ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2012 Математика и механика № 2(18)

УДК 517.958 +532.59

М.М. Стерхова

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДЛИННЫХ ВОЛН В ОСЕСИММЕТРИЧНОМ СЛУЧАЕ

Рассматривается задача Коши для системы интегродифференциальных уравнений, описывающих вихревое течение жидкости со свободной границей. Для начальных данных, удовлетворяющих условиям гиперболичности, доказана разрешимость задачи Коши в малом по времени.

Ключевые слова: *вихревое течение*, *гиперболичность*, *интегродифференциальные уравнения.*

1. Постановка задачи

Рассмотрим начально-краевую задачу со свободной границей:

$$\rho(U_T+UU_r+VU_z)+p_r=0,\ \ 0\le Y\le H(r,T)\,, \tag{1.1}$$

$$(rU)_r+(rV)_Z=0,$$

$$p_Z=-\rho g\,,$$

$$H_T+r^{-1}\Big(\int_0^H U dZ\Big)_r=0\,,$$

$$p(r, H(r, T), T)=0,\ V(r,0,T)=0,\ U(r,Z,0)=U_0(r, Z),\ H(r,0)=H_0(r),$$

которая описывает в приближении теории длинных волн осесимметричное завихренное течение слоя однородной весомой жидкости глубины $H=H(r,T)$ над ровным дном $Y=0$. Здесь U, V – компоненты вектора скорости жидкости, p – давление, ρ – плотность, g – ускорение свободного падения, U_0 , H_0 определяют исходные поле скоростей и положение свободной поверхности.

Эта задача может быть сведена к задаче Коши по фиксированной области (полоса $0\le\lambda\le 1$, λ – аналог лагранжевых координат) заменой переменных $r'=r$, $t'=t$, $y'=\Phi(r,t,\lambda)$, где $\Phi(r,t,\lambda)$ определяется в результате решения задачи

$$\Phi_t+\frac{1}{r}\Big(\int_0^\Phi rU(r,Z,t)dZ\Big)_r=0,\ \Phi(r,0,\lambda)=\lambda H_0(r)\,.$$

В результате исходная задача эквивалентна задаче Коши для системы интегродифференциальных уравнений

$$u_t+uu_r+g\int_0^1 h_r dv=0\,,$$

$$h_t+(uh)_r+r^{-1}uh=0,\ \ 0\le\lambda\le 1\,, \tag{1.2}$$

$$u(r,0,\ \lambda)=\ U_0\ (r,\ \lambda H_0\ (r)),\ \ h(r,0,\ \lambda)=\ H_0(r)\,.$$

Здесь $u(r, t, \lambda) = U(r, \Phi(r, t, \lambda), \mathrm{t})$, $h(r, t, \lambda)= \Phi_\lambda (r, t, \lambda)$, В случае, когда $U_Y \equiv 0$ (что соответствует в длинноволновом приближении безвихревому течению) система (1.2) переходит известные уравнения теории «мелкой воды». Мы будем рассматривать вихревые течения($U_Y \not\equiv 0$).

Общая теория гиперболичности систем уравнений первого порядка применительно к интегро-дифференциальным уравнениям была сформулирована в [1, 2], а в [3] были указаны условия гиперболичности в плоском случае.

Действуя аналогично [3] можно показать, что условия

$$u_\lambda > 0, \mathrm{X}^{\pm}(\mathrm{u}) \neq 0,\ \Delta arg\left[\frac{\mathrm{X}^{+}(u)}{\mathrm{X}^{-}(u)}\right] = 0 \qquad (1.3)$$

достаточны для гиперболичности уравнений (1.2).

Здесь Δ обозначает приращение функции на интервале $0 \le \lambda \le 1$,

$$\mathrm{X}^{\pm}(u) = (u_0 - u)\omega_1^{-1} - (u_1 - u)\omega_0^{-1} +$$

$$+(u - u_0)\big(u - u_{1)}\big)(1 - g\int_{u_0}^{u_1}\left(\frac{1}{\omega'}\right)_\nu \frac{d\nu}{u' - u} \mp \pi i\left(\frac{1}{\omega'}\right)_\lambda \frac{1}{u_\lambda},$$

$\omega = u_\lambda / h$, u', u – сокращенные обозначения $u(r, \nu, t)$, $u(r, \lambda, t)$. Индексы «0», «1» – значения функций при $\lambda = 0$, $\lambda = 1$. Здесь τ', τ, ω – сокращенные обозначения $u(v)$, $u(\lambda)$, $\omega(\lambda)$, $u(v)$,

