

УДК 536.24

М.А. Шеремет

## ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ РЕЖИМЫ СОПРЯЖЕННОЙ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В ЗАМКНУТОМ КУБЕ<sup>1</sup>

Проведен численный анализ пространственных режимов свободно-конвективного теплопереноса в замкнутом кубе со стенками конечной толщины. На внешних поверхностях двух противоположных граней задавалась постоянная температура, остальные границы были теплоизолированными. Математическая модель, сформулированная в безразмерных естественных переменных «скорость – давление – температура», реализована численно методом контрольного объема. В результате проведенных исследований установлены масштабы влияния температурного напора и толщины ограждающих твердых стенок на термогидродинамические характеристики.

**Ключевые слова:** *сопряженный теплоперенос, естественная конвекция, куб, математическое моделирование, метод контрольного объема.*

В последнее время наметился возросший интерес к анализу режимов конвективного теплопереноса в замкнутых объемах с учетом кондуктивной теплопередачи в твердых ограждающих стенках [1–5]. Такие исследования имеют широкие приложения связанные, например, с оптимизацией тепловых режимов в энергетических системах [6], с проектированием эффективных компоновочных элементов для электронной техники [4, 7], с созданием новых теплообменных аппаратов [6]. Применение аппарата математической физики и вычислительной математики представляется наиболее оптимальным методом исследования таких взаимосвязанных физических процессов (конвективный теплоперенос в полости и кондуктивный теплообмен в твердых элементах).

Целью настоящей работы является математическое моделирование естественной конвекции в замкнутом кубе с теплопроводными стенками конечной толщины при наличии двух изотермических и четырех адиабатических граней.

### Постановка задачи

Рассматривается краевая нестационарная задача конвективного теплопереноса в замкнутом кубе, представленном на рис 1. На внешней поверхности одной из вертикальных стенок  $x = 0$  поддерживается постоянная температура  $T_h$ , а на внешней поверхности противоположной вертикальной стенки –  $T_c < T_h$ . Остальные внешние грани теплоизолированы. Предполагалось, что теплофизические свойства материала стенок и газа не зависят от температуры. Газ считался теплопроводной ньютоновской жидкостью, удовлетворяющей приближению Буссинеска. Предполагается, что в начальный момент времени несжимаемая жидкость, находящаяся внутри полости, и ограждающие стенки имеют постоянную и одинаковую во всех точках температуру, причем жидкость неподвижна. В такой поста-

<sup>1</sup> Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (ГК № П357), а также при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для молодых российских ученых (грант МК-396.2010.8).

новке процесс переноса тепла описывается системой нестационарных пространственных уравнений Обербека – Буссинеска [8] в газовой полости и уравнением теплопроводности [9] в твердых стенках.

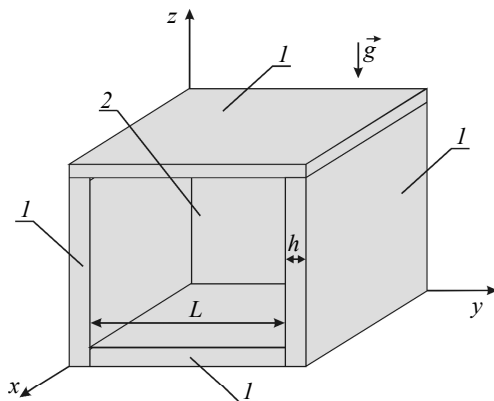


Рис. 1. Область решения: 1 – теплопроводные ограждающие стенки, 2 – газовая полость

