сравнения.

В соответствии с граничными условиями (6) будем искать решение в следующем виде:

$$\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3, t) = \tilde{\sigma}_{ij}(x_1, x_2, x_3) H(t), \quad (7)$$

где $\tilde{\sigma}_{ij}$ – тензор напряжений, компоненты которого не зависят от времени.

Подставим соотношение (7) в (1). Производя свертку материального оператора G^* с функцией $H(t)$, получим

$$e_{ij}(t) = \frac{1}{2G^*} s_{ij} = \tilde{s}_{ij} \frac{1}{2G^*} H,$$

где $\tilde{s}_{ij}$ – девиатор напряжений, не зависящих от времени. После тождественных преобразований имеем

$$e_{ij}(t) = \frac{1}{2} s_{ij} \frac{G^{*-1} H}{H(t)}. \quad (8)$$

Обозначим

$$g_c(t) = \frac{H(t)}{G^{*-1}H}. \quad (9)$$

Функцию $g_c(t)$ далее будем называть «эффективный по времени модуль сдвига кастильянового типа». Тогда (8) запишется как

$$e_{ij}(t) = \frac{1}{2g_c(t)} s_{ij}(t). \quad (10)$$

Соотношения (10) представляют собой упругий закон Гука для девиаторов напряжений и деформаций, в которых упругая постоянная заменена некоторой известной функцией времени.

Проанализируем физико-математический смысл выражения эффективного модуля $g_c(t)$. Зависимость решений граничных задач линейной вязкоупругости от времени складывается из следующих факторов:

а) зависимостей определяющих уравнений от времени, обусловленных природой упруго-наследственных тел;

б) зависимостей граничных нагрузок от времени, причем даже при постоянных по времени нагрузках последние можно представить как произведение некоторых функций координат на ступенчатую функцию Хевисайда $h(t)$.

Таким образом, можно констатировать следующий факт: $g_c(t)$ учитывает как влияние упруго-наследственных свойств за счет материального оператора сдвиговой релаксации G^* , так и влияние зависимости от времени граничных нагрузок посредством учета функции $H(t)$.

Аналогичным образом проведем тождественное преобразование определяющих уравнений вязкоупругости для шаровых тензоров (2). Повторяя все предыдущие рассуждения, получим

$$\theta = \frac{1}{3K^*} \sigma = \frac{1}{3k_c(t)} \sigma(t), \quad k_c(t) = \frac{H(t)}{K^{*-1}H}. \quad (11)$$

Здесь $k_c(t)$ – объемный модуль кастильянового типа.

Чтобы установить вид уравнений равновесия, перейдем к определяющим уравнениям вязкоупругости и упругости, выраженным через тензоры напряжений и деформаций. Имеем для вязкоупругости

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{3}(3K^* - 2G^*)\theta\delta_{ij} + 2G^*\varepsilon_{ij}, \quad (12)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{3}(3K_1^* - 2G_1^*)\sigma\delta_{ij} + 2G_1^*\sigma_{ij}. \quad (13)$$

Здесь δ_{ij} – символ Кронекера,

$$3K_1^* = \frac{1}{3K^*}, \quad 2G_1^* = \frac{1}{2G^*}.$$

Воспользуемся тем, что определяющие уравнения (13) по доказанному тождественны упругим уравнениям, которые на основании (10), (11) можно записать как

$$\varepsilon_{ij} = \left(\frac{1}{9k_c(t)} - \frac{1}{6g_c(t)} \right) \sigma\delta_{ij} + \frac{1}{2g_c(t)} \sigma_{ij}. \quad (14)$$

Теперь, если мы разрешим систему (14) относительно напряжений, то получим искомые определяющие уравнения упругого тела, выраженные через эффективные модули $g_c(t)$, $k_c(t)$:

$$\sigma_{ij}(t) = \left(k_c(t) - \frac{2}{3} g_c(t) \right) \theta \delta_{ij} + 2 g_c(t) \varepsilon_{ij}. \quad (15)$$

Далее с помощью стандартной процедуры вывода системы уравнений равновесия в форме Ламе выразим деформации через производные от перемещений. Полученные таким способом компоненты тензора напряжений подставим в систему статических уравнений равновесия. В результате получим

$$\left(k_c(t) + \frac{1}{3} g_c(t) \right) \theta_{,i} + g_c(t) \Delta u_i = 0, \quad \langle i = 1, 2, 3 \rangle. \quad (16)$$

В силу тождественности проведенных преобразований можно считать доказанным следующее утверждение: две граничные задачи II рода в одной и той же расчетной области с одинаковыми условиями на границе вида (4), одна из которых есть задача теории вязкоупругости с определяющими уравнениями (1)–(2) и уравнениями равновесия (3), а другая – задача теории упругости с определяющими уравнениями (10)–(11) и уравнениями равновесия (16), дают тождественные решения при условии представления напряжений на границе в виде (6).

3. Граничная задача вязкоупругости I рода

Рассмотрим некоторую задачу вязкоупругости, постановка которой определяется уравнениями (1)–(3). Пусть условия на границе для нее заданы перемещениями

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t)|_{\Gamma} = \tilde{u}_i^m(x_1, x_2, x_3) T_i^m(t), \quad \langle i = 1, 2, 3 \rangle, \quad (m = 1, 2, \dots, n), \quad (17)$$

где $\tilde{u}_i^m(x_1, x_2, x_3)$ – функции перемещений на границе, зависящие только от пространственных координат, $T_i^m(t)$ – некоторые функции, зависящие только от времени, n – число членов разложения в аналитическом представлении заданных перемещений. В дальнейшем (в силу линейности задачи и выполнения принципа суперпозиции) будем использовать граничные условия вида:

$$u_i|_{\Gamma} = \tilde{u}_i(x_1, x_2, x_3) T(t), \quad \langle i = 1, 2, 3 \rangle, \quad (18)$$

где $\tilde{u}_i(x_1, x_2, x_3)$ – одна из функций $\tilde{u}_i^m(x_1, x_2, x_3)$, а $T(t)$, соответственно, – одна из функций $T_i^m(t)$. Для вязкоупругих перемещений согласно [31] справедливы естественные начальные условия

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t)|_{t=0} = \tilde{u}_i^0(x_1, x_2, x_3), \quad \langle i = 1, 2, 3 \rangle,$$

где $\tilde{u}_i^0(x_1, x_2, x_3)$ – решение упругой задачи, соответствующее граничным условиям $u_i(x_1, x_2, x_3, 0)|_{\Gamma}$.

Рассмотрим процедуру вывода $g(t)$, $k(t)$ на основе определяющих уравнений (1)–(2). Будем искать решение задачи в следующем виде:

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) = \tilde{u}_i(x_1, x_2, x_3) T(t). \quad (19)$$

Подставляя (19) в (1), (2), имеем

$$s_{ij}(t) = 2G^* e_{ij} = 2\tilde{e}_{ij}(x_1, x_2, x_3) G^* T.$$

Здесь

$$e_{ij}(t) = \tilde{e}_{ij}(\tilde{u}(x_1, x_2, x_3))T(t).$$

где $\tilde{e}_{ij}(\tilde{u}(x_1, x_2, x_3))$ – тензор деформаций, чьи компоненты зависят только от пространственных координат. Операция свертки G^* с функцией $T(t)$ получается после тождественных преобразований

$$g_i(t) = \frac{G^*T}{T(t)}, \quad (20)$$

$$s_{ij}(t) = 2g_i(t)e_{ij}(t). \quad (21)$$

Здесь $g_i(t)$ – эффективный по времени модуль сдвига лагранжевого типа, а (21) представляет собой определяющие уравнения упругого тела для девиаторов.

