

УДК 515.12

Н.Н. Трофименко, Т.Е. Хмылева

О ЛИНЕЙНОМ ГОМЕОМОРФИЗМЕ ПРОСТРАНСТВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА ПОДМНОЖЕСТВАХ ПРЯМОЙ ЗОРГЕНФРЕЯ

В статье доказывается, что пространства $C_p(I)$ и $C_p(\mathcal{E})$ являются линейно гомеоморфными. Здесь отрезок $I = [0, 1]$ и канторово множество $\mathcal{E}$ наделены топологией Зоргенфрея.

Ключевые слова: топология Зоргенфрея, пространства непрерывных функций, линейный гомеоморфизм, дополняемое подпространство.

В данной работе через I обозначается отрезок $[0, 1]$, наделенный топологией Зоргенфрея. Базу окрестностей точки $x \in I$ образует семейство множеств $\beta_x = \{(r, x] : r < x, r \in \mathbb{Q}\}$. Канторово множество $\mathcal{E} \subset [0, 1]$ также наделяется топологией Зоргенфрея. Через $C_p(I)$ ($C_p(\mathcal{E})$) обозначается пространство непрерывных функций на I (соответственно на $\mathcal{E}$) с топологией поточечной сходимости. Через $C_c(I)$ ($C_c(\mathcal{E})$) обозначается пространство непрерывных функций на I (соответственно на $\mathcal{E}$) с топологией компактной сходимости.

Если $\mathcal{E}$ и I рассматривать в естественной топологии, то по теореме Пестова [1] пространства $C_p(I)$ и $C_p(\mathcal{E})$ не являются линейно гомеоморфными в силу разных индуктивных размерностей $\mathcal{E}$ и I (пространство $\mathcal{E}$ является нульмерным, а I имеет размерность один). В топологии Зоргенфрея пространства $\mathcal{E}$ и I являются нульмерными, поэтому теорема Пестова не дает ответа на вопрос о линейной гомеоморфности пространств $C_p(I)$ и $C_p(\mathcal{E})$.

В данной работе доказывается следующая теорема:

Теорема 1. Пространства $C_p(I)$ и $C_p(\mathcal{E})$ являются линейно гомеоморфными.

Для доказательства этой теоремы потребуются некоторые вспомогательные определения и факты.

Хорошо известно, что канторово множество $\mathcal{E}$ в естественной топологии гомеоморфно степени дискретного двоеточия $D^{\aleph_0} = \{0, 1\}^{\aleph_0}$ с топологией произведения. Введем в произведении $D^{\aleph_0}$ топологию τ следующим образом. Для точки $t_0 = \{t_n^0\}_{n=1}^{\infty} \in D^{\aleph_0}$ и $n \in \mathbb{N}$ положим $t_0^n = (t_1^0, t_2^0, \dots, t_n^0, 0, 0, \dots)$. Фундаментальную систему открытых окрестностей точки t_0 в топологии τ образуют всевозможные множества вида

$$O_n(t_0) = [t_0^n, t_0] = \{t \in D^{\aleph_0} : t_0^n \leq t \leq t_0\},$$

где $t < t_0$ означает, что существует n_0 , такой, что $t_i = t_i^0$ для всех $i \in \{1, \dots, n_0 - 1\}$, а $t_{n_0} = 0$, $t_{n_0}^0 = 1$. Если существует такой номер n , что $t_0 = t_0^n$, то точка t_0 является

изолированной и соответствует правому концу смежного интервала к канторовому множеству.

Предложение 2. Канторово множество $\mathcal{E}$, наделенное топологией Зоргенфрея, гомеоморфно пространству $D^{\aleph_0}$ с топологией τ .

Доказательство. Хорошо известно [2], что канторово множество $\mathcal{E}$ – это множество вещественных чисел вида $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \cdot t_i}{3^i}$, где $t_i \in \{0, 1\}$. Определим отображение $h: D^{\aleph_0} \rightarrow \mathcal{E}$ по формуле

$$h(\{t_i\}_{i=1}^{\infty}) \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \cdot t_i}{3^i}.$$

Нетрудно видеть, что это отображение является биективным и возрастающим. Если $t_i = 0$ при $i \geq n+1$, то $x = \sum_{i=1}^n \frac{2 \cdot t_i}{3^i}$. Множество точек такого вида есть в точности множество изолированных точек канторова множества, наделенного топологией Зоргенфрея. Кроме того, если возьмем любую точку $t_0 = (t_1^0, t_2^0, \dots, t_n^0, t_{n+1}^0, t_{n+2}^0, \dots) \in D^{\aleph_0}$ и ее окрестность $U_n(t_0) = [t_0^n, t_0]$, то применяя отображение h , получим, что $h(U_n(t_0)) = [h(t_0^n), h(t_0)] \cap \mathcal{E}$ есть окрестность точки $h(t_0) \in \mathcal{E}$. Таким образом, отображения h и h^{-1} являются непрерывными.

