

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

# ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

УПРАВЛЕНИЕ,  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА  
И ИНФОРМАТИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY  
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE

---

---

*Научный журнал*

---

---

2025

№ 72

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере  
массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия  
(свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-29497 от 27 сентября 2007 г.)

Подписной индекс в объединённом каталоге «Пресса России» 44031

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий,  
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций  
на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук»,  
Высшей аттестационной комиссии

16+

**Учредитель – Национальный исследовательский Томский государственный университет (НИ ТГУ)**

## **РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ**

**Замятин Александр Владимирович** – гл. редактор, проф., д-р техн. наук, НИ ТГУ. Тел. +73822529496  
**Смагин Валерий Иванович** – зам. гл. редактора, проф., д-р техн. наук, НИ ТГУ. Тел. +73822529485  
**Нежелская Людмила Алексеевна** – ответственный секретарь, проф., д-р физ.-мат. наук, НИ ТГУ. Тел. +73822529485  
E-mail: vestnik\_uvti@mail.tsu.ru

**Воробейчиков Сергей Эрикович** – д-р физ.-мат. наук, НИ ТГУ  
**Вишневский Владимир Миронович** – проф., д-р техн. наук, Институт проблем управления РАН (г. Москва)  
**Гордов Евгений Петрович** – проф., д-р физ. мат. наук, Институт мониторинга климатических и экологических систем СО РАН (г. Томск)  
**Кошкин Геннадий Михайлович** – проф., д-р физ.-мат. наук, НИ ТГУ  
**Костюк Юрий Леонидович** – проф., д-р техн. наук, НИ ТГУ  
**Матросова Анжела Юрьевна** – проф., д-р техн. наук, НИ ТГУ  
**Назаров Анатолий Андреевич** – проф., д-р техн. наук, НИ ТГУ  
**Пашинская Татьяна Юрьевна** – д-р физ.-мат. наук, НИ ТГУ  
**Перепелкин Евгений Александрович** – проф., д-р техн. наук, Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения (г. Санкт-Петербург)  
**Пчелинцев Евгений Анатольевич** – д-р физ.-мат. наук, НИ ТГУ  
**Самуйлов Константин Евгеньевич** – проф., д-р техн. наук, РУДН (г. Москва)  
**Семенкин Евгений Станиславович** – проф., д-р техн. наук, СибГУ им. акад. М.Ф. Решетнева (г. Красноярск)  
**Сушенко Сергей Петрович** – проф., д-р техн. наук, НИ ТГУ  
**Фархадов Маис Паша оглы** – д-р техн. наук, Институт проблем управления РАН (г. Москва)  
**Харин Юрий Семенович** – академик НАНБ, проф., д-р физ.-мат. наук, БГУ, Республика Беларусь (г. Минск)  
**Цициашвили Гурами Шалвович** – проф., д-р физ.-мат. наук, ИПМ ДВО РАН (г. Владивосток)

## **РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ**

**Александр Николаевич Дудин** – проф., д-р физ.-мат. наук, БГУ, Минск, Республика Беларусь  
**Ана Роза Ковали (Ana Rosa Cavalli)** – проф., д-р. философии (PhD), University VII Paris, Франция  
**Енцо Орсингер (Enco Orsinger)** – проф., д-р. философии (PhD), University of Rome, Италия  
**Паоло Принетто (Paolo Prinetto)** – проф. Politechnic Institute, Torino, Италия  
**Нина Владимировна Евтушенко** – проф., д-р. техн. наук, ИСП РАН им. Иванникова В.П., Москва, Россия  
**Ервант Зориан (Yervant Zorian)** – д-р. философии (PhD), Synopsys, Mountain View, США

## **JOURNAL INFO**

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is an independent peer-reviewed research journal that welcomes submissions from across the world.

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is issued four times per year, and can be subscribed to in the Russian Press Joint Catalogue (Subscription Index 44031

The publication in the journal is free of charge and may be in Russian or in English.

The topics of the journal are the following:

- *control of dynamical systems,*
- *mathematical modeling,*
- *data processing,*
- *informatics and programming,*
- *discrete function and automation,*
- *designing and diagnostics of computer systems.*

Rules of registration articles are given in a site:

<http://journals.tsu.ru/informatics/>

ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

## **О ЖУРНАЛЕ**

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика» выходит ежеквартально и распространяется по подписке. Статьи публикуются на русском и английском языках.

Тематика публикаций журнала:

- *управление динамическими системами,*
- *математическое моделирование,*
- *обработка информации,*
- *информатика и программирование,*
- *дискретные функции и автоматы,*
- *проектирование и диагностика вычислительных систем.*

Журнал входит в систему Российского Индекса Научного Цитирования (РИНЦ).