Аналогично рассуждая, находим упругий вид определяющих уравнений для шаровых тензоров:

$$\sigma(t) = 3k_i(t)\theta(t). \quad (22)$$

Здесь $k_i(t)$ – эффективный по времени объемный модуль лагранжевого типа

$$k_i(t) = \frac{K^*T}{T(t)}. \quad (23)$$

Система уравнений равновесия в соответствии с определяющими уравнениями (21)–(22) примет следующий вид:

$$\left(k_i(t) + \frac{1}{3}g_i(t)\right)\theta_i + g_i(t)\Delta u_i = 0, \quad \langle i = 1, 2, 3 \rangle. \quad (24)$$

В силу того, что физические уравнения (1)–(2) и (21)–(22) представляют собой тождественные соотношения при $t \in [0, \infty]$, можно считать доказанным следующее утверждение: для одной и той же расчетной области при условии представления перемещений в виде (19) решение задачи теории упругости с физическими уравнениями (21)–(22) и уравнениями равновесия вида (24) тождественно решению задачи вязкоупругости с физическими соотношениями в форме (1)–(2) и уравнениями равновесия вида (3).

4. Анализ прямых и обратных определяющих уравнений теории упругости и вязкоупругости

Рассмотрим определяющие уравнения вязкоупругого тела (12)–(13). Эти соотношения являются взаимнообратными. Рассмотрим следующий вопрос: будут ли взаимнообратными с (12)–(13) определяющие уравнения упругого тела с модулями $g_c(t)$, $g_i(t)$?

В качестве примера исследуем данный вопрос для определяющих уравнений, разрешенных относительно деформаций упругого тела с эффективными по времени модулями кастильянового типа,

$$\varepsilon_{ij} = \left(\frac{1}{9k_c(t)} - \frac{1}{6g_c(t)} \right) \sigma \delta_{ij} + \frac{1}{2g_c(t)} \sigma_{ij}. \quad (25)$$

Будем рассматривать II граничную задачу, когда напряжение разыскиваются в виде (7). Так как мы установили, что определяющие уравнения (13) и (25)

тождественны, то это означает, что и определяющие уравнения (12) и (25) должны быть также взаимнообратны.

Для проверки подставим (25) в (12) и учтем, что напряжения отыскиваются в виде:

$$\sigma_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij}(x_1, x_2, x_3)H(t).$$

Рассмотрим подстановку (25) в (12) на примере уравнения, получающегося, если положить $i = j = 1$. Учтем выражение θ через σ через соотношение (11).

Имеем

$$\sigma_{11} = \left(K^* - \frac{2}{3} G^* \right) \frac{H(t)}{3k_c(t)} \tilde{\sigma} + 2G^* \left[\frac{1}{2g_c(t)} \tilde{\sigma}_{11} + \left(\frac{1}{9k_c(t)} - \frac{1}{6g_c(t)} \right) \tilde{\sigma} \right] H(t). \quad (26)$$

Сгруппируем слагаемые, содержащие $\tilde{\sigma}$:

$$\left[\frac{1}{3} \left(K^* - \frac{2}{3} G^* \right) \frac{H}{k_c} + \frac{2}{9} G^* \frac{H}{k_c} - \frac{1}{3} G^* \frac{H}{g_c} \right] \tilde{\sigma}.$$

Приведем подобные:

$$\tilde{\sigma} \left[\frac{1}{3} K^* \frac{H}{k_c} + G^* \left(-\frac{2}{9} \frac{H}{k_c} + \frac{2}{9} \frac{H}{k_c} - \frac{1}{3} \frac{H}{g_c} \right) \right] = \tilde{\sigma} \left[\frac{1}{3} K^* \frac{H}{k_c} - \frac{1}{3} G^* \frac{H}{g_c} \right].$$

В силу легко проверяемого соотношения

$$K^* \frac{H}{k_c} = G^* \frac{H}{g_c} = H(t)$$

получаем, что коэффициент при $\tilde{\sigma}$ равен 0. Таким образом, соотношение (26) приводится к выражению

$$\sigma_{11} = 2G^* \frac{H}{2g_c} \tilde{\sigma}_{11} = \tilde{\sigma}_{11} H(t) = \sigma_{11}.$$

Полученное тождество доказывает взаимнообратность соотношений (12)–(25).

Аналогичным образом мы можем доказать взаимнообратность определяющего уравнения линейной вязкоупругости (13) и определяющего уравнения линейно упругого тела, которое можно записать в следующем виде:

$$\sigma_{ij} = \left(k_c(t) - \frac{2}{3} g_c(t) \right) \theta \delta_{ij} + 2g_c(t) \varepsilon_{ij}. \quad (27)$$

Мы рассмотрели взаимнообратность определяющих уравнений теории вязкоупругости и теории упругости на примере граничной задачи II рода. Для граничных задач I рода все рассуждения остаются в силе.

Полученный в работе результат взаимнообратности определяющих уравнений теории вязкоупругости и теории упругости представляется полезным и при решении граничных задач другими методами. Дело в том, что определение взаимнообратных определяющих уравнений, имеющих вид интегральных уравнений Вольтера II рода, связано с нахождением резольвентных ядер. Не для всех типов ядер ползучести могут быть определены выражения соответствующих ядер релаксации. Особенно остро вопрос о нахождении резольвентных ядер стоит в теории вязкоупругости стареющих тел.

Предложенный в настоящей работе аналитический принцип соответствия позволяет обойти проблему нахождения резольвентных ядер интегральных операторов

ввиду того, что мы располагаем тождественными определяющими уравнениями упругого тела, которые взаимнообратны соответствующим определяющим уравнениям теории вязкоупругости.

5. Пример реализации решения

Рассмотрим задачу о действии сосредоточенной силы F на некоторую точку вязкоупругой среды [32] в декартовой системе координат, начало которой совпадает с точкой приложения силы, а ось z совпадает с ее направлением.

В случае упругой среды нормальные напряжения определяются формулами

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{Fz}{8\pi r^3} \left[1 - \frac{3}{(1-2\nu)} \frac{x^2}{r^2} \right], & \sigma_y &= \frac{Fz}{8\pi r^3} \left[1 - \frac{3}{(1-2\nu)} \frac{y^2}{r^2} \right], \\ \sigma_z &= -\frac{Fz}{8\pi r^3} \left[1 + \frac{3}{(1-2\nu)} \frac{z^2}{r^2} \right],\end{aligned}\quad (28)$$

где ν – коэффициент Пуассона, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Чтобы получить решение для вязкоупругой среды, представим (28) в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{Fz}{8\pi r^3} \left[\frac{r^2 - x^2}{r^2} - \frac{2}{\omega} \frac{x^2}{r^2} \right], & \sigma_y &= \frac{Fz}{8\pi r^3} \left[\frac{r^2 - y^2}{r^2} - \frac{2}{\omega} \frac{y^2}{r^2} \right], \\ \sigma_z &= -\frac{Fz}{8\pi r^3} \left[\frac{r^2 + z^2}{r^2} + \frac{2}{\omega} \frac{z^2}{r^2} \right],\end{aligned}\quad (29)$$

где

$$\omega = 2G/3K.$$

Точное решение для напряжений на основе принципа Вольтерра получается путем подстановки в (29) вместо постоянных упругости соответствующих интегральных операторов. Пусть сила F представима в виде:

$$F(t) = F_0 H(t),$$

где F_0 – некоторая константа. Тогда точное решение

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{F_0 z}{8\pi r^3} \left[\frac{r^2 - x^2}{r^2} H(t) - 2 \frac{x^2}{r^2} \omega^{*-1} H \right], \\ \sigma_y &= \frac{F_0 z}{8\pi r^3} \left[\frac{r^2 - y^2}{r^2} H(t) - 2 \frac{y^2}{r^2} \omega^{*-1} H \right], \\ \sigma_z &= -\frac{F_0 z}{8\pi r^3} \left[\frac{r^2 + z^2}{r^2} H(t) + 2 \frac{z^2}{r^2} \omega^{*-1} H \right],\end{aligned}\quad (30)$$

где ω^* – интегральный оператор, определяемый как произведение операторов $2G^*$ и $3K_1^*$.

Решение на основе обобщенного принципа соответствия получится путем замены в (29) упругой постоянной ω на $\omega_c(t) = 2g_c(t)/(3K)$:

$$\sigma_x = \frac{F_0 H(t) z}{8\pi r^3} \left[\frac{r^2 - x^2}{r^2} - 2 \frac{x^2}{r^2} \frac{1}{\omega_c(t)} \right],$$

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \frac{F_0 H(t) z}{8\pi r^3} \left[\frac{r^2 - y^2}{r^2} - 2 \frac{y^2}{r^2} \frac{1}{\omega_c(t)} \right], \\ \sigma_z &= -\frac{F_0 H(t) z}{8\pi r^3} \left[\frac{r^2 + z^2}{r^2} + 2 \frac{z^2}{r^2} \frac{1}{\omega_c(t)} \right],\end{aligned}\tag{31}$$

где

$$\omega_c(t) = 2g_c(t)/3k_c(t).\tag{32}$$

Во многих случаях объемные свойства материала не зависят от времени. Тогда

$$\omega^* x = \frac{2}{3K} G^* H, \quad \omega^{*-1} = \frac{3K}{2} G^{*-1} H.$$

Легко видеть, что если в (32) $k_c(t) = K$, а $g_c(t)$ определяется в соответствии с (9), то выражения (30) и (31) тождественны. Перемещения в рассмотренном примере могут быть определены с помощью формул Чезаро.

Заключение

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы.

1. Решения двух типов упругих граничных задач I и II рода, найденных посредством $g_c(t)$, $g_l(t)$, тождественны решениям соответствующих вязкоупругих задач. Доказательство данного утверждения базируется на том, что

– определяющие уравнения вязкоупругого тела и упругого тела с модулями, зависящими от времени, в любой момент истории нагружения равны между собой, если решение граничной задачи вязкоупругости отыскивается в виде произведения решения упругой задачи на функцию, которая зависит только от времени и которая входит в формулировку граничных условий.

– системы уравнений равновесия упругого и вязкоупругого тел, хотя и различны для каждого из двух типов граничных задач, также тождественны;

– граничные условия в рассмотренных двух случаях также одинаковы.

2. Решение вязкоупругой граничной задачи III рода (когда на одной части границы заданы напряжения, на другой – перемещения), в случае линейности соответствующей упругой задачи может быть найдено на основе принципа суперпозиции.

3. Тестирование предложенного метода решения граничных задач вязкоупругости можно провести двумя способами:

а) непосредственное решение двух типов систем уравнений равновесия в соответствии с типами граничных условий;

б) так как мы фактически решаем граничную задачу теории упругости (в каждый момент времени t), то погрешность может возникать только из-за погрешности определения упругого решения, для которого справедлива теорема единственности;

в) при сравнении решений с уже имеющимися возникают невысокие погрешности, обусловленные тем, что преобразование точных решений с помощью алгебры интегральных операторов само по себе содержит некоторые погрешности, примером которых может служить двойственность формулы перемножения двух интегральных операторов.

Обобщая представленные выводы, можно утверждать, что описанный в настоящей работе аналитический принцип соответствия упругих и вязкоупругих задач может быть применен для практических задач при следующих ограничениях:

- задача является квазистатической;
- определяющие уравнения имеют линейный вид;
- граничные условия представимы в виде произведения функции пространственных координат на функцию времени или суммы таких произведений.

