

МАТЕМАТИКА

УДК 512.541

Е.В. Кайгородов

ХОПФОВЫ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ

В настоящей работе приведены общие свойства хопфовых абелевых групп, в частности связанные с прямыми разложениями. Полностью описаны хопфовы делимые группы; на основе этого описания исследование хопфовости произвольных абелевых групп сведено к исследованию хопфовости редуцированных групп. Охарактеризованы также прямые суммы циклических групп, являющиеся хопфовыми группами.

Ключевые слова: абелева группа, хопфова группа, делимая группа, редуцированная группа, циклическая группа.

В 1932 году швейцарский математик Хейнц Хопф поставил вопрос о существовании конечно-порожденной группы, изоморфной некоторой своей собственной фактор-группе. Группы, не обладающие таким свойством, получили название хопфовых.

Первым общим результатом по вопросу Хопфа явилась теорема А.И. Мальцева, утверждающая хопфовость произвольной конечно-порожденной F -аппроксимруемой группы [12]. Первый пример конечно-порожденной нехопфовой группы принадлежит Б. Нейману [9]; построенная им нехопфова группа имеет два образующих элемента, но требует бесконечного множества определяющих соотношений. Г. Хигманом построен пример нехопфовой группы с тремя образующими и двумя определяющими соотношениями [6]. Минимальные в этом смысле примеры нехопфовых групп с двумя образующими и одним определяющим соотношением были указаны в работе Г. Баумслага и Д. Солитэра [3].

Более поздние результаты о нехопфовых группах содержатся в работах [5, 8, 13]. Хопфовы абелевы (т.е. коммутативные) группы изучали Г. Баумслаг [1, 2], Корнер [4], Такаши и Ирвин [7, 10]. В частности, Корнер построил хопфову группу A без кручения, квадрат которой (т.е. группа $A \oplus A$) не является хопфовой группой.

Понятие хопфовости можно ввести для различных алгебраических систем: модулей, колец, упорядоченных множеств, топологических и функциональных пространств. Исследование хопфовых объектов представляется важной и интересной задачей современной алгебры. Ограничимся здесь рассмотрением только хопфовых абелевых групп. В связи с этим, во избежание недоразумений, сразу оговоримся, что везде в тексте работы слово «группа» будет обозначать аддитивно записанную абелеву группу.

Определение 1. Группа A называется хопфовой, если она не имеет собственных изоморфных себе фактор-групп.

Таким образом, если C – подгруппа хопфовой группы A и $A \cong A/C$, то $C = 0$ и фактор-группа A/C тривиальна, т.е. $A/C = A$. Можно дать и другое определение хопфовой группы.

Определение 1'. Группа A называется хопфовой, если всякий эпиморфизм группы A на себя является автоморфизмом.

Покажем, что эти определения эквивалентны. Если группа A не хопфова в смысле определения 1', то найдется эпиморфизм $\alpha: A \rightarrow A$, не являющийся автоморфизмом. Для него будет $\text{Im } \alpha \cong A$ и $\text{Ker } \alpha \neq 0$. Значит, $A \cong A/\text{Ker } \alpha$, где $\text{Ker } \alpha \neq 0$. Обратно, пусть группа A не хопфова в смысле определения 1 и $A \cong A/B$ для некоторой ненулевой подгруппы B . Обозначим через φ изоморфизм $A \rightarrow A/B$. Построим отображение $\chi: A \rightarrow A$, полагая $\chi = \varphi^{-1}\psi$, где $\psi: A \rightarrow A/B$ – канонический эпиморфизм. Очевидно, χ – эпиморфизм, но не автоморфизм, так как $\text{Ker } \chi = \text{Ker } \psi = B \neq 0$.

Следующий факт хорошо известен.

Теорема 1. Любая конечная группа хопфова.

