ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2012 Математика и механика № 1(17)

МАТЕМАТИКА

УДК 512.541

А.В. Буданов

НИЛЬ-РАДИКАЛ КОЛЬЦА ЭНДОМОРФИЗМОВ ВПОЛНЕ РАЗЛОЖИМОЙ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЫ БЕЗ КРУЧЕНИЯ

Рассматривается представление кольца эндоморфизмов вполне разложимой абелевой группы без кручения кольцом матриц. На языке матриц описан ниль-радикал данного кольца эндоморфизмов, и доказано, что он совпадает с суммой всех его нильпотентных идеалов.

Ключевые слова: *кольцо эндоморфизмов, абелева группа, ниль-радикал.*

Ниль-радикал колец эндоморфизмов групп без кручения изучался Крыловым [1, 2]. Им была получена характеризация ниль-радикала для групп без кручения, совпадающих со своим n-м обобщенным псевдоцоколем для некоторого натурального числа n (к таким группам относятся группы без кручения конечного ранга). Крылов также указал условия нильпотентности ниль-радикала. Основные результаты в данном направлении вошли в монографию Крылова, Михалева и Туганбаева [3]. В настоящей статье рассматривается ниль-радикал кольца эндоморфизмов вполне разложимой абелевой группы без кручения. С помощью представления кольца эндоморфизмов такой группы кольцом матриц охарактеризован его ниль-радикал и показано, что он совпадает с суммой всех его нильпотентных идеалов.

Все рассматриваемые в работе группы абелевы и не имеют кручения. Вполне разложимая группа без кручения G является прямой суммой групп без кручения ранга 1, то есть подгрупп группы рациональных чисел $G = \bigoplus_{i\in I} A_i$. В этой ситуации кольцо $E(G)$ изоморфно кольцу R всех конечных по столбцам $I \times I$ матриц $[\alpha_{ij}]$ с элементами $\alpha_{ij} \in Hom(A_j, A_i)$ и обычными для матриц операциями сложения и умножения. В дальнейшем, если разложение группы G зафиксировано, мы будем отождествлять кольцо $E(G)$ с кольцом матриц R. Элементы матрицы $[\alpha_{ij}]$, соответствующей эндоморфизму α определяются следующим образом: $\alpha_{ij} = \pi_i\alpha\pi_j$, где π_i и π_j – естественные проекции группы G на слагаемые A_i и A_j соответственно.

Проводимые рассуждения часто требуют рассмотрения гомоморфизмов групп ранга 1. Приведем для удобства основные факты о таких гомоморфизмах. Пусть A, B – группы без кручения ранга 1, G – группа без кручения. Всякий ненулевой гомоморфизм $\varphi: A \to G$ является мономорфизмом; ненулевой гомоморфизм $\psi: A \to B$ существует тогда и только тогда, когда $t(A) \le t(B)$ ($t(H)$ обозначает тип однородной группы без кручения H), кроме того, $A \cong B$ тогда и только тогда, когда $t(A) = t(B)$. В дальнейшем эти факты используются без дополнительных пояснений. Теория групп без кручения ранга 1 и вполне разложимых групп без кручения изложена в [4].

Зафиксируем разложение вполне разложимой группы G в прямую сумму групп ранга 1: $G = \bigoplus_{i \in I} A_i$. Кольцо эндоморфизмов отождествляем с соответствующим кольцом матриц. Для элементов $i, j \in I$ будем писать $i \le j$ $(i < j)$ если $t(A_i) \le t(A_j)$ $(t(A_i) < t(A_j)$).

Определим подмножество $\nu(E(G))$ кольца $E(G)$. Пусть $\alpha = [\alpha_{ij}] \in E(G)$. Положим $\alpha \in \nu(E(G))$, если выполняются следующие два условия:

1) из $\alpha_{ij} \ne 0$ следует $j < i$;

2) существует такое натуральное число $n = n(\alpha)$, что среди любых таких n элементов $\alpha_{i_1 j_1}, \alpha_{i_2 j_2}, \ldots, \alpha_{i_n j_n}$ матрицы α, что $i_1 \le j_2$, $i_2 \le j_3, \ldots, i_{n-1} \le j_n$, хотя бы один равен нулю.

