

УДК 539.114

А.К. Томилин, Г.А. Байзакова

**УПРАВЛЕНИЕ ЧАСТОТАМИ КОЛЕБАНИЙ
УПРУГИХ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Показано, что в результате электромагнитного воздействия можно вызвать малые изменения упругих и инерционных свойств вибрационной системы. Определены группы управляемых парциальных частот при использовании различных реактивных элементов (конденсатор, катушка индуктивности) и их комбинаций.

Ключевые слова: упругий элемент, квазиинерционный и квазиупругий коэффициенты, парциальные демпфированные частоты, число Стюарта.

В работах [1–3] рассматриваются задачи о колебаниях электропроводных упругих элементов в магнитном поле при наличии во внешней замыкающей цепи реактивных электрических элементов (конденсатор, катушка индуктивности). Показано, что наличие электроемкости приводит к увеличению инерционных свойств, а наличие индуктивности изменяет упругие свойства системы. Таким образом, имеется возможность при помощи реактивных параметров влиять на значения собственных частот колебаний системы. Очевидно, этот эффект проявляется и в более сложных электромеханических системах.

Рассмотрим собственные колебания цилиндрической пружины, изготовленной из немагнитного электропроводного материала, во внешнем стационарном радиальном магнитном поле индукции $\vec{B} = B(a)\vec{r}^0$, в соответствии с рис. 1. Причем $a > r_0$, где r_0 – радиус малой центральной зоны.

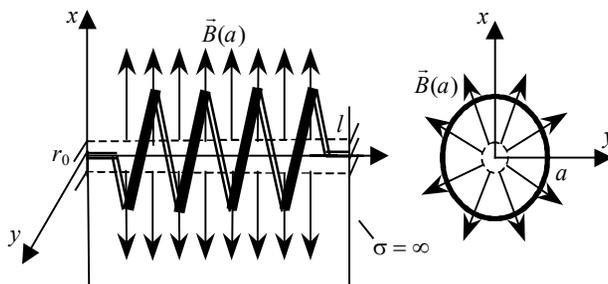


Рис. 1. Схема колебательного контура для пружины

Магнитное поле считается однородным вдоль оси z и действующим по всей длине пружины. Концы пружины закреплены и соединены идеальной электрической цепью.

При перемещении витки пружины пересекают линии магнитной индукции, в силу чего индуцируется ЭДС и на концах пружины возникает напряжение

$$U = B \int_0^{s_0} \frac{\partial w(z, t)}{\partial t} ds, \tag{1}$$

где $B = B(a)$ – значение магнитной индукции на витках пружины; a – радиус витков пружины; $w(z, t)$ – функция смещения в направлении оси oz ; s_0 – длина витков пружины; ds – элемент пружины.

Индукцированный результирующий ток, направлен перпендикулярно линиям магнитной индукции \vec{B} и имеет плотность

$$j = \frac{\sigma B}{s_0} \int_0^{s_0} \frac{\partial w}{\partial t} ds, \quad (2)$$

где σ – проводимость материала пружины.

Длина витков пружины определяется по формуле

$$s_0 = \pi D i_0 l, \quad (3)$$

где D – средний диаметр витка пружины; i_0 – число витков на единицу длины; l – расстояние между закрепленными концами.

На элементарный участок пружины ds действует электромагнитная сила

$$dF = \frac{\sigma B^2 A}{l} \left(\int_0^l \frac{\partial w}{\partial t} dz \right) ds. \quad (4)$$

Запишем уравнение колебаний пружины с учетом полученной электромагнитной силы:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{k}{m_0} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\sigma B^2}{\rho l} \int_0^l \frac{\partial w}{\partial t} dz = 0, \quad (5)$$

где $\rho = m_0/A$ – объемная плотность материала пружины.

Полученное интегро-дифференциальное уравнение записано без учета внешнего и внутреннего сопротивления.

Используя процедуру Фурье и свойство ортогональности функций, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в безразмерном виде:

$$\ddot{q}_r + r^2 q_r + \text{St} \frac{8}{r\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\dot{q}_n}{n} \right) = 0, \quad \{r = 1, 3, \dots\}, \quad (6)$$

где $\text{St} = \sigma B^2 / \rho p_1$ – число Стюарта.

Проведем расщепление системы уравнений (9), оставив в первом уравнении ($r=1$) только первый член суммы, во втором ($r=3$) – первый и второй члены и т. д.:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + \text{St} \frac{8}{1 \cdot \pi^2} \cdot \frac{\dot{q}_1}{1} + 1^2 \cdot q_1 = 0; \\ \ddot{q}_3 + \text{St} \frac{8}{3 \cdot \pi^2} \cdot \frac{\dot{q}_3}{3} + 3^2 \cdot q_3 = -\text{St} \frac{8}{3 \cdot \pi^2} \cdot \frac{\dot{q}_1}{1}; \\ \dots \dots \dots; \\ \ddot{q}_r + \text{St} \frac{8}{r \cdot \pi^2} \cdot \frac{\dot{q}_r}{r} + r^2 \cdot q_r = -\text{St} \frac{8}{r \cdot \pi^2} \left(\frac{\dot{q}_1}{1} + \frac{\dot{q}_3}{3} + \dots + \frac{\dot{q}_{r-2}}{r-2} \right). \end{cases} \quad (7)$$

Последовательно проинтегрировав систему уравнений, получим решение, описывающее собственные затухающие колебания с набором нечетных демпфированных частот:

$$\omega_r^* = \sqrt{r^2 - \text{St}^2 \frac{16}{r^4 \pi^4}}, \quad (r = 1, 3, \dots). \quad (8)$$

Отсюда видно, что электромагнитное воздействие приводит к уменьшению собственных нечетных частот колебаний пружины за счет увеличения внешней диссипации. Причем наибольшему изменению подвергаются низшие нечетные парциальные колебания.

Далее рассмотрим задачу о линейных колебаниях проводящей пружины во внешнем стационарном магнитном поле при наличии в замыкающем контуре конденсатора.

Пусть закрепленные концы пружины замкнуты идеальной электрической цепью, содержащей конденсатор емкости C , в соответствии с рис. 2.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений в безразмерном виде

$$\ddot{q}_r + r^2 q_r + St_C \frac{8Di_0}{r\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ddot{q}_n}{n} \right) = 0, \quad r = 1, 3, \dots \quad (9)$$

Расщепляя полученную систему и последовательно интегрируя, будем иметь затухающие функции с набором нечетных парциальных частот:

$$\omega_r^{(C)} = \frac{r}{\sqrt{1 + St_C \frac{8Di_0}{r^2 \pi}}}, \quad r = 1, 3, \dots \quad (10)$$

Таким образом, наличие реактивного параметра, а именно конденсатора, уменьшает частоты собственных колебаний пружины за счет увеличения квазиинерционных коэффициентов.

Значение жесткости пружины в безразмерном виде будет равно

$$k_1^{(C)} = \frac{1}{1 + St_C \frac{8Di_0}{\pi}}. \quad (11)$$

Проведем расчеты, используя следующие данные: $B = 0,5$ Тл, $C = 0,1$ Ф, $l = 0,2$ м, $D = 0,2$ м, $i_0 = 100$ м⁻¹, $m_0 = 0,5$ кг/м.

При этом безразмерные значения: $B = 1$, $l = 1$, $D = 1$ м, $i_0 = 20$, $m_0 = 1$.

В результате получаем графики зависимостей (рис. 3 и рис. 4).

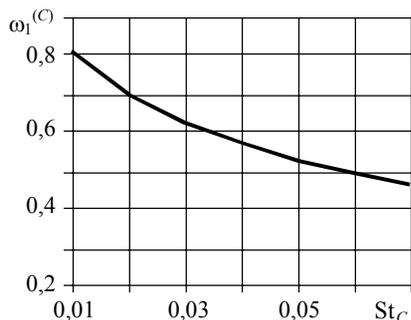


Рис. 3. График зависимости $\omega_1^{(C)}(St_C)$

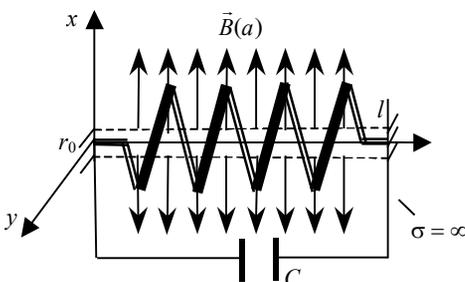


Рис. 2. Схема колебательного контура с емкостным параметром

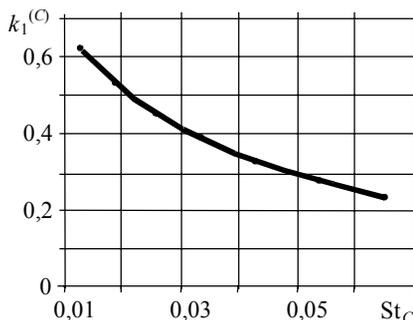


Рис. 4. График зависимости $k_1^{(C)}(St_C)$

По полученным графикам можно определить, что даже без усиления тока частота основного колебания уменьшается.

