ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2012 Математика и механика № 3(19)

УДК 517.54

В.А. Пчелинцев

ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ

В статье рассматривается задача о множестве Δ значений одного функционала на классе пар функций однолистных и мероморфных в системе круг – внешность круга. Посредством вариационного метода Голузина удаётся получить систему дифференциальных уравнений для граничных функций, а также найти уравнение границы множества Δ.

Ключевые слова: *класс* $\mathfrak{M}'$, *функционал*, *метод внутренних вариаций*, *вариационные формулы*, *необходимое условие*, *граничные функции*, *дифференциальные уравнения.*

Пусть D и D^* – односвязные области в w-плоскости и такие, что $0\in D$, а $\infty\in D^*$. Пусть $f(z):U\to D$ – голоморфная однолистная функция, имеющая разложение в ряд

$$f(z)=z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots$$

и $F(\zeta):U^*\to D^*$ – мероморфная однолистная функция, имеющая разложение в ряд

$$F(\zeta)=\zeta+d_0+\frac{d_{-1}}{\zeta}+\ldots+\frac{d_{-n}}{\zeta^n}+\ldots,$$

где $U=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ и $U^*=\{\zeta\in\mathbb{C}:|\zeta|>1\}$. Семейство пар функций $\left(f(z),F(\zeta)\right)$ такого вида назовём классом $\mathfrak{M}'$.

В настоящей статье решается задача о нахождении множества Δ значений функционала

$$\Phi(f,F)=\ln\left[\left(\frac{f(z_0)}{z_0}\right)^{\lambda}\left(\frac{\zeta_0}{F(\zeta_0)}\right)^{1-\lambda}\right]=\lambda\int\limits_0^{z_0}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{1}{z}\right)dz-(1-\lambda)\int\limits_{\zeta_0}^{\infty}\left(\frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)}-\frac{1}{\zeta}\right)d\zeta \quad (1)$$

при фиксированных λ, z_0 и ζ_0, $0<\lambda<1$, $|z_0|<1$ и $|\zeta_0|>1$.

Для решения поставленной задачи применяется вариационный метод Г.М. Голузина [2]. Как и метод внутренних вариаций Шиффера, вариационный метод Г.М. Голузина приводит к функционально-дифференциальным уравнениям для граничных функций. Вариационный метод Г.М. Голузина даёт важную геометрическую характеристику экстремальных отображенийю. С помощью этого метода были получены решения разнообразных по постановкам экстремальных задач. Он нашёл многочисленные приложения к экстремальным задачам в различных классах однолистных и мероморфных функций, характеризующихся теми или иными геометрическими свойствами.

Вариационный метод Г.М. Голузина, как и другие методы решения экстремальных задач геометрической теории однолистных функций (метод площадей, метод параметрических представлений, метод контурного интегрирования, метод симметризации, метод экстремальной метрики, методы внутренних и граничных вариаций Шиффера, метод крайних точек, метод интегральных представлений), составляет содержание многочисленных монографий и статей.

В данной работе с помощью метода внутренних вариаций получены вариационные пары функций. Указаны необходимые условия для граничных отображений $f(z)$ и $F(\zeta)$ функционала (1), посредством которого совместно с парой простых вариаций доказано, что области D и D^* не имеют внешних точек (лемма 1). В результате рассмотрения необходимого условия и вариационных формул (5) получена система дифференциальных уравнений для граничных функций $f(z)$ и $F(\zeta)$, зависящая от параметра $\alpha = \arg\left(\Phi\left(f, F\right) - a\right)$ (теорема 1). Проведя качественный анализ полученной системы уравнений, заключаем, что каждая граница областей D и D^* состоит из одной аналитической кривой. Выполняя интегрирование дифференциальных уравнений из этой системы по определённым путям интегрирования, находим уравнение границы множества Δ значений функционала (1) (теорема 2).

1. Вариационные формулы

Пусть $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ – область и $\mathcal{K}$ – некоторое подмножество множества голоморфных или мероморфных в G функций. Если для каждой функции $g \in \mathcal{K}$ и для любого малого $\varepsilon > 0$ имеется функция $g_\varepsilon \in \mathcal{K}$, такая, что

$$g_\varepsilon(z) = g(z) + \varepsilon R(z) + o(z, \varepsilon), \tag{2}$$

где $R(z)$ – голоморфная в G функция (не зависящая от ε) и $o(z,\varepsilon)/\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно внутри G, то говорят, что (2) есть вариационная формула в классе $\mathcal{K}$ [1].