Доказательство. Пусть дана конечная группа A , причем $|A| = n$. Рассмотрим произвольную собственную фактор-группу A/C группы A . Докажем, что $A \not\cong A/C$. По теореме Лагранжа (порядок и индекс любой подгруппы конечной группы A являются делителями порядка самой группы) заключаем: $n = s$, где $s = |A/C|$. Откуда $n > s$ (фактор-группа A/C – собственная). Имеем $|A| > |A/C|$, следовательно, группы A и A/C неизоморфны. Теорема доказана.

Теорема 2. Если $A = B \oplus C$ и A – хопфова группа, то группы B и C хопфовы.

Доказательство. Пусть дана прямая сумма $A = B \oplus C$ и известно, что группа A – хопфова. Покажем, что группы B и C также хопфовы. Предположим противное, т.е. пусть, например, группа B не хопфова. Значит, существует отображение $\alpha \in \text{End } B$, такое, что α – эпиморфизм, но не автоморфизм, т.е. $\text{Ker } \alpha \neq 0$. Пусть $\varepsilon: C \rightarrow C$ – тождественное отображение. Определим эпиморфизм $\gamma: A \rightarrow A$, полагая $\gamma(a) = \alpha(b) + \varepsilon(c)$ для любого $a = b + c$, где $b \in B, c \in C$. Далее,

$$\gamma(a) = \gamma(b + c) = \alpha(b) + \varepsilon(c) = \alpha(b) + c.$$

Видно, что γ – эпиморфизм, но $\text{Ker } \gamma = \text{Ker } \alpha \neq 0$. Возникает противоречие с тем, что группа A хопфова. Полученное противоречие завершает доказательство.

Теорема 3. Группа без кручения конечного ранга хопфова.

Доказательство. Пусть A – группа без кручения конечного ранга. По одному из свойств ранга без кручения имеем $r_0(A) = r_0(B) + r_0(A/B)$ [14, с. 105]. Пусть $A \cong A/B$, тогда факторгруппа A/B не имеет кручения. Следовательно, справедливо равенство: $r(A) = r(B) + r(A/B)$. Учитывая, что $r(A) = r(A/B)$, получаем: $r(B) = 0$, откуда $B = 0$, т.е. группа A хопфова. Теорема доказана.

В линейной алгебре хорошо известно матричное представление линейных преобразований. Используя прямые разложения, можно получить подобное представление эндоморфизмов абелевых групп определенными матрицами, называе-

мыми формальными или обобщенными. Для удобства чтения приведем соответствующие хорошо известные построения (см. [11], [15, теорема 106.1]).

Пусть дана прямая сумма групп $A = \bigoplus_{i=1}^n A_i$. Рассмотрим квадратную матрицу $\|\alpha_{ji}\|_{i,j=1,\dots,n}$ с элементами $\alpha_{ji} \in \text{Hom}(A_i, A_j)$. Для таких матриц можно определить обычные для матриц операции сложения и умножения. Нетрудно убедиться, что сложение и умножение формальных матриц всегда выполнимы и приводят к матрицам этого же вида. В результате получаем кольцо матриц указанного вида (кольцо обобщенных матриц).

Теорема 4. Кольцо эндоморфизмов группы $A = \bigoplus_{i=1}^n A_i$ изоморфно кольцу обобщенных матриц $\|\alpha_{ji}\|$ порядка n .

Доказательство. Пусть $\{\varepsilon_i \mid i=1,\dots,n\}$ – полная ортогональная система проекций, соответствующих данному разложению группы A . Произвольный элемент $a \in A$ равен сумме $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a$. Для любого $\alpha \in E(A)$ имеем

$$\alpha a = \sum_{i=1}^n \alpha(\varepsilon_i a) = \sum_{i,j=1}^n (\varepsilon_j \alpha \varepsilon_i) a.$$

