МАТЕМАТИКА

УДК 515.122.55, 515.123.4

А.В. Арбит

ОБ ОБЩЕМ ВИДЕ РАВНОМЕРНО НЕПРЕРЫВНОГО ФУНКЦИОНАЛА НА C_p-ПРОСТРАНСТВЕ

Описан общий вид равномерно непрерывного функционала на пространстве непрерывных вещественнозначных функций с топологией поточечной сходимости.

Ключевые слова: *равномерно непрерывные функции, функциональные пространства, топология поточечной сходимости.*

Тематика работы относится к так называемой C_p-теории, объектом изучения которой является пространство $C_p(X)$ всех непрерывных вещественнозначных функций на пространстве X, наделённое топологией поточечной сходимости. Здесь и далее X – тихоновское пространство. Известно (см. [1]), что для каждого ненулевого непрерывного линейного функционала l на пространстве $C_p(X)$ найдутся конечные множества $\{x_1, \ldots, x_n\}\subset X$ и $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}\subset\mathbb{R}$, такие, что $l(f) = \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n)$ для всех $f \in C_p(X)$. Другими словами, найдётся линейная функция $L:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, такая, что $l(f) = L\left(f(x_1),\ldots,f(x_n)\right)$. Эта формула демонстрирует общий вид непрерывного линейного функционала на пространстве $C_p(X)$. Поскольку непрерывный линейный функционал является частным случаем равномерно непрерывного функционала, то естественно возникает вопрос, каким будет общий вид последнего. Этот вопрос интересен ещё и тем, что его решение может быть полезным для получения результатов, описывающих свойства u-эквивалентных пространств.

Прежде чем сформулировать главный результат работы, дадим ещё одно определение. Через $U_p(X)$ обозначим пространство всех равномерно непрерывных функционалов на пространстве $C_p(X)$ с топологией поточечной сходимости. Нашей целью является доказательство следующего утверждения.

Теорема 0.1. *Пусть равномерно непрерывный функционал* $\varphi \in C_pC_p(X)$ *не равен константе. Тогда существуют последовательность* $\{x_k\} \in X^{\mathbb{N}}$ *(или конечное множество* $\{x_1,\ldots,x_n\} \subset X$*) и равномерно непрерывная функция* $\Phi:\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ *(соответственно* $\Phi:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*) такие, что*

а) $\varphi(f) = \Phi\{f(x_k)\}$ *(соответственно* $\varphi(f) = \Phi(f(x_1),\ldots,f(x_n))$*) для всех* $f \in C_p(X)$;

б) *Многозначное отображение пространства* $U_p(X)$ *в* X, *ставящее в соответствие каждому* $\varphi \in U_p(X)$ *множество членов последовательности* $\{x_k\}$ (*соответственно множество* $\{x_1, \ldots, x_n\}$), *полунепрерывно снизу*.

Здесь и далее мы для краткости пишем $\Phi\{f(x_k)\}$ вместо $\Phi(\{f(x_k)\})$.

Терминология и обозначения

Все рассматриваемые ниже топологические пространства предполагаются вполне регулярными. Символы $\mathbb{R}$ и $\mathbb{N}$ означают множества всех действительных и всех натуральных чисел соответственно, $\mathbb{R}^X$ – пространство всех функций на X, $C_p(X)$ – пространство всех вещественнозначных непрерывных функций на X, наделённое топологией поточечной сходимости, $C_pC_p(X)$ обозначает $C_p(C_p(X))$. $\aleph_0$ – первый бесконечный кардинал. Сужение функции f на множество A обозначаем $f|_A$. Символом 0_X будем обозначать тождественно равную нулю функцию на пространстве X. Для многозначного отображения $p: X \to Y$ и множества $B \subset Y$ мы определяем прообраз B как множество $p^{-1}(B) = \{x \in X : p(x) \cap B \neq \varnothing\}$. Многозначное отображение $p: X \to Y$ называется:

а) полунепрерывным снизу, если прообраз каждого открытого подмножества пространства Y открыт в X;

б) сюръективным, если для каждого $y \in Y$ найдётся $x \in X$, такой, что $y \in p(x)$.

1. Понятие носителя

Следующие определения аналогичны определениям, введенным О. Г. Окуневым в [2].

Зафиксируем $\varphi \in U_p(X)$ и $\varepsilon > 0$. Точку $x \in X$ будем называть ε-*существенной* для φ, если для любой окрестности O_x точки x существуют функции $f', f'' \in C_p(X)$, совпадающие на множестве $X \setminus O_x$, для которых выполняется неравенство

$$|\varphi(f') - \varphi(f'')| > \varepsilon.$$

Точку x, не являющуюся ε-существенной для φ, будем называть ε-*несущественной* для φ. Множество всех ε-существенных точек для φ будем называть ε-*носителем* функционала φ и обозначать его $\operatorname{supp}_\varepsilon \varphi$. Объединение всех ε-носителей функционала φ по всем положительным ε будем называть *носителем* φ и обозначать его $\operatorname{supp} \varphi$.

