

УДК 519.622.2, 57.087

С.А. Королев, Д.В. Майков, И.Г. Русяк**ИССЛЕДОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ
И ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МЕТАНОГЕНЕЗА**

Найдены стационарные решения системы дифференциальных уравнений, описывающей процесс получения биогаза (метаногенез). Приведены условия асимптотической устойчивости для данных решений. Найдена оптимальная скорость подачи субстрата для непрерывного режима метаногенеза.

Ключевые слова: метаногенез, биогаз, математическая модель, система обыкновенных дифференциальных уравнений, стационарные точки, устойчивость.

1. Математическая модель метаногенеза

Крупные животноводческие предприятия, например птицефабрики, свинокомплексы и фермы крупного рогатого скота (КРС), производят большое количество отходов, загрязняющих окружающую среду. Данные отходы можно путем метаногенеза переработать в топливный газ (биогаз) и биоудобрения. Метаногенез осуществляется в специальных резервуарах – метантенках – при постоянном перемешивании, способствующем созданию однородной среды.

Существует три типа метаногенеза: метаногенез в психрофильной, мезофильной и термофильной средах. Каждой среде соответствует определенный температурный диапазон и типы бактерий. На практике широкое распространение получил метаногенез в мезофильной среде, поскольку для данной среды интенсивность выделения биогаза не так чувствительна к колебаниям температуры субстрата, как для термофильной среды. Кроме того, скорость выхода биогаза при мезофильной среде существенно выше, чем при психрофильной. В дальнейшем рассматривается метаногенез в мезофильной среде. Оптимальная температура для мезофильной среды составляет 37 °С, а период полной ферментации – 25 суток [1].

Для поддержания высокой производительности биогазовой установки необходимо контролировать и регулировать значения управляющих параметров. Для этого требуется предварительно разработать математическую модель процесса получения биогаза, оценить ее параметры по экспериментальным данным, а также найти оптимальные значения управляющих параметров.

В литературе приводится множество моделей, описывающих различные биотехнологические процессы, в том числе и метаногенез. Так, скорость прироста концентраций микроорганизмов, в зависимости от концентрации субстрата, может быть описана моделями Моно, Мозера, Конто и др. [2, 3].

В данной статье рассматривается математическая модель, основанная на модели роста популяции бактерий Моно, с учетом процесса отмирания, задаваемого уравнением Колпикова [2]. Скорость образования биогаза задавалась прямо пропорциональной концентрации бактерий. Соответствующая математическая мо-

дель имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \left(\frac{\mu_1 L}{a + L} - \frac{\mu_2 b}{b + L} - p \right) X, \\ \frac{dL}{dt} = pL_0 - pL - \frac{\beta \mu_1 L}{a + L} X, \\ \frac{dV}{dt} = \gamma X(t), \end{cases} \quad (1)$$

с начальными условиями

$$X(0) = X_0, L(0) = L_0, V(0) = V_0 = 0, \quad (2)$$

где X – концентрация бактерий, кг/м³; L – концентрация питательных веществ субстрата, усваиваемых бактериями, кг/м³; V – выход биогаза, м³; μ_1 и μ_2 – максимально возможные относительные скорости соответственно прироста и отмирания бактерий, сут⁻¹; β – безразмерный коэффициент усвоения субстрата; p – относительная скорость поступления субстрата, сут⁻¹; γ – коэффициент скорости преобразования питательных веществ субстрата в биогаз, м³/(сут·кг/м³); a и b – эмпирические коэффициенты, м³/кг.

При этом предполагается, что интенсивность перемешивания позволяет пренебречь пространственной неоднородностью концентраций. Также предполагается, что концентрация соответствующих бактерий в поступающем субстрате пренебрежимо мала.

Особенностью системы (1) является отсутствие переменной V в правой части. Поэтому третье уравнение можно рассматривать независимо от остальных. Удобно ввести величину скорости выхода биогаза

$$w = \frac{dV}{dt} = \gamma X. \quad (3)$$

Биогазовая установка может работать в различных режимах. При периодическом режиме происходит однократное наполнение метантенка и его полное опорожнение по завершении периода ферментации. При непрерывном режиме осуществляется непрерывная подача новой порции субстрата и одновременно удаление переработанной порции субстрата.

В модели (1) случаю периодического режима подачи субстрата соответствует $p = 0$, случаю непрерывного режима – $p > 0$.

Относительная скорость поступления субстрата определяется выражением

$$p = \frac{1}{Q} \frac{dQ}{dt}, \quad (4)$$

где Q – объем субстрата в метантенке (при полной загрузке метантенка объем субстрата равен объему метантенка и постоянен); $\frac{dQ}{dt}$ – абсолютная скорость поступления субстрата.

В табл. 1 представлены оценки параметров математической модели (1), полученные авторами по экспериментальным данным для мезофильной среды при периодическом режиме подачи субстрата [4].