Сопоставим эндоморфизму α матрицу $\|\alpha_{ji}\|_{i,j=1,\dots,n}$, $f: \alpha \mapsto \|\alpha_{ji}\|$, где $\alpha_{ji} = \varepsilon_j \alpha \varepsilon_i$. Можно отождествить $\varepsilon_j E(A) \varepsilon_i$ с $\text{Hom}(\varepsilon_i A, \varepsilon_j A)$, т.е. с $\text{Hom}(A_i, A_j)$. Если $\beta \in E(A)$ и $\|\beta_{ji}\|$ – соответствующая матрица с $\beta_{ji} = \varepsilon_j \beta \varepsilon_i$, то матрицы, соответствующие $\alpha - \beta$ и $\alpha \beta$, – это разность $\|\alpha_{ji} - \beta_{ji}\|$ и произведение $\left\| \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} \beta_{ki} \right\|$ матриц $\|\alpha_{ji}\|$ и $\|\beta_{ji}\|$. Следовательно, f – кольцевой гомоморфизм. Понятно, что нулевой матрице соответствует лишь нулевой эндоморфизм группы A . Обратно, пусть $\|\alpha_{ji}\|_{i,j=1,\dots,n}$ – некоторая матрица с элементами $\alpha_{ji} \in \varepsilon_j E(A) \varepsilon_i$. Определим $\alpha \in E(A)$, положив для $a \in A$

$$\alpha a = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ji} a.$$

Тогда $f: \alpha \mapsto \|\alpha_{ji}\|$. Таким образом, f – изоморфизм колец. Теорема доказана.

Рассмотрим случай, когда $A = A_1 \oplus A_2$. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – соответствующие ортогональные проекции. Тогда имеем $\varepsilon_1|_{A_1} = 1$, $\varepsilon_1|_{A_2} = 0$, $\varepsilon_2|_{A_1} = 0$, $\varepsilon_2|_{A_2} = 1$. Другими словами, для любого элемента $a \in A$ ($a = a_1 + a_2$, $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$) будет $\varepsilon_1 a = a_1$, $\varepsilon_2 a = a_2$, откуда $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1$, $\varepsilon_2^2 = \varepsilon_2$, $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon_2 \varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1_A$. Согласно теореме 4, получаем

$$E(A) \cong \begin{pmatrix} E(A_1) & \text{Hom}(A_2, A_1) \\ \text{Hom}(A_1, A_2) & E(A_2) \end{pmatrix}.$$

Каждому эндоморфизму $\alpha \in E(A)$ поставим в соответствие формальную матрицу:

$$f : \alpha \mapsto \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \alpha \varepsilon_1 & \varepsilon_1 \alpha \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 \alpha \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \alpha \varepsilon_2 \end{pmatrix},$$

или, согласуясь с введенными выше обозначениями,

$$f : \alpha \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}.$$

При этом соответствии действию эндоморфизма α на элементе $z = x + y$ ($x \in A_1$, $y \in A_2$) отвечает умножение матрицы $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ на вектор-столбец $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Выясним, как действуют эндоморфизмы α_{ji} на элементах групп A_1 и A_2 . Пусть $x \in A_1$ и $\alpha(x) = x_1 + x_2$, где $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$. Тогда $\alpha_{11}(x) = x_1$, $\alpha_{21}(x) = x_2$. Аналогично, если $y \in A_2$ и $\alpha(y) = y_1 + y_2$, где $y_1 \in A_1$, $y_2 \in A_2$, то $\alpha_{12}(y) = y_1$, $\alpha_{22}(y) = y_2$.

Если $A = A_1 \oplus A_2$, причем $\text{Hom}(A_1, A_2) = 0$ (т.е. подгруппа A_1 вполне инвариантна в группе A), то будем иметь

$$E(A) \cong \begin{pmatrix} E(A_1) & \text{Hom}(A_2, A_1) \\ 0 & E(A_2) \end{pmatrix}.$$

В теории модулей известен следующий важный факт. Если M – R - S -бимодуль, то верхние треугольные матрицы вида $\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix}$, где $r \in R$, $s \in S$, $m \in M$, образуют кольцо, называемое кольцом формальных треугольных матриц. Несложно показать, что матрица $\begin{pmatrix} u & m \\ 0 & v \end{pmatrix}$ обратима в этом кольце тогда и только тогда, когда элемент u обратим в кольце R , а v обратим в кольце S . Справедлива следующая

Теорема 5. Если $A = A_1 \oplus A_2$, а прямые слагаемые A_1 и A_2 хопфовы и, кроме того, подгруппа A_1 вполне инвариантна в группе A , то A – хопфова группа.