Очевидно, что если $\varepsilon < \delta$, то $\operatorname{supp}_\delta \varphi \subset \operatorname{supp}_\varepsilon \varphi$, поэтому $\operatorname{supp}\varphi = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{supp}_{1/n} \varphi$.

Построенный нами носитель обладает следующими свойствами:

(i) $\operatorname{supp}_\varepsilon \varphi$ – конечное подмножество пространства X для любого $\varepsilon > 0$, непустое для неограниченного φ;

(ii) $\operatorname{supp}: U_p(X) \to X$ есть не более чем счётнозначное, полунепрерывное снизу отображение.

Для доказательства этих свойств приведём некоторые результаты С.П. Гулько [3]. Зафиксируем $\varphi \in U_p(X)$, $\delta > 0$ и некоторое конечное подмножество $K \subset X$. Определим величину

$$a(\varphi, K, \delta) = \sup |\varphi(f') - \varphi(f'')|,$$

где супремум берётся по всем $f', f'' \in C_p(X)$, таким, что $|f'(x) - f''(x)| < \delta$ для всех $x \in K$. Если K – пустое множество, то супремум берётся по всем $f', f'' \in C_p(X)$.

Это определение было введено С.П. Гулько в [3]. Также определим

$$a(\varphi, K, 0) = \sup |\varphi(f') - \varphi(f'')|,$$

где супремум берётся по всем $f', f'' \in C_p(X)$, совпадающим на множестве K (если K – пустое множество, то супремум берётся по всем $f', f'' \in C_p(X)$). Очевидно, что если $0 \le \delta_1 \le \delta_2$, то $a(\varphi, K, \delta_1) \le a(\varphi, K, \delta_2)$, и если $K_1 \subset K_2 \subset X$, то $a(\varphi, K_2, \delta) \le a(\varphi, K_1, \delta)$ для любого $\delta \ge 0$.

Теорема 1.1 [3]. *Для каждого* $\varphi \in U_p(X)$ *существует конечное множество* $K(\varphi) \subset X$, *такое, что*

1) $a(\varphi, K(\varphi), \delta) < \infty$ *для всех* $\delta > 0$;

2) $a(\varphi, K', \delta) = \infty$ *для всех* $\delta > 0$, *где* K' *– произвольное собственное подмножество множества* $K(\varphi)$.

Если φ ограниченный, то $K(\varphi)$ пусто, если φ неограниченный, то $K(\varphi)$ непусто.

Доказательство. Для доказательства этой теоремы нам потребуются некоторые промежуточные результаты. Обозначим через $\mathcal{U}(\varphi, \delta)$ семейство всех конечных подмножеств $K \subset X$, таких, что $a(\varphi, K, \delta) < \infty$, где $\delta \ge 0$. То, что это семейство непусто для достаточно малых $\delta > 0$, следует из равномерной непрерывности φ.

Лемма 1.2 [3]. $a(\varphi, K, n\delta) \le na(\varphi, K, \delta)$ *для каждого* $\varphi \in U_p(X)$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть $f', f'' \in C_p(X)$ и $|f'(x) - f''(x)| < n\delta$ для всех $x \in K$. Положим

$$f_i = f' + i(f'' - f')/n, \ i \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Тогда
$$|f_{i-1}(x) - f_i(x)| = |f'(x) - f''(x)|/n < \delta$$

для всех $x \in K$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, и, следовательно, $|\varphi(f_{i-1}) - \varphi(f_i)| \le a(\varphi, K, \delta)$. Тогда

$$|\varphi(f') - \varphi(f'')| = \left|\sum_{i=1}^{n} (\varphi(f_{i-1}) - \varphi(f_i))\right| \le \sum_{i=1}^{n} |\varphi(f_{i-1}) - \varphi(f_i)| \le na(\varphi, K, \delta).$$

Отсюда, переходя к супремуму, получаем требуемое неравенство. ■

Так как функция $\delta \mapsto a(\varphi, K, \delta)$ неубывающая, то из предыдущей леммы следует, что семейство $\mathcal{U}(\varphi, \delta)$ для каждого положительного δ при фиксированном φ состоит из одних и тех же элементов, поэтому будем обозначать такое семейство $\mathcal{U}(\varphi)$.