Если пара функций $\left(f(z), F(\zeta)\right)$ принадлежит классу $\mathfrak{M}'$, то при ε положительном достаточно малом классу $\mathfrak{M}'$ также принадлежат следующие пары варьированных функций:

$$f(z,\varepsilon) = f(z) + \varepsilon A_0 \frac{f^2(z)}{f(z) - w_0},$$

$$F(\zeta,\varepsilon) = F(\zeta) + \varepsilon A_0 \frac{w_0^* F(\zeta)}{F(\zeta) - w_0^*} + o(\zeta,\varepsilon), \tag{3}$$

где w_0 и w_0^* – внешние точки соответственно для областей D и D^*, A_0 – произвольная комплексная постоянная;

$$f(z,\varepsilon) = f(z) + \varepsilon\left[zf'(z)\frac{z + e^{i\theta}}{z - e^{i\theta}} + f(z)\right] + o(z,\varepsilon),$$

$$F(\zeta,\varepsilon) = F(\zeta) - \varepsilon\left[\zeta F'(\zeta)\frac{e^{i\theta} + \zeta}{e^{i\theta} - \zeta} + F(\zeta)\right] + o(\zeta,\varepsilon), \tag{4}$$

где θ, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, – произвольная постоянная;

$$f(z,\varepsilon)=f(z)+\varepsilon\left(A_0\frac{f^2(z)}{f(z)-f(z_0)}-\frac{A_0}{2}\left[zf'(z)\frac{z+z_0}{z-z_0}+f(z)\right]\left[\frac{f(z_0)}{z_0f'(z_0)}\right]^2-\right.$$
$$\left.-\frac{\overline{A_0}}{2}\left[zf'(z)\frac{\overline{z_0}z+1}{\overline{z_0}z-1}+f(z)\right]\left[\overline{\frac{f(z_0)}{z_0f'(z_0)}}\right]^2\right)+o(z,\varepsilon),$$

$$F(\zeta,\varepsilon)=F(\zeta)+\varepsilon\left(A_0\frac{F(\zeta_0)F(\zeta)}{F(\zeta)-F(\zeta_0)}+\frac{A_0}{2}\left[\zeta F'(\zeta)\frac{\zeta_0+\zeta}{\zeta_0-\zeta}+F(\zeta)\right]\left[\frac{F(\zeta_0)}{\zeta_0F'(\zeta_0)}\right]^2+\right.$$
$$\left.+\frac{\overline{A_0}}{2}\left[\zeta F'(\zeta)\frac{1+\overline{\zeta_0}\zeta}{1-\overline{\zeta_0}\zeta}+F(\zeta)\right]\left[\overline{\frac{F(\zeta_0)}{\zeta_0F'(\zeta_0)}}\right]^2\right)+o(\zeta,\varepsilon), \tag{5}$$

где $z_0\in U$, $\zeta_0\in U^*$, A_0 – произвольная комплексная постоянная. С доказательствами указанных вариационных формул, например, можно ознакомиться в [1].

2. Необходимые условия для граничных функций

Нетрудно заметить, что в класс $\mathfrak{M}'$ вместе с парой функций $(f(z),F(\zeta))$ входит пара функций $\left(e^{-i\varphi}f(ze^{i\varphi}),e^{-i\psi}F(\zeta e^{-i\psi})\right)$ при любых φ, $\psi\in\mathbb{R}$. В связи с этим заключаем о независимости множества Δ от аргументов точек z_0 и ζ_0. Поэтому будем считать в дальнейшем $|z_0|=r\in(0,1)$, $|\zeta_0|=\rho\in(1,+\infty)$. Для нахождения множества Δ достаточно найти его границу $\partial\Delta$.

Пусть Γ – граница множества Δ. Точку $\Phi_0\in\Gamma$ назовём неособой точкой Γ, если существует такая точка $a\notin\Delta$, что для любых $\Phi\in\Delta$ величина $|\Phi-a|$ достигает наименьшего значения в классе $\mathfrak{M}'$ при $\Phi=\Phi_0$ [3]. Множество неособых точек Γ оказывается всюду плотным на Γ [3], следовательно, задача нахождения множества Δ сводится к отысканию наименьшего значения вещественнозначного функционала

$$\left|\ln\left(\frac{f(r)}{r}\right)^{\lambda}\left(\frac{\rho}{F(\rho)}\right)^{1-\lambda}-a\right|,\quad 0<\lambda<1,$$

в классе $\mathfrak{M}'$ при всевозможных $a\notin\Delta$.