Правила оформления статей приведены на сайте:

<http://journals.tsu.ru/informatics/>

ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

## СОДЕРЖАНИЕ

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

<b>Ву Хоанг Занг, Жарков М.Л., Казаков А.Л.</b> Моделирование работы универсального морского порта на основе управляемой сети массового обслуживания .....	4
<b>Горбунова А.В.</b> Нелинейная аппроксимация квантилей распределения времени отклика fork-join системы массового обслуживания с подсистемами $M M 1$ .....	16
<b>Доронина Ю.В., Скاتков А.В.</b> Конструктивный подход к оцениванию статистической устойчивости моделей сложных систем .....	28
<b>Клековкин В.А., Марков Н.Г., Небаба С.Г.</b> Модели сверточных нейронных сетей YOLO с механизмом внимания для систем компьютерного зрения реального времени .....	39
<b>Назаров А.А., Даммер Д.Д.</b> Исследование затухающего дополнительного потока событий в системе с входящим MMPP-потокм методом марковского суммирования .....	51

### ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

<b>Анжин В.А., Тренкаев В.Н.</b> Использование F-меры для определения порогового значения обнаружения цифровых водяных знаков в изображениях .....	61
<b>Воробьев Р.С., Замятин А.В., Герашенко Т.С., Коробейникова А.А., Денисов Е.В.</b> Алгоритм высокопроизводительного обнаружения регионов низкой сложности в длинных геномных последовательностях .....	71
<b>Гондин С.А., Мурзинцева А.А., Пергаменщиков С.М., Пчелинцев Е.А.</b> Робастное управление на финансовых рынках с транзакционными издержками при логарифмических функциях полезности .....	80
<b>Kitaeva A.V., Yu Cao.</b> Shortages of perishables control for a stochastic inventory system in retail through dynamic pricing with an adjustable factor .....	92
<b>Цициашвили Г.Ш., Бочарников В.Н.</b> Устранение мешающего параметра при обработке наблюдений за посещениями животными определенных точек или районов при анализе биоразнообразия .....	101
<b>Shahoud G.M., Agafonov E.D.</b> Evaluating the generalization ability of deep learning models for sound source localization .....	107

### ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ДИАГНОСТИКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

<b>Ефанов Д.В.</b> Использование равновесного кода «1 из 4» при синтезе самопроверяемых схем встроенного контроля на основе логической коррекции сигналов .....	114
<b>Матросова А.Ю., Тычинский В.З.</b> О возможностях замены произвольных тестовых пар, обнаруживающих робастно тестируемые неисправности задержек пути, на тестовые пары, соседние по входной переменной пути .....	134

## CONTENTS

### MATHEMATICAL MODELING

<b>Vu Giang Hoang, Zharkov M.L., Kazakov A.L.</b> Modeling the operation of a universal seaport using a controlled queueing network .....	4
<b>Gorbunova A.V.</b> Nonlinear approximation of quantiles of the response time distribution of a fork-join queueing system with $M M 1$ subsystems .....	16
<b>Doronina Yu.V., Skatkov A.V.</b> A constructive approach to evaluating the statistical stability of models for complex systems .....	28
<b>Klekovkin V.A., Markov N.G., Nebaba S.G.</b> YOLO convolutional neural network models with attention mechanism for real-time computer vision systems .....	39
<b>Nazarov A.A., Dammer D.D.</b> Study of the decaying additional flow of events in a system with an input MMPP-flow using the Markov summation method .....	51

### DATA PROCESSING

<b>Anzhin V.A., Trenkaev V.N.</b> Detection threshold selection for correlation based digital image watermarks through F-score optimization .....	61
<b>Vorobev R.S., Zamyatin A.V., Gerashchenko T.S., Korobeynikova A.A., Denisov E.V.</b> A high-performance algorithm for detecting low-complexity regions in long genomic sequences .....	71
<b>Gondin S.A., Murzintseva A.A., Pergamenschikov S.M., Pchelintsev E.A.</b> Robust control in financial markets with transaction costs under logarithmic utility functions .....	80
<b>Kitaeva A.V., Yu Cao.</b> Shortages of perishables control for a stochastic inventory system in retail through dynamic pricing with an adjustable factor .....	92
<b>Tsitsiashvili G.Sh., Bocharnikov V.N.</b> Elimination of an interfering parameter when processing observations of animal visits to certain points or areas in the analysis of biodiversity .....	101
<b>Shahoud G.M., Agafonov E.D.</b> Evaluating the generalization ability of deep learning models for sound source localization .....	107