Лемма 1.3 [3]. *Если* $K_1, K_2 \in \mathcal{U}(\varphi)$, то $K_1 \cap K_2 \in \mathcal{U}(\varphi)$. *Более того,*

$$a(\varphi, K_1 \cap K_2, \delta) \le a(\varphi, K_1, \delta/2) + a(\varphi, K_2, \delta/2) \text{ для всех } \delta > 0.$$

Доказательство. Заметим сначала, что если φ неограниченный, то $\varnothing \notin \mathcal{U}(\varphi)$. Действительно, если бы это было не так, то нашлось бы $M \in \mathbb{R}$, такое, что $|\varphi(f') - \varphi(f'')| < M$ для всех $f', f'' \in C_p(X)$. Если положить $f'' = 0_X$, то получим, что $|\varphi(f')| < M + |\varphi(0_X)|$ для всех $f' \in C_p(X)$, что противоречит неограниченности φ. Покажем теперь, что если φ неограниченный и $K_1, K_2 \in \mathcal{U}(\varphi)$, то $K_1 \cap K_2 \ne \varnothing$. Для этого рассмотрим последовательность $\{f_n\}$ функций из $C_p(X)$, такую, что $\lim_{n\to\infty} \varphi(f_n) = \infty$. Существование такой последовательности следует из неограниченности φ. Если множества K_1 и K_2 не пересекаются, то существует окрестность U множества K_1, не содержащая точек из K_2, и для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдётся функция $g_n \in C_p(X)$, такая, что $g_n|_{X\setminus U} = 0_X|_{X\setminus U}$ и $g_n|_{K_1} = f_n|_{K_1}$. Тогда $|\varphi(f_n) - \varphi(g_n)| \le a(\varphi, K_1, 0)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, следовательно, $\lim_{n\to\infty} \varphi(g_n) = \infty$. С другой стороны, так как $g_n|_{K_2} = 0_X|_{K_2}$, то $|\varphi(g_n)| \le a(\varphi, K_2, 0) + |\varphi(0_X)|$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Получаем противоречие. Если же φ ограниченный, то легко видеть, что $\varnothing \in \mathcal{U}(\varphi)$.

Пусть теперь $f', f'' \in C_p(X)$ и $|f'(x) - f''(x)| < \delta$ для всех $x \in K_1 \cap K_2$. Найдётся функция $f \in C_p(X)$, такая, что $f|_{K_1\setminus K_2} = f'|_{K_1\setminus K_2}$, $f|_{K_2\setminus K_1} = f''|_{K_2\setminus K_1}$ и $f(x) = (f'(x) + f''(x))/2$ для всех $x \in K_1 \cap K_2$. Тогда $|f(x) - f'(x)| < \delta/2$ для всех $x \in K_1$ и $|f(x) - f'(x)| < \delta/2$ для всех $x \in K_2$, следовательно, $|\varphi(f') - \varphi(f)| \le a(\varphi, K_1, \delta/2)$ и $|\varphi(f) - \varphi(f'')| \le a(\varphi, K_1, \delta/2)$, откуда следует, что

$$|\varphi(f') - \varphi(f'')| \le a(\varphi, K_1, \delta/2) + a(\varphi, K_2, \delta/2).$$

Поскольку все множества семейства $\mathcal{U}(\varphi)$ конечны, то из предыдущей леммы следует, что это семейство содержит наименьшее множество, которое мы и обозначим $K(\varphi)$. Оно пусто, если φ ограниченный, и непусто, если φ неограниченный. Теорема 1.1 доказана. ■

Покажем, что множество $K(\varphi)$ обладает более сильным свойством, чем свойство 2) из теоремы 1.1.

3) $a(\varphi, K', 0) = \infty$, где K' – произвольное собственное подмножество множества $K(\varphi)$.

Для доказательства этого свойства нам потребуется следующая

Лемма 1.4. *Если* $a(\varphi, K, 0) < \infty$, *то* $a(\varphi, K, \delta) < \infty$ *для всех* $\delta > 0$.

Доказательство. Зафиксируем конечное $K \subset X$, такое, что $a(\varphi, K, 0) < \infty$. Докажем непрерывность в точке 0 величины $a(\varphi, K, \delta)$ как функции от δ. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Так как φ – равномерно непрерывная функция, найдётся конечное множество $K' \subset X$ и $\delta_\varepsilon > 0$, такие, что для любых $f', f'' \in C_p(X)$ справедлива импликация

$$(|f'(x) - f''(x)| < \delta_\varepsilon \text{ для всех } x \in K') \Rightarrow |\varphi(f') - \varphi(f'')| < \varepsilon.$$

Пусть $f', f'' \in C_p(X)$ и $|f'(x) - f''(x)| < \delta_\varepsilon$ для всех $x \in K$. Найдётся функция $f \in C_p(X)$, такая, что

$$f(x) = \begin{cases} f'(x), & x \in K; \\ f''(x), & x \in K' \setminus K. \end{cases}$$

Тогда $|f(x) - f''(x)| < \delta_\varepsilon$ для всех $x \in K'$, следовательно, $|\varphi(f) - \varphi(f'')| < \varepsilon$. Теперь, применяя неравенство треугольника, получаем

$$|\varphi(f') - \varphi(f'')| \le |\varphi(f') - \varphi(f)| + |\varphi(f) - \varphi(f'')| < a(x, K, 0) + \varepsilon.$$