Пусть Φ_0 – неособая граничная точка множества Δ и $(f(z),F(\zeta))$ – та пара функций из класса $\mathfrak{M}'$, для которой $\Phi(f(z),F(\zeta))=\Phi_0$. Функции такой пары называются граничными.

Записывая вариационные формулы для граничных функций $f(z)$ и $F(\zeta)$ на классе $\mathfrak{M}'$ в виде

$$f(z,\varepsilon)=f(z)+\varepsilon P(z)+o(z,\varepsilon),$$
$$F(\zeta,\varepsilon)=F(\zeta)+\varepsilon Q(\zeta)+o(\zeta,\varepsilon),$$

при ε положительном и достаточно малом, укажем функциональные производные относительно $|\Phi(f,F)-a|$. В силу неравенств

$$\left|\Phi\left(f^*,F\right)-a\right|^2 \geq |\Phi(f,F)-a|^2,$$

$$\left|\Phi\left(f,F^*\right)-a\right|^2 \geq |\Phi(f,F)-a|^2,$$

получим

$$\left|\ln\left(\frac{f(r)}{r}\right)^{\lambda}\left(\frac{\rho}{F(\rho)}\right)^{1-\lambda}+\lambda\ln\left(1+\varepsilon\frac{P(r)}{f(r)}\right)+o(\varepsilon)-a\right|^2 \geq \left|\ln\left(\frac{f(r)}{r}\right)^{\lambda}\left(\frac{\rho}{F(\rho)}\right)^{1-\lambda}-a\right|^2,$$

$$\left|\ln\left(\frac{f(r)}{r}\right)^{\lambda}\left(\frac{\rho}{F(\rho)}\right)^{1-\lambda}-(1-\lambda)\ln\left(1+\varepsilon\frac{Q(\rho)}{F(\rho)}\right)+o(\varepsilon)-a\right|^2 \geq \left|\ln\left(\frac{f(r)}{r}\right)^{\lambda}\left(\frac{\rho}{F(\rho)}\right)^{1-\lambda}-a\right|^2.$$

Разложив слагаемые в левых частях последних неравенств по формуле Тейлора по степеням ε и выполнив несложные вычисления, находим необходимые условия для граничных функций $f(z)$ и $F(\zeta)$:

$$\operatorname{Re}\left[e^{-i\alpha}\frac{P(r)}{f(r)}\right] \geq 0 \tag{6}$$

и

$$\operatorname{Re}\left[-e^{-i\alpha}\frac{Q(\rho)}{F(\rho)}\right] \geq 0, \tag{7}$$

где $\alpha=\arg\left(\Phi(f,F)-a\right)$, $f^*=f(z,\varepsilon)$, $F^*=F(\zeta,\varepsilon)$.

Лемма 1. Пусть $f(z)$, $F(\zeta)$ – граничные функции функционала (1). Тогда области D и D^* не имеют внешних точек.

Доказательство. Предположим, что область D имеет хотя бы одну внешнюю точку w_0. Рассмотрим условие (6) , выбрав первую варьированную функцию из (3) в качестве функции сравнения. Оно примет вид

$$\operatorname{Re}\left[e^{-i\alpha}A_0\frac{f(r)}{f(r)-w_0}\right] \geq 0.$$

Поскольку дробь в скобках отлична от нуля, то в силу произвольности $\arg A_0$ будет справедливо неравенство $\left|\Phi\left(f^*,F\right)-a\right|<\left|\Phi(f,F)-a\right|$, которое противоречит экстремальности функции $f(z)$. Полученное противоречие доказывает отсутствие внешних точек для области D. Подобным образом доказывается, что область D^* не имеет внешних точек. Нужно только рассмотреть неравенство (7) и выбрать вторую варьированную функцию из (3) в качестве функции сравнения. Лемма доказана. ◄

3. Дифференциальные уравнения для граничных функций

Применив совместно условие (6) с первой вариационной формулой из (5), а условие (7) со второй вариационной формулой из (5), получаем систему дифференциальных уравнений для граничных функций множества Δ, соответствующих неособым точкам. Уравнения этой системы зависят от параметра $\alpha=\arg\left(\Phi\left(f,F\right)-a\right)$.

Теорема 1. Каждая граничная пара функций $\left(f(z),F(\zeta)\right)$ функционала (1) удовлетворяет в U и U^* системе функционально-дифференциальных уравнений

$$e^{-i\alpha}\left[\frac{f(r)}{f(r)-f(z)}\right]\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]^2=\frac{Az^2+Bz+C}{2(r-z)(rz-1)}, \tag{8}$$

$$e^{-i\alpha}\left[\frac{F(\zeta)}{F(\zeta)-F(\rho)}\right]\left[\frac{\zeta F'(\zeta)}{F(\zeta)}\right]^2=\frac{A^*\zeta^2+B^*\zeta+C^*}{2(\zeta-\rho)(1-\rho\zeta)}, \tag{9}$$

где

$$A=\left(e^{-i\alpha}\left[H-1\right]-e^{i\alpha}\left[\overline{H}+1\right]\right)r,$$

$$B=e^{-i\alpha}\left(\left[H+1\right]r^2-\left[H-1\right]\right)+e^{i\alpha}\left(\left[\overline{H}+1\right]r^2-\left[\overline{H}-1\right]\right),$$

$$C=\left(e^{i\alpha}\left[\overline{H}-1\right]-e^{-i\alpha}\left[H+1\right]\right)r,\ H=H(r)=\frac{rf'(r)}{f(r)},\ C=\overline{A},$$

$$A^*=\left(e^{-i\alpha}\left[\overline{H}^*-1\right]-e^{i\alpha}\left[H^*+1\right]\right)\rho,$$

$$B^*=e^{-i\alpha}\left(\left[H^*+1\right]-\left[H^*-1\right]\rho^2\right)+e^{i\alpha}\left(\left[\overline{H}^*+1\right]-\left[\overline{H}^*-1\right]\rho^2\right),$$

$$C^*=\left(e^{-i\alpha}\left[H^*-1\right]-e^{i\alpha}\left[\overline{H}^*+1\right]\right)\rho,\ H^*=H^*(r)=\frac{\rho F'(\rho)}{F(\rho)},\ A^*=\overline{C}^*.$$

Причём правые части уравнений (7) и (8) на единичной окружности $|z|=|\zeta|=1$ неотрицательны.

Доказательство. Неравенство (6) в случае выбора первой вариационной формулы из (5) примет вид

$$\operatorname{Re}\left(e^{-i\alpha}A_0\frac{f(r)}{f(r)-f(z_0)}-\frac{e^{-i\alpha}A_0}{2}\left[\frac{rf'(r)}{f(r)}\frac{r+z_0}{r-z_0}+1\right]\left[\frac{f(z_0)}{z_0f'(z_0)}\right]^2-\right.$$
$$\left.-\frac{e^{-i\alpha}\overline{A_0}}{2}\left[\frac{rf'(r)}{f(r)}\frac{r\overline{z_0}+1}{r\overline{z_0}-1}+1\right]\left[\overline{\frac{f(z_0)}{z_0f'(z_0)}}\right]^2\right)\geq 0.$$

Заменяя последнее слагаемое под знаком вещественной части на его сопряженное значение, имеем

$$\operatorname{Re}A_0\left(e^{-i\alpha}\frac{f(r)}{f(r)-f(z_0)}-\frac{e^{-i\alpha}}{2}\left[\frac{rf'(r)}{f(r)}\frac{r+z_0}{r-z_0}+1\right]\left[\frac{f(z_0)}{z_0f'(z_0)}\right]^2-\right.$$
$$\left.-\frac{e^{i\alpha}}{2}\left[\overline{\frac{rf'(r)}{f(r)}}\frac{rz_0+1}{rz_0-1}+1\right]\left[\frac{f(z_0)}{z_0f'(z_0)}\right]^2\right)\geq 0.$$

В силу произвольности $\arg A_0$, заключаем, что стоящая под знаком вещественной части величина должна быть равна нулю, иначе при надлежащем выборе

A_0 получили бы, что левая часть последнего неравенства отрицательна. Это противоречие приводит к условию

$$e^{-i\alpha}\left[\frac{f(r)}{f(r)-f(z_0)}\right]\left[\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)}\right]^2=\frac{e^{-i\alpha}}{2}\left[\frac{rf'(r)}{f(r)}\frac{r+z_0}{r-z_0}+1\right]+\frac{e^{i\alpha}}{2}\left[\overline{\frac{rf'(r)}{f(r)}}\frac{rz_0+1}{rz_0-1}+1\right].$$

Так как в этом соотношении z_0 – любая точка из круга U, то, заменив z_0 на z, получаем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет граничная функция $f(z)$. Вычисления показывают, что оно имеет вид (8).