### DESIGNING AND DIAGNOSTICS OF COMPUTER SYSTEMS

<b>Efanov D.V.</b> Using the “1-out-of-4” constant-weight code in the synthesis of self-checking concurrent error-detection circuit based on Boolean signal correction .....	114
<b>Matrosova A.Yu., Tychinskiy V.Z.</b> About changing arbitrary test pairs detecting robust testable PDFs for ones consisting of neighbor Boolean vectors .....	134

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**  
**MATHEMATICAL MODELING**

Научная статья  
УДК 519.872  
doi: 10.17223/19988605/72/1

**Моделирование работы универсального морского порта  
на основе управляемой сети массового обслуживания**

Хоанг Занг Ву<sup>1</sup>, Максим Леонидович Жарков<sup>2</sup>, Александр Леонидович Казаков<sup>3</sup>

<sup>1, 3</sup> Иркутский национальный исследовательский технический университет, Иркутск, Россия

<sup>2, 3</sup> Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова  
Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск, Россия

<sup>1</sup> [giangtrang14022016@gmail.com](mailto:giangtrang14022016@gmail.com)

<sup>2</sup> [zharkm@mail.ru](mailto:zharkm@mail.ru)

<sup>3</sup> [kazakov@icc.ru](mailto:kazakov@icc.ru)

**Аннотация.** Разрабатывается методика моделирования процесса перевалки в универсальных морских портах. Модели имеют вид управляемых сетей массового обслуживания, в которые поступает несколько неординарных входящих потоков заявок, описывающих прибытие грузов на наземном и морском транспорте. Подсистемы порта моделируются разными типами систем массового обслуживания, в том числе управляемыми, допускающими регулирование параметров. В результате в модели учитываются влияние случайных факторов на работу порта и вариативность технологии перегрузки в его подсистемах. Для апробации методики выбран универсальный морской порт Куангнинь, Вьетнам. На основе результатов численного исследования его модели сделаны выводы о текущей пропускной способности объекта и построен прогноз эффективности его работы при увеличении грузопотоков.

**Ключевые слова:** теория массового обслуживания; универсальный порт; моделирование.

**Благодарности:** Исследования выполнены в рамках госзадания Минобрнауки России по проекту «Теоретические основы, методы и высокопроизводительные алгоритмы непрерывной и дискретной оптимизации для поддержки междисциплинарных научных исследований», № 121041300065-9.

**Для цитирования:** Ву Хоанг Занг, Жарков М.Л., Казаков А.Л. Моделирование работы универсального морского порта на основе управляемой сети массового обслуживания // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2025. № 72. С. 4–15. doi: 10.17223/19988605/72/1

Original article  
doi: 10.17223/19988605/72/1

**Modeling the operation of a universal seaport  
using a controlled queueing network**

Vu Giang Hoang<sup>1</sup>, Maxim L. Zharkov<sup>2</sup>, Alexander L. Kazakov<sup>3</sup>

<sup>1, 3</sup> Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russian Federation

<sup>2, 3</sup> Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch  
of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russian Federation

<sup>1</sup> [giangtrang14022016@gmail.com](mailto:giangtrang14022016@gmail.com)

<sup>2</sup> zharkm@mail.ru

<sup>3</sup> kazakov@icc.ru

**Abstract.** The article focuses on developing a methodology to model the transshipment process in universal sea-ports. The proposed models have the form of a controlled queueing network, which receives multiple incoming flows of requests representing the arrival of goods via both land and sea transport. We employ different types of queueing systems, including controlled systems that adjust operational parameters based on predefined rules, to model the various subsystems of the port. This approach allows the model to account for the impact of random factors on port operations, as well as changes in transshipment technology across subsystems. To validate the methodology, we apply it to the universal seaport of Quang Ninh, Vietnam. A numerical analysis of the port's model provides insights into its current throughput capacity and forecasts operational efficiency under increased cargo flows.

**Keywords:** queueing theory; universal seaport; mathematical modeling.

**Acknowledgments:** The research was funded by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation, the project "Theoretical foundations, methods and high-performance algorithms for continuous and discrete optimization to support interdisciplinary research" (No. 121041300065-9).

**For citation:** Vu Giang Hoang, Zharkov, M.L., Kazakov, A.L. (2025) Modeling the operation of a universal seaport using a controlled queueing network. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 72. pp. 4–15. doi: 10.17223/19988605/72/1

## Введение

Морские порты являются ключевым элементом для организации мультимодальных международных грузоперевозок, так как от их эффективности зависят объемы и скорость доставки грузов [1]. С середины 2024 г. наблюдаются признаки перегрузки крупных портов в различных регионах мира из-за роста товаропотоков, а также сбоев в работе, которые, в частности, вызваны затрудненным судоходством в Красном море и Панамском канале [2]. В этой связи актуальной остается задача оценки пропускной способности портов и ее своевременного повышения при росте грузопотоков. Традиционно подобные задачи решаются с использованием методов математического и компьютерного моделирования, а также сценарного анализа.

Основная ценность моделирования заключается в оптимизации технологических процессов за счет рационального распределения ресурсов (погрузочно-разгрузочной техники, складских мощностей, транспортных потоков), что приводит к минимизации времени обработки судов и снижению простоев. С точки зрения экономической эффективности данный подход позволяет идентифицировать узкие места в эксплуатационной деятельности, что способствует сокращению издержек и улучшению финансового планирования. Кроме того, моделирование обеспечивает прогнозирование пропускной способности порта в условиях изменяющегося грузопотока или внешних факторов (например, погодных или политических), возникновения сбоев в работе порта (задержки судов, аварии и т.п.), а также служит инструментом оценки эффективности инновационных решений (автоматизация терминалов, расширение причальных линий, внедрение цифровых технологий) до их физической реализации, что снижает инвестиционные риски и повышает общую надежность портовой инфраструктуры. Ключевыми показателями, характеризующими пропускную способность системы, являются среднее время ожидания судов на якорной стоянке, степень загрузки портового оборудования, доля грузов, обслуженных без задержек. Для их оценки, как правило, применяются модели, в которых учитываются особенности массового поступления и обслуживания товаров, т.е. теории массового обслуживания (ТМО) [3].

Простейшие системы массового обслуживания (СМО) впервые были применены около 50 лет назад для описания причалов и складов в морских портах [4]. В настоящее время для учета их сложной структуры обычно используются сети массового обслуживания (СеМО) [3], которые представляют собой набор связанных между собой СМО (узлов), что позволяет отобразить разные параметры работы подсистем порта и несколько маршрутов движения грузов между ними, включая кольцевые. В [5–7] СеМО используются для выбора рациональной конфигурации порта и его подсистем. В [8] представлена

модель перевозки контейнеров между причалом и складской площадкой, в [9] исследован процесс передачи товаров с морского транспорта на сухопутный, в [10] на основе СеМО построена модель транспортной сети, включающей несколько портов, и изучено влияние перегрузки некоторых из них на работу всей сети. В [11] с помощью СеМО с ВММАР-потокм исследован морской угольный терминал.

В указанных выше и других аналогичных работах используются стационарные модели, которые не позволяют учесть изменение режима функционирования подсистем порта во времени и погрузочно-разгрузочного оборудования в зависимости от типа прибывающего товара, что принципиально для универсальных морских портов [1]. В этой связи нами начат цикл работ, посвященных применению для моделирования портов нестационарных СеМО. В [12] проведен анализ эффективности перегрузки в морском контейнерном терминале, в [13] – обработки однотипных грузов в универсальном морском порту.

В данной статье представленный подход [12, 13] усовершенствован, и на его основе разработана методика моделирования универсального морского порта, обрабатывающего два и более типов товаров. В отличие от [12, 13] в ней используется управляемая СеМО, в которой возможно изменение параметров работы узлов по определенным правилам [14]. В частности, допустимы колебания интенсивности входящих потоков заявок и числа работающих каналов в узлах в зависимости от времени, выбор альтернативного маршрута движения заявок внутри СеМО. В качестве объекта апробации методики был выбран универсальный морской порт Куангнинь, Вьетнам. Структура этого порта включает типовые элементы, поэтому он является подходящим примером для демонстрации возможностей методики.

## 1. Методика математического моделирования работы универсального морского порта

Под универсальным морским портом понимается механизированный комплекс, предназначенный для перегрузки различного количественного сочетания генеральных, навалочных, насыпных и лесных грузов, поступающих с морских и речных (барж) судов, автомобильного и железнодорожного транспорта. Такие порты оснащены несколькими причалами и специализированной техникой для работы с разнообразными грузами, двумя и более складами для их временного хранения, грузовым фронтом для наземного транспорта, а в акватории имеется якорная стоянка для судов. Грузы между причалом и складами перевозятся на внутренних грузовиках [1].

Ранее был предложен подход моделирования морских портов на основе нестационарных СеМО [12, 13]. В данной статье для описания универсального морского порта используется более сложная разновидность таких СеМО. В ее узлах число работающих каналов меняется в зависимости от времени (смены), а вероятности переходов заявок между узлами могут меняться динамически в зависимости от загрузки самих узлов. Опишем применяемый аппарат более подробно.

**Математический аппарат.** Под СеМО понимается совокупность конечного числа  $S$  ( $S \geq 2$ ) взаимосвязанных между собой СМО (узлов). В открытую систему заявки поступают из  $D$  внешних источников, которые, как правило, считаются фиктивными (дополнительными) узлами. Тогда маршруты движения заявок внутри системы хранятся в маршