

УДК 514.752

О.В. Цоколова

НЕГОЛОНОМНЫЕ ТОРСЫ 2-ГО РОДА В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В области G четырехмерного евклидова пространства E_4 исследована геометрия гладкого трехмерного распределения Δ_3 нулевой полной кривизны 2-го рода.

Ключевые слова: неголономная геометрия, распределение, уравнение Пфаффа, метод Картана.

Гладкое отображение Δ_3 , сопоставляющее $\forall M \in E_4$ (или области $G \subset E_4$) трехмерную плоскость π_3 , проходящую через M , называется трехмерным распределением в E_4 [1, с. 683; 2, с.19]. По распределению Δ_3 однозначно определяется уравнение Пфаффа, обладающее тем свойством, что все его интегральные многообразия, проходящие через M , касаются в этой точке плоскости π_3 . Распределение Δ_3 голономно, если определяемое им уравнение Пфаффа вполне интегрируемо и – неголономно в противном случае. Его интегральные кривые – это кривые распределения. Пара (M, π_3) называется плоским элементом; плоскость π_3 – плоскостью распределения в точке M , прямая l , проходящая через M ортогонально π_3 , – нормалью распределения в точке M . Множество всех плоских элементов (M, π_3) представляет собой четырехмерное многообразие.

Для неголономного распределения Δ_3 определены два важных инварианта: K_1 – полная кривизна 1-го рода и K_2 – полная кривизна 2-го рода. В голономном случае $K_1 = K_2$ есть гауссова кривизна интегральной поверхности, проходящей через M . Равенство нулю гауссовой кривизны характеризует развертывающиеся поверхности (торсы). Поэтому неголономное распределение, для которого $K_2 = 0$, естественно назвать неголономным торсом 2-го рода (НТ-2). (Аналогично, если для Δ_3 – инвариант $K_1 = 0$, то это характеристика неголономного тора 1-го рода (НТ-1)). Данная работа посвящена изучению НТ-2 в четырехмерном евклидовом пространстве.

Предварительные сведения

Выберем подвижной ортонормированный репер $\{M, \bar{e}_i\}$ следующим образом. Векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ поместим в плоскость π_3 , вектор $\bar{e}_4$ направим по нормали плоскости π_3 в точке M . Пусть $\bar{r}$ – радиус-вектор точки M . Деривационные формулы репера запишем в следующем виде:

$$d\bar{r} = \omega^i \bar{e}_i, \quad (0.1)$$

$$d\bar{e}_i = \omega_i^j \bar{e}_j,$$

где $\omega_i^j = -\omega_j^i$, $d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i$, $d\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j$, $(i, j, k = \overline{1,4})$.

При таком выборе репера уравнение Пфаффа, определяемое распределением Δ_3 , имеет вид

$$\omega^4 = 0.$$

Формы Пфаффа ω^i, ω_4^i – главные формы [3, с.288]. Из них ω^i – базисные формы, и поэтому

$$\omega_4^i = A_j^i \omega^j. \quad (0.2)$$

По матрице

$$(A_j^i) = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 & A_4^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 & A_4^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 & A_4^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

определяем линейный оператор A , назовем его *основным линейным оператором*. Инварианты оператора A являются важнейшими инвариантами распределения Δ_3 . Оператор A допускает сужение A^* на плоскость π_3 . Матрица

$$(A^*) = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{pmatrix}$$

оператора A^* для неголономного распределения несимметрична. Симметричную часть оператора A^* обозначим B^* , а кососимметричную через B . Матрицы операторов B^* и B имеют соответственно вид

$$(B^*) = \begin{pmatrix} A_1^1 & \frac{A_2^1 + A_1^2}{2} & \frac{A_3^1 + A_1^3}{2} \\ \frac{A_2^1 + A_1^2}{2} & A_2^2 & \frac{A_3^2 + A_2^3}{2} \\ \frac{A_3^1 + A_1^3}{2} & \frac{A_3^2 + A_2^3}{2} & A_3^3 \end{pmatrix}$$

и

$$(B) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{A_2^1 - A_1^2}{2} & \frac{A_3^1 - A_1^3}{2} \\ \frac{A_2^1 - A_1^2}{2} & 0 & \frac{A_3^2 - A_2^3}{2} \\ \frac{A_3^1 - A_1^3}{2} & \frac{A_3^2 - A_2^3}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$\rho^1 = \frac{A_3^2 - A_2^3}{2}, \rho^2 = \frac{A_1^3 - A_3^1}{2}, \rho^3 = \frac{A_2^1 - A_1^2}{2}, \quad (0.3)$$

тогда

$$(B) = \begin{pmatrix} 0 & \rho^3 & -\rho^2 \\ -\rho^3 & 0 & \rho^1 \\ \rho^2 & -\rho^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Кососимметричный тензор с матрицей (B) , называется тензором неголономности. Он обращается в нуль ($\rho^1 = \rho^2 = \rho^3 = 0$) тогда и только тогда, когда распределение Δ_3 голономно.

Собственные значения оператора A^* , взятые с противоположными знаками, – это главные кривизны второго рода $(k_1^{(2)}, k_2^{(2)}, k_3^{(2)})$. Собственные векторы оператора A^* определяют главные направления 2-го рода. Линия распределения Δ_3 , в каждой точке которой касательный вектор имеет главные направления 2-го рода, называется линией кривизны 2-го рода.

Вдоль линии кривизны 2-го рода нормали распределения образуют торс, точка ребра возврата которого на нормали имеет координату, обратную главной кривизне 2-го рода [4, с. 62].

Полной кривизной 2-го рода называется инвариант

$$K_2 = \det(A^*) = -k_1^{(2)} k_2^{(2)} k_3^{(2)}.$$

Аналогичным образом с оператором B^* связаны понятия главных кривизн 1-го рода $(k_1^{(1)}, k_2^{(1)}, k_3^{(1)})$, главных направлений 1-го рода и линий кривизны 1-го рода. Главные кривизны 1-го рода в точке M – это экстремали нормальных кривизн кривых распределения, проходящих через точку M [4, с.64].

Полная кривизна 1-го рода $K_1 = \det(B^*) = -k_1^{(1)} k_2^{(1)} k_3^{(1)}$.

Полные кривизны 1-го и 2-го рода связаны следующей зависимостью [4, с. 64]:

$$K_2 = K_1 - (\rho^1)^2 k_1^{(1)} - (\rho^2)^2 k_2^{(1)} - (\rho^3)^2 k_3^{(1)}. \quad (0.4)$$

Отсюда заключаем: если распределение Δ_3 голономно, то $K_1 = K_2$. Но если $K_1 = K_2$, то это еще не значит, что Δ_3 голономно. Пример неголономного распределения Δ_3 , для которого $K_1 = K_2$, рассмотрим в конце данной работы.

Последний столбец матрицы (A_j^i) основного оператора A определяет вектор кривизны $k\bar{n}$ линии тока нормалей $\bar{e}_4$ распределения Δ_3 , а именно

$$k\bar{n} = A_4^1 \bar{e}_1 + A_4^2 \bar{e}_2 + A_4^3 \bar{e}_3.$$

В дальнейшем будем обозначать $A_4^1 = a, A_4^2 = b, A_4^3 = c$.

Определение. Трехмерное распределение Δ_3 , для которого полная кривизна 2-го рода равна нулю, называется неголономным торсом 2-го рода в E_4 .

Переходим к рассмотрению неголономных торсов 2-го рода (НТ-2) в E_4 .

НТ-2 разделим на три класса в зависимости от значений главных кривизн 2-го рода.

I. НТ-2, для которых только одна главная кривизна второго рода равна нулю ($k_3^{(2)} = 0$).

II. НТ-2, для которых две главные кривизны 2-го рода нули, а третья главная кривизна второго рода отлична от нуля ($k_2^{(2)} = k_3^{(2)} = 0, k_1^{(2)} \neq 0$).