Переходя к супремуму по всем $f', f'' \in C_p(X)$, таким, что $|f'(x) - f''(x)| < \delta_\varepsilon$ для всех $x \in K$, получаем неравенство $a(\varphi, K, \delta_\varepsilon) \le a(\varphi, K, 0) + \varepsilon$, что влечет непрерывность функции $\delta \mapsto a(\varphi, K, \delta)$ в нуле. ■

Для каждого $\varphi \in U_p(X)$ будем обозначать $a(\varphi, \delta) = a(\varphi, K(\varphi), \delta)$, $a(\varphi) = a(\varphi, K(\varphi), 0)$. Теперь в новых обозначениях запишем свойства конечнозначного отображения $\varphi \mapsto K(\varphi)$:

(K1) Если $f', f'' \in C_p(X)$ и $f'|_{K(\varphi)} = f''|_{K(\varphi)}$, то $|\varphi(f') - \varphi(f'')| \le a(\varphi)$.

(K2) Для каждого собственного подмножества $K' \subset K(\varphi)$ и любого числа b существуют функции $f', f'' \in C_p(X)$, такие, что $f'|_{K'} = f''|_{K'}$ и $|\varphi(f') - \varphi(f'')| > b$.

Упомянем ещё об одном свойстве данного отображения – сюръективности.

Лемма 1.5 [3]. *Для каждого* $x \in X$ *найдётся* $\varphi \in U_p(X)$, *такое, что* $x \in K(\varphi)$.

Доказательство. Пусть $x \in X$. Для каждого $y \in X$ через θ_y обозначим функцию на пространстве $C_p(X)$, определённую формулой $\theta_y(f) = f(y)$, где $f \in C_p(X)$. Очевидно, что $\theta_y \in U_p(X)$ для каждого $y \in X$. Пусть $K = \bigcup\{K(\theta_y) : y \in K(\theta_x)\}$. Докажем, что $x \in K$. Предположим, что $x \notin K$. Пусть $\delta = \max\{a(\theta_y) : y \in K(\theta_x)\}$, $a = a(\theta_x, \delta)$. Возьмём функцию $f \in C_p(X)$, такую, что $f|_K \equiv 0$ и $f(x) = a + 1$. Так как $f|_{K(\theta_y)} = 0_X|_{K(\theta_y)}$ и $\theta_y(0_X) = 0$, то $|f(y)| = |\theta_y(f)| \le a(\theta_y) \le \delta$ для каждого $y \in K(\theta_x)$. Тогда

$$a + 1 = |f(x)| = |\theta_x(f)| \le a(\theta_x, \delta) = a .$$

Полученное противоречие завершает доказательство. ■

Перейдём теперь к доказательству свойств (i) и (ii) носителя $\mathrm{supp}_\varepsilon \varphi$. Следующие две леммы показывают, как связаны между собой множества $K(\varphi)$ и $\mathrm{supp}_\varepsilon \varphi$.

Лемма 1.6. $K(\varphi) \subset \mathrm{supp}_\varepsilon \varphi$ *для каждого* $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Возьмём $\varphi \in U_p(X)$. Если $K(\varphi)$ непусто, то зафиксируем элемент $x_0 \in K(\varphi)$ и $\varepsilon > 0$. Покажем, что x_0 – ε-существенная точка для φ. Положим $a = \max(\varepsilon, a(\varphi))$, $K' = K(\varphi) \setminus \{x_0\}$. По свойству (K2) существуют функции $f', f'' \in C_p(X)$, такие, что $f'|_{K'} = f''|_{K'}$ и $|\varphi(f') - \varphi(f'')| > 2a$. Возьмем произвольную, не пересекающуюся с K' окрестность U точки x_0 и функцию

$f \in C_p(X)$, такую, что $f|_{X \setminus U} = f'|_{X \setminus U}$ и $f(x_0) = f''(x_0)$. Тогда $f|_{K(\varphi)} = f''|_{K(\varphi)}$ и $|\varphi(f) - \varphi(f'')| \le a(\varphi) \le a$. Из неравенства треугольника получаем, что $|\varphi(f) - \varphi(f')| > a \ge \varepsilon$, и кроме того, f совпадает с f' на множестве $X \setminus U$. Согласно определению это и означает, что x_0 – ε-существенная точка для φ. ■

Итак, из леммы 1.6 следует, что если φ неограниченный, то множество $\mathrm{supp}_\varepsilon \varphi$ непусто для любого $\varepsilon > 0$, а также следует сюръективность отображения $\varphi \mapsto \mathrm{supp}\,\varphi$ пространства $U_p(X)$ на пространство X.