Таблица 1

Оценки коэффициентов модели

№ п/п	Коэффициент	Источник сырья		
		птицефабрики	свинокомплексы	фермы КРС
1	μ_1	0,821	0,484	0,359
2	μ_2	0,140	0,100	0,088
3	a	81,699	30,187	15,414
4	b	32,628	21,253	16,335
5	β	8,428	7,844	6,280
6	γ	0,847	0,751	0,658

2. Исследование стационарных решений математической модели

Для получения стабильного выхода биогаза в течение длительного промежутка времени требуется найти стационарные решения (точки покоя) системы (1) и значения скорости подачи субстрата p , соответствующие асимптотической устойчивости системы для непрерывного режима ($p > 0$).

Для нахождения точек покоя правые части системы (1) приравняются нулю:

$$\left(\frac{\mu_1 L}{a+L} - \frac{\mu_2 b}{b+L} - p \right) X = 0; \quad (5)$$

$$pL_0 - pL - \frac{\beta \mu_1 L}{a+L} X = 0. \quad (6)$$

При $X = 0$ первая точка покоя имеет вид

$$а) \quad X^* = 0, \quad L^* = L_0. \quad (7)$$

Полагая равным нулю левый сомножитель в (5), после умножения на общий знаменатель получается квадратное уравнение относительно L , решение которого позволяет получить вторую и третью точки покоя (выражая X из (6)):

$$б) \quad X^* = \frac{p(a+L^*)(L_0-L^*)}{\beta \mu_1 L^*}, \quad L^* = \frac{p(a+b) - b(\mu_1 - \mu_2) + \sqrt{D}}{2(\mu_1 - p)}; \quad (8)$$

$$в) \quad X^* = \frac{p(a+L^*)(L_0-L^*)}{\beta \mu_1 L^*}, \quad L^* = \frac{p(a+b) - b(\mu_1 - \mu_2) - \sqrt{D}}{2(\mu_1 - p)}, \quad (9)$$

где дискриминант

$$D = (b(\mu_1 - \mu_2) + p(a-b))^2 + 4\mu_1 \mu_2 ab \quad (10)$$

неотрицателен при неотрицательных значениях параметров.

Замена $X = \tilde{X} + X^*$ и $L = \tilde{L} + L^*$ в системе (1) и разложение ее правой части в ряд Тейлора по переменным $\tilde{X}$ и $\tilde{L}$ после отбрасывания одночленов с порядком выше первого позволяют получить систему первого приближения

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{X}}{dt} = \left(\frac{\mu_1 L^*}{a+L^*} - \frac{\mu_2 b}{b+L^*} - p \right) \tilde{X} + \left(\frac{\mu_1 a X^*}{(a+L^*)^2} + \frac{\mu_2 b X^*}{(b+L^*)^2} \right) \tilde{L}, \\ \frac{d\tilde{L}}{dt} = -\frac{\beta \mu_1 L^*}{a+L^*} \tilde{X} - \left(p + \frac{\beta \mu_1 a X^*}{(a+L^*)^2} \right) \tilde{L}, \end{cases} \quad (11)$$

Соответствующее характеристическое уравнение относительно λ имеет вид

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\mu_1 L^*}{a+L^*} - \frac{\mu_2 b}{b+L^*} - p - \lambda & \left(\frac{\mu_1 a}{(a+L^*)^2} + \frac{\mu_2 b}{(b+L^*)^2} \right) X^* \\ \frac{\beta \mu_1 L^*}{a+L^*} & -p - \frac{\beta \mu_1 a X^*}{(a+L^*)^2} - \lambda \end{array} \right| = 0. \quad (12)$$

Подстановка фазовых координат (7) первой точки покоя в (12) приводит к уравнению

$$(\lambda + p) \left(\frac{\mu_1 L_0}{a+L_0} - \frac{\mu_2 b}{b+L_0} - p - \lambda \right) = 0, \quad (13)$$

корни которого

$$\lambda_1 = -p, \quad \lambda_2 = \frac{\mu_1 L_0}{a+L_0} - \frac{\mu_2 b}{b+L_0} - p. \quad (14)$$

Для асимптотической устойчивости рассматриваемой точки покоя необходимо, чтобы найденные корни были отрицательны, что означает

$$p > \frac{\mu_1 L_0}{a+L_0} - \frac{\mu_2 b}{b+L_0}. \quad (15)$$

Для точек покоя (8) и (9), с учетом равенств (5) и (6), характеристическое уравнение (12) принимает вид

$$\lambda^2 + \frac{p(L^{*2} + aL_0)}{L^*(a+L^*)} \lambda + p(L_0 - L^*) \left(\frac{\mu_1 a}{(a+L^*)^2} + \frac{\mu_2 b}{(b+L^*)^2} \right) = 0. \quad (16)$$

В соответствии с критерием Рауса – Гурвица [5] для характеристического полинома второй степени, точки покоя (8) и (9) асимптотически устойчивы, если

$$\frac{p(L^{*2} + aL_0)}{L^*(a+L^*)} > 0 \quad (17)$$

и

$$p(L_0 - L^*) \left(\frac{\mu_1 a}{(a+L^*)^2} + \frac{\mu_2 b}{(b+L^*)^2} \right) > 0. \quad (18)$$

Для непрерывного режима неравенства (17), (18) выполняются всегда, так как все входящие в них множители строго положительны в области допустимых значений рассматриваемых параметров. Следовательно, решение системы (1) асимптотически устойчиво.

Первая точка покоя (7) соответствует случаю полного вымывания бактерий и прекращению метаногенеза, поэтому в дальнейшем не рассматривается.

Подстановка числовых значений коэффициентов, приведенных в табл. 1, в соотношения (9) показывает, что для всех видов сырья фазовые координаты третьей точки покоя отрицательны и не имеют физического смысла.

Поэтому в дальнейшем рассматривается стационарное решение системы дифференциальных уравнений (1), соответствующее второй точке покоя, определяемой соотношениями (8).

3. Оптимизация параметров метаногенеза

При оптимальных значениях температуры и влажности субстрата, начальной концентрации микроорганизмов имеется только один оптимизируемый параметр – относительная скорость подачи субстрата p . Пусть в качестве критерия оптимизации выступает максимизация среднесуточного выхода биогаза за период $[0, T]$:

$$\bar{w} = \frac{V(T, p)}{T} \rightarrow \max_p. \quad (19)$$

В случае непрерывного режима начальным промежутком установления можно пренебречь, и в качестве среднесуточного выхода рассматривать установившееся значение скорости выхода биогаза w^* : $\bar{w} \rightarrow w^*$ при $T \rightarrow \infty$.

Асимптотическая устойчивость системы ОДУ (1) позволяет представить задачу оптимального управления (19) в виде

$$p_{\text{opt}} = \arg \max_p w^*(p). \quad (20)$$

Иными словами, требуется найти точку максимума для выражения:

$$w^*(p) = \gamma X^*(p). \quad (21)$$

Для этого необходимо, чтобы равнялась нулю производная функции, которая для стационарной точки (8) принимает вид

$$\frac{dw^*}{dp} = \frac{\gamma X^*}{p} - \frac{\gamma p}{2\beta\mu_1(\mu_1 - p)^2 \sqrt{D(p)}} \left(\frac{aL_0}{L^{*2}} + 1 \right) \left((\mu_1 a + \mu_2 b) \sqrt{D(p)} + r(p) \right) = 0, \quad (22)$$

$$\text{где} \quad r(p) = D(p) + (a - b)(\mu_1 - p)[b(\mu_1 - \mu_2) + p(a - b)]. \quad (23)$$

Уравнение (22) аналитических решений не имеет, поэтому для его решения применялся численный метод решения нелинейного алгебраического уравнения – модифицированный метод Ньютона [6]. Решением уравнения (22) является оптимальное значение скорости подачи субстрата p_{opt} , обеспечивающее максимальную среднюю скорость выхода биогаза при непрерывном режиме подачи субстрата.

4. Результаты расчетов

Решения системы (1) в случае использования в качестве сырья отходов птицефабрик представлены на рис. 1 в виде семейства фазовых траекторий, построенных при различных значениях параметра p .

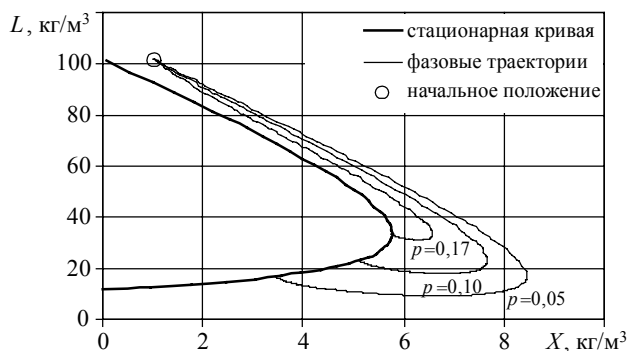


Рис. 1. Семейство фазовых траекторий для отходов птицефабрик

При различных значениях параметра p точки покоя описывают в фазовом пространстве стационарные кривые. Стационарная кривая, соответствующая стационарному решению (8), обозначена на рис. 1 жирной линией.

Анализ стационарной кривой показывает, что существует оптимальное значение скорости p_{opt} , которое соответствует максимальному значению X на стационарной кривой (см. рис. 1), в силу равенства (21).