Выбрав теперь первую вариационную формулу из (4), посредством (6) приходим к неравенству

$$e^{-i\alpha}\left[\frac{rf'(r)}{f(r)}\frac{r+e^{i\theta}}{r-e^{i\theta}}+1\right]+e^{i\alpha}\left[\overline{\frac{rf'(r)}{f(r)}}\frac{re^{i\theta}+1}{re^{i\theta}-1}+1\right]\ge 0,$$

которое указывает на неотрицательность правой части уравнения (7) на единичной окружности $|z|=1$.

Аналогично, применяя неравенство (7) совместно со вторыми вариационными формулами из (5) и (4), получаем дифференциальное уравнение для граничной функции $F(\zeta)$ с правой неотрицательной частью на единичной окружности $|\zeta|=1$, которое имеет вид (9). Теорема доказана. ◄

4. Качественный анализ уравнений (8) и (9)

Из аналитической теории дифференциальных уравнений [5] следует, что всякое решение уравнения (8) и всякое решение уравнения (9) могут иметь только алгебраические особые точки и только конечное их число. Вспомним, что области D и D^* не имеют внешних точек. Таким образом, границы областей D и D^* состоят из конечного числа аналитических кривых.

Покажем, что в нашем случае каждая из границ областей D и D^* состоит из одной аналитической кривой. Для этого введем следующие обозначения:

$\mathbf{M_1}$ – множество конечных концевых точек $f(\mu)$, $|\mu|=1$, границы области D.

$\mathbf{M_2}$ – множество конечных концевых точек $F(\eta)$, $|\eta|=1$, границы области D^*.

Предположим, что $f(\mu)\in\mathbf{M_1}$, а $F(\eta)\in\mathbf{M_2}$. Тогда существуют такие окрестности $K(\mu)$ и $K(\eta)$ соответственно точек μ и η, что на множествах $U\cap K(\mu)$ и $U^*\cap K(\eta)$ граничные функции и их производные могут быть представлены в виде

$$f(z)=f(\mu)+(z-\mu)^2\left[a_0(\mu)+a_1(\mu)(z-\mu)+\ldots\right],\ a_0(\mu)\ne 0,$$
$$f'(z)=(z-\mu)\left[a_0'(\mu)+a_1'(\mu)(z-\mu)+\ldots\right],\ a_0'(\mu)\ne 0 \tag{10}$$

и

$$F(\zeta)=F(\eta)+(\zeta-\eta)^2\left[b_0(\eta)+b_1(\eta)(\zeta-\eta)+\ldots\right],\ b_0(\eta)\ne 0,$$
$$F'(\zeta)=(\zeta-\eta)\left[b_0'(\eta)+b_1'(\eta)(\zeta-\eta)+\ldots\right],\ b_0'(\eta)\ne 0. \tag{11}$$

Используя разложения (10) и (11), отметим, что если $f(\mu)\in\mathbf{M_1}$, а $F(\eta)\in\mathbf{M_2}$, то левые части уравнений (8) и (9) имеют в точках $z=\mu$ и $\zeta=\eta$ нули не ниже второго порядка. Следовательно, правые части уравнений в этом случае содержат множители $(z-\mu)$ и $(\zeta-\eta)$ по меньшей мере во второй степени. Отсюда следует, что граница области D и граница области D^* могут содержать не более одной конечной концевой точки.

Отметим, что поскольку числители правых частей уравнений (8) и (9) обязательно содержат множители $(z-\mu)^2$ и $(\zeta-\eta)^2$ соответственно, то правые части уравнений (8) и (9), на окружности $|z|=|\zeta|=1$ не могут иметь нулей нечётной кратности. Поэтому уравнения (8) и (9) перепишем как

$$e^{-i\alpha}\left[\frac{f(r)}{f(r)-f(z)}\right]\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]^2 = A\frac{(z-\mu)^2}{2(r-z)(rz-1)},$$

где $$(z-\mu)^2 = z^2+\frac{B}{A}z+\frac{\overline{A}}{A},\ \mu^2=\frac{\overline{A}}{A},\ |\mu|=1,$$