Лемма 1.7. *Множество* $\mathrm{supp}_\varepsilon \varphi$ *конечно для каждого* $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in U_p(X)$ и $\varepsilon > 0$. Так как отображение φ равномерно непрерывно, существуют $\delta > 0$ и конечное множество $K \subset X$, такие, что для любых $f', f'' \in C_p(X)$ справедлива импликация

$$(|f'(x) - f''(x)| < \delta \text{ для всех } x \in K) \Rightarrow |\varphi(f') - \varphi(f'')| \le \varepsilon.$$

Покажем, что $\mathrm{supp}_\varepsilon \varphi \subset K$. Зафиксируем точку $x_0 \in X \setminus K$ и её окрестность U, не пересекающуюся с K, и возьмём две произвольные функции $f', f'' \in C_p(X)$, совпадающие на множестве $X \setminus U$. Тогда они совпадают на множестве K, следовательно, $|\varphi(f') - \varphi(f'')| < \varepsilon$. Это по определению означает, что точка x_0 – ε-несущественная для φ, т.е. $x_0 \notin \mathrm{supp}_\varepsilon \varphi$. Отсюда получаем, что $\mathrm{supp}_\varepsilon \varphi \subset K$. ■

Свойство (i) носителя доказано. Для доказательства свойства (ii) определим для каждого $\varphi \in U_p(X)$ и каждого $\varepsilon > 0$ конечное множество $K_\varepsilon(\varphi) \subset X$, удовлетворяющее условиям

(KE1) $a(\varphi, K_\varepsilon(\varphi), 0) \le \varepsilon$;

(KE2) $a(\varphi, K', 0) > \varepsilon$ для каждого собственного подмножества K' множества $K_\varepsilon(\varphi)$.

Такое множество можно получить из множества K предыдущего доказательства, уменьшая его до тех пор, пока оно не станет удовлетворять пункту (KE2).

Множеств, удовлетворяющих условиям (KE1) и (KE2), может быть несколько, но нам достаточно взять за $K_\varepsilon(\varphi)$ любое из них. Поскольку $K(\varphi) = K_{a(\varphi)}(\varphi)$, то, используя результаты лемм 1.6 и 1.7, получаем следующее

Следствие 1.8. *Если* $\varepsilon \ge a(\varphi)$, *то* $\mathrm{supp}_\varepsilon \varphi = K(\varphi)$.

Лемма 1.9. *Если* $\varphi \in U_p(X)$ *и не равен константе, то найдётся* $\varepsilon > 0$ *такое, что* $K_\varepsilon(\varphi)$ *непусто.*

Доказательство. Так как φ не константа, то существуют $f', f'' \in C_p(X)$, такие, что $|\varphi(f') - \varphi(f'')| = a > 0$. Положим $\varepsilon = a/2$ и покажем, что $K_\varepsilon(\varphi)$ непусто. Если предположить противное, то $|\varphi(f') - \varphi(f'')| \le \varepsilon < a$, получаем противоречие. ■

Следующая лемма является аналогом результата, полученного О.Г. Окуневым [2].

Лемма 1.10. *Пусть* $\varphi_0 \in U_p(X)$, $\varepsilon > 0$, U *– открытое подмножество пространства* X, *такое, что* $\mathrm{supp}_\varepsilon \varphi_0 \cap U \ne \varnothing$. *Тогда существует окрестность* V *элемента* φ_0 *в* $U_p(X)$, *такая, что* $K_\varepsilon(\varphi) \cap U \ne \varnothing$ *для всех* $\varphi \in V$.

Доказательство. Можно считать, что $\mathrm{supp}_\varepsilon \varphi_0 \cap U = \{x_0\}$, где x_0 – некоторая ε-существенная точка для φ_0. Тогда, по определению, для окрестности U точки x_0 существуют функции $f', f'' \in C_p(X)$, совпадающие на множестве $X\backslash U$, такие, что $|\varphi_0(f') - \varphi_0(f'')| > \varepsilon$. Определим $V = \{\varphi \in U_p(X) : |\varphi(f') - \varphi(f'')| > \varepsilon\}$ – искомую окрестность элемента φ_0. Покажем, что для V выполняется утверждение леммы. Предположим противное: пусть существует элемент $\varphi \in V$, такой, что $K_\varepsilon(\varphi) \cap U = \varnothing$. Тогда f' совпадает с f'' на множестве $K_\varepsilon(\varphi)$, поэтому $|\varphi(f') - \varphi(f'')| \le \varepsilon$ – получили противоречие с тем, что $\varphi \in V$. ■

Следствие 1.11. *Пусть* $\varphi_0 \in U_p(X)$, $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$, U *– открытое подмножество пространства X, такое, что* $|K(\varphi_0) \cap U| \ge k$. *Тогда существует окрестность V точки* x_0*, такая, что* $|K_\varepsilon(\varphi) \cap U| \ge k$ *для всех* φ *из V.*

Лемма 1.12. *Пусть* $\varphi \in U_p(X)$, $\varepsilon > 0$. *Существует* $\delta > 0$, *такое, что* $K_\varepsilon(\varphi) \subset \mathrm{supp}_\delta \varphi$.

Доказательство. Возьмем точку $x_1 \in K_\varepsilon(\varphi)$. Положим

$$K' = K_\varepsilon(\varphi) \setminus \{x_1\} = \{x_2, \dots, x_n\}.$$

По определению множества $K_\varepsilon(\varphi)$ существуют такие функции $f', f'' \in C_p(X)$, совпадающие на множестве K', что $|\varphi(f') - \varphi(f'')| > \varepsilon$. Выберем $\delta_1 > 0$, такое, что

$$|\varphi(f') - \varphi(f'')| > \varepsilon + \delta_1. \tag{1}$$

Покажем, что $x_1 \in \mathrm{supp}_{\delta_1} \varphi$. Возьмем окрестность U точки x_1, не пересекающуюся с K', и выберем такую функцию $f \in C_p(X)$, совпадающую с f' на множестве $X\backslash U$, что $f(x_1) = f''(x_1)$. Тогда f совпадает с f'' на множестве $K_\varepsilon(\varphi)$, следовательно, $|\varphi(f'') - \varphi(f)| \le \varepsilon$. Отсюда и из неравенства (1) получаем, что $|\varphi(f') - \varphi(f)| > \delta_1$. Но f' совпадает с f на множестве $X\backslash U$, следовательно, x_1 – δ_1-существенная точка для φ. Таким образом, для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ можно подобрать δ_i так, чтобы x_i была δ_i-существенной точкой для φ. Положив $\delta = \min\{\delta_i : i \le n\}$, получим $K_\varepsilon(\varphi) \subset \mathrm{supp}_\delta \varphi$. ■

Следствие 1.13. Если $\varphi \in U_p(X)$ и не равен константе, то supp φ не пусто.

Доказательство. По лемме 1 найдётся $\varepsilon > 0$ такое, что $K_\varepsilon(\varphi)$ непусто. По лемме 4 найдётся $\delta > 0$, такое, что $K_\varepsilon(\varphi) \subset \mathrm{supp}_\delta \varphi$. Тогда $\mathrm{supp}\, \varphi \supset K_\varepsilon(\varphi) \ne \varnothing$, следовательно, supp φ не пусто. ■

Теорема 1.14. *Многозначное отображение* $\mathrm{supp} : U_p(X) \to X$ *полунепрерывно снизу.*

Доказательство. Положим $p(\varphi) = \mathrm{supp}\, \varphi$. Нужно показать, что для любого непустого открытого множества $U \subset X$ его прообраз $p^{-1}(U) = \{\varphi \in U_p(X) : p(\varphi) \cap U \ne \varnothing\}$ – открытое множество в $U_p(X)$. Пусть $U \subset X$ – открытое непустое множество и пусть $p^{-1}(U) \ne \varnothing$. Возьмем произвольный элемент $\varphi \in p^{-1}(U)$. Тогда существует $\varepsilon > 0$, такое, что $\operatorname{supp}_\varepsilon \varphi \cap U \neq \varnothing$. По лемме 1.10 существует окрестность *V* элемента φ, такая, что $K_\varepsilon(\varphi') \cap U \neq \varnothing$ для всех φ' из *V*. По лемме 1.12 для каждого $\varphi' \in V$ и каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta_0 > 0$ (зависящее от φ' и от ε), что $K_\varepsilon(\varphi') \subset \operatorname{supp}_{\delta_0} \varphi' \subset \operatorname{supp} \varphi'$, т.е. $\operatorname{supp} \varphi' \cap U \neq \varnothing$ для всех φ' из *V*, следовательно, $p^{-1}(U)$ открыто и отображение supp полунепрерывно снизу. ■

Кроме доказанных выше свойств (i) и (ii), множество supp φ обладает также свойством минимальности в следующем смысле.

Теорема 1.15. *Пусть* $\varphi \in U_p(X)$. *Справедливы следующие утверждения.*

а) *Если функции* $f', f'' \in C_p(X)$ *совпадают на множестве* supp φ, *то* $\varphi(f') = \varphi(f'')$.

б) *Если F – замкнутое подмножество из X такое, что для любых двух функций* $f', f'' \in C_p(X)$, *совпадающих на множестве F, выполняется равенство* $\varphi(f') = \varphi(f'')$, то $\operatorname{supp} \varphi \subset F$.

Доказательство. (а) Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и зафиксируем $K_\varepsilon(\varphi)$. Возьмем функции $f', f'' \in C_p(X)$, совпадающие на множестве supp φ. По лемме 4 имеем $K_\varepsilon(\varphi) \subset \operatorname{supp} \varphi$, следовательно, выполняется неравенство $|\varphi(f') - \varphi(f'')| \leq \varepsilon$. Так как ε – произвольное, получаем $\varphi(f') = \varphi(f'')$.