Система уравнений (1.2) имеет семейство характеристик, соответствующих непрерывному спектру $r = r^{\lambda}(t), (\lambda \in [0;1])$:

$$dr^{\lambda} / dt = u\left(r^{\lambda}, \lambda, t\right)$$

и характеристики $r = r^{i}(t)$, соответствующие дискретному характеристическому спектру $(dr^{i})/dt = k_i\left(r^{i}, t\right); (i = 1,2)$

Характеристические числа k^i определяются как корни уравнения

$$\int_0^1 h'(u' - k_i)^2 dv = 1 \qquad (1.4)$$

Если условия (1.3) выполнены, это уравнение имеет только два действительных корня

$$k_1(r,t) < min_\lambda u(\lambda, r, t),\ k_2(r,t) > max_\lambda u(\lambda, r, t)$$

И система (1.2) эквивалентна соотношениям на характеристиках

$$R_t + uR_r + ur^{-1}R - r^{-1}\left(u^2 + \int_0^1 h' d\nu\right) = 0 \qquad (1.5)$$

$$R_{it} + k_i R_{ir} + k_i r^{-1} R_i - r^{-1}\left(k_i^2 + \int_0^1 h' d\nu\right) = 0\ (i = 1,2)$$

$$\omega_t + u\omega_r - r^{-1}\omega u = 0$$

где
$$R_i = k_i - \int_0^1 \frac{h'dv}{u' - k_i}, \tag{1.6}$$

$$R = u(\lambda) - \int_0^1 \frac{h'dv}{u' - u}.$$

В дальнейшем h заменим величинами u и ω при помощи равенства $h = {}^{u_\lambda}\!/_{\omega}$.

2. Априорные оценки

Для того чтобы получить априорные оценки для решения задачи Коши (1.2), используем аналог метода интегралов энергии. Система уравнений (1.2) сводится к симметрической форме путем введения инвариантов Римана R, ω, R_i. Это позволит нам использовать такую же схему получения оценок для решения и его производных в соболевском классе функций, как те, что используются в случае квазилинейных гиперболических систем дифференциальных уравнений.

Чтобы получить оценку для решения, нужны соотношения для производных с u через производные инвариантов Римана.

После дифференцирования (1.5) получим соотношения:

$$u_r - \int_0^1 \frac{1}{\omega'}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{u'_r - u_r}{u' - u}\right)d\nu = R_r + \int_0^1 \left(\frac{1}{\omega'}\right)_r \frac{u'_\nu}{u' - u} = F_1,$$

$$-\int_0^1 \frac{1}{\omega'}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{u'_r}{u' - k_i}\right)d\nu = R_{ir} + \int_0^1 \left(\frac{1}{\omega'}\right)_r \frac{u'_\nu}{u' - k_i} = \varphi_{1i}. \tag{2.1}$$

Аналогичные представления могут быть получены для u_{rr}, u_{rrr}:

$$u_r^{(k)} - \int_0^1 \frac{1}{\omega'}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{u_r'^{(k)} - u_r^{(k)}}{u' - u}\right)d\nu = R_r^{(k)} + \int_0^1 \left(\frac{1}{\omega'}\right)_r^{(k)} \frac{u'_\nu}{u' - u} = F_k \quad (i = 1, 2),$$

$$-\int_0^1 \frac{1}{\omega'}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{u_r'^{(k)}}{u' - k_i}\right)d\nu = R_{ir}^{(k)} + \int_0^1 \left(\frac{1}{\omega'}\right)_r^{(k)} \frac{u'_\nu}{u' - k_i} = \varphi_{ki} \quad (k = 2, 3),$$

$$F_2 = R_{rr} + \int_0^1 \left(\frac{1}{\omega'}\right)_{rr} \frac{u'_\nu}{u' - u} + 2\int_0^1 \left(\frac{1}{\omega'}\right)_r \frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{u'_\nu}{u' - u}\right)d\nu - \int_0^1 \frac{1}{\omega'}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{u'_r - u_r}{u' - u}\right)^2 d\nu,$$

$$F_3 = R_{rrr} + \int_0^1 \left(\frac{1}{\omega'}\right)_{rrr} \frac{u'_\nu}{u' - u} + 3\int_0^1 \left(\frac{1}{\omega'}\right)_{rr} \frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{u'_r - u_r}{u' - u}\right)d\nu +$$