Математическая модель формулируется в безразмерных естественных переменных «скорость – давление – температура». В качестве масштабов расстояния, времени, скорости, температуры и давления были выбраны  $L$ ,  $\sqrt{L/g\beta\Delta T}$ ,  $\sqrt{g\beta\Delta TL}$ ,  $\Delta T$ ,  $\rho g\beta\Delta TL$ . Безразмерные переменные имеют вид

$$X = x/L, \quad Y = y/L, \quad Z = z/L, \quad \tau = t\sqrt{g\beta\Delta T/L}, \quad U = u/\sqrt{g\beta\Delta TL}, \\ V = v/\sqrt{g\beta\Delta TL}, \quad W = w/\sqrt{g\beta\Delta TL}, \quad \Theta = (T - T_0)/\Delta T, \quad P = p/\rho g\beta\Delta TL$$

$$\text{при } \Delta T = T_h - T_c, \quad T_0 = 0,5(T_h + T_c);$$

где  $x, y, z$  – координаты декартовой системы координат;  $X, Y, Z$  – безразмерные координаты, соответствующие координатам  $x, y, z$ ;  $L$  – длина газовой полости;  $\rho$  – плотность;  $g$  – ускорение силы тяжести;  $\beta$  – температурный коэффициент объемного расширения;  $t$  – время;  $\tau$  – безразмерное время;  $u, v, w$  – составляющие скорости в проекции на оси  $x, y, z$  соответственно;  $U, V, W$  – безразмерные скорости, соответствующие скоростям  $u, v, w$ ;  $V_0 = \sqrt{g\beta\Delta TL}$  – масштаб скорости (скорость естественной конвекции);  $p$  – давление;  $P$  – безразмерное давление;  $T$  – температура;  $\Theta$  – безразмерная температура;  $T_0$  – начальная температура области решения.

Если пренебрегать вязкой диссипацией энергии, то уравнения неразрывности, движения и энергии в газовой полости для рассматриваемой задачи будут иметь вид

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial U^2}{\partial X} + \frac{\partial(UV)}{\partial Y} + \frac{\partial(UW)}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} \right); \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\partial(UV)}{\partial X} + \frac{\partial V^2}{\partial Y} + \frac{\partial(VW)}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right); \quad (3)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} + \frac{\partial(UW)}{\partial X} + \frac{\partial(VW)}{\partial Y} + \frac{\partial W^2}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial Z} + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} \right) + \Theta; \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \frac{\partial(U\Theta)}{\partial X} + \frac{\partial(V\Theta)}{\partial Y} + \frac{\partial(W\Theta)}{\partial Z} = \frac{1}{\sqrt{\text{Ra} \cdot \text{Pr}}} \left( \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Z^2} \right). \quad (5)$$

Для элементов твердой стенки уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{a_{1,2}}{\sqrt{\text{Ra} \cdot \text{Pr}}} \left( \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Z^2} \right). \quad (6)$$

Здесь  $\text{Ra} = g\beta(T_h - T_c)L^3/\nu a_2$  – число Рэлея;  $\text{Pr} = \nu/a_2$  – число Прандтля;  $a_{1,2} = a_1/a_2$  – относительный коэффициент температуропроводности;  $a_1$  – коэффициент температуропроводности материала твердых стенок;  $a_2$  – коэффициент температуропроводности газа;  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости.

Начальные и граничные условия для сформулированной задачи (1) – (6) имеют вид:

*Начальное условие:*

$$U(X, Y, Z, 0) = V(X, Y, Z, 0) = W(X, Y, Z, 0) = \Theta(X, Y, Z, 0) = 0,$$

за исключением изотермических граней.

*Граничные условия:*

- на границе  $X = 0$   $\Theta_h = 0,5$ ;
- на границе  $X = 1+2h/L$   $\Theta_c = -0,5$ ;
- остальные внешние грани являются адиабатическими  $\partial\Theta/\partial\vec{n} = 0$ ;
- на внутренних границах раздела сред

$$U = V = W = 0, \quad \Theta_1 = \Theta_2, \quad \frac{\partial\Theta_2}{\partial\vec{n}} = \lambda_{1,2} \frac{\partial\Theta_1}{\partial\vec{n}}.$$

Здесь  $\lambda_{2,1} = \lambda_2/\lambda_1$  – относительный коэффициент теплопроводности;  $\lambda_1$  – коэффициент теплопроводности материала твердых стенок;  $\lambda_2$  – коэффициент теплопроводности газа.