III. НТ-2, для которых все три главные кривизны 2-го рода имеют нулевые значения ($k_2^{(2)} = k_3^{(2)} = k_1^{(2)} = 0$).

Исследуем геометрию каждого из этих видов.

I. Неголономные торсы 2-го рода, для которых только одна главная кривизна 2-го рода равна нулю

1. Главные кривизны 2-го рода для НТ-2 общего вида.

Линии кривизны второго рода

Обозначим главную кривизну второго рода равную нулю через $k_3^{(2)}$. Направим вектор $\bar{e}_1$ по главному направлению второго рода, соответствующему $k_3^{(2)} = 0$. Тогда координаты вектора $\bar{e}_1$ должны удовлетворять системе уравнений

$$A_1^1 \xi^1 + A_2^1 \xi^2 + A_3^1 \xi^3 = 0,$$

$$A_1^2 \xi^1 + A_2^2 \xi^2 + A_3^2 \xi^3 = 0,$$

$$A_1^3 \xi^1 + A_2^3 \xi^2 + A_3^3 \xi^3 = 0.$$

Так как для $\bar{e}_1$ имеем $\xi^1 = 1, \xi^2 = 0, \xi^3 = 0$, то

$$A_1^1 = A_1^2 = A_1^3 = 0. \quad (1.1.1)$$

И определитель матрицы A^* будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} 0 & A_2^1 & A_3^1 \\ 0 & A_2^2 & A_3^2 \\ 0 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix}.$$

Отсюда получаем собственные значения оператора A^* : $\lambda_3 = 0 = k_3^{(2)}$,

$$\lambda_{1,2} = \frac{A_2^2 + A_3^3 \pm \sqrt{(A_2^2 - A_3^3) + 4A_2^3 A_3^2}}{2} = -k_{1,2}^{(2)}. \quad (1.1.2)$$

Из (1.1.2) следует

$$H = k_1^{(2)} + k_2^{(2)} = -(A_2^2 + A_3^3)$$

– средняя кривизна и

$$k_1^{(2)} k_2^{(2)} = 4 \begin{vmatrix} A_2^2 & A_3^2 \\ A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (1.1.3)$$

Итак, одна из главных кривизн 2-го рода $k_3^{(2)} = 0$, две другие, не равные нулю, могут быть как действительными так и мнимыми числами. Следовательно, через точку M проходит, по крайней мере, одна действительная линия кривизны 2-го рода. Линии кривизны 2-го рода, соответствующие $k_3^{(2)} = 0$, имеют уравнения

$$\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = 0. \quad (1.1.4)$$

Предложение 1. *Линия кривизны 2-го рода, соответствующая $k_3^{(2)} = 0$, лежит в плоскости π_3 .*

Действительно, вдоль линии (1.1.4) вектор $\bar{e}_4$ нормали к π_3 постоянен, так как

$$d\bar{e}_4 = \omega_4^1 \bar{e}_1 + \omega_4^2 \bar{e}_2 + \omega_4^3 \bar{e}_3 = 0 \text{ в силу условий } A_1^1 = A_1^2 = A_1^3 = 0. \blacksquare$$

Определение. *Эквидирекционной линией (поверхностью) называется линия (поверхность), в точках которой векторы нормалей распределения параллельны [5, с. 32].*

Предложение 2. *Для НТ-2 класса $k_3^{(2)} = 0, k_1^{(2)} \neq 0, k_2^{(2)} \neq 0$ через каждую точку M проходит одна эквидирекционная линия, совпадающая с той линией кривизны 2-го рода, которая соответствует нулевой главной кривизне 2-го рода.*

Доказательство. Находим уравнения, определяющие эквидирекционные линии.

Так как в их точках нормали НТ-2 параллельны, то единичные векторы $\bar{e}_4$ постоянны. Следовательно $d\bar{e}_4 = 0$. Используя формулы (0.1), (0.2), (1.1.1) получаем

$$\begin{aligned} A_2^1 \omega^2 + A_3^1 \omega^3 + a \omega^4 &= 0, \\ A_2^2 \omega^2 + A_3^2 \omega^3 + b \omega^4 &= 0, \\ A_2^3 \omega^2 + A_3^3 \omega^3 + c \omega^4 &= 0. \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

В общем случае система (1.1.5) линейно независима и определяет единственную эквидирекционную линию, проходящую через M и совпадающую с линией кривизны 2-го рода (1.1.4). ■

2. Множество плоскостей π_3 для НТ-2 с одной нулевой главной кривизной 2-го рода

Для произвольного трехмерного распределения Δ_3 в E_4 множество плоских элементов (M, π_3) зависит от четырех параметров. Однако множество плоскостей π_3 может зависеть от меньшего количества параметров. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Множество плоскостей π_3 для НТ-2 с одной нулевой главной кривизной 2-го рода зависит от трех параметров.

Доказательство. Находим характеристику плоскости π_3 при любом смещении:

$$\begin{aligned} x^4 &= 0, \\ (2\rho^3\omega^2 - 2\rho^2\omega^3 + a\omega^4)x^1 + (A_2^2\omega^2 + A_3^2\omega^3 + b\omega^4)x^2 + \\ &+ (A_2^3\omega^2 + A_3^3\omega^3 + c\omega^4)x^3 - \omega^4 = 0. \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

Формы $\omega^2, \omega^3, \omega^4$, от которых зависит характеристика, линейно зависимы. Таким образом, множество плоскостей π_3 зависит от трех параметров. ■

Теорема 2. Плоскость π_3 для НТ-2 класса $k_3^{(2)} = 0, k_1^{(2)} \neq 0, k_2^{(2)} \neq 0$ имеет только одну характеристическую точку (собственную или несобственную).

Доказательство. Находим характеристику плоскости π_3 при любом смещении. Из (1.2.1) получаем

$$\begin{aligned} x^4 &= 0, \\ 2\rho^3x^1 + A_2^2x^2 + A_3^2x^3 &= 0, \\ -2\rho^2x^1 + A_3^2x^2 + A_3^3x^3 &= 0, \\ ax^1 + bx^2 + cx^3 &= 1. \end{aligned}$$

Обозначим $\delta = \begin{vmatrix} 2\rho^3 & A_2^2 & A_3^2 \\ -2\rho^2 & A_3^2 & A_3^3 \\ a & b & c \end{vmatrix}$. При $\delta \neq 0$ имеем

$$x_0^1 = \frac{\begin{vmatrix} A_2^2 & A_3^2 \\ A_3^2 & A_3^3 \end{vmatrix}}{\delta}, x_0^2 = \frac{\begin{vmatrix} A_2^3 & 2\rho^3 \\ A_3^3 & -2\rho^2 \end{vmatrix}}{\delta}, x_0^3 = \frac{\begin{vmatrix} 2\rho^3 & A_2^2 \\ -2\rho^2 & A_3^2 \end{vmatrix}}{\delta}. \quad (1.2.2)$$

Таким образом, плоскость π_3 имеет одну характеристическую точку $M_0(x_0^1, x_0^2, x_0^3, 0)$. Эта точка будет собственной при $\delta \neq 0$ и несобственной – при $\delta = 0$.

Возможны три случая: а) плоскость π_3 огибает трехмерную поверхность (общий случай); б) точка M_0 неподвижна, то есть является общей для всех плоскостей π_3 (неголономный конус); с) Точка M_0 – несобственная точка (неголономный цилиндр). Переходим к рассмотрению этих случаев.