Список источников

1. *Maxwell J.C.* On the dynamical theory of gases // *Philosophical Transactions*. 1867. № 157. P. 49–88.
2. *Boltzman L.* Zur theorie der elastischen nachwirkung // *Wiener Berichte*. 1874. № 70. P. 275–306. doi: 10.1002/andp.18782411107
3. *Volterra V.* Lecons sur les fonctions de lignes. Paris: Gautierr Villars, 1912. 230 p.
4. *Volterra V.* The theory of functionals and of integral and integrodifferential equations. London–Glasgow: Blackie & Son Limited, 1930. 226 p.
5. *Алфрей Т.* Механические свойства высокополимеров. М.: Изд-во иностр. лит., 1952. 239 с.
6. *Ферри Дж.* Вязкоупругие свойства полимеров / пер. с 2-го изд. под ред. В.Е. Гуля. М.: Из-во иностр. лит., 1963. 535 с.
7. *Ржаницын А.Р.* Теория ползучести. М.: Стройиздат, 1968. 416 с.
8. *Бленд Д.* Теория линейной вязко-упругости // пер. с англ. И.И. Гольберга, Н.И. Малинина; под ред. Э.И. Григолюка. М.: Мир, 1965. 199 с.
9. *Арутюнян Н.Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.; Л.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1952. 324 с.
10. *Reddy J.N.* An introduction to continuum mechanics. New York: Cambridge University Press, 2008. 449 p.
11. *Pipkin A.C.* Lectures of viscoelasticity theory. New York: Springer Verlag, 1986. 181 p.
12. *Flugge W.* Viscoelasticity. New York: Blaisdell Press, 1967. 187 p.
13. *Christensen R.M.* Theory of viscoelasticity: an introduction. New York: Academic, 1980. 364 p.
14. *Колтунов М.А., Майборода В.П., Зубчанинов В.Г.* Прочностные расчеты изделий из полимерных материалов. М.: Высш. школа, 1983. 239 с.
15. *Schapery R.A.* Stress analysis of viscoelastic composite materials // *Journal of Composite Materials*. 1967. V. 1 (3). P. 228–267.
16. *Ильюшин А.А., Победра Б.Е.* Основы математической теории термо-вязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
17. *Бугаков И.И.* Ползучесть полимерных материалов (теория и приложения). М.: Наука, 1973. 288 с.
18. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
19. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
20. *Москвитин В.В.* Сопротивление вязкоупругих материалов: применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1972. 328 с.
21. *Talybly L.Kh., Mamedova M.A.* Study on the Method for a Solution to Some Class of Quasi-Static Problems in Linear Viscoelasticity Theory, as Applied to Problems of Linear Torsion of a Prismatic Solid // *Recent Advances in Mathematical Research and Computer Science* / ed. by L.G. Rodino. Book Publisher International, 2021. V. 1. P. 63–72.
22. *Lin C.-Y.* Rethinking and researching the physical meaning of the standard linear solid model in viscoelasticity // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2024. V. 31 (11). P. 2370–2385.
23. *Chen G.* Recurrent neural networks (RNNs) learn the constitutive law of viscoelasticity // *Comput. Mech*. 2021. V. 67 (3). P. 1009–1019.

24. Xu K. et al. Learning viscoelasticity models from indirect data using deep neural networks // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2021. V. 387. Art. 114124.
25. Ильюшин А.А. Метод аппроксимаций для расчета конструкций по линейной теории термо-вязко-упругости // Механика полимеров. 1968. № 6. С. 210–221.
26. Малый В.И., Труфанов Н.А. Метод квазиконстантных операторов в теории вязкоупругости анизотропных нестареющих материалов // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1987. № 6. С. 148–154.
27. Svetashkov A.A., Kupriyanov N.A., Pavlov M.S., Vakurov A.A. Variable separation method for solving boundary value problems of isotropic linearly viscoelastic bodies // Acta Mechanica. 2020. V. 231 (9). С. 3583–3606.
28. Светашков А.А., Куприянов Н.А., Павлов М.С. Метод разделения переменных для задач линейно вязкоупругого анизотропного тела // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 84. С. 123–138. doi: 10/17223/19988621/84/10
29. Svetashkov A., Kupriyanov N., Pavlov M. Generalization of the variable separation method for solving boundary value problems of linear viscoelasticity of kinds I and III // Acta Mechanica. 2024. V. 235. P. 1–17.
30. Светашков А.А. Прикладные задачи механики вязкоупругих материалов. Томск: Изд-во ТПУ, 2012. 205 с.
31. Дюво Г. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 384 с.
32. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. М.: Высш. школа, 1976. 277 с.