Сформулированная краевая задача (1)–(6) с соответствующими начальными и граничными условиями решалась методом контрольного объема [10, 11] на неравномерной структурированной сетке. Для аппроксимации конвективных слагаемых применялся степенной закон [10, 11], для диффузионных слагаемых – центральные разности. Для совместного определения полей скорости и давления применялась процедура SIMPLE [10, 11]. Разностные уравнения движения разрешались на основе итерационного метода переменных направлений. Разностные уравнения энергии как в газовой полости, так и в твердой стенке решались одновременно методом неполной факторизации Булеева [12]. Построение неравномерной структурированной сетки осуществлялось следующим образом:  $S_{i+1} = S_i + \alpha_s^i \Delta$  [13], где  $S_i$  определяет положение грани контрольного объема,  $\Delta$  – шаг сетки,  $\alpha_s$  – параметр сгущения. Сгущение разностной сетки проводилось к стенкам в газовой полости для корректной аппроксимации градиентов искомых характеристик.

Разработанный метод решения был протестирован на модельной задаче естественной конвекции в кубической полости с двумя вертикальными изотермическими и остальными адиабатическими гранями. В качестве определяемой величи-

ны выступало среднее число Нуссельта на вертикальной изотермической грани в широком диапазоне изменения  $Ra$  (таблица). В расчетах использовалась неравномерная структурированная разностная сетка размерностью  $54 \times 54 \times 54$ .

**Зависимость среднего числа Нуссельта от числа Рэлея**

| $Ra$   | Полученные результаты | [14]  | [15]  | [16]   | [17]  | [18]  |
|--------|-----------------------|-------|-------|--------|-------|-------|
| $10^4$ | 2,0563                | 2,055 | 2,100 | 2,0556 | 2,055 | 2,071 |
| $10^5$ | 4,3267                | 4,339 | 4,361 | 4,3428 | 4,337 | 4,446 |
| $10^6$ | 8,3912                | 8,656 | 8,770 | 8,6487 | 8,796 | 9,432 |

Результаты, представленные в таблице, наглядно показывают, что используемый численный алгоритм решения приводит к достаточно хорошему согласованию с результатами других авторов.

### Результаты численного моделирования

Численные исследования краевой задачи (1) – (6) проведены при следующих значениях безразмерных комплексов:  $10^3 \leq Ra \leq 10^6$ ,  $Pr = 0,7$ ,  $\lambda_{2,1} = 5,7 \cdot 10^{-4}$ ,  $h/L = 0,05, 0,1, 0,2$ . Особое внимание было уделено анализу влияния числа Рэлея, относительной толщины твердых стенок и размерности задачи как на локальные термогидродинамические характеристики (поля скорости и температуры), так и на интегральный параметр (среднее число Нуссельта на внутренних границах раздела сред) в стационарном режиме.

На рис. 2 представлены траектории движения газовых частиц, поля скорости и температуры, соответствующие различным режимам термогравитационной конвекции  $Ra = 10^4, 10^5, 10^6$ , при  $h/L = 0,2$ .