3. Канонический репер для НТ-2 класса $k_3^{(2)} = 0, k_1^{(2)} \neq 0, k_2^{(2)} \neq 0$ общего вида. Основные формулы

Направив вектор $\bar{e}_2$ ортогонально касательной к линии кривизны 2-го рода, соответствующей $k_3^{(2)} = 0$, и к прямой MM_0 получим ортонормированный канонический репер $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4\}$ для данного класса НТ-2. В нем имеют место формулы

$$\begin{vmatrix} A_2^3 & \rho^3 \\ A_3^3 & -\rho^2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} A_2^2 & A_3^2 \\ A_3^2 & A_3^3 \end{vmatrix} \neq 0, \delta = a \begin{vmatrix} A_2^2 & A_3^2 \\ A_3^2 & A_3^3 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 2\rho^3 & A_2^2 \\ -2\rho^2 & A_3^2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad (1.3.1)$$

$$2\rho^1 = A_3^2 - A_2^3.$$

Прямая MM_0 определяется уравнениями

$$\begin{aligned} 2 \begin{vmatrix} \rho^3 & A_2^2 \\ -\rho^2 & A_3^2 \end{vmatrix} x^1 - \begin{vmatrix} A_2^2 & A_3^2 \\ A_3^2 & A_3^3 \end{vmatrix} x^3 &= 0, \\ x^2 &= x^4 = 0. \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Средняя кривизна НТ-2: $H = -(A_2^2 + A_3^3)$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2(\rho^3 A_3^2 + \rho^2 A_2^2)}{A_2^2 A_3^3 - A_3^2 A_2^3},$$

где α – угол между касательной к линии кривизны 2-го рода, соответствующей $k_3^{(2)} = 0$, и прямой MM_0 .

Формулы (0.2) для данного класса НТ-2 имеют вид

$$\begin{aligned}\omega_4^1 &= 2\rho^3 \omega^2 - 2\rho^2 \omega^3 + a\omega^4, \\ \omega_4^2 &= A_2^2 \omega^2 + A_3^2 \omega^3 + b\omega^4, \\ \omega_4^3 &= A_2^3 \omega^2 + A_3^3 \omega^3 + c\omega^4.\end{aligned}\tag{1.3.3}$$

4. Асимптотические линии НТ-2 общего вида

Находим уравнения асимптотических линий НТ-2. Для них $(d^2 \bar{r}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) = 0$. Отсюда, используя формулы (1.3.3), получаем

$$\begin{aligned}A_2^2(\omega^2)^2 + A_3^3(\omega^3)^2 + 2\rho^3 \omega^1 \omega^2 - 2\rho^2 \omega^1 \omega^3 + (A_2^2 + A_3^3)\omega^2 \omega^3 &= 0, \\ \omega^4 &= 0.\end{aligned}\tag{1.4.1}$$

Касательные к асимптотическим линиям в точке M образуют конус 2-го порядка:

$$\begin{aligned}A_2^2(x^2)^2 + A_3^3(x^3)^2 + 2\rho^3 x^1 x^2 - 2\rho^2 x^1 x^3 + (A_2^2 + A_3^3)x^2 x^3 &= 0, \\ x^4 &= 0.\end{aligned}\tag{1.4.2}$$

Предложение 1. Линия кривизны 2-го рода НТ-2, соответствующая нулевой главной кривизне 2-го рода, является асимптотической линией, лежащей в плоскости π_3 .

Справедливость данного утверждения вытекает из (1.4.1) и (1.1.4), а также из того факта, что вдоль нее $d\bar{e}_4 = 0$. То есть вектор $\bar{e}_4$, ортогональный π_3 , постоянен. ■

Предложение 2. Точка M_0 принадлежит асимптотическому конусу.

Доказательство. Точка M_0 имеет координаты

$$x_0^1 = \frac{\begin{vmatrix} A_2^2 & A_2^3 \\ A_3^2 & A_3^3 \end{vmatrix}}{\delta}, \quad x_0^2 = 0, \quad x_0^3 = \frac{\begin{vmatrix} 2\rho^3 & A_2^2 \\ -2\rho^2 & A_3^2 \end{vmatrix}}{\delta}, \quad x_0^4 = 0.$$

Легко проверить, что $(x_0^1, x_0^2, x_0^3, x_0^4)$ удовлетворяют уравнениям конуса (1.4.2). ■

Следствие. Прямая MM_0 является касательной к одной из асимптотических линий, проходящих через точку M . ■

Предложение 3. Асимптотическая линия, касающаяся прямой MM_0 , является пространственной кривой.

Доказательство. Уравнения линий, касающихся прямой MM_0 , имеют вид

$$2(A_3^2 \rho^3 + A_2^2 \rho^2)\omega^1 - (A_2^2 A_3^3 - A_3^2 A_2^3)\omega^3 = 0, \quad \omega^2 = \omega^4 = 0.\tag{1.4.3}$$

Вдоль линии (1.4.3) получаем

$$d\bar{e}_4 = (-2\rho^2 \bar{e}_1 + A_3^2 \bar{e}_2 + A_3^3 \bar{e}_3)\omega^3 \neq 0,$$

То есть вектор $\bar{e}_4$ меняет свое направление, а следовательно, и плоскость π_3 меняется. Это значит, что линия (1.4.2) не лежит в плоскости π_3 . ■

Предложение 4. Характеристика плоскости π_3 при смещении по любой кривой НТ-2 (кроме линии кривизны 2-го рода) есть двумерная плоскость, проходящая через прямую MM_0 .

Доказательство. Находим характеристику плоскости π_3 при ее смещении по любой кривой НТ-2, то есть по любой интегральной кривой уравнения $\omega^4 = 0$. Получим

$$x^4 = 0,$$

$$(2\rho^3\omega^2 - 2\rho^2\omega^3)x^1 + (A_2^2\omega^2 + A_3^2\omega^3)x^2 + (A_2^3\omega^2 + A_3^3\omega^3)x^3 = 0.$$

Отсюда видно, что вдоль линии кривизны 2-го рода (1.1.4) (как и следовало ожидать) плоскость π_3 неподвижна. Вдоль линий $\omega^4 = \omega^3 = \omega^1 = 0$ и $\omega^4 = \omega^2 = \omega^1 = 0$, касающихся двух линейно независимых направлений, характеристиками плоскости π_3 будут соответственно 2-мерные плоскости

$$2\rho^3x^1 + A_2^2x^2 + A_2^3x^3 = 0,$$

$$x^4 = 0$$

и

$$2\rho^2x^1 - A_3^2x^2 - A_3^3x^3 = 0,$$

$$x^4 = 0.$$

Легко проверить, что эти плоскости пересекаются по прямой MM_0 . ■

Предложение 5. Характеристика плоскости π_3 при смещении по линии тока векторного поля нормалей НТ-2 – это двумерная плоскость, проходящая через M_0 ортогонально вектору кривизны линии тока.

Доказательство. Характеристика плоскости π_3 при смещении по линии тока $\omega^4 = \omega^3 = \omega^1 = 0$ векторного поля $\{\bar{e}_4\}$ определяется уравнениями

$$x^4 = 0, \quad (1.4.4)$$

$$ax^1 + bx^2 + cx^3 = 1.$$

Вектор кривизны линии тока – это вектор

$$k\bar{n} = a\bar{e}_1 + b\bar{e}_2 + c\bar{e}_3. \quad (1.4.5)$$

Из (1.4.4), (1.4.5), (1.3.1) видим, что двумерная плоскость (1.5.4) проходит через точку M_0 и ортогональна вектору $k\bar{n}$. ■

5. Неголономный конус класса $k_3^{(2)} = 0, k_1^{(2)} \neq 0, k_2^{(2)} \neq 0$

Определение. Неголономный торс 2-го рода класса $k_3^{(2)} = 0, k_1^{(2)} \neq 0, k_2^{(2)} \neq 0$, все плоскости которого проходят через одну точку, называются неголономным конусом класса $k_3^{(2)} = 0, k_1^{(2)} \neq 0, k_2^{(2)} \neq 0$.

Неподвижная точка M_0 называется вершиной неголономного конуса. Находим условия, определяющие неголономный конус данного класса. Требуем неподвижности точки M_0 :

$$d(\bar{r} + x_0^1\bar{e}_1 + x_0^2\bar{e}_3) = 0.$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \omega^1 + dx_0^1 + x_0^3\omega_3^1 &= 0, \\ \omega^2 + x_0^1\omega_1^2 + x_0^3\omega_3^2 &= 0, \\ \omega^3 + dx_0^3 + x_0^1\omega_1^3 &= 0. \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

Предложение 6. Асимптотическая линия неголономного конуса класса $k_3^{(2)} = 0, k_1^{(2)} \neq 0, k_2^{(2)} \neq 0$, касающаяся прямой MM_0 , является прямой линией.