■

Следствие 3. Пространства $C_p(D^{\aleph_0})$ и $C_p(\mathcal{E})$ являются линейно гомеоморфными.

Предложение 4. Пространство $C_p(\mathcal{E})$ вкладывается линейно гомеоморфно и дополняемо в пространство $C_p(I)$.

Доказательство. Определим отображение $\psi: C_p(\mathcal{E}) \rightarrow C_p(I)$ формулой

$$(\psi x)(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если } t \in \mathcal{E}, \\ x(t_2), & \text{если } t \in (t_1, t_2), \text{ где } (t_1, t_2) \cap \mathcal{E} = \emptyset; t_1, t_2 \in \mathcal{E}, \end{cases}$$

где $x \in C_p(\mathcal{E})$. Заметим, что (t_1, t_2) – смежный интервал к канторовому множеству, которому принадлежит точка t . Нетрудно видеть, что функция $\psi(x)$ непрерывна на отрезке I , наделенном топологией Зоргенфрея, и оператор ψ – это оператор продолжения, который каждой функции x , заданной на $\mathcal{E}$, ставит в соответствие её продолжение на отрезок I . Непрерывность и инъективность этого оператора очевидны. Обратный оператор $\psi^{-1}: \psi(C_p(\mathcal{E})) \rightarrow C_p(\mathcal{E})$ – это оператор сужения, также является непрерывным. Оператор проектирования $P: C_p(I) \rightarrow \psi(C_p(\mathcal{E}))$, определяется формулой $P(x) = \psi(x|_{\mathcal{E}})$. ■

Для доказательства того, что пространство $C_p(I)$ вкладывается линейно гомеоморфно и дополняемо в пространство $C_p(\mathcal{E})$, определим подмножество $\mathcal{E}_1 \subset D^{\aleph_0} = (D^{\aleph_0}, \tau)$. Множество

$$\mathcal{E}_1 = (D^{\aleph_0} \setminus T) \cup \{0\},$$

где $T = \left\{ t = \{t_k\}_{k=1}^{\infty} \in D^{\aleph_0} : \exists n \in \mathbb{N}, \text{ такой, что } t_k = 0 \text{ при всех } k \geq n \right\}.$

Предложение 5. Отображение $g : \mathcal{E}_1 \rightarrow I$, $g(\{t_k\}_{k=1}^{\infty}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k}{2^k}$, является гомеоморфизмом, если I и $\mathcal{E}_1$ наделены топологией Зоргенфрея.

Доказательство. Покажем, что $g : \mathcal{E}_1 \rightarrow I$ строго возрастает. Пусть точки $t', t'' \in \mathcal{E}_1$ такие, что $t' < t''$. Тогда существует номер n_0 , такой, что $t_i'' = t_i'$, $i < n_0$ и $t_{n_0}'' = 1$, $t_{n_0}' = 0$. Поскольку $t'' \in \mathcal{E}_1$ и $t'' \neq 0$, то существует $k > n_0$, такой, что $t_k'' = 1$. Следовательно, $t_k'' - t_k' \geq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} g(t'') - g(t') &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i'' - t_i'}{2^i} = \frac{1}{2^{n_0}} + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{t_i'' - t_i'}{2^i} = \frac{1}{2^{n_0}} + \frac{t_k'' - t_k'}{2^k} + \sum_{\substack{i=n_0+1 \\ i \neq k}}^{\infty} \frac{t_i'' - t_i'}{2^i} \geq \\ &\geq \frac{1}{2^{n_0}} + \frac{t_k'' - t_k'}{2^k} - \left| \sum_{\substack{i=n_0+1 \\ i \neq k}}^{\infty} \frac{t_i'' - t_i'}{2^i} \right| \geq \frac{1}{2^{n_0}} - \sum_{\substack{i=n_0+1 \\ i \neq k}}^{\infty} \frac{|t_i'' - t_i'|}{2^i} \geq \frac{1}{2^{n_0}} - \sum_{\substack{i=n_0+1 \\ i \neq k}}^{\infty} \frac{1}{2^i} > \frac{1}{2^{n_0}} - \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 0 \end{aligned}$$

и, значит, $g(t'') > g(t')$.

Докажем, что отображение $g : \mathcal{E}_1 \rightarrow I$ является сюръекцией. Заметим, что любая точка $y \in I$ имеет вид $y = \sum_{i=1}^n \frac{t_i}{2^i}$, где $t_i \in \{0, 1\}$. Если $t_0 = \{t_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{E}_1$, то $y = g(t_0)$. Если $t_0 = \{t_i\}_{i=1}^{\infty} \notin \mathcal{E}_1$, то есть $t_0 = (t_1^0, t_2^0, \dots, t_n^0, 1, 0, 0, \dots)$, возьмем точку $t' = (t_1^0, t_2^0, \dots, t_n^0, 0, 1, 1, \dots)$. Тогда

$$g(t') = \sum_{i=1}^n \frac{t_i^0}{2^i} + \sum_{i=n+2}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^n \frac{t_i^0}{2^i} + \frac{1}{2^{n+1}} = g(t_0) = y.$$

Следовательно, $y \in g(\mathcal{E}_1)$.