Далее рассмотрим такую же задачу, подключив во внешнюю цепь вместо конденсатора катушку индуктивности L в соответствии с рис. 5.

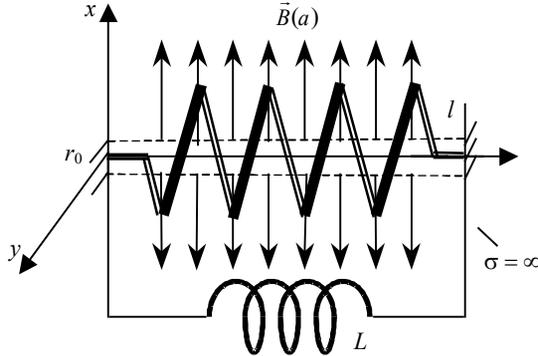


Рис. 5. Схема колебательного контура с индуктивным параметром

Система обыкновенных дифференциальных уравнений в безразмерном виде в данном случае будет иметь вид

$$\ddot{q}_r + r^2 q_r + St_L \frac{8Di_0}{r\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{q_n}{n} \right) = 0, \quad r = 1, 3, \dots \quad (12)$$

Расщепляя полученную систему уравнений, находим набор парциальных индуктивных демпфированных частот:

$$\omega_r^{(L)} = \sqrt{r^2 + St_L \frac{8Di_0}{r^2 \pi}}, \quad r = 1, 3, \dots \quad (13)$$

Видно, что наличие катушки индуктивности во внешней цепи приводит к увеличению собственных частот колебаний пружины за счет увеличения квазиупругих коэффициентов.

Жесткость пружины k определяется по формуле

$$k_1^{(L)} = 1^2 + St_L \frac{8Di_0}{1^2 \pi}. \quad (14)$$

Приведем числовой расчет, используя следующие данные: $B = 0,2$ Тл, $L = 0,1$ Гн, $l = 0,1$ м, $D = 0,2$ м, $i_0 = 100$ м⁻¹, $m_0 = 1$ кг/м, $p_1 = 1$ с⁻¹.

При этом безразмерные значения: $B=1$, $L=1$, $l=1$, $D=1$, $i_0=10$, $m_0=1$.

Построим графики зависимостей чисел Стюарта от демпфированных частот и жесткости пружины (рис. 6 и рис. 7).

Рассмотрим задачу о линейных колебаниях проводящей цилиндрической пружины во внешнем стационарном магнитном поле, в случае, когда в замыкающем контуре содержится одновременно конденсатор и катушка индуктивности, соединенных параллельно.

Система взаимосвязанных дифференциальных уравнений в этом случае в безразмерном виде запишется следующим образом:

$$\ddot{q}_r + p_r^2 q_r = -St_C \frac{8Di_0}{r\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ddot{q}_n}{n} - St_L \frac{8Di_0}{r\pi} \gamma_r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{n}, \quad r = 1, 3, \dots \quad (15)$$

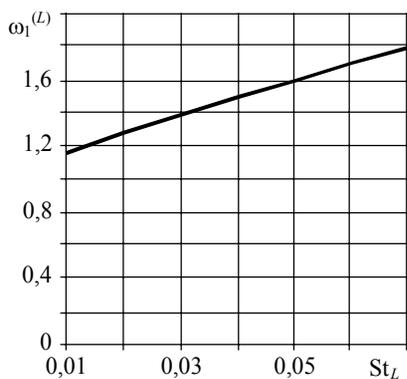


Рис. 6. График зависимости $\omega_1^{(L)}(St_L)$

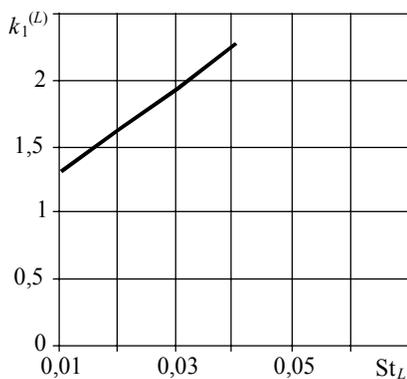


Рис. 7. График зависимости $k_1^{(L)}(St_L)$

Используя аналогичную процедуру расщепления, в результате последовательного интегрирования системы получим затухающие функции с набором нечетных парциальных частот:

$$\omega_r^{(C,L)} = \sqrt{\frac{r^2 + St_L \frac{8Di_0}{r^2 \cdot \pi}}{1 + St_C \frac{8Di_0}{r^2 \cdot \pi}}}, \quad r = 1, 3, \dots \quad (16)$$

Построим графики зависимости, принимая во внимание следующие числовые данные: $B = 0,5$ Тл, $C = 0,1$ Ф, $L = 0,1$ Гн, $l = 0,1$ м, $D = 0,2$ м, $i_0 = 100$ м⁻¹, $m_0 = 1$ кг/м, $p_1 = 1$ с⁻¹.

При этом безразмерные значения: $B = 1$, $C = 1$, $L = 1$, $l = 1$, $D = 1$, $i_0 = 10$, $m_0 = 1$.

На рис. 8 представлен график зависимости St_C ($\omega_r^{(C,L)}$). Здесь $St_L = \text{const} = 0,01$.

Зависимость St_L ($\omega_r^{(C,L)}$) показана на графике, в соответствии с рис. 9. Здесь $St_C = \text{const} = 0,01$.

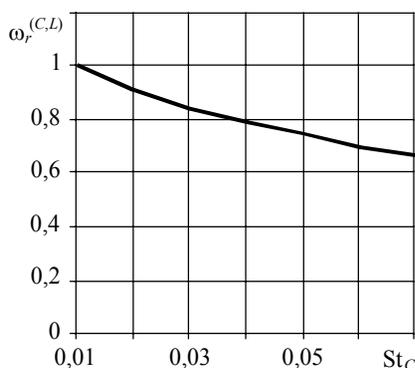


Рис. 8. График зависимости $\omega_r^{(C,L)}(St_C)$

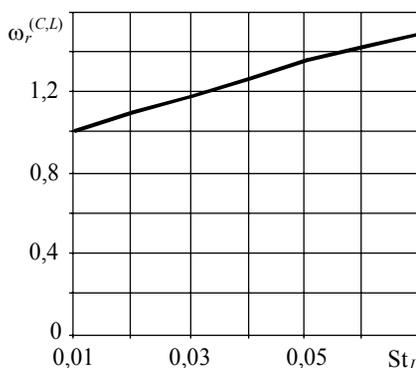


Рис. 9. График зависимости $\omega_r^{(C,L)}(St_L)$

Результаты, полученные в настоящей работе, позволяют производить настройку частоты электромеханической системы с распределенными параметрами при помощи реактивных электрических элементов. Для этого необходимо: во-первых, создать магнитное поле и поместить в него вибрирующий элемент или часть этого

элемента; во-вторых, обеспечить замыкание токов, протекающих через вибрирующий элемент, и, в-третьих, создать технические условия управления вибрационным процессом при помощи электромагнитного воздействия, в частности за счет использования реактивных параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Томилин А. К. Колебания электромеханических систем с распределенными параметрами. Усть-Каменогорск: Изд. ВКГТУ, 2004.
2. Байзакова Г.А. Электромагнитное управление частотами упругих элементов при помощи реактивных электрических параметров. Вестник КазНТУ им. К.И. Сатпаева. № 1. (77) Алматы, 2010. С. 134 – 138.
3. Томилин А.К., Байзакова Г.А., Береговая О.А., Прокопенко Е.В. Колебания континуальных электромеханических систем. Усть-Каменогорск: Изд-во ВКГТУ, 2010.

Статья поступила 06.03.2012 г.

Tomilin A.K., Baizakova G.A. CONTROL OVER OSCILLATION FREQUENCIES OF RESILIENT ELECTROMECHANICAL SYSTEM. As a result of an electromagnetic effect, some changes of tough and inertia properties of vibration system can be caused. The groups of controlled partial frequencies while using different reactive components (condenser, inductance coil) and their combinations have been determined.

Keywords: resilient member, quasi-inertial and quasi-resilient coefficients, partial damped frequencies, Stewart number.

TOMILIN Alexander Konstantinovich (D. Serikbaev East Kazakhstan state technical university)
E-mail: aktomilin@gmail.com

BAIZAKOVA Gulmira Abylgazinovna (D. Serikbaev East Kazakhstan state technical university)