$$+3\int_0^1 \left(\frac{1}{\omega'}\right)_r \frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{u'_{rr} - u_{rr}}{u' - u}\right)d\nu - 3\int_0^1 \left(\frac{1}{\omega'}\right)_r \frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{u'_r - u_r}{u' - u}\right)^2 d\nu -$$

$$-3\int_0^1 \frac{1}{\omega'}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{(u'_{rr} - u_{rr})}{(u' - u)^2}(u'_r - u_r)\right)d\nu + 2\int_0^1 \frac{1}{\omega'}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{(u'_r - u_r)}{u' - u}\right)^3 d\nu,$$

$$\varphi_{2i} = R_{irr} + \int_0^1 \left(\frac{1}{\omega'}\right)_{rr} \frac{u'_\nu\, d\nu}{u'-k_i} + 2\int_0^1 \left(\frac{1}{\omega'}\right)_r \frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{u'_r}{u'-k_i}\right) d\nu -$$

$$-\int_0^1 \frac{1}{\omega'}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{u_r'^2}{u'-k_i}\right) d\nu - 2k_{ir}^2 \int_0^1 \frac{1}{\omega'}\frac{u_\nu'^2}{(u'-k_i)^3} d\nu\,,$$

$$\varphi_{3i} = R_{irrr} + \int_0^1 \left(\frac{1}{\omega'}\right)_{rrr} \frac{u'_\nu\, d\nu}{u'-k_i} + 3\int_0^1 \left(\frac{1}{\omega'}\right)_{rr} \frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{u'_r}{u'-k_i}\right) d\nu -$$

$$-3\int_0^1 \left(\frac{1}{\omega'}\right)_r \frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{u_r'^2}{u'-k_i}\right) d\nu + 2\int_0^1 \left(\frac{1}{\omega'}\right)_r \frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{u'_\nu}{u'-k_i}\right) d\nu -$$

$$-2\int_0^1 \frac{1}{\omega'}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{u'_r\, u'_{rr}}{(u'-k_i)^3}\right) d\nu + 2\int_0^1 \frac{1}{\omega'}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{u_r'^3}{(u'-k_i)^3}\right) d\nu +$$

$$+k_{ir}\left(\int_0^1 \left(\frac{1}{\omega'}\right)_{rr} \frac{u'_\nu\, d\nu}{(u'-k_i)^2} + 2\int_0^1 \left(\frac{1}{\omega'}\right)_r \frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{u'_r}{(u'-k_i)^2}\right) d\nu\right) -$$

$$-k_{ir}\left(2\int_0^1 \frac{1}{\omega'}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{u_r'^2}{(u'-k_i)^3}\right) d\nu + \int_0^1 \frac{1}{\omega'}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{u'_{rr}}{(u'-k_i)^2}\right) d\nu\right) -$$

$$-4k_{ir}k_{ir}\int_0^1 \frac{1}{\omega'}\frac{u'_\nu}{(u'-k_i)^3} d\nu - 2k_i^2\frac{\partial}{\partial r}\int_0^1 \frac{1}{\omega'}\frac{u'_\nu}{(u'-k_i)^3} d\nu +$$

$$+\int_0^1 \frac{1}{\omega'}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{u'_r}{(u'-k_i)^2}\right) d\nu + 3k_{ir}\int_0^1 \frac{1}{\omega'}\frac{u'_\nu}{(u'-k_i)^4} d\nu\,.$$

Если представить функцию $u_r^{(k)}$ в виде

$$u_r^{(k)} = \omega_k + \alpha_1^k (u-k_1)^{-1} + \alpha_2^{\mathrm{k}} (u-k_2)^{-1} \quad (k=1,\ldots,3)\,, \tag{2.2}$$

где α_1^k, α_2^k – произвольные величины, не зависящие от λ, а ω_k обращается в нуль на концах промежутка, получим сингулярное интегральное уравнение для определения $\omega_k(\lambda, r, t)$:

$$R_u\omega_k + \int_{u_0}^{u_1} \left(\frac{1}{\omega'}\right)_{u'} \frac{\omega'_k\, du}{u'-u} = F_k \quad (k=1,\ldots,3), \tag{2.3}$$

где $R_u = R_\lambda u_\lambda^{-1}$, $\left(\omega'^{-1}\right)_{u'} = (\omega'^{-1})_\nu u_\nu^{-1}$, F_k из (2.1а).