(б) Предположим противное. Пусть $\operatorname{supp} \varphi \setminus F \neq \varnothing$. Тогда существует $x_0 \in \operatorname{supp} \varphi$, $x_0 \notin F$. Найдётся $\varepsilon > 0$ такое, что $x_0 \in \operatorname{supp}_\varepsilon \varphi$. Возьмем окрестность *U* точки x_0, не пересекающуюся с *F*. Тогда существуют функции $f', f'' \in C_p(X)$, совпадающие на множестве $X \setminus U$ такие, что $|\varphi(f') - \varphi(f'')| > \varepsilon$. Но f' совпадает с f'' на множестве *F* и $\varphi(f') = \varphi(f'')$. Получили противоречие.

2. Общий вид равномерно непрерывного функционала

Пусть $\varphi \in U_p(X)$ и не является константой. Определим для φ функцию $\Phi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$. Будем считать для определённости, что $|\operatorname{supp} \varphi| = \aleph_0$. Пусть $\operatorname{supp} \varphi = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Возьмём произвольную последовательность $t = \{t_n\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ выберем функцию $f_k \in C_p(X)$ такую, что $f_k(x_i) = t_i$ для всех $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Лемма 2.1. *Последовательность* $\{\varphi(f_k)\}$ *– сходящаяся.*

Доказательство. Докажем, что эта последовательность фундаментальна. Возьмём положительное ε. Найдётся такое натуральное N_ε, что $K_\varepsilon(\varphi) \subset \{x_i : 1 \leq i \leq N_\varepsilon\}$. Тогда $f_n|_{K_\varepsilon(\varphi)} = f_m|_{K_\varepsilon(\varphi)}$ для любых $n, m \geq N_\varepsilon$, следовательно, $|\varphi(f_n) - \varphi(f_m)| \leq \varepsilon$. Таким образом, данная последовательность фундаментальна в $\mathbb{R}$ и является сходящейся. ■

Положим теперь $\Phi(t)=\lim\limits_{k\to\infty}\varphi(f_k)$. Проверим корректность данного определения. Пусть имеется ещё одна функциональная последовательность $\{f'_k\}$, $f'_k\in C_p(X)$, такая, что $f'_k(x_i)=t_i$ для всех $i\in\{1,\dots,k\}$. Пусть $a=\lim\limits_{k\to\infty}\varphi(f_k)$, $b=\lim\limits_{k\to\infty}\varphi(f'_k)$. Составим ещё одну функциональную последовательность $\{f''_k\}$, определённую формулой

$$f''_k=\begin{cases} f_k, & \text{если } k \text{ нечётное;}\\ f'_k, & \text{если } k \text{ чётное.}\end{cases}$$

По предыдущей лемме существует предел последовательности $\{\varphi(f''_k)\}$, который обозначим через c. Тогда $c=\lim\limits_{k\to\infty}\varphi(f''_k)=\lim\limits_{k\to\infty}\varphi(f''_{2k})=\lim\limits_{k\to\infty}\varphi(f''_{2k-1})$, откуда получаем, что $a=b=c$. ■

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ с топологией поточечной сходимости. Для каждого $t=\{t_n\}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ множества вида

$$W(t,k,\varepsilon)=\left\{\, t'=\{t'_n\}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |t_i-t'_i|<\varepsilon, i\in\{1,\dots,k\}\right\}$$

составляют фундаментальную систему окрестностей.

Лемма 2.2.1 *Функция* Φ *– равномерно непрерывная.*

Доказательство. Нужно доказать, что для любого $\varepsilon>0$ найдутся $m\in\mathbb{N}$ и $\delta>0$ такие, что для любых $t',t''\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ верна импликация

$$t',t''\in W(\tilde{0},m,\delta)\Rightarrow|\Phi(t')-\Phi(t'')|<\varepsilon\,,$$

где $\tilde{0}$ – нулевая последовательность.

Пусть $\varepsilon>0$. В силу непрерывности в точке 0 величины $a(\varphi,K,\delta)$ как функции от δ, найдётся $\delta>0$ такое, что $a(\varphi,K_{\varepsilon/4}(\varphi),\delta)<\varepsilon/2$. Далее, найдётся $m\in\mathbb{N}$, такое, что $K_{\varepsilon/4}(\varphi)\subset\{x_1,\dots,x_m\}$. Пусть $t',t''\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $t'=\{t'_n\}$, $t''=\{t''_n\}$ и $t',t''\in W(\tilde{0},m,\delta)$. Для каждого $k\in\mathbb{N}$ выберем функции $f'_k,f''_k\in C_p(X)$ такие, что $f'_k(x_i)=t'_i$ и $f''_k(x_i)=t''_i$ для всех $i\in\{1,\dots,k\}$. Тогда $|f'_k(x)-f''_k(x)|<\delta$ для всех $x\in K_{\varepsilon/4}(\varphi)$ и для любого $k\geq m$, следовательно, $|\varphi(f'_k)-\varphi(f''_k)|<\varepsilon/2$ для любого $k\geq m$. Тогда $|\Phi(t')-\Phi(t'')|=\lim\limits_{k\to\infty}|\varphi(f'_k)-\varphi(f''_k)|\leq\varepsilon/2<\varepsilon$. ■

Лемма 2.3. $\varphi(f)=\Phi\{f(x_n)\}$ *для всех* $f\in C_p(X)$.