Определение множества $\nu(E(G))$ может, вообще говоря, зависеть от выбора разложения группы G. Мы не будем непосредственно доказывать независимость конструкции от выбора разложения группы G, поскольку этот факт влечет нижеследующая теорема. Нетрудно убедиться, что вне зависимости от выбранного разложения множество $\nu(E(G))$ не пусто, поскольку $0_{E(G)} \in \nu(E(G))$.

Заметим, что если эндоморфизм $\alpha \in N(E(G))$, то из $t(A_i) = t(A_j)$ следует, что $\pi_i \alpha \pi_j = 0$ или, в терминах кольца матриц, элемент α_{ij} матрицы $[\alpha_{ij}]$, соответствующей эндоморфизму α, равен нулю. Действительно, $t(A_i) = t(A_j)$ влечет существование изоморфизма β: $A_i \to A_j$, откуда в предположении, что $\pi_i \alpha \pi_j \ne 0$, получаем, что $\beta \pi_i \alpha \pi_j$ – ненулевой эндоморфизм группы A_j. Поскольку A_j – группа ранга 1, каждый ее ненулевой эндоморфизм является мономорфизмом, откуда следует, что эндоморфизм $\beta \pi_i \alpha \pi_j$ не может быть нильпотентным. Однако, если $\alpha \in N(E(G))$, то как эндоморфизм группы G $\beta \pi_i \alpha \pi_j$ должен быть нильпотентным.

Сумму всех нильпотентных идеалов некоторого кольца K обозначим $N_0(K)$, $P(K)$ – его первичный радикал, $L(K)$ – его радикал Левицкого и $N(K)$ – его нильрадикал. Определения и основные результаты, связанные с рассматриваемыми радикалами, можно найти, например, в [5].

Теорема. *Пусть G – вполне разложимая группа без кручения, пусть выбрано ее разложение* $G = \bigoplus_{i \in I} A_i$ *в прямую сумму групп ранга* 1, *с помощью которого определено множество* $\nu(E(G))$. *Тогда* $\nu(E(G)) = N_0(E(G)) = P(E(G)) = L(E(G)) = N(E(G))$.

Доказательство. Докажем сначала, что $\nu(E(G)) \subset N_0(E(G))$. Пусть $\alpha = [\alpha_{ij}] \in \nu(E(G))$ и n – натуральное число из определения множества $\nu(E(G))$, то есть среди любых таких n элементов $\alpha_{i_1 j_1}, \alpha_{i_2 j_2}, \ldots, \alpha_{i_n j_n}$ матрицы α, что $i_1 \le j_2$, $i_2 \le j_3, \ldots, i_{n-1} \le j_n$, хотя бы один равен нулю. Допустим, что идеал $E(G)\alpha E(G)$, порожденный матрицей α, не нильпотентен. Тогда в частности $(E(G)\alpha E(G))^n \ne 0$. Последнее означает, что найдутся матрицы $\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)}, \ldots, \varphi^{(n)} \in E(G)$, такие, что $\beta = \alpha\varphi^{(2)}\alpha\varphi^{(3)}\alpha\ldots\varphi^{(n)}\alpha \ne 0$. Элемент β_{ij} есть сумма слагаемых вида