С помощью (2.1а) найдем $\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}$ в точной форме

$$\alpha_i^{(k)} = \left(2\int_0^1 \frac{1}{\omega'}\frac{u'_\nu\, d\nu}{(u'(\nu)-k_i)^3}\right)^{-1} \left(\varphi_{ki} - \int_0^1 \left(\frac{1}{\omega'}\right)_\nu \frac{\omega'_k\, d\nu}{u'-k_i}\right) \quad (i=1,2;\ k=1,\ldots,3) \tag{2.4}$$

Условия гиперболичности (1.3) гарантируют однозначную разрешимость сингулярного интегрального уравнения (2.3) в классе функций, удовлетворяющих условию Гельдера во внутренних точках интервала $[u_0;u_1]$ и ограниченных на его концах [4].

Уравнение (2.3) может быть решено в явном виде

$$\omega_k = \frac{fF_k fR_u}{\left|X^+\right|^2} - \frac{f}{g}\int_{u_0}^{u_1}\left(\frac{1}{\omega'}\right)_{u'} \frac{f' F_k' \, du'}{\left|X^+\right|^2 g'(u'-u)}, \tag{2.5}$$

где $f=(u-u_0)(u-u_1)$, $g=(u-k_1)(u-k_2)$.

Представления (2.2), (2.4), (2.5) функций позволяют оценить эти функции через производные инвариантов Римана ω, R, R_i.

В $R^3(r, t, \lambda,)$ рассмотрим область Q_t, ограниченную плоскостями t=0, t=const, λ=0, λ=1 и поверхностями Γ_i, определяемыми уравнениями

$$r = r^i(t) : dr^i/dt = k^i\left(r^i, t\right); r^1(0)=b,\ r^2(0)=a(b>a).$$

Сечение Q_t плоскостью t=τ – прямоугольник:

$$\Omega_\tau = \left\{(r,\lambda): r\in\left[r^2,\ r^1(\tau)\right],\ \ \lambda\in[0;1]\right\}.$$

Символом H^5 будем обозначать соболевское пространство функций, интегрируемых с квадратом на некоторой области вместе с производными до s-го порядка, $s>0$. Символ $\left\|h_{H^s}\right\|(\tau)$ обозначает норму функции h в $H_5(\Omega_\tau)$, $\|h\|_q(\tau)$ обозначает норму в $L_q(\tau)$, $\|h\|_c(\tau)$ – норма в $C(\Omega_\tau)$, Аналогичные нормы для функций, зависящих только от r, t ($r\in\left[r^2(\tau), r^1(\tau)\right]$), обозначены как $|h|_{(H^s)}(\tau)$, $|h|_q(\tau)$, $|h|_c(\tau)$

Лемма. Пусть начальные данные удовлетворяют условиям (1.3) и нормы $\|u\|_{H^3}(0)$, $\|\omega\|_{H^3}(0)$, $\left\|\omega^{-1}\right\|_{H^3}(0)$, $\left\|u_\lambda^{-1}\right\|_{H^3}(0)$, $|R_i|_{H^3}(0)$ $(i=1,2)$ ограничены. Тогда $\exists t_0>0$ и положительные функции $C_i(t)$ такие, что неравенства

$$\|u\|_{H^3}(t)\le C_1(t),\ \|\omega\|_{H^3}(t)\le C_2(t), \left\|\omega^{-1}\right\|_{H^3}(t)\le C_3(t),\ (i=1,2),$$

$$\left\|u_\lambda^{-1}\right\|_{H^3}(t)\le C_4(t),\ |R_i|_{H^3}(t)\le C_5(t)$$

выполнены на интервале $0<t<t_0$.

Функции $C_i(t)$ и значение t_0 зависят от заданных значений норм начальных данных.

Схема доказательства. Рассмотрим уравнения для квадратов производных функций

$$u_\lambda,\ u_\lambda^{-1}, \omega,\ \omega^{-1}, R_i \qquad (i=1,2).$$

Интегрирование этих уравнений по Q_t позволяет получить неравенство

$$\sum_{i=1}^{6} z_i^2(t) \le \sum_{i=1}^{6} z_i^2(0) + C_1(t)\int_0^t \sum_{i=1}^{5}\frac{1}{|r|_c^k}[\|u_r\|_2 + \|u_{rr}\|_2 + \|u_{rrr}\|_2 + \tag{2.6}$$

$$+\|u_{rrr}(1)\|_2 + \sum_{i=1}^{2}(|k_{ir}|_2 + |k_{irr}|_2 + |k_{irrr}|_2) + \sum_{i=1}^{6} z_i](\tau)\sum_{i=1}^{6} z_i^2(\tau)\,d\tau.$$