Доказательство. Зафиксируем некоторый эпиморфизм $\alpha : A \rightarrow A$. Пусть $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{22} \end{pmatrix}$. Сначала покажем, что $\alpha_{22} : A_2 \rightarrow A_2$ – автоморфизм. Выберем произвольный элемент $a_2 \in A_2$. Так как α – эпиморфизм, то в группе A всегда найдется такой элемент $z = x + y$ ($x \in A_1$, $y \in A_2$), что $\alpha(z) = a_2$. Имеем

$$\alpha(z) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}(x) + \alpha_{12}(y) \\ \alpha_{22}(y) \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, $\alpha(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \end{pmatrix}$. Таким образом, $\alpha_{22}(y) = a_2$. Значит, α_{22} – эпиморфизм, а поскольку группа A_2 хопфова, то α_{22} является также и автоморфизмом. Теперь проверим, будет ли автоморфизмом отображение α_{11} . Пусть a_1 –

произвольный элемент группы A_1 . Поскольку α – эпиморфизм, то в группе A обязательно существует такой элемент $z' = x' + y'$ ($x' \in A_1, y' \in A_2$), что $\alpha(z') = a_1$. Имеем

$$\alpha(z') = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}(x') + \alpha_{12}(y') \\ \alpha_{22}(y') \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что $\alpha(z') = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, получаем $\alpha_{11}(x') + \alpha_{12}(y') = a_1$, а также $\alpha_{22}(y') = 0$.

Из последнего равенства $y' \in \text{Ker } \alpha_{22}$, но так как α_{22} – автоморфизм, то $y' = 0$. Таким образом, $\alpha_{11}(x') = a_1$ и α_{11} – эпиморфизм. По условию теоремы группа A_1 – хопфова, поэтому α_{11} – автоморфизм группы A_1 . Следовательно, матрица $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ обратима, т.е. эпиморфизм α является автоморфизмом. Итак, группа A – хопфова. Теорема доказана.

Замечание 1. Покажем, что бесконечная прямая сумма копий какой-либо группы не может быть хопфовой группой. Сначала установим справедливость этого факта для случая, когда число таких копий счетно. Действительно, рассмотрим

прямую сумму $A' = \bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i$, в которой $A_i \cong A$ для любого i . Построим такой эпиморфизм φ группы A' на себя, который не будет автоморфизмом. Именно, пусть эпиморфизм φ переводит A_1 в ноль, а каждую группу A_i – изоморфно на группу A_{i-1} , $i > 1$. Понятно, что $\text{Ker } \varphi \neq 0$ и φ – не автоморфизм. Таким образом, группа A' – нехопфова. Теперь рассмотрим случай, когда $A' = \bigoplus_{i \in I} A_i$, где $|I| > \aleph_0$.

Пусть I' – некоторое счетное подмножество в I . Обозначим через I'' разность $I \setminus I'$. Можно записать

$$A' = \left(\bigoplus_{i \in I'} A_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{j \in I''} A_j \right),$$

или

$$A' = \left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{j \in I''} A_j \right).$$

Теперь, если предположить, что группа A' хопфова, то тогда и ее прямое слагаемое $\bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i$ по теореме 2 тоже будет хопфовой группой. Но из сказанного выше это невозможно.

Замечание 2. Квазициклическая группа $\mathbb{Z}(p^{\infty})$ также не является хопфовой группой. Докажем это. Пусть $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ – образующие квазициклической группы. Выполняются включения

$$0 \subset \langle c_1 \rangle \subset \langle c_2 \rangle \subset \dots \subset \langle c_n \rangle \subset \dots$$

Зададим эпиморфизм $\alpha: \mathbb{Z}(p^{\infty}) \rightarrow \mathbb{Z}(p^{\infty})$, указав, как он действует на образующих элементах. Именно, пусть $\alpha: c_i \rightarrow pc_i$ для каждого i . Тогда α – эпиморфизм, который, очевидно, не является автоморфизмом.