Для доказательства данного предложения достаточно показать, что вектор $\overline{MM_0} = x_0^1\bar{e}_1 + x_0^2\bar{e}_3$ не меняет своего направления при смещении по асимптотиче-

ской линии (1.4.3). Учитывая (1.3.3), (1.4.3), (1.5.1), получаем

$$d(x_0^1 \bar{e}_1 + x_0^3 \bar{e}_3) = -\frac{1}{x_0^3} (x_0^1 \bar{e}_1 + x_0^3 \bar{e}_3) \omega^3,$$

что и означает неизменность направления асимптотической линии, касающейся прямой MM_0 . ■

Нормаль $\bar{e}_4$ неголономного конуса, как и для НТ-2 общего вида, вдоль асимптотической MM_0 меняет свое направление, а следовательно, меняет свое положение касательная плоскость π_3 неголономного конуса вдоль MM_0 .

Доказывается это свойство так же, как и для НТ-2 общего вида.

6. Неголономный цилиндр класса $k_3^{(2)} = 0, k_1^{(2)} \neq 0, k_2^{(2)} \neq 0$

Определение. Неголономным цилиндром класса $k_3^{(2)} = 0, k_1^{(2)} \neq 0, k_2^{(2)} \neq 0$ называется НТ-2 данного класса, плоскости π_3 которого параллельны одной прямой.

Для неголономного цилиндра точка M_0 становится бесконечно удаленной. Следовательно $\delta = 0$, то есть

$$a(A_2^2 A_3^3 - A_3^2 A_2^3) + 2c(\rho^3 A_3^2 + \rho^2 A_2^2) = 0. \quad (1.6.1)$$

Вектор $(A_2^2 A_3^3 - A_3^2 A_2^3) \bar{e}_1 + 2(\rho^3 A_3^2 + \rho^2 A_2^2) \bar{e}_3$, или $c \bar{e}_1 - a \bar{e}_3$, не меняет своего направления, то есть

$$d(c \bar{e}_1 - a \bar{e}_3) = \lambda(c \bar{e}_1 - a \bar{e}_3). \quad (1.6.2)$$

Из (1.6.1) и (1.6.2) получаем условия, характеризующие неголономные цилиндры данного класса:

$$\begin{aligned} aA_2^3 - 2c\rho^3 &= 0, \\ aA_3^3 + 2c\rho^2 &= 0, \\ a\omega_3^2 - c\omega_1^2 &= 0, \\ cda - adc + (a^2 + c^2)\omega_3^1 &= 0. \end{aligned} \quad (1.6.3)$$

Прямая, проходящая через M в направлении вектора $c \bar{e}_1 - a \bar{e}_3$, является асимптотической линией, вдоль которой касательная плоскость π_3 неголономного цилиндра меняет свое положение. Действительно, для вектора $\bar{e}_4$, ортогонального π_3 , при перемещении вдоль данной прямой имеем

$$d\bar{e}_4 = \pm \frac{a}{c} (2\rho^2 \bar{e}_1 - A_3^2 \bar{e}_2 - A_3^3 \bar{e}_3) \omega^1 \neq 0,$$

то есть направление вектора $\bar{e}_4$ меняется. Следовательно, меняется и положение ортогональной ему плоскости π_3 .

Заметим, что неголономные цилиндры не имеют особых точек в отличие от других видов НТ-2.

II. Неголономные торсы 2-го рода, для которых только одна главная кривизна 2-го рода не равна нулю $k_1^{(2)} \neq 0, k_3^{(2)} = 0, k_2^{(2)} = 0$

1. Линии кривизны 2-го рода для НТ-2 класса $k_1^{(2)} \neq 0, k_3^{(2)} = k_2^{(2)} = 0$

Так как главные кривизны 2-го рода отличаются только знаком от собственных значений оператора A^* , то это значит, что для данного класса НТ-2 характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} A_1^1 - \lambda & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 - \lambda & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет два корня равных нулю и один отличный от нуля. Следовательно,

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_3^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_2^2 & A_3^2 \\ A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.1.1)$$

$$\lambda_1 = A_1^1 + A_2^2 + A_3^3 \neq 0, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Для главного направления 2-го рода (ξ^1, ξ^2, ξ^3) , соответствующего $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, имеем

$$\begin{aligned} A_1^1 \xi^1 + A_2^1 \xi^2 + A_3^1 \xi^3 &= 0, \\ A_1^2 \xi^1 + A_2^2 \xi^2 + A_3^2 \xi^3 &= 0, \\ A_1^3 \xi^1 + A_2^3 \xi^2 + A_3^3 \xi^3 &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Направим вектор $\bar{e}_1$ по данному главному направлению 2-го рода, тогда из (2.1.2) и (2.1.1) получим

$$A_1^1 = A_1^2 = A_1^3 = 0, \quad \begin{vmatrix} A_2^2 & A_3^2 \\ A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_1 = A_2^2 + A_3^3 = -k_1^{(2)} \neq 0. \quad (2.1.3)$$

Находим главное направление $\bar{\xi}$ второго рода, соответствующее кривизне $k_1^{(2)} \neq 0$, для него имеем

$$\begin{aligned} -(A_2^2 + A_3^3) \xi^1 + A_2^1 \xi^2 + A_3^1 \xi^3 &= 0, \\ -A_3^3 \xi^2 + A_3^2 \xi^3 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда $\bar{\xi} = (A_2^1 A_3^2 + A_3^1 A_2^3) \bar{e}_1 - k_1^{(2)} (A_3^2 \bar{e}_2 + A_3^3 \bar{e}_3)$.

Направим вектор $\bar{e}_2 \parallel [\bar{e}_1, \bar{\xi}]$, получим $A_2^2 = 0, A_3^3 \neq 0$. С этого момента репер стал каноническим. Относительно него главное направление 2-го рода, соответствующее кривизне $k_3^{(2)} = 0, k_2^{(2)} = 0$ определяется вектором $\bar{e}_1$, а направление, соответствующее $k_1^{(2)} \neq 0$ есть направление вектора

$$\bar{\xi} = A_3^1 \bar{e}_1 - k_1^{(2)} \bar{e}_3. \quad (2.1.4)$$

Из (2.1.3) и (0.2) следует $A_2^2 = 0, k_1^{(2)} = -A_3^3, A_2^3 = -2\rho^1$.

Линии кривизны 2-го рода, соответствующие кривизне $k_3^{(2)} = k_2^{(2)} = 0$, определяются уравнениями

$$\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = 0. \quad (2.1.5)$$

Линии кривизны 2-го рода, соответствующие $k_1^{(2)} \neq 0$, определяются уравнениями

$$k_1^{(2)} \omega^1 - 2\rho^2 \omega^3 = 0, \quad \omega^2 = \omega^4 = 0. \quad (2.1.6)$$

Касательные к линиям кривизны 2-го рода (2.1.5) и (2.1.6) лежат в плоскости $x^2 = x^4 = 0$. Угол α между ними вычисляется по формуле

$$\cos \alpha = \frac{2\rho^2}{\sqrt{4(\rho^2)^2 + (k_1^{(2)})^2}}, \quad (2.1.7)$$

2. Основные формулы для НТ-2 класса $k_1^{(2)} \neq 0, k_3^{(2)} = 0, k_2^{(2)} = 0$

Используя равенства (2.1.3), (0.2), (0.3), получим формулы (0.1) в каноническом репере для данного класса НТ-2:

$$\begin{aligned}\omega_4^1 &= 2\rho^3\omega^2 - 2\rho^2\omega^3 + a\omega^4, \\ \omega_4^2 &= b\omega^4, \\ \omega_4^3 &= -2\rho^1\omega^2 - k_1^{(2)}\omega^3 + c\omega^4.\end{aligned}\tag{2.2.1}$$

где $k_1^{(2)} \neq 0$ – главная кривизна 2-го рода, ρ^1, ρ^2, ρ^3 – компоненты тензора неголономности, a, b, c – проекции вектора кривизны линии тока нормали на координатные оси.