Доказательство. Пусть $f\in C_p(X)$. Положим $t=\{t_n\}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, где $t_n=f(x_n)$ для каждого $n\in\mathbb{N}$ и $f_k=f$ для любого натурального k. Тогда $\Phi\{f(x_n)\}=\Phi(t)=\lim\limits_{k\to\infty}\varphi(f_k)=\varphi(f)$. ■

Рассмотрим теперь случай, когда $\operatorname{supp}\varphi$ – конечное множество. Пусть $\operatorname{supp}\varphi=\{x_1,\dots,x_n\}$, где $n\in\mathbb{N}$. Возьмём произвольную точку $t=(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^n$ и выберем для неё функцию $f\in C_p(X)$ такую, что $f(x_i)=t_i$ для всех $i\in\{1,\dots,n\}$. Положим теперь $\Phi(t)=\varphi(f)$. Докажем корректность этого определения.

Пусть имеется ещё одна функция $f' \in C_p(X)$, такая, что $f'(x_i) = t_i$ для всех $i \in \{1,\ldots,n\}$. Тогда функции f и f' совпадают на множестве supp φ, следовательно, по теореме 1.15 имеем $\varphi(f') = \varphi(f'')$.

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$ с топологией поточечной сходимости. Для каждого $t = (t_1,\ldots,t_n) \in \mathbb{R}^n$ множества вида

$$W(t,\varepsilon) = \{t' = (t_1',\ldots,t_n') \in \mathbb{R}^n : |t_i - t_i'| < \varepsilon, i \in \{1,\ldots,n\}\}$$

составляют фундаментальную систему окрестностей.

Лемма 2.4.2 *Функция* Φ *– равномерно непрерывная.*

Доказательство. Нужно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое, что для любых $t', t'' \in \mathbb{R}^n$ верна импликация $t', t'' \in W(\tilde{0},\delta) \Rightarrow |\Phi(t') - \Phi(t'')| < \varepsilon$, где $\tilde{0}$ – нулевой элемент пространства $\mathbb{R}^n$.

Пусть $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности в точке 0 величины $a(\varphi, K, \delta)$ как функции от δ, найдётся $\delta > 0$ такое, что $a(\varphi, \operatorname{supp}\varphi, \delta) < \varepsilon$. Пусть $t', t'' \in W(\tilde{0},\delta)$, $t' = (t_1',\ldots,t_n')$, $t'' = (t_1'',\ldots,t_n'')$. Выберем функции $f', f'' \in C_p(X)$ такие, что $f'(x_i) = t_i'$ и $f''(x_i) = t_i''$ для всех $i \in \{1,\ldots,n\}$. Тогда $|f'(x) - f''(x)| < \delta$ для всех $x \in \operatorname{supp}\varphi$, следовательно, $|\varphi(f') - \varphi(f'')| < \varepsilon/2$, поэтому

$$|\Phi(t') - \Phi(t'')| = |\varphi(f') - \varphi(f'')| < \varepsilon\text{ . } \blacksquare$$

Очевидно что $\varphi(f) = \Phi(f(x_1),\ldots,f(x_n))$ *для всех* $f \in C_p(X)$. Теорема 0.1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Архангельский А.В.* Топологические пространства функций. М.: Изд-во МГУ, 1989.
2. *Okunev O.* Homeomorphisms of function spaces and hereditary cardinal invariants // Topol. and its Appl. 1997. V. 80. P. 177–188.
3. *Гулько С.П.* О равномерных гомеоморфизмах пространств непрерывных функций // Труды матем. ин-та им. В.А. Стеклова. АН СССР. 1992. Т. 193. С. 82–88.
4. *Энгелькинг Р.* Общая топология: пер. с англ. – М.: Мир, 1986.

Статья поступила 19.04.2012 г.

Arbit A.V. ON THE GENERAL FORM OF A UNIFORMLY CONTINUOUS FUNCTIONAL DEFINED ON THE C_p-SPACE. The general form of a uniformly continuous functional defined on the space of continuous real-valued functions with the topology of pointwise convergence is described.

Keywords: uniformly continuous functions, function spaces, topology of pointwise convergence.

ARBIT Alexander Vladimirovich (Tomsk State Pedagogical University)
E-mail: arbit78@yandex.ru