Здесь C_1 – положительная константа, $z_1 = u_{\lambda H^2}(t), z_2 = u_\lambda{}^{-1}{}_{H^2}(t), z_3 = \omega_{H^3}(t)$,

$$z_4 = \omega^{-1}{}_{H^3}(t), z_5 = |R_1|_{H^3}(t),\ z_6 = |R_2|_{H^3}(t).$$

Неравенство

$$\sum_{i=7}^{9} z_i^2(t) \le \sum_{i=7}^{7} z_i^2(0) + C_2(t)\int_0^t \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{|r|_c^k}[\|u_r\|_2 + \|u_{rr}\|_2 + \|u_{rrr}\|_2 + \|u_{rrr}(1)\|_2 + \quad (2.7)$$

$$+\sum_{i=1}^{4}(z_i))(\sum_{i=7}^{9} z_i(t) + \|fR_r\|_c + \|fR_{rr}\|_4)]\sum_{i=7}^{9} z_i(\tau)d\tau$$

может быть получено аналогично. Здесь

$$z_7 = \|fR_r\|_2(t),\ z_8 = \|fR_{rr}\|_2(t),\ \ z_9 = \|fR_{rrr}\|_2(t),$$

$$\|u_{rrr}(1)\|_2 = \sum_{i=1}^{2}\left\|\alpha_i^3\right\|_2 (z_2 + z_4) \quad (2.8)$$

Представление (2.3) u_r как оператора над производными функций R_i, ω^{-1}, fR_r и так же, как аналогичные представления для u_r, u_{rr}, u_{rrr}, позволяют получить окончательное неравенство

$$Z(t) \le Z(0) + \int_0^t \Phi(Z(\tau))d\tau \quad (2.9)$$

для $Z(t) = \sum_{i=1}^{9} z_i^2(t)$ с монотонно возрастающей положительной функцией $\Phi(z)$.

Ограниченное решение этого неравенства обеспечивает требуемые оценки на интервале $[0; t_0]$ только при выполнении условий (1.3). Для завершения доказательства оценим разницу между выражениями (1.3) и их начальными данными и обеспечим выполнение условий (1.3) выбором t_0.

Теорема существования для задачи Коши (1.2) доказана, когда начальные условия удовлетворяют условиям леммы с равномерно ограниченными нормами и равномерно выполненными условиями (1.3) (равномерно по отношению к a, когда $|b-a| = \text{const}$).

Теорема. Существует $t_0 > 0$, такое, что задача (1.2) имеет решение в интервале $0<t< t_0$ с нормами

$$\|u\|_{H^3}(\tau),\ \|\omega\|_{H^3}(\tau),\ \left\|\omega^{-1}\right\|_{H^3}(\tau),\ \left\|u_\lambda^{-1}\right\|_{H^3}(\tau),\ |R_i|_{H^3}(\tau),$$

равномерно ограниченными по отношению к a.

После того как получены априорные оценки, теорема доказывается стандартным путем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тешуков В.М.* О гиперболичности длинных волн // ДАН СССР. 1985. Т. 284. № 3. С. 555–559.
2. *Teshukov V.M.* Long wave approximation for vortex free boundary flows // Numerical Methods for Free Boundary Problems. Basel: Birkhauser Verl., 1991 (Intern. Ser. Numer. Math.; V. 99).
3. *Teshukov V.M.* On Caushi problem for long wave equations // Numerical Methods for Free Boundary Problems. Basel: Birkhauser Verl., 1992 (Intern. Ser. Numer. Math.; V. 106).

4. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

Статья поступила 10.05.2011 г.

Sterkhova M. M. THE CAUCHY PROBLEM FOR LONG WAVE EQUATIONS IN THE AXISYMMETRIC CASE. The Cauchy problem for a system of integro-differential equations modeling the free-boundary vortex fluid flow is considered. For the initial data satisfying the hyperbolicity conditions, the solvability of the Cauchy problem in the small with respect to time is proved.

Keywords: vortex flow, hyperbolicity, integro-differential equations.

STERKHOVA Maria Maksimovna (Tomsk State University, Ltd. “Termofarm”)
E-mail: sterhova.m@gmail.com