График зависимости среднесуточного выхода биогаза от скорости подачи субстрата приведен на рис. 2. Максимальные значения зависимостей, приведенных на рис. 2, соответствуют оптимальным значениям скорости подачи субстрата p_{opt} , определяемым из уравнения (22).

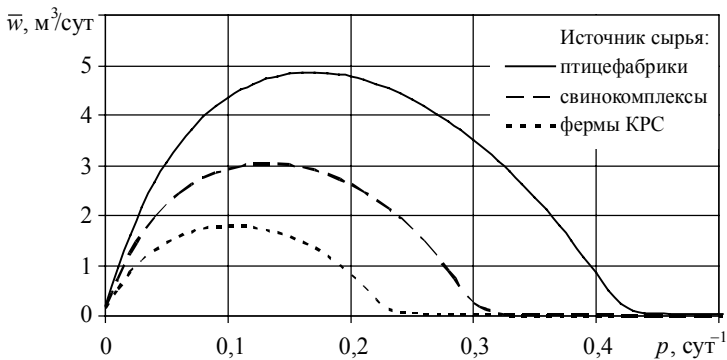


Рис. 2. Влияние скорости подачи субстрата на среднесуточный выход биогаза

Значения оптимальной скорости подачи субстрата p_{opt} и соответствующая скорость образования биогаза для различных видов сырья представлены в табл. 2.

Таблица 2

Оптимальные параметры метаногенеза

Характеристики	Источник сырья		
	птицефабрики	свиногомплексы	фермы КРС
Оптимальная относительная скорость подачи субстрата, сут ⁻¹	0,17	0,13	0,10
Среднесуточный выход биогаза, м³/сут	4,86	3,04	1,79

5. Выводы по работе

Рассмотрена математическая модель метаногенеза, скорость прироста концентрации бактерий в которой определялась на основе уравнения Моно, скорость отмирания при нехватке субстрата – на основе уравнения Колпикова, скорость образования биогаза задавалась прямо пропорциональной концентрации бактерий.

Проведено исследование точек покоя данной модели для непрерывного режима поступления субстрата. Показана асимптотическая устойчивость данных точек покоя. Получены выражения стационарных значений скорости выхода биогаза, концентраций бактерий и питательных веществ субстрата при различных значениях относительной скорости поступления субстрата p .

Рассмотрена задача оптимизации параметров метаногенеза. Получено оптимальное значение относительной скорости поступления субстрата при непрерыв-

ном режиме для различных видов сырья (отходов птицефабрик, свинокомплексов и ферм КРС), обеспечивающее максимальную скорость выхода биогаза.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эдер Б., Шульц Х. Биогазовые установки. Практическое пособие [Электронный ресурс] // Сайт компании «Зорг» (Украина). 2006. URL: http://zorgbiogas.ru/biblioteka/biogas_book/chapter_2 (дата обращения: 11.03.2012).
2. Дворецкий Д.С. и др. Компьютерное моделирование биотехнологических процессов и систем. Тамбов: Изд-во ТГТУ, 2005. 80 с.
3. Gerber M. An analysis of available mathematical models for anaerobic digestion of organic substances for production of biogas [Электронный ресурс] // Ruhr-Universitat Bochum. – 2008. – URL: http://www.ruhr-uni-bochum.de/thermo/Forschung/pdf/IGRC_Full_Paper_Paris.pdf (дата обращения: 11.03.2012).
4. Королев С.А., Майков Д.В. Разработка математической модели анаэробного метанового брожения на основе модели роста популяции // Математическое и компьютерное моделирование технических и социально-экономических систем: тез. докл. регион. конф. (Ижевск, 14 мая 2010 г.). Ижевск, 2010. С. 27–30.
5. Егоров А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями: учеб. для вузов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 384 с.
6. Вержбицкий В.М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения): учебник для вузов. М.: Высшая школа, 2001. 382 с.

Статья поступила 29.03.2012 г.

Korolev S. A., Maikov D. V., Rusyak I. G. THE RESEARCH OF STATIONARY SOLUTIONS AND THE OPTIMIZATION OF PARAMETERS OF THE MATHEMATICAL MODEL OF METHANOGENESIS. Stationary solutions of systems of differential equations describing the process of biogas production (methanogenesis) are found. The conditions of asymptotic stability for these solutions are presented. The optimum flow rate of the substrate for the continuous regime of the methanogenesis is found.

Keywords: methanogenesis, biogas, mathematical model, system of ordinary differential equations, stationary points, stability.

KOROLEV Stanislav Anatolevich (Izhevsk State Technical University)
E-mail: stkj@mail.ru

MAYKOV Dmitry Vladimirovich (Izhevsk State Technical University)
E-mail: MaykovD@yandex.ru

RUSYAK Ivan Grigor'evich (Izhevsk State Technical University)
E-mail: primat@istu.ru