Теорема 6. Делимая группа будет хопфовой группой тогда и только тогда, когда она является прямой суммой конечного числа копий группы $\mathbb{Q}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть D – делимая группа, $D = \bigoplus_p D_p \oplus D_0$, где D_p – прямая сумма некоторого числа копий группы $\mathbb{Z}(p^\infty)$, а D_0 – прямая сумма копий группы $\mathbb{Q}$. Если группа D является хопфовой, то группы D_p и D_0 тоже являются хопфовыми как прямые слагаемые хопфовой группы. Тогда, учитывая замечания выше, получаем $D_p = 0$ и потому $D = D_0$, а D_0 есть конечная прямая сумма копий рациональной группы $\mathbb{Q}$.

Достаточность. Обратное утверждение имеет место в силу теоремы 3. Теорема доказана.

Любая абелева группа A разлагается в прямую сумму делимой группы и редуцированной группы [14], т.е. можно записать: $A = D \oplus R$, где D – делимая часть группы A , R – редуцированная часть группы A . Поскольку подгруппа D вполне инвариантна в группе A , то, согласуясь с теоремой 5, приходим к следующему важному результату.

Следствие 7. Группа является хопфовой тогда и только тогда, когда ее редуцированная часть есть хопфова группа, а делимая часть, если она ненулевая, есть конечная прямая сумма копий рациональной группы $\mathbb{Q}$.

Итак, мы установили, что проблема изучения хопфовых групп сводится к описанию и изучению хопфовых редуцированных групп.

Теорема 8. Пусть $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ и все прямые слагаемые A_i вполне инвариантны в группе A . Тогда группа A хопфова, если и только если каждая группа A_i хопфова.

Доказательство. Необходимость. Если группа A хопфова, то по теореме 2 все прямые слагаемые A_i хопфовы.

Достаточность. Пусть все прямые слагаемые A_i – хопфовы группы. Если α – эпиморфизм группы A , то понятно, что ограничения α_i этого эпиморфизма на каждом прямом слагаемом, $\alpha_i : A_i \rightarrow A_i$, тоже будут эпиморфизмами. Все эти эпиморфизмы будут и автоморфизмами, так как каждое прямое слагаемое A_i – хопфова группа. Тогда, очевидно, α – автоморфизм. Теорема доказана.

Мы знаем, что всякая конечно-порожденная абелева группа разлагается в конечную прямую сумму циклических групп бесконечного порядка и порядков, равных степеням простых чисел [14]. В связи с этим фактом естественно поставить вопрос о том, когда произвольная прямая сумма циклических групп будет хопфовой группой. Исчерпывающий ответ на этот вопрос дает

Теорема 9. Пусть A – прямая сумма циклических групп, $A = \bigoplus_{p_i} A_{p_i} \oplus A_0$, где A_{p_i} – прямая сумма циклических p_i -групп, A_0 – прямая сумма циклических групп бесконечного порядка. Тогда группа A хопфова, если и только если все группы A_{p_i} конечны, а группа A_0 имеет конечный ранг.

Доказательство. Необходимость. Если группа A хопфова, то все группы A_{p_i} и A_0 хопфовы как прямые слагаемые хопфовой группы. Отсюда A_0 – свободная группа конечного ранга (см. замечание 1), а каждая группа A_{p_i} конечна.

В противном случае, в группе A_{p_i} можно выделить прямое слагаемое B , являющееся прямой суммой счетного числа циклических p_i -групп. Однако легко показать, что такая группа B нехопфова. Действительно, группу B можно представить в виде $B = B_1 \oplus B_2 \oplus \dots$, где все B_i – циклические p -группы, порядки которых неубывают с *возрастанием* значений *индекса* i . Очевидно, что можно задать эпиморфизм ϕ группы B на себя, не являющийся автоморфизмом. Конкретно, пусть ϕ переводит B_1 в ноль, а каждую группу B_i на группу B_{i-1} , $i > 1$. Таким образом, B – нехопфова группа. Но это невозможно, поскольку группа A_{p_i} хопфова.

Достаточность. Пусть все A_{p_i} – конечные группы, а A_0 – есть свободная группа конечного ранга. Обозначив $\oplus A_{p_i}$ через T , можно записать $A = T \oplus A_0$. Здесь T – периодическая группа и потому $\text{Hom}(T, A_0) = 0$, т.е. подгруппа T вполне инвариантна в A . Откуда

$$E(A) \cong \begin{pmatrix} E(T) & \text{Hom}(A_0, T) \\ 0 & E(A_0) \end{pmatrix}.$$

Согласно теореме 5, хопфовость группы A эквивалентна хопфовости групп T и A_0 . Но группа T будет хопфовой в силу теоремы 8, а группа A_0 хопфова как группа без кручения конечного ранга. Итак, группа A является хопфовой. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Baumslag G. Hopficity and Abelian groups // Topics in Abelian Groups: Proc. New Mexico Symposium on Abelian Groups. 1962. P. 331–335.
2. Baumslag G. On Abelian Hopfian groups. I. // Math. Zeitschr. 1962. V. 78. No. 1. P. 53–54.
3. Baumslag G., Solitar D. Some two-generator one-relator non-Hopfian groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. V. 68. P. 199–201.
4. Corner L.S. Three examples on Hopficity in torsion-free Abelian groups // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1965. V. 16. No. 3–4. P. 303–310.
5. Yves De Cornulier. Finitely presentable, non-Hopfian groups with Kazhdan's Property (T) and infinite outer automorphism group // Proc. Amer. Math. Soc. 2005. V. 135. P. 1–8.
6. Higman G. A finitely generated group with an isomorphic proper factor group // J. London Math. Soc. 1951. V. 26. P. 59–61.
7. Irwin J.M., Takashi J. A quasi-decomposable Abelian group without proper isomorphic quotient groups and proper isomorphic subgroups // Pacif. J. Math. 1969. V. 29. No. 1. P. 151–160.
8. David Meier. Non-Hopfian groups // J. London Math. Soc. 1982. V. 26. P. 265–270.
9. Neumann B.H. A two-generator group isomorphic to a proper factor group // J. London Math. Soc. 1950. V. 25. P. 247–248.
10. Takashi J., Irwin J.M. A quasi-decomposable Abelian group without proper isomorphic quotient groups and proper isomorphic subgroups, 2 // J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. 1. 1969. V. 20. No. 4. P. 194–203.
11. Крылов П.А., Михалев А.В., Туганбаев А.А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. – М.: Факториал Пресс, 2006. – 512 с.
12. Мальцев А.И. Обобщенно нильпотентные алгебры и их присоединенные группы // Матем. сб. 1949. Т. 25. № 3. С. 347–366.

13. *Микаелян В.Г.* О конечно порождённых разрешимых нехопфовых группах // *Фундамент. прикл. матем.* 2009. Т. 15. № 1. С. 81–98.
14. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы: в 2 т. – М.: Мир, 1974. – Т. 1. – 335 с.
15. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы: в 2 т. – М.: Мир, 1977. – Т. 2. – 417 с.

Статья поступила 15.12.2011 г.

Kaigorodov E.V. HOPFIAN ABELIAN GROUPS. This paper presents the general properties of Hopfian Abelian groups, in particular, those related to direct decompositions. The complete description of Hopfian divisible groups is presented; on the basis of this description, the study of hopficity of arbitrary Abelian groups is reduced to the study of hopficity of reduced groups. Direct sums of cyclic groups that are Hopfian groups are characterized.

Keywords: Abelian group, Hopfian group, divisible group, reduced group, cyclic group

KAIGORODOV Evgeny Vladimirovich (Tomsk State University)

E-mail: gazetaintegral@gmail.com