Из (2.2.1) следует, что эквидирекционные линии (линии, вдоль которых векторы поля нормалей $(\bar{e}_4)$ распределения Δ_3 параллельны) определяются уравнениями

$$\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = 0,$$

то есть совпадают с линиями кривизны 2-го рода, соответствующими $k_3^{(2)} = k_2^{(2)} = 0$. Другими словами вдоль всякой линии кривизны 2-го рода, соответствующей $k_3^{(2)} = k_2^{(2)} = 0$, нормали распределения описывают цилиндр.

3. Множество касательных плоскостей НТ-2

класса $k_1^{(2)} \neq 0, k_3^{(2)} = 0, k_2^{(2)} = 0$

Теорема 1. Множество касательных плоскостей НТ-2 класса $k_1^{(2)} \neq 0, k_3^{(2)} = 0, k_2^{(2)} = 0$ зависит от трех параметров.

Доказательство. Находим характеристику плоскости π_3

$$x^4 = 0\tag{2.3.1}$$

$$(2\rho^3\omega^2 - 2\rho^2\omega^3 + a\omega^4)x^1 + b\omega^4x^2 + (-2\rho^1\omega^2 - k_1^{(2)}\omega^3 + c\omega^4)x^3 - \omega^4 = 0.$$

Равенство (2.3.1) содержит три независимые формы. Следовательно, множество касательных плоскостей зависит от трех параметров для НТ-2 рассматриваемого вида. ■

Характеристическая точка M_0 плоскости π_3 имеет координаты

$$M_0(0, \frac{1}{b}, 0, 0)$$

Таким образом, касательные плоскости НТ-2 класса $k_1^{(2)} \neq 0, k_3^{(2)} = k_2^{(2)} = 0$ огибают в общем случае трехмерную поверхность, состоящую из точек M_0 . Эта поверхность является особой поверхностью распределения Δ_3 данного класса.

4. Асимптотические линии НТ-2 класса $k_1^{(2)} \neq 0, k_3^{(2)} = k_2^{(2)} = 0$

Асимптотические линии находятся из условия

$$(d^2\bar{r}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) = 0.$$

В результате соответствующих вычислений получаем

$$\begin{aligned}k_1^{(2)}(\omega^3)^2 + 2\rho^2\omega^1\omega^3 + 2\rho^1\omega^2\omega^3 - 2\rho^3\omega^1\omega^2 &= 0, \\ \omega^4 &= 0.\end{aligned}\tag{2.4.1}$$

Касательные к асимптотическим линиям, проходящим через точку M , образуют конус 2-го порядка, лежащий в плоскости π_3 :

$$k_1^{(2)}(x^3)^2 + 2\rho^2 x^1 x^3 + 2\rho^1 x^2 x^3 - 2\rho^3 x^1 x^2 = 0, \\ x^4 = 0. \quad (2.4.2)$$

Предложение 1. *Линия кривизны 2-го рода, соответствующая $k_3^{(2)} = k_2^{(2)} = 0$, является асимптотической линией, лежащей в плоскости π_3 .*

Справедливость утверждения следует из (2.4.1), (2.1.5), а также из того факта, что вдоль нее нормали $\bar{e}_4$ НТ-2 параллельны.

Предложение 2. *Линия кривизны 2-го рода, соответствующая $k_1^{(2)} \neq 0$, не является асимптотической линией.*

В этом можно убедиться, сравнив уравнения (2.4.1) и (2.1.6).

Предложение 3. *Линия кривизны 2-го рода, соответствующая $k_1^{(2)} \neq 0$, является пространственной кривой.*

Вычислим вдоль данной линии $d\bar{e}_4$. Получаем $d\bar{e}_4 = 2\rho^2 \omega^3 \bar{e}_1 - k_1^{(2)} \bar{e}_3 \omega^2 \neq 0$. это означает, что рассматриваемая линия не является плоской (не лежит в плоскости π_3). ■

Предложение 4. *Характеристическая точка M_0 плоскости π_3 лежит на касательных к асимптотическим линиям, проходящим через точку M .*

Действительно, координаты точки $M_0(0, \frac{1}{b}, 0, 0)$ удовлетворяют уравнениям (2.4.2), определяющим конус касательных к асимптотическим линиям. ■

Следствие. *Кривая, проходящая через M , касающаяся прямой MM_0 является асимптотической линией.*

Данное утверждение непосредственно следует из предложения 4.

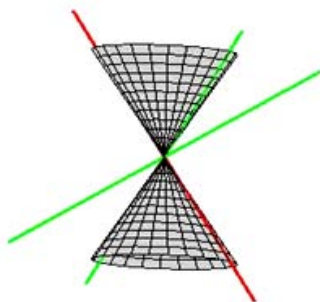


Рис. 1. Конус касательных к асимптотическим линиям с вершинами в точке M . Касательные к линиям кривизны 2-го рода.

5. Неголономные конусы класса $k_1^{(2)} \neq 0, k_3^{(2)} = 0, k_2^{(2)} = 0$

Определение. *Неголономный торс 2-го рода класса $k_1^{(2)} \neq 0, k_3^{(2)} = 0, k_2^{(2)} = 0$, все плоскости которого проходят через одну точку, называется неголономным конусом данного класса.*

По определению, для данного конуса точка $M_0(0, \frac{1}{b}, 0, 0)$ постоянная, то есть

$$d\left(\bar{r} + \frac{1}{b} \bar{e}_2\right) = 0.$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} db &= b^2 \omega^2, \\ \omega_2^1 &= -b \omega^2, \\ \omega_2^3 &= -b \omega^3. \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

Точка M_0 называется вершиной неголономного конуса, она является особой точкой распределения Δ_3 .

Предложение 1. Асимптотическая линия, касающаяся в точке M прямой MM_0 , является прямой линией для неголономного конуса класса $k_1^{(2)} \neq 0, k_3^{(2)} = 0, k_2^{(2)} = 0$.

Действительно, касательный вектор $\bar{e}_2$ асимптотической линии $\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = 0$ остается постоянным, так как в силу (2.5.2) имеем $d\bar{e}_2 = -b(\omega^1 \bar{e}_1 + \omega^3 \bar{e}_3 + \omega^4 \bar{e}_4) = 0$. ■

Предложение 2. Касательная плоскость π_3 вдоль асимптотической линии, касающейся в точке M прямой MM_0 , меняет свое положение при движении вдоль данной асимптотической.

Действительно, вдоль данной асимптотической линии $\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = 0$ единичный вектор $\bar{e}_4$ нормали плоскости π_3 меняет свое положение, так как при $\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = 0$ имеем $d\bar{e}_4 = (2\rho^3 \bar{e}_1 - 2\rho^1 \bar{e}_3) \omega^2 \neq 0$. А следовательно, меняет свое положение и плоскость π_3 . ■

6. Неголономные цилиндры класса $k_1^{(2)} \neq 0, k_3^{(2)} = k_2^{(2)} = 0$

Определение. Неголономным цилиндром класса $k_1^{(2)} \neq 0, k_3^{(2)} = k_2^{(2)} = 0$ называется НТ-2 этого класса, плоскости π_3 которого параллельны одной прямой.

Характеризуется неголономный цилиндр данного класса условиями

$$\begin{aligned} b &= 0, \\ \omega_2^1 &= \omega_2^3 = \omega_2^4 = 0. \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

Уравнения $\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = 0$ определяют асимптотические линии, являющиеся прямыми линиями. Но вдоль них (как и для неголономного конуса) плоскости π_3 распределения меняют свое положение.