References

1. Maxwell J.C. (1867) On the dynamical theory of gases. *Philosophical Transactions*. 157. pp. 49–88. doi: 10.1098/rstl.1867.0004
2. Boltzman L. (1874) Zur Theorie der Elastischen Nachwirkung. *Wiener Berichte*. 70. pp. 275–306. doi: 10.1002/andp.18782411107
3. Volterra V. (1912) *Lecons sur Les Fonctions de Lignes*. Paris: Gautierr Villars.
4. Volterra V. (1930) *Theory of Functionals and of Integral and integrodifferential Equations*. London – Glasgow: Blackie & Son Limited.
5. Alfrey T. (1948) *Mechanical Behavior of High Polymers*. New York: Interscience Publishers.
6. Ferry J.D. (1980) *Viscoelastic Properties of Polymers*. John Wiley & Sons.
7. Rzhantsyn A.R. (1968) *Teoriya polzuchesti* [Creep theory]. Moscow: Stroyizdat.
8. Blend D.R. (2016) *The Theory of Linear Viscoelasticity*. New York: Courier Dover Publications
9. Arutunyan N.Kh. (1952) *Nekotorye voprosy teorii polzuchesti* [Some issues of the creep theory]. Moscow – Leningrad: Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoy literatury.
10. Reddy J.N. (2008) *An Introduction to Continuum Mechanics*. New York: Cambridge University Press.
11. Pipkin A.C. (1986) *Lectures of Viscoelasticity Theory*. New York: Springer Verlag.
12. Flugge W. (1967) *Viscoelasticity*. New York: Blaisdell Press.
13. Christensen R.M. (1980) *Theory of Viscoelasticity: An Introduction*. New York: Academic.
14. Koltunov M.A., Mayboroda V.P., Zubchaninov V.G. (1983) *Prochnostnye raschety izdeliy iz polimernykh materialov* [Strength calculations for the products made of polymeric materials]. Moscow: Vysshaya shkola.
15. Schapery R.A. (1967) Stress analysis of viscoelastic composite materials. *Journal of Composite Materials*. 1(3) pp. 228–267. doi: 10.1177/002199836700100302
16. Il'yushin A.A., Pobedrya B.E. (1970) *Osnovy matematicheskoy teorii termov'yazkoupругosti* [Foundations of the mathematical theory of thermal viscoelasticity]. Moscow: Nauka.
17. Bugakov I.I. (1973) *Polzuchest' polimernykh materialov (teoriya i prilozheniya)* [Creep of polymer materials (theory and application)]. Moscow: Nauka.
18. Rabotnov Yu.N. (1966) *Polzuchest' elementov konstruktsey* [Creep of construction elements]. Moscow: Nauka.