$\alpha_{ij_n}\varphi^{(2)}_{j_ni_{n-1}}\alpha_{i_{n-1}j_{n-1}}\varphi^{(3)}_{j_{n-1}i_{n-2}}...\alpha_{i_2j_2}\varphi^{(n)}_{j_2i_1}\alpha_{i_1j}$. Так как матрица β ненулевая, то хотя бы один ее элемент отличен от нуля. Пусть это элемент $\beta_{i_nj_1}$. Следовательно, хотя бы одно слагаемое $\alpha_{i_nj_n}\varphi^{(2)}_{j_ni_{n-1}}\alpha_{i_{n-1}j_{n-1}}\varphi^{(3)}_{j_{n-1}i_{n-2}}...\alpha_{i_2j_2}\varphi^{(n)}_{j_2i_1}\alpha_{i_1j_1}$ отлично от нуля. Тогда ни один из элементов $\alpha_{i_1j_1},\alpha_{i_2j_2},\ldots,\alpha_{i_nj_n}$ не равен нулю. Также и ни один из элементов $\varphi^{(2)}_{j_ni_{n-1}},\varphi^{(3)}_{j_{n-1}i_{n-2}},...,\varphi^{(n)}_{j_2i_1}$ не равен нулю. Поскольку $\varphi^{(n-k+2)}_{j_ki_{k-1}}$ – гомоморфизм группы $A_{i_{k-1}}$ в A_{j_k} $(k=2,3,\ldots,n)$, это влечет $t(A_{i_1})\le t(A_{j_2})$, $t(A_{i_2})\le t(A_{j_3}),\ldots,$ $t(A_{i_{n-1}})\le t(A_{j_n})$ или, ввиду принятого соглашения, $i_1\le j_2$, $i_2\le j_3,\ldots,$ $i_{n-1}\le j_n$. Таким образом, в матрице α найдены n отличных от нуля элементов $\alpha_{i_1j_1},\alpha_{i_2j_2},\ldots,\alpha_{i_nj_n}$, для которых $i_1\le j_2$, $i_2\le j_3,\ldots,$ $i_{n-1}\le j_n$. Получено противоречие. Следовательно, $(E(G)\alpha E(G))^n=0$.

Включения $N_0(E(G))\subset P(E(G))\subset L(E(G))\subset N(E(G))$ известны. Остается доказать, что $N(E(G))\subset \nu(E(G))$. Предположим противное: пусть найдется эндоморфизм $\alpha=[\alpha_{ij}]\in N(E(G))$, не принадлежащий $\nu(E(G))$. Сделанное ранее замечание об эндоморфизмах из ниль-радикала позволяет утверждать, что первое условие из определения множества $\nu(E(G))$ выполняется, то есть из $\alpha_{ij}\ne 0$ следует $j<i$. Поэтому из предположения следует, то не выполняется второе условие. Это означает, что для каждого натурального числа k найдутся отличные от нуля элементы $\alpha_{i_1j_1},\alpha_{i_2j_2},\ldots,\alpha_{i_kj_k}$ матрицы α, такие, что $i_1\le j_2,i_2\le j_3,\ldots,i_{k-1}\le j_k$. Так как первое условие из определения множества $\nu(E(G))$ выполняется, то из того, что элементы $\alpha_{i_1j_1},\alpha_{i_2j_2},\ldots,\alpha_{i_kj_k}$ отличны от нуля, следует, что $j_1<i_1$, $j_2<i_2,\ldots,$ $j_k<i_k$. Вместе с $i_1\le j_2$, $i_2\le j_3,\ldots,$ $i_{k-1}\le j_k$ это, очевидно, дает $j_1<i_1\le j_2<i_2\le j_3<i_3\le\ldots<i_{k-1}\le j_k<i_k$. Последнее в частности означает, что никакие два из элементов $\alpha_{i_1j_1},\alpha_{i_2j_2},\ldots,\alpha_{i_kj_k}$ не лежат в одном столбце или в одной строке.

Для каждого $n\in\mathbf{N}$ выберем n ненулевых элементов $\alpha_{i_{n1}j_{n1}},\alpha_{i_{n2}j_{n2}},\ldots,\alpha_{i_{nn}j_{nn}}$. Получим систему $\{\alpha_{i_{nm}j_{nm}}\}_{n\in\mathbf{N},m=\overline{1,n}}$ ненулевых элементов матрицы $[\alpha_{ij}]$. Отбор элементов будем вести так, чтобы для выбранных элементов были справедливы следующие утверждения:

1) никакие два из выбранных элементов не лежат в одном столбце или одной строке матрицы $[\alpha_{ij}]$, то есть $j_{np}\ne j_{mq}$ и $i_{np}\ne i_{mq}$, если $n\ne m$ или $p\ne q$ $(n,m\in\mathbf{N},p=\overline{1,n},q=\overline{1,m})$;

2) для элементов $\alpha_{i_{n1}j_{n1}},\alpha_{i_{n2}j_{n2}},\ldots,\alpha_{i_{nn}j_{nn}}$, выбранных на n-м шаге, выполнено $j_{n1}<i_{n1}\le j_{n2}<i_{n2}\le\ldots\le j_{nn}<i_{nn}$ $(n\in\mathbf{N})$;

3) $\alpha_{i_{np}j_{mq}}=0$, если $n>m$ $(n,m\in\mathbf{N},p=\overline{1,n},q=\overline{1,m})$.