Таким образом, отображение g является возрастающей биекцией множества $\mathcal{E}_1$ на отрезок I и, следовательно, это отображение непрерывно. Очевидно, что отображение g^{-1} также является возрастающей функцией и, значит, непрерывно. ■

Следствие 6. Пространства $C_p(I)$ и $C_p(\mathcal{E}_1)$ являются линейно гомеоморфными.

Предложение 7. Пространство $C_p(\mathcal{E}_1)$ вкладывается линейно гомеоморфно и дополняемо в пространство $C_p(D^{\aleph_0})$.

Доказательство. Определим отображение $\phi : C_p(\mathcal{E}_1) \rightarrow C_p(D^{\aleph_0})$, по формуле

$$(\phi x)(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если } t \in \mathcal{E}_1 \\ x(t_1, \dots, t_n, 0, 1, 1, \dots), & \text{если } t = (t_1, \dots, t_n, 1, 0, 0, \dots) \in T, \end{cases}$$

где $x \in C_p(\mathcal{E}_1)$.

Нетрудно видеть, что функция $\phi(x)$ непрерывна на множестве $D^{\aleph_0}$, наделенном топологией Зоргенфрея, и ϕ – оператор продолжения, который каждой функции x ,

заданной на $\mathcal{E}_1$, ставит в соответствие её продолжение на множество $D^{\aleph_0}$. Непрерывность и инъективность этого оператора очевидны. Обратный оператор ϕ^{-1} – это оператор сужения, который также является непрерывным.

Оператор проектирования $P: C_p(D^{\aleph_0}) \rightarrow \phi(C_p(\mathcal{E}_1))$ определяется формулой $Px = \phi(x|_{\mathcal{E}_1})$. ■

Используя следствие 3 и следствие 6, имеем

Следствие 8. Пространство $C_p(I)$ вкладывается линейно гомеоморфно и дополняемо в пространство $C_p(\mathcal{E})$.

Доказательство теоремы 1. Поскольку $C_p(\mathcal{E})$ дополняемо вкладывается в пространство $C_p(I)$, согласно предложению 4, то $C_p(I) \sim C_p(\mathcal{E}) \times N$, где N – замкнутое линейное подпространство в $C_p(I)$. Аналогично, используя следствие 8, получаем $C_p(\mathcal{E}) \sim C_p(I) \times M$, где M – замкнутое линейное подпространство в $C_p(\mathcal{E})$. Нетрудно видеть, что оба пространства $C_p(\mathcal{E})$ и $C_p(I)$ линейно гомеоморфны своим квадратам, то есть

$$C_p(I) \sim C_p(I) \times C_p(I) \text{ и } C_p(\mathcal{E}) \sim C_p(\mathcal{E}) \times C_p(\mathcal{E}).$$

Применяя схему разложения Пелчинского [3], получаем

$$C_p(\mathcal{E}) \sim C_p(I) \times M \sim C_p(I) \times C_p(I) \times M \sim C_p(I) \times C_p(\mathcal{E}) \times C_p(\mathcal{E}) \times N \sim C_p(\mathcal{E}) \times N \sim C_p(I). \blacksquare$$

Используя результат Архангельского ([4], следствие 4) и тот факт, что на прямой Зоргенфрея каждое счетно-компактное множество является компактным, получаем следующий результат.

Теорема 2. Пространства $C_c(I)$ и $C_c(\mathcal{E})$ линейно гомеоморфны в топологии компактной сходимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pestov V.G. The coincidence of the dimensions $\dim$ of 1-equivalent topological spaces // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1982. No. 266. P. 553–556.
2. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
3. Kalton N.J., Albiac F. Topics in Banach Space Theory. Springer, 2006. 373 p.
4. Архангельский А.В. О линейных гомеоморфизмах пространств функций // ДАН СССР. 1982. Т. 264. № 6. С. 1289–1292.

Статья поступила 26.04.2012 г.

Trofimenko N.N., Khmyleva T.E. ON A LINEAR HOMEOMORPHISM OF SPACES OF CONTINUOUS FUNCTIONS ON SUBSETS OF THE SORGENFREY LINE. In this paper, it is proved that the spaces $C_p(I)$ and $C_p(\mathcal{E})$ are linearly homeomorphic. Here, the interval $I = [0, 1]$ and a Cantor set $\mathcal{E}$ are equipped with the Sorgenfrey topology.

Keywords: Sorgenfrey topology, spaces of continuous functions, linear homeomorphism, complemented subspace.

TROFIMENKO Nadezhda Nikolaevna (Tomsk State University)
E-mail: Trofimenko@sibmail.com

KHMYLEVA Tatiana Evgenievna (Tomsk State University)