19. Rabotnov Yu.N. (1977) *Elementy nasledstvennoy mekhaniki tverdykh tel* [Elements of hereditary mechanics of solids]. Moscow: Nauka.
20. Moskvitin V.V. (1972) *Soprotivlenie vyazkoupругikh materialov: Primenitel'no k zaryadam raketnykh dvigateley na tverdom toplive* [Strength of viscoelastic materials: Applied to discharges of solid-propellant rocket engines]. Moscow: Nauka.
21. Talybly L.Kh., Mamedova M.A. (2021) Study on the method for a solution to some class of quasi-static problems in linear viscoelasticity theory, as applied to problems of linear torsion of a prismatic solid. *Recent Advances in Mathematical Research and Computer Science 1: Book Publisher International (a part of SCIENCEDOMAIN International)*. pp. 63–72.
22. Lin C.-Y. (2024) Rethinking and researching the physical meaning of the standard linear solid model in viscoelasticity. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 31(11). pp. 2370–2385. doi: 10.1080/15376494.2022.2156638
23. Chen G. (2021) Recurrent neural networks (RNNs) learn the constitutive law of viscoelasticity. *Computational Mechanics*. 67(3). pp. 1009–1019. doi: 10.1007/s00466-021-01981-y
24. Xu K., Tartakovsky A.M., Burghardt J., Darve E. (2021) Learning viscoelasticity models from indirect data using deep neural networks. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 387. Article 114124. doi: 10.1016/j.cma.2021.114124
25. Il'yushin A.A. (1968) *Metod approksimatsiy dlya rascheta konstruksiy po lineynoy teorii termo-vyazko-uprugosti* [Approximation method for calculating structures according to the linear theory of thermo-viscosity-elasticity]. *Mekhanika polimerov*. 6. pp. 210–221.
26. Malyy V.I., Trufanov N.A. (1987) *Metod kvazikonstantnykh operatorov v teorii vyazkoupругosti anizotropnykh nestareyushchikh materialov* [Methods of quasi-constant operators in the theory of viscoelasticity of anisotropic materials]. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela – Mechanics of Solids*. 6. pp. 148–154.
27. Svetashkov A.A., Kupriyanov N.A., Pavlov M.S., Vakurov A.A. (2020) Variable separation method for solving boundary value problems of isotropic linearly viscoelastic bodies. *Acta Mechanica*. 231(9). pp. 3583–3606. doi: 10.1007/s00707-020-02698-4
28. Svetashkov A.A., Kupriyanov N.A., Pavlov M.S. (2023) *Metod razdeleniya peremennykh dlya zadach lineynoy vyazkoupругogo anizotropnogo tela* [The method of separation of variables for linear viscoelastic anisotropic body problems]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 84. pp. 123–138. doi: 10.17223/19988621/84/10
29. Svetashkov A., Kupriyanov N., Pavlov M. (2024) Generalization of the variable separation method for solving boundary value problems of linear viscoelasticity of kinds I and III. *Acta Mechanica*. 235(1). pp. 3573–3589. doi: 10.1007/s00707-024-03895-1
30. Svetashkov A.A. (2012) *Prikladnye zadachi mekhaniki vyazkoupругikh materialov* [Applied problems of mechanics of viscoelastic materials]. Tomsk: Tomsk Polytechnic University.
31. Duvoux N. (2017) Chapitre II-Le retour des inégalités économiques dans les pays développés. *Que sais-je?*. pp. 33–55.
32. Koltunov M.A. (1976) *Polzuchest' i relaksatsiya* [Creep and relaxation]. Moscow: Vysshaya shkola.

Сведения об авторах:

Светашков Александр Андреевич – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, профессор отделения машиностроения Томского политехнического университета (Томск, Россия). E-mail: svetashkov@tpu.ru

Павлов Михаил Сергеевич – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Научного центра вычислительной механики и компьютерного инжиниринга Томского политехнического университета; доцент кафедры автоматизации технологических процессов Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: mspavlov@tpu.ru

Пустовых Ольга Сергеевна – старший преподаватель отделения машиностроения Томского политехнического университета (Томск, Россия). E-mail: BOS1983@tpu.ru

Information about the authors:

Svetashkov Aleksandr A. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: svetashkov@tpu.ru

Pavlov Mikhail S. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk Polytechnic University, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: mspavlov@tpu.ru

Pustovykh Ol'ga S. (Tomsk Polytechnic University, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: BOS1983@tpu.ru

Статья поступила в редакцию 06.02.2024; принята к публикации 01.08.2025

The article was submitted 06.02.2024; accepted for publication 01.08.2025