Отбор нужных элементов будем вести по индукции.

$n=1$. Пусть $\alpha_{i_{11}j_{11}}$ – любой ненулевой элемент матрицы $\alpha=[\alpha_{ij}]$ $(\alpha\ne 0$, поскольку $0\in\nu(E(G))$. Очевидно, что утверждения 1, 2 и 3 для одного элемента выполнены.

Рассмотрим дополнительно второй шаг. Матрица $[\alpha_{ij}]$ конечна по столбцам. Пусть тогда M_1 – число ненулевых элементов в ее столбце с индексом j_{11}. Положим $N = M_1 + 3$. По предположению, найдется N ненулевых элементов $\alpha_{i'_{21}j'_{21}}, \alpha_{i'_{22}j'_{22}}, \ldots, \alpha_{i'_{2N}j'_{2N}}$, таких, что $j'_{21} < i'_{21} \le j'_{22} < i'_{22} \le \ldots \le j'_{2N} < i'_{2N}$. Вычеркнем из этой цепи такие пары $j'_{2k} < i'_{2k}$, для которых $\alpha_{i'_{2k}j_{11}} \ne 0$. Заметим, что если в некоторой паре $j'_{2k} < i'_{2k}$ окажется $i'_{2k} = i_{11}$, то она будет вычеркнута, поскольку элемент $\alpha_{i_{11}j_{11}}$ отличен от нуля. Затем вычеркнем ту пару $j'_{2k} < i'_{2k}$, в которой $j'_{2k} = j_{11}$ (если она входит в цепь). Вычеркнуто будет не более $M_1 + 1$ пар, а значит, хотя бы две пары останутся. Обозначим $j_{21} < i_{21} \le j_{22} < i_{22}$ начало оставшейся цепочки. Учитывая то, какие пары были вычеркнуты, понятно, что для системы из трех выбранных элементов $\{\alpha_{i_{11}j_{11}}, \alpha_{i_{21}j_{21}}, \alpha_{i_{22}j_{22}}\}$ утверждения 1), 2) и 3) справедливы.

Предположим, что уже выбраны элементы $\alpha_{i_{kl}j_{kl}}$ ($k = \overline{1, m-1}, l = \overline{1, k}$), для которых выполнены утверждения 1–3, m-й шаг построения осуществляется аналогично второму. Пусть во всех столбцах с индексами j_{kl} ($k = \overline{1, m-1}, l = \overline{1, k}$) имеется M ненулевых элементов. M – натуральное число, так как в каждом столбце матрицы $[\alpha_{ij}]$ имеется лишь конечное число ненулевых элементов. Пусть теперь $N = M + \frac{1}{2}m(m-1) + m$. В силу предположения, что $\alpha \notin \nu(E(G))$, найдется N ненулевых элементов $\alpha_{i'_{m1}j'_{m1}}, \alpha_{i'_{m2}j'_{m2}}, \ldots, \alpha_{i'_{mN}j'_{mN}}$, таких, что $j'_{m1} < i'_{m1} \le j'_{m2} < i'_{m2} \le \ldots \le j'_{mN} < i'_{mN}$. По аналогии со вторым шагом, вычеркнем из этой цепи «плохие» пары. А именно, такие пары $i'_{mk} < j'_{mk}$, что $\alpha_{i'_{mk}j_{pq}} \ne 0$ для каких-либо $p = \overline{1, m-1}$ и $q = \overline{1, p}$. Таких пар будет не более M. Заметим также, что вычеркнутыми окажутся все такие пары $i'_{mk} < j'_{mk}$, что $i'_{mk} = i_{pq}$ для каких-либо $p = \overline{1, m-1}$ и $q = \overline{1, p}$. Затем вычеркнем еще такие пары $i'_{mk} < j'_{mk}$, что $j'_{mk} = j_{pq}$ для каких-либо $p = \overline{1, m-1}$ и $q = \overline{1, p}$. Таких пар будет не больше $\frac{1}{2}m(m-1)$. В общем, вычеркнуто будет не более $M + \frac{1}{2}m(m-1)$ пар. Следовательно, хотя бы m пар в цепочке останется. Начало получившейся цепочки обозначим $j_{m1} < i_{m1} \le j_{m2} < i_{m2} \le \ldots \le j_{mm} < i_{mm}$. Снова, с учетом того, какие пары были вычеркнуты, становится ясно, что утверждения 1–3 справедливы для системы элементов $\{\alpha_{i_{kl}j_{kl}}\}_{k=\overline{1,m}, l=\overline{1,k}}$.