III. Неголономные торсы 2-го рода, для которых все главные кривизны 2-го рода равны нулю ($k_1^{(2)} = k_2^{(2)} = k_3^{(2)} = 0$)

1. Канонический репер для НТ-2 класса $k_1^{(2)} = k_2^{(2)} = k_3^{(2)} = 0$.

Основные формулы

Для данного класса НТ-2 имеем

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix} &= 0, \\ \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_3^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_2^2 & A_3^2 \\ A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix} &= 0, \\ A_1^1 + A_2^2 + A_3^3 &= 0. \end{aligned}$$

Через каждую точку M пройдет только одна линия кривизны 2-го рода, соответствующая $k_i^{(2)} = 0$. Направим вектор $\bar{e}_1$ по главному направлению 2-го рода,

тогда получим $A_1^1 = A_1^2 = A_1^3 = 0, A_2^2 + A_3^3 = 0,$

$$\begin{vmatrix} A_2^2 & A_3^3 \\ A_3^3 & -A_2^2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\rho^1 = \frac{1}{2}(A_3^2 - A_2^3), \rho^2 = -\frac{1}{2}A_3^1, \rho^3 = \frac{1}{2}A_2^1$$

или

$$A_1^1 = A_1^2 = A_1^3 = 0, A_3^3 = -A_2^2, \quad (3.1.1)$$

$$(A_2^3)^2 + A_3^2 A_2^3 = 0, A_3^3 = -2\rho^2, A_2^1 = 2\rho^3, A_3^3 - A_2^3 = 2\rho^1.$$

Множество плоскостей π_3 распределения Δ_3 зависит от трех параметров, так как в уравнения

$$x^4 = 0,$$

$$(2\rho^3\omega^2 - 2\rho^2\omega^3 + a\omega^4)x^1 + (A_2^2\omega^2 + A_3^3\omega^3 + b\omega^4)x^2 + (A_2^3\omega^2 - A_2^2\omega^3 + c\omega^4)x^3 - \omega^4 = 0,$$

определяющие характеристики плоскости π_3 , входят три независимые формы $\omega^2, \omega^3, \omega^4$.

Находим характеристическую точку M_0 плоскости π_3 :

$$x^4 = 0,$$

$$-2\rho^2x^1 + A_3^2x^2 - A_2^2x^3 = 0,$$

$$2\rho^3x^1 + A_2^2x^2 + A_3^3x^3 = 0, \quad (3.1.2)$$

$$ax^1 + bx^2 + cx^3 = 1.$$

Отсюда имеем

$$M_0 \left(0, \frac{-\rho^2 A_3^2 + \rho^3 A_2^2}{-b(2\rho^2 A_3^2 - \rho^3 A_2^2) + c(\rho^2 A_2^2 + \rho^3 A_3^2)}, \frac{\rho^2 A_2^2 + \rho^3 A_3^2}{J_{det}}, 0 \right).$$

Направим вектор $\bar{e}_3 \parallel MM_0$, тогда $\rho^2 A_2^3 = \rho^3 A_2^2$,

$$M_0 \left(0, 0, \frac{1}{c}, 0 \right)$$

и репер стал каноническим. Плоскости π_3 огибают трехмерную поверхность, состоящую из точек M_0 .

Для НТ-2 данного класса эта поверхность является особой поверхностью.

Основные формулы для НТ-2 класса $k_1^{(2)} = k_2^{(2)} = k_3^{(2)} = 0$ в каноническом репере имеют вид

$$\omega_4^1 = 2\rho^3\omega^2 - 2\rho^2\omega^3 + a\omega^4,$$

$$\omega_4^2 = 2\rho^1\omega^3 + b\omega^4, \quad (3.1.3)$$

$$\omega_4^3 = c\omega^4.$$

2. Асимптотические линии и линии кривизны 2-го рода

НТ-2 класса $k_1^{(2)} = k_2^{(2)} = k_3^{(2)} = 0$ общего вида

Асимптотические линии для данного класса НТ-2 определяются уравнениями

$$\rho^3\omega^1\omega^2 + \rho^1\omega^2\omega^3 - \rho^2\omega^3\omega^1 = 0,$$

$$\omega^4 = 0. \quad (3.2.1)$$

Касательные к ним в точке M образуют конус 2-го порядка, лежащей в плоскости π_3 :

$$\begin{aligned}\rho^3 x^1 x^2 + \rho^1 x^2 x^3 - \rho^2 x^3 x^1 &= 0, \\ x^4 &= 0.\end{aligned}\tag{3.2.2}$$

Точка M_0 лежит на конусе (3.2.2), следовательно, прямая MM_0 – касательная к асимптотической линии

$$\omega^1 = \omega^2 = \omega^4 = 0.\tag{3.2.3}$$

Эта асимптотическая линия является пространственной кривой.

Линии кривизны 2-го рода определяются уравнениями

$$\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = 0.\tag{3.2.4}$$

и также являются асимптотическими линиями. Через каждую точку M проходит лишь одна линия кривизны 2-го рода. Она лежит в плоскости π_3 , проходящей через эту точку.

3. Неголономный конус класса $k_1^{(2)} = k_2^{(2)} = k_3^{(2)} = 0$

Определение. НТ-2 класса $k_1^{(2)} = k_2^{(2)} = k_3^{(2)} = 0$, все плоскости π_3 которого проходят через одну точку, называется неголономным конусом данного класса.

По определению для данного неголономного конуса точка $M_0(0, 0, \frac{1}{c}, 0)$ неподвижна. Следовательно $d(\bar{r} + \frac{1}{c}\bar{e}_3) = 0$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned}\omega_3^1 &= -c\omega^1, \\ \omega_3^2 &= -c\omega^2, \\ \omega_3^4 &= -c\omega^4, \\ dc &= c^2\omega^3.\end{aligned}\tag{3.3.1}$$

Асимптотические линии неголономного конуса обладают следующими свойствами.

Предложение 1. Асимптотическая линия неголономного конуса класса $k_1^{(2)} = k_2^{(2)} = k_3^{(2)} = 0$, касающаяся прямой MM_0 , является прямой линией.

Действительно, касательный вектор $\bar{e}_3$ данной линии не меняется вдоль нее так как $d\bar{e}_3 = 0$ в силу равенств (3.3.1) и (3.2.3). ■

Предложение 2. Касательная плоскость π_3 вдоль асимптотической линии, касающейся MM_0 , меняет свое положение при движении вдоль данной асимптотической линии.

Действительно, вектор $\bar{e}_4$ нормали плоскости π_3 меняет свое положение вдоль данной асимптотической, так как $d\bar{e}_4 = (-2\rho^2\bar{e}_1 + 2\rho^1\bar{e}_2)\omega^3 \neq 0$. Следовательно, меняет свое положение и плоскость π_3 . ■

4. Неголономные цилиндры класса $k_1^{(2)} = k_2^{(2)} = k_3^{(2)} = 0$

Определение. НТ-2 класса $k_1^{(2)} = k_2^{(2)} = k_3^{(2)} = 0$, плоскости π_3 которого параллельны одной прямой, называется неголономным цилиндром данного класса.

Характеризуется неголономный цилиндр класса $k_1^{(2)} = k_2^{(2)} = k_3^{(2)} = 0$ условиями

$$\begin{aligned}c &= 0, \\ \omega_3^1 &= \omega_3^2 = \omega_3^4 = 0.\end{aligned}\tag{3.4.1}$$

В общем случае для неголономного цилиндра, как и для неголономного конуса через каждую точку M проходит множество асимптотических линий, касательные которых образуют конус 2-го порядка вида (3.2.2). Асимптотическая линия $\omega^1 = \omega^2 = \omega^4 = 0$ – прямая линия. Линия кривизны 2-го рода является одновременно асимптотической линией и эквидирекционной.

Теорема. Существует единственный неголономный цилиндр класса $k_1^{(2)} = k_2^{(2)} = k_3^{(2)} = 0$ с постоянным тензором неголономности и прямыми линиями тока нормалей.