и $$e^{-i\alpha}\left[\frac{F(\zeta)}{F(\zeta)-F(\rho)}\right]\left[\frac{\zeta F'(\zeta)}{F(\zeta)}\right]^2 = C^*\frac{(\eta\zeta-1)^2}{2(\zeta-\rho)(1-\rho\zeta)},$$

где $$(\eta\zeta-1)^2=\frac{\overline{C}^*}{C^*}\zeta^2+\frac{B^*}{C^*}\zeta+1,\ \eta^2=\frac{\overline{C}^*}{C},\ |\eta|=1.$$

Определим коэффициенты A и C^*. Для этого рассмотрим первое из последних уравнений при $z=0$, а второе при $\zeta=\infty$, находим $A=-2re^{i\alpha}$, а $C^*=-2\rho e^{i\alpha}$.

Таким образом, уравнения примут вид

$$\frac{f(r)}{f(r)-f(z)}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^2 = re^{2i\alpha}\frac{(z-\mu)^2}{z^2(r-z)(1-rz)}, \tag{12}$$

$$\frac{F(\zeta)}{F(\zeta)-F(\rho)}\left(\frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)}\right)^2 = \rho e^{2i\alpha}\frac{(\eta\zeta-1)^2}{\zeta^2(\rho-\zeta)(1-\rho\zeta)}. \tag{13}$$

5. Интегрирование дифференциальных уравнений

Для нахождения границы множества Δ значений функционала (1) необходимо проинтегрировать дифференциальные уравнения (12) и (13).

Извлечём из обеих частей равенства (12) квадратный корень и проинтегрируем его от 0 до z:

$$\sqrt{f(r)}\int_0^z \frac{f'(z)}{f(z)\sqrt{f(r)-f(z)}}dz = \sqrt{r}e^{i\alpha}\int_0^z \frac{\mu-z}{z\sqrt{(r-z)(1-rz)}}dz.$$

Делая замену переменной интегрирования $w=f(z)$ и учитывая, что $\mu=\sqrt{\frac{\overline{A}}{A}}=e^{-i\alpha}$, получим

$$\sqrt{f(r)}\int_0^{f(z)}\frac{dw}{w\sqrt{f(r)-w}} = \sqrt{r}\int_0^z\frac{dz}{z\sqrt{(r-z)(1-rz)}} - \sqrt{r}e^{i\alpha}\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{(r-z)(1-rz)}}.$$

Вычисляя эти интегралы, находим

$$\ln f(r)\frac{1-\sqrt{1-\dfrac{f(z)}{f(r)}}}{1+\sqrt{1-\dfrac{f(z)}{f(r)}}}=\ln\frac{rz}{2\sqrt{r(r-z)(1-rz)}-(1+r^2)z+2r}+$$

$$+\ln\left(\frac{-(1-r)^2}{2\sqrt{r(r-z)(1-rz)}+2rz-(1+r^2)}\right)^{e^{i\alpha}}. \tag{14}$$

Уравнение (14) неявно определяет граничную функцию $f(z)$.

Устремим в уравнении (14) точку z к r. В пределе получим

$$\ln\frac{f(r)}{r}=\ln\frac{1}{1-r^2}+\ln\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{e^{i\alpha}}. \tag{15}$$

Далее проинтегрируем равенство (13) после извлечения квадратного корня от ζ до ∞.

$$\int_{\zeta}^{\infty}\frac{F'(\zeta)}{\sqrt{F(\zeta)\big(F(\zeta)-F(\rho)\big)}}d\zeta=\sqrt{\rho}e^{i\alpha}\int_{\zeta}^{\infty}\frac{\eta\zeta-1}{\zeta\sqrt{(\rho-\zeta)(1-\rho\zeta)}}d\zeta.$$

Положив $w=F(\zeta)$ и вспомнив, что $\eta=\sqrt{\dfrac{\overline{C}^*}{C^*}}=e^{-i\alpha}$, имеем

$$\int_{F(\zeta)}^{\infty}\frac{dw}{\sqrt{w\big(w-F(\rho)\big)}}=\sqrt{\rho}\int_{\zeta}^{\infty}\frac{d\zeta}{\sqrt{(\rho-\zeta)(1-\rho\zeta)}}-\sqrt{\rho}e^{i\alpha}\int_{\zeta}^{\infty}\frac{d\zeta}{\zeta\sqrt{(\rho-\zeta)(1-\rho\zeta)}}.$$

Проведя вычисления интегралов, получаем

$$\ln 2F(\zeta)\left(\sqrt{1-\frac{F(\rho)}{F(\zeta)}}-\frac{F(\rho)}{2F(\zeta)}+1\right)=\ln\frac{2\sqrt{\rho(\rho-\zeta)(1-\rho\zeta)}+2\rho\zeta-(\rho^2+1)}{\rho}+$$

$$+\ln\left(\frac{2\sqrt{\rho(\rho-\zeta)(1-\rho\zeta)}-(\rho^2+1)\zeta+2\rho}{-(\rho-1)^2\zeta}\right)^{e^{i\alpha}}. \tag{16}$$

Уравнение (16) неявно определяет граничную функцию $F(\zeta)$.

Вычитая из обеих частей равенства (16) $\ln\rho$ и устремляя точку ζ к ρ, получим

$$\ln\frac{F(\rho)}{\rho}=\ln\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)+\ln\left(\frac{\rho+1}{\rho-1}\right)^{e^{i\alpha}}. \tag{17}$$

Умножая равенство (15) на λ, а равенство (17) на $1-\lambda$ и почленно вычитая первое из второго, находим

$$\ln\left(\frac{f(r)}{r}\right)^{\lambda}\left(\frac{\rho}{F(\rho)}\right)^{1-\lambda}=\lambda\left[\ln\frac{1}{1-r^2}+\ln\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{e^{i\alpha}}\right]-(1-\lambda)\left[\ln\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)+\ln\left(\frac{\rho+1}{\rho-1}\right)^{e^{i\alpha}}\right]. \tag{18}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. Множество Δ значений функционала (1) на классе $\mathfrak{M}'$ ограничено кривой, заданной уравнением (18).

Следствие 1. Если $\lambda = 1/2$, то множество Δ значений функционала (1) на классе $\mathfrak{M}'$ ограничено кривой, заданной следующим уравнением:

$$\ln\left(\frac{f(r)}{r}\right)\left(\frac{\rho}{F(\rho)}\right) = \ln\frac{\rho^2}{\left(1-r^2\right)\left(\rho^2-1\right)} + \ln\left(\frac{(1-r)(\rho-1)}{(1+r)(\rho+1)}\right)^{e^{i\alpha}}.$$

Следствие 2. Если в последнем равенстве воспользоваться формулой

$$F(\zeta) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{\zeta}\right)},\ f \in S,\ F \in \Sigma,\ \zeta \in U^*,$$

которая устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами S и Σ, то получим известные неравенства

$$\left|\ln\frac{f(r)}{r} + \ln\left(1-r^2\right)\right| \le \ln\frac{1+r}{1-r},$$

$$\left|\ln\frac{\rho}{F(\rho)} + \ln\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)\right| \le \ln\frac{\rho+1}{\rho-1},$$

которые определяют множества значений функционалов $\ln f(r)/r$ и $\ln \rho/F(\rho)$ соответственно на классах S и Σ (см., например, [1, 4]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров И.А.* Методы геометрической теории аналитических функций. Томск: Том. гос. ун-т, 2001.
2. *Голузин Г.М.* Метод вариаций в конформном отображении // Матем. сб. 1946. Т. 19. № 2. С. 203–236.
3. *Лебедев Н.А.* Мажорантная область для выражения $I = \ln\left\{z^{\lambda}[f'(z)]^{1-\lambda}/[f(z)]^{\lambda}\right\}$ в классе *S* // Вестник Ленингр. ун-та. 1955. Вып. 3. № 8. С. 29–41.
4. *Лебедев Н.А.* Принцип площадей в теории однолистных функций. М.: Наука, 1975.
5. *Матвеев П.Н.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. СПб.: Лань, 2008.

Статья поступила 02.07.2012 г.

Pchelintsev V.A. ON AN EXTREMAL PROBLEM. The paper consider the problem about a range Δ of some functional on a class of pairs functions univalent and meromorphic in a “circle–exterior of the circle” system. By means of the Goluzin variation method, it is possible to obtain a system of differential equations for boundary functions, and to find the equation of the boundary of range Δ.

Keywords: class $\mathfrak{M}'$, functional, method of internal variations, variation formulas, necessary condition, boundary functions, differential equations.

PCHELINTSEV Valery Anatol’evich (Tomsk State University)
E-mail: VPchelintsev@vtomske.ru