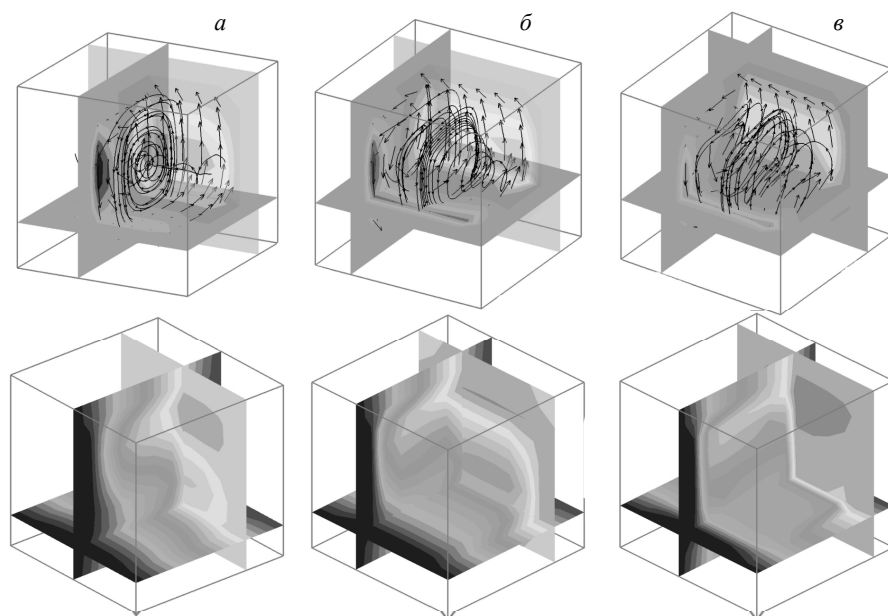


Рис. 2. Стационарные поля скорости, траектории движения и поля температуры при  $Ra = 10^4$  (а);  $Ra = 10^5$  (б);  $Ra = 10^6$  (в)

Анализируя распределения гидродинамических параметров, можно утверждать, что увеличение температурного напора приводит к повышению интенсивности движения в полости, а также отражается на модификации структуры траекторий движения газовых объемов. При  $Ra = 10^4$  (рис. 2,а) в газовой полости формируется один глобальный вихрь, характеризующий появление восходящих потоков вблизи нагреваемой стенки и нисходящих потоков около противоположной поверхности охлаждаемой твердой стенки. Траектории движения при этом представляют собой сложные трехмерные спиральные структуры, которые в центральной части вырождаются в концентрические окружности. Поле температуры отражает взаимодействие пограничных слоев со стороны вертикальных поверхностей твердых стенок. В центральной части наблюдается незначительная температурная стратификация среды. Увеличение числа Рэлея в 10 раз (рис. 2,б) приводит к сохранению единого глобального вихря, структура которого несколько изменяется. Наблюдается вертикальная деформация траекторий движения, и в центральной части ядро потока растягивается по координате  $x$ . Также заметно наличие сложных спиралевидных траекторий объемов среды, удаляемых со стороны вертикальных поверхностей адиабатических стенок. Такие поперечные течения, достигая центральной зоны полости, вовлекаются в основное циркуляционное движение, обусловленное направленным воздействием температурного градиента. Необходимо отметить более устойчивую температурную стратификацию в средней части полости, отражающую прогрев анализируемого объекта по направлению сверху вниз, вследствие взаимодействия теплых восходящих и холодных нисходящих потоков. При  $Ra = 10^6$  (рис. 2,в) траектории поперечного движения газовых объемов существенно видоизменяются – шаг спиралевидной траектории значительно увеличивается по сравнению с режимами  $Ra = 10^4, 10^5$ . Поле температуры отражает уменьшение толщин тепловых пограничных слоев, что сказывается на глубине проникновения температурных волн в центре газового объема.

Проведен анализ влияния числа Рэлея, размерности задачи и относительной толщины твердых стенок на среднее число Нуссельта на границе раздела сред (рис. 3)

$$Nu_{avg} = \int_{h/L}^{1+h/L} \int_{h/L}^{1+h/L} \left| \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right|_{X=h/L} dYdZ.$$