Доказательство. Неголономный цилиндр класса $k_1^{(2)} = k_2^{(2)} = k_3^{(2)} = 0$ с прямыми линиями тока нормалей и постоянным тензором неголономности характеризуется тем, что для него $a = b = c = 0$, $\rho^1 = \text{const}$, $\rho^2 = \text{const}$, $\rho^3 = \text{const}$. Поэтому формулы (3.1.4) и (3.4.1) имеют вид

$$\begin{aligned}\omega_4^1 &= 2\rho^3\omega^2 - 2\rho^2\omega^3, \\ \omega_4^2 &= 2\rho^1\omega^3, \\ \omega_3^1 &= 0, \\ \omega_3^2 &= 0, \\ \omega_4^3 &= 0.\end{aligned}\tag{3.4.2}$$

Из (3.4.2) получаем $\omega_1^2 = 0$, $\rho^1 = 0$.

Деривационные формулы репера в результате принимают вид

$$\begin{aligned}d\bar{r} &= \omega^1\bar{e}_1 + \omega^2\bar{e}_2 + \omega^3\bar{e}_3 + \omega^4\bar{e}_4, \\ d\bar{e}_1 &= (2\rho^2\omega^3 - 2\rho^3\omega^2)\bar{e}_4, \\ d\bar{e}_2 &= 0, \\ d\bar{e}_3 &= 0, \\ d\bar{e}_4 &= (2\rho^3\omega^2 - 2\rho^2\omega^3)\bar{e}_1.\end{aligned}\tag{3.4.3}$$

Система (3.4.3) вполне интегрируема. Переходим к ее интегрированию. Заметим, что

$$\begin{aligned}d\omega^1 &= \omega^4 \wedge (2\rho^3\omega^2 - 2\rho^2\omega^3), \\ d\omega^2 &= 0, \\ d\omega^3 &= 0, \\ d\omega^4 &= -\omega^1 \wedge (2\rho^3\omega^2 - 2\rho^2\omega^3).\end{aligned}$$

Отсюда и из (3.4.3) следует

$$\omega^2 = dy, \omega^3 = dz, \bar{e}_2 = \bar{e}_2, \bar{e}_3 = \bar{e}_3,\tag{3.4.4}$$

где $\bar{e}_2, \bar{e}_3$ – постоянные векторы.

Обозначим $\alpha = 2\rho^3y - 2\rho^2z$, тогда $d\alpha = 2\rho^3dy - 2\rho^2dz$ и

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{e}_1}{d\alpha} &= -\bar{e}_4, \\ \frac{d^2\bar{e}_1}{d\alpha^2} &= -\bar{e}_1.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\bar{e}_1 &= \bar{e}_1 \cos \alpha + \bar{e}_4 \sin \alpha, \\ \bar{e}_4 &= \bar{e}_1 \sin \alpha - \bar{e}_4 \cos \alpha.\end{aligned}$$

Заметим, что векторы $\{\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_3, \bar{\varepsilon}_4\}$ образуют постоянный ортонормированный базис в E_4 . В этом базисе имеем

$$d\bar{r} = dx\bar{\varepsilon}_1 + dy\bar{\varepsilon}_2 + dz\bar{\varepsilon}_3 + dt\bar{\varepsilon}_4,$$

где

$$dx = \omega^1 \cos \alpha + \omega^4 \sin \alpha \quad (3.4.5)$$

$$dt = \omega^1 \sin \alpha - \omega^4 \cos \alpha.$$

Из (3.4.5) находим

$$\omega^1 = \cos(2\rho^3 y - 2\rho^2 z) dx + \sin(2\rho^3 y - 2\rho^2 z) dt,$$

$$\omega^4 = \sin(2\rho^3 y - 2\rho^2 z) dx - \cos(2\rho^3 y - 2\rho^2 z) dt.$$

Таким образом, в некоторой неподвижной декартовой системе координат, уравнение Пфаффа, соответствующее неголономному цилиндру класса $k_1^{(2)} = k_2^{(2)} = k_3^{(2)} = 0$ с постоянным тензором неголономности и прямыми линиями тока нормалей, имеет вид

$$\sin(2\rho^3 y - 2\rho^2 z) dx - \cos(2\rho^3 y - 2\rho^2 z) dt = 0, \quad (3.4.6)$$

$$\rho^3 = \text{const} \neq 0, \rho^2 = \text{const} \neq 0.$$

Итак, мы доказали, что существует единственное (с точностью до положения в пространстве) распределение $\Delta_3: M(x, y, z, t) \rightarrow \pi_3$, удовлетворяющее условиям теоремы. Плоскость π_3 , соответствующая точке $M(x, y, z, t)$, имеет уравнение

$$\sin(2\rho^3 y - 2\rho^2 z) (X - x) - \cos(2\rho^3 y - 2\rho^2 z) (T - t) = 0. \quad (3.4.7)$$

(X, Y, Z, T) – текущие координаты плоскости π_3 . Распределение Δ_3 определено во всем пространстве E_4 и не имеет особых точек. ■

Замечание. В E_4 для неголономного цилиндра класса $k_1^{(2)} = k_2^{(2)} = k_3^{(2)} = 0$ с постоянным не равным нулю тензором неголономности и прямыми линиями тока нормалей кривизна $k_1^{(1)} = 0$. Следовательно, для него равны нулю обе полные кривизны $K_1 = K_2 = 0$. И тем не менее данное распределение остается неголономным, что было бы невозможно для гиперраспределения в E_3 .

Переходим к нахождению уравнений основных линий неголономного цилиндра класса $k_1^{(2)} = k_2^{(2)} = k_3^{(2)} = 0$ с постоянным тензором неголономности и прямыми линиями тока.

Уравнения находим в той неподвижной системе координат, в которой получено уравнение (3.4.7), определяющее данное распределение.

а) Векторное поле нормалей распределения – это поле векторов

$$\bar{n} = \sin(2\rho^3 y - 2\rho^2 z) \bar{\varepsilon}_1 - \cos(2\rho^3 y - 2\rho^2 z) \bar{\varepsilon}_4. \quad (3.4.8)$$

б) Эквилибральные поверхности представляют собой трехмерные плоскости

$$\rho^3 y - \rho^2 z = C_1. \quad (3.4.9)$$

в) Асимптотические линии заполняют пару двумерных плоскостей

$$\rho^3 y - \rho^2 z = C_1, \quad (3.4.10)$$

$$\sin(2C_1) x - \cos(2C_1) t = C_2,$$

и

$$\cos(2C_1) x + \sin(2C_1) t = C_3, \quad (3.4.11)$$

$$\sin(2C_1) x - \cos(2C_1) t = C_2,$$

пересекающиеся по прямой

$$\rho^3 y - \rho^2 z = C_1, \quad (3.4.12)$$

$$x = C_3 \cos(2 C_1) + C_2 \sin(2 C_1),$$

$$t = C_3 \sin(2 C_1) - C_2 \cos(2 C_1),$$

$$(C_1, C_2, C_3 = \text{const}).$$

d) Линии кривизны 2-го рода – прямые, совпадающие с прямыми (3.4.12).

е) Главные кривизны 1-го рода:

$$k_1^{(1)} = 0, \quad k_2^{(1)} = \sqrt{(\rho^2)^2 + (\rho^3)^2}, \quad k_3^{(1)} = -\sqrt{(\rho^2)^2 + (\rho^3)^2}.$$

Им соответствуют главные направления 1-го рода:

$$\bar{\xi}_1 = \rho^2 \bar{\varepsilon}_2 + \rho^3 \bar{\varepsilon}_3,$$

$$\bar{\xi}_2 = \sqrt{(\rho^2)^2 + (\rho^3)^2} (\bar{\varepsilon}_1 \cos \alpha + \bar{\varepsilon}_4 \sin \alpha) - \rho^3 \bar{\varepsilon}_2 + \rho^2 \bar{\varepsilon}_3,$$

$$\bar{\xi}_3 = \sqrt{(\rho^2)^2 + (\rho^3)^2} (\bar{\varepsilon}_1 \cos \alpha + \bar{\varepsilon}_4 \sin \alpha) + \rho^3 \bar{\varepsilon}_2 - \rho^2 \bar{\varepsilon}_3.$$

Таким образом, в каждой точке $M \in E_4$ существуют три взаимно ортогональных главных направления 1-го рода.

f) Находим уравнения линий кривизны 1-го рода. Линии с кривизной $k_1^{(1)} = 0$ – прямые, совпадающие с асимптотическими (3.4.12) и с линиями кривизны 2-го рода.