Таким образом, имеем систему $\{\alpha_{i_{nm}j_{nm}}\}_{n\in\mathbf{N}, m=\overline{1,n}}$ элементов матрицы $[\alpha_{ij}]$, для которой справедливы утверждения 1–3.

Определим теперь матрицу $\beta = [\beta_{ij}]$, полагая элементы $\beta_{j_{n2}i_{n1}}, \beta_{j_{n3}i_{n2}}, \ldots, \beta_{j_{nn}i_{n,n-1}}$ отличными от нуля ($n = 2, 3, \ldots$). Это можно сделать, так как согласно утверждению 2 $i_{n1} \le j_{n2}$, $i_{n2} \le j_{n3}, \ldots, i_{n,n-1} \le j_{nn}$, а значит, между соответствующими слагаемыми ранга 1 группы G имеются ненулевые гомоморфизмы. Все остальные элементы матрицы β положим равными нулю. Из утверждения 1 следует, что в каждой строке и каждом столбце матрицы β имеется не больше одного ненулевого элемента.

Докажем, что эндоморфизм βα не нильпотентен. Пусть $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Докажем, что $c = (\beta\alpha)^{n-1} \neq 0$. Для этого рассмотрим элемент $c_{j_{nn}j_{n1}}$. По определению произведения матриц имеем

$$c_{j_{nn}j_{n1}} = \sum_{s_k, t_k \in I} \beta_{j_{nn}t_1}\alpha_{t_1 s_1}\beta_{s_1 t_2}\alpha_{t_2 s_2}\cdot\ldots\cdot\beta_{s_{n-2}t_{n-1}}\alpha_{t_{n-1}j_{n1}}.$$

В этой сумме есть ненулевое слагаемое

$$\beta_{j_{nn}i_{n,n-1}}\alpha_{i_{n,n-1}j_{n,n-1}}\beta_{j_{n,n-1}i_{n,n-2}}\alpha_{i_{n,n-2}j_{n,n-2}}\cdot\ldots\cdot\beta_{j_{n2}i_{n1}}\alpha_{i_{n1}j_{n1}}$$

(все сомножители в этом произведении – ненулевые гомоморфизмы групп ранга 1).

Предположим, что слагаемое $\beta_{j_{nn}t_1}\alpha_{t_1 s_1}\beta_{s_1 t_2}\alpha_{t_2 s_2}\cdot\ldots\cdot\beta_{s_{n-2}t_{n-1}}\alpha_{t_{n-1}j_{n1}}$ также отлично от нуля. По определению, единственные ненулевые элементы матрицы β – элементы вида $\beta_{j_{pq}i_{p,q-1}}$ ($p = 2,3,\ldots, q = \overline{2,p}$). Следовательно, поскольку $\beta_{j_{nn}t_1} \neq 0, \beta_{s_{k-1}t_k} \neq 0$ ($k = \overline{2,n-1}$), можно записать

$$t_1 = i_{n,n-1}, s_1 = j_{p_1 q_1},\ t_2 = i_{p_1,q_1-1},\ldots, s_{k-1} = j_{p_{k-1}q_{k-1}},\ t_k = i_{p_{k-1},q_{k-1}-1}, s_k = j_{p_k q_k},$$
$$t_{k+1} = i_{p_k,q_k-1},\ldots, s_{n-2} = j_{p_{n-2}q_{n-2}},\ t_{n-1} = i_{p_{n-2},q_{n-2}-1}$$

для подходящих натуральных чисел p_k, q_k ($k = \overline{1,n-2}$), причем $q_k \in \{2,\ldots,p_k\}$. Применим теперь утверждение 3 к элементам $\alpha_{t_k s_k} \neq 0$ ($k = \overline{1,n-2}$) и $\alpha_{t_{n-1}j_{n1}} \neq 0$. Получается $n \geq p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_{k-1} \geq p_k \geq \ldots \geq p_{n-2} \geq n$ и, значит, $p_1 = p_2 = \ldots = p_{n-2} = n$. Предположение, что рассматриваемое слагаемое отлично от нуля вместе со свойствами матрицы α, дает цепочку $j_{n1} < t_{n-1} \leq s_{n-2} < t_{n-2} \leq \ldots \leq s_2 < t_2 \leq s_1 < t_1 \leq j_{nn} < i_{nn}$, которая с учетом уже сделанных выводов об индексах t_k и s_k имеет вид

$$j_{n1} < i_{n,q_{n-2}-1} \leq j_{nq_{n-2}} < i_{n,q_{n-3}-1} \leq \ldots \leq j_{nq_2} < i_{n,q_1-1} \leq j_{nq_1} < i_{n,n-1} \leq j_{nn} < i_{nn}.$$

Следовательно, q_k ($k = \overline{1,n-2}$) – попарно различные числа из множества $\{2,\ldots, n-1\}$. Сравнивая теперь полученную цепочку с цепочкой $j_{n1} < i_{n1} \leq j_{n2} < < i_{n2} \leq \ldots \leq j_{nn} < i_{nn}$, которая имеет место согласно 2, находим $q_1 = n-1$, $q_2 = n-2$, …, $q_{n-2} = 2$. Таким образом,

$$\beta_{j_{nn}i_{n,n-1}}\alpha_{i_{n,n-1}j_{n,n-1}}\beta_{j_{n,n-1}i_{n,n-2}}\alpha_{i_{n,n-2}j_{n,n-2}}\cdot\ldots\cdot\beta_{j_{n2}i_{n1}}\alpha_{i_{n1}j_{n1}}$$

– единственное ненулевое слагаемое в сумме, составляющей элемент $c_{j_{nn}j_{n1}}$ и, следовательно, $c_{j_{nn}j_{n1}} \neq 0$.

Доказали, что для произвольного натурального числа $n \geq 2$ матрица $c = (\beta\alpha)^{n-1}$ отлична от нуля. Значит, βα – не нильпотентный элемент кольца $E(G)$. Получили противоречие с тем, что $\alpha \in N(E(G))$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крылов П.А.* Радикалы колец эндоморфизмов абелевых групп без кручения // Матем. сб. 1974. Т. 95(137). № 2(10). С. 214–228.
2. *Крылов П.А.* Радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов абелевой группы без кручения // Абелевы группы и модули. 1994. № 11–12. С. 214–228.

3. *Крылов П.А., Михалев А.В., Туганбаев А.А.* Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. М.: Факториал Пресс, 2006.
4. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. Т. 2. М.: Мир, 1977.
5. *Gardner B.J., Wiegandt R.* Radical theory of rings. Marcel Dekker, 2004.

Статья поступила 08.11.2011 г.

Budanov A.V. NIL RADICAL OF THE ENDOMORPHISM RING OF A COMPLETELY DECOMPOSABLE TORSION-FREE ABELIAN GROUP. Matrix ring representation of the endomorphism ring of a completely decomposable torsion-free abelian group is considered. The nil radical of such an endomorphism ring is described in terms of matrices. It is proved that the nil radical coincides with the sum of all its nilpotent ideals.

Keywords: endomorphism ring, abelian group, nil radical.

BUDANOV Alexander Viktorovich (Tomsk State University)
E-mail: alexandrbud@mail.ru