С ростом числа Рэлея наблюдается монотонное увеличение обобщенного коэффициента теплообмена независимо от размерности задачи и толщины стенок. В случае бесконечно тонких стенок  $h/L = 0,0$  трехмерная постановка задачи дает несколько меньшие значения среднего числа Нуссельта, при этом наибольшее относительное расхождение

$$\frac{Nu_{avg}^{2D} - Nu_{avg}^{3D}}{Nu_{avg}^{3D}} \cdot 100 \% = 5,4 \%$$

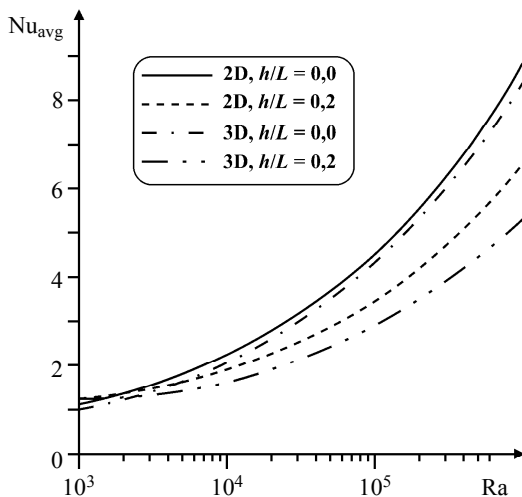


Рис. 3. Зависимость среднего числа Нуссельта на границе раздела сред  $X = h/L$  в случае плоской и пространственной постановок задачи при различных значениях числа Рэлея и относительной толщины стенки

наблюдается при  $Ra = 10^6$ . Введение твердых стенок при  $h/L = 0,2$  приводит к существенному понижению среднего числа Нуссельта в случае как плоской, так и пространственной постановки задачи. Следует отметить, что наиболее значительное уменьшение  $Nu_{avg}$  происходит в случае трехмерной задачи, что обусловлено наличием дополнительной ограничивающей поверхности и соответственно дополнительным направлением переноса энергии.

На рис. 4 и 5 представлены поля скорости и температуры в случае пространственной (среднее сечение по координате  $Y$ , рис. 4) и плоской [19] (рис. 5) постановки задачи при  $Ra = 10^5$ .

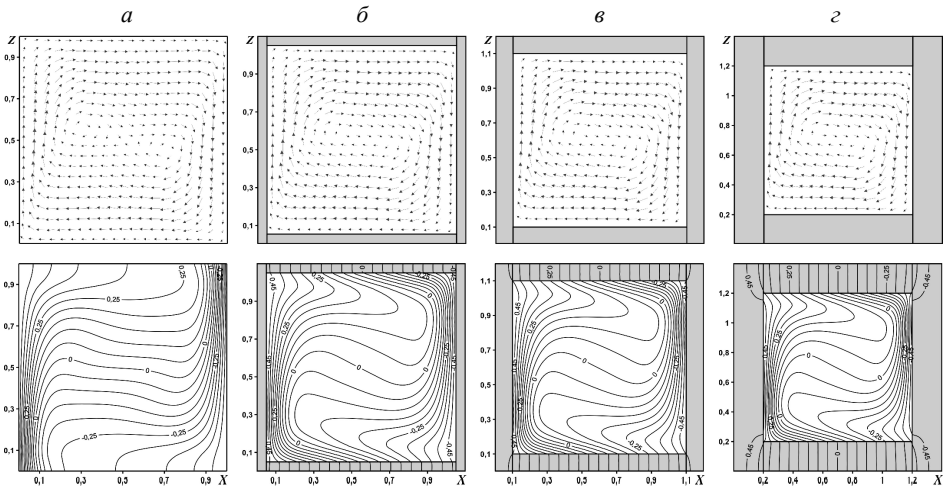


Рис. 4. Стационарные поля скорости и температуры в среднем сечении по координате  $Y$  в случае трехмерной задачи при  $Ra = 10^5$

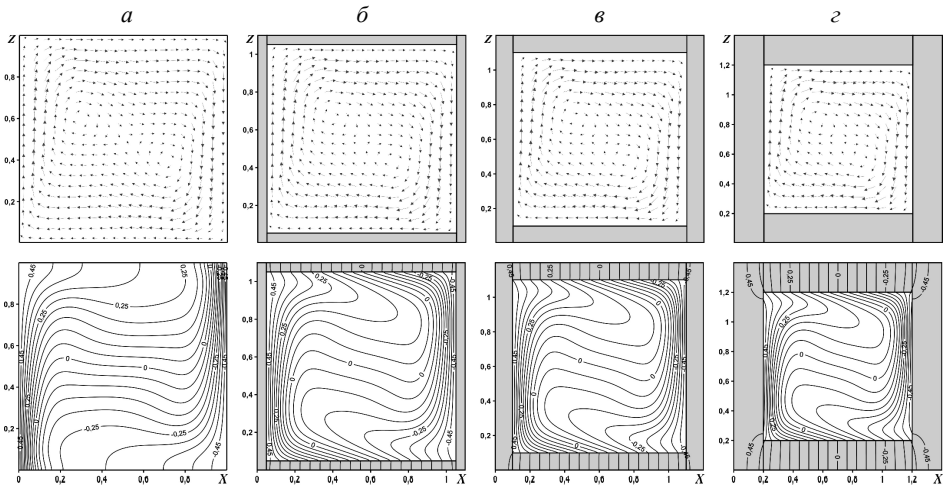


Рис. 5. Стационарные поля скорости и температуры в случае двумерной задачи при  $Ra = 10^5$

Для пространственной задачи введение твердых стенок приводит к изменению конфигурации течения. При  $h/L = 0,0$  (рис. 4, а) в газовой полости формируется гидродинамическая структура, состоящая из двух центральных конвективных ячеек, определяющих течение в направлении по часовой стрелке. Появление твердых стенок минимальной толщины  $h/L = 0,05$  проявляется в сужении зоны двухячейстой конвективной структуры, а дальнейшее увеличение толщины ограждающих стенок приводит к вырождению двухячейстой структуры в однопоясую при  $h/L = 0,2$  (рис. 4, з). Изотермы также претерпевают изменения. Например, при  $h/L = 0,05$  изотермы, соответствующие безразмерным температурам  $\Theta = \pm 0,45$ , полностью лежат в газовой полости, за исключением верхней и нижней стенок. При  $h/L = 0,2$  в стационарном режиме эти изотермы проходят по внутренним границам раздела сред. Такая динамика распределения линий постоянной температуры отражается и на зависимостях для среднего числа Нуссельта (рис. 3).

В случае двумерной постановки задачи (рис. 5) введение твердых стенок в большей степени отражается на модификации изотерм, при этом конфигурация линий тока сохраняется. Сравнивая результаты плоской и пространственной постановок, можно утверждать, что наличие третьей координаты вносит существенные коррективы в конфигурацию течения, при этом поля температуры изменяются незначительно.

### Заключение

Проведен численный анализ пространственных стационарных режимов естественной конвекции в замкнутом кубе с теплопроводными стенками конечной толщины. В результате получены поля скорости и температуры, а также распределения среднего числа Нуссельта на внутренней границе раздела сред в широком диапазоне изменения определяющих параметров:  $10^3 \leq Ra \leq 10^6$ ,  $Pr = 0,7$ ,  $\lambda_{2,1} = 5,7 \cdot 10^{-4}$ ,  $h/L = 0,05, 0,1, 0,2$ . Детально проанализировано влияние числа Рэлея, относительной толщины ограждающих твердых стенок и размерности задачи (двумерная и трехмерная постановки) на распределения локальных и интегральных термогидродинамических характеристик. Установлено, что рассматриваемая задача (геометрический параметр, характеризующий отношение длин сторон, равен 1) является пространственной, как вследствие формирования поперечных течений, которые в центральной части полости вовлекаются направленным градиентом температуры в основную циркуляцию, так и в результате ограничивающего термического воздействия третьей координаты из-за наличия твердой стенки.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Valencia L., Pallares J., Cuesta I., Grau F.X. Turbulent Rayleigh–Benard convection of water in cubical cavities: A numerical and experimental study // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 2007. V. 50. P. 3203–3215.
2. Kuznetsov G.V., Sheremet M.A. Conjugate natural convection with radiation in an enclosure // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 2009. V. 52. P. 2215–2223.
3. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Конвекция Рэлея – Бенара в замкнутом объеме со стенками конечной толщины // *Математическое моделирование*. 2009. Т. 21. № 10. С. 111–122.
4. Liu Y., Phan-Thien N., Kemp R., Luo X.-L. Three-dimensional coupled conduction-convection problem for three chips mounted on a substrate in an enclosure // *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*. 1997. V. 32. P. 149–167.

5. Шеремет М.А. Математическое моделирование нестационарной сопряженной термогравитационной конвекции в замкнутом наклонном цилиндре // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4(3). С. 1272–1274.
6. Jaluria Y. Design and Optimization of Thermal Systems. New York: McGraw-Hill, 1998. 626 p.
7. Sheremet M.A. Numerical Simulation of Turbulent Natural Convection in an Electronic Enclosure // Proc. of the 11<sup>th</sup> International Conference and Seminar on Micro/Nanotechnologies and Electron Devices EDM'2010, June 30 – July 4 2010, Erlagol, Russia. P. 177–180.
8. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.
9. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
10. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
11. Versteeg H.K., Malalasekera W. An Introduction to Computational Fluid Dynamics. The Finite Volume Method. N.Y.: Wiley, 1995. 257 p.
12. Ильин В.П. Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. М.: Физматлит, 1995. 288 с.
13. Liaqat A., Baytas A.C. Conjugate natural convection in a square enclosure containing volumetric sources // Int. J. Heat Mass Transfer. 2001. V. 44. P. 3273–3280.
14. Bessonov O.A., Brailovskay V.A., Nikitin S.A., Polezhaev V.I. Three-dimensional natural convection in a cubical enclosure: a benchmark numerical solution // Proc. of Int. Symposium on Advances in Computational Heat Transfer. – Turkey, 1997. P. 157–165.
15. Fusegi T., Hyin J.M., Kuwahara K. A numerical study of 3D natural convection in a differently heated cubical enclosure // Int. J. Heat Mass Transfer. 1991. V. 34. P. 1543–1557.
16. Артемьев В.К., Рожков М.М. Численное моделирование трехмерной естественной конвекции в кубической полости // Труды XIII Школы-семинара молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН А.И. Леонтьева «Физические основы экспериментального и математического моделирования процессов газодинамики и теплообмена в энергетических установках». Санкт-Петербург, 2001. Т. 1. С. 153–157.
17. Гинкин В.П., Ганина С.М. Метод и программа расчета трехмерной конвекции на сетках большой размерности // Труды 3 Российской национальной конференции по теплообмену. Москва, 2002. Т. 3. С. 49–52.
18. Kuznetsov G.V., Sheremet M.A. A numerical simulation of double-diffusive conjugate natural convection in an enclosure // Int. J. Thermal Sciences. 2011. V. 50. P. 1878–1886.
19. Шеремет М.А. Математическое моделирование естественной конвекции в замкнутой квадратной полости с теплопроводными стенками конечной толщины // Физ-Мат. 2011. № 1–2. С. 7–12.

Статья поступила 20.09.2011 г.

*Sheremet M.A.* 3D REGIMES OF CONJUGATE NATURAL CONVECTION IN A CLOSED CUBE. Numerical analysis of 3D regimes of natural convection in a closed cube with finite thickness walls has been carried out. The external surfaces of two opposite sides were kept at constant temperatures, while the rest were adiabatic. A mathematical model formulated in dimensionless primitive variables “velocity – pressure – temperature” has been solved by means of the finite volume method. The influence scales of a temperature difference and a thickness of solid walls on thermohydrodynamic parameters have been determined.

Keywords: conjugate heat transfer, natural convection, cube, mathematical simulation, finite volume method.

*SHEREMET Mikhail Aleksandrovich* (Tomsk State University)

E-mail:sheremet@math.tsu.ru