Линии с кривизнами $k_2^{(1)} = \sqrt{(\rho^2)^2 + (\rho^3)^2}$ и $k_3^{(1)} = -\sqrt{(\rho^2)^2 + (\rho^3)^2}$ определяются соответственно уравнениями

$$\rho^2 y + \rho^3 z = a_1, \quad (3.4.13)$$

$$x = -\frac{1}{2\sqrt{(\rho^2)^2 + (\rho^3)^2}} \sin[2(\rho^3 y - \rho^2 z)] + a_2,$$

$$t = -\frac{1}{2\sqrt{(\rho^2)^2 + (\rho^3)^2}} \cos[2(\rho^3 y - \rho^2 z)] + a_3$$

и

$$\rho^2 y + \rho^3 z = b_1, \quad (3.4.14)$$

$$x = -\frac{1}{2\sqrt{(\rho^2)^2 + (\rho^3)^2}} \sin[2(\rho^3 y - \rho^2 z)] + b_2,$$

$$t = -\frac{1}{2\sqrt{(\rho^2)^2 + (\rho^3)^2}} \cos[2(\rho^3 y - \rho^2 z)] + b_3.$$

g) Линии кривизны 1-го рода (3.4.13) и (3.4.14), проходящие через точку (x_0, y_0, z_0, t_0) , лежат на двух трехмерных цилиндрах:

$$[x - x_0 - \frac{1}{2\sqrt{(\rho^2)^2 + (\rho^3)^2}} \sin[2(\rho^3 y_0 - \rho^2 z_0)]]^2 + \quad (3.4.15)$$

$$+[t - t_0 + \frac{1}{2\sqrt{(\rho^2)^2 + (\rho^3)^2}} \cos[2(\rho^3 y_0 - \rho^2 z_0)]]^2 = \frac{1}{4(\rho^2)^2 + (\rho^3)^2}$$

и

$$[x - x_0 + \frac{1}{2\sqrt{(\rho^2)^2 + (\rho^3)^2}} \sin[2(\rho^3 y_0 - \rho^2 z_0)]]^2 + \quad (3.4.16)$$

$$+[t - t_0 - \frac{1}{2\sqrt{(\rho^2)^2 + (\rho^3)^2}} \cos[2(\rho^3 y_0 - \rho^2 z_0)]]^2 = \frac{1}{4(\rho^2)^2 + (\rho^3)^2}$$

одинакового радиуса с общей двумерной образующей

$$\begin{aligned}x &= x_0, \\t &= t_0.\end{aligned}\tag{3.4.17}$$

Плоскость π_3 ($t = t_0$) – это общая касательная плоскость цилиндров. Экви-
ректинная плоскость ($\rho^3 y - \rho^2 z = \rho^3 y_0 - \rho^2 z_0$) ортогональна плоскости π_3 .

Третья линия кривизны 1-го рода (прямая линия), проходящая через точку
(x_0, y_0, z_0, t_0), имеет уравнения

$$\begin{aligned}x &= x_0, \quad t = t_0, \\ \rho^3 y - \rho^2 z &= \rho^3 y_0 - \rho^2 z_0.\end{aligned}\tag{3.4.18}$$

То есть является линией пересечения общей образующей цилиндров (3.4.16),
(3.4.17) и эквидирекционной плоскости.

Заметим, что неголомомный цилиндр не имеет особых точек. Это означает, что
поведение всех найденных кривых и поверхностей для него проще представить,
если рассмотреть их для плоского элемента (M, π_3), в начале координат.

Итак, в точке $M(0,0,0,0)$ плоскость π_3 имеет уравнение $t = 0$, а вектор норма-
ли $\bar{e}_4(0,0,0,1)$. Экви-ректинная плоскость – это трехмерная плоскость

$$\rho^3 y - \rho^2 z = 0.\tag{3.4.19}$$

Асимптотические линии заполняют две двумерные плоскости, пересекающиеся
по прямой

$$\begin{aligned}\rho^3 y - \rho^2 z &= 0, \\ x &= 0, \quad t = 0,\end{aligned}\tag{3.4.20}$$

совпадающей с линией кривизны 2-го рода, а также с линией кривизны 1-го рода,
соответствующей $k_1^{(1)} = 0$.

Линии кривизны 1-го рода, соответствующие кривизнам
 $k_{2,3}^{(1)} = \pm \sqrt{(\rho^2)^2 + (\rho^3)^2}$, имеют уравнения

$$\rho^2 y + \rho^3 z = 0,\tag{3.4.21}$$

$$2\sqrt{(\rho^2)^2 + (\rho^3)^2} \cdot x = -\sin[2(\rho^3 y - \rho^2 z)],$$

$$2\sqrt{(\rho^2)^2 + (\rho^3)^2} \cdot t = \cos[2(\rho^3 y - \rho^2 z)] - 1$$

и

$$\rho^2 y + \rho^3 z = 0,\tag{3.4.22}$$

$$2\sqrt{(\rho^2)^2 + (\rho^3)^2} \cdot x = \sin[2(\rho^3 y - \rho^2 z)],$$

$$2\sqrt{(\rho^2)^2 + (\rho^3)^2} \cdot t = \cos[2(\rho^3 y - \rho^2 z)] + 1.$$

Из (3.4.21) и (3.4.22) видим, что данные линии кривизны 1-го рода лежат в трех-
мерной плоскости $\rho^2 y + \rho^3 z = 0$, ортогональной эквидирекционной плоскости,
на двух цилиндрах

$$x^2 + \left(t + \frac{1}{2\sqrt{(\rho^2)^2 + (\rho^3)^2}}\right)^2 = \frac{1}{4((\rho^2)^2 + (\rho^3)^2)}$$

и

$$x^2 + \left(t - \frac{1}{2\sqrt{(\rho^2)^2 + (\rho^3)^2}}\right)^2 = \frac{1}{4((\rho^2)^2 + (\rho^3)^2)}$$

одинакового радиуса и с общей образующей

$$x = t = 0,$$

лежащей в плоскости π_3 ($t = 0$). Этой общей образующей является линия кривизны 1-го рода, соответствующая кривизне $k_1^{(1)} = 0$ (см. рис. 2).

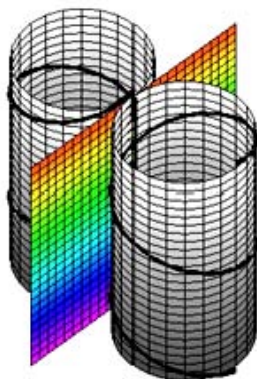


Рис. 2

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин Б.А., Новиков С. П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
2. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. М.: Наука, 1981.
3. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана. М.; Л.: ГИТТЛ, 1948.
4. Онищук Н.М. Геометрия векторного поля в четырехмерном евклидовом пространстве // Международная конференция по математике и механике. Томск, 2003. С. 60–68.
5. Слухаев В.В. Геометрия векторных полей. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1982.
6. Аминов Ю.А. Геометрия векторного поля. М.: Наука, 1990.

Статья поступила 26.12.2011 г.

Tsokolova O.V. NONHOLONOMIC TORSES OF THE SECOND KIND IN THE FOUR-DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE. Geometry of a smooth three-dimensional distribution Δ_3 with zero total curvature of the second kind is studied in a domain G in the four-dimensional space E_4 .

Keywords: nonholonomic geometry, distribution, Pfaffian equation, Cartan's method.

TSOKOLOVA Olga Vyacheslavovna (Tomsk State University)
E-mail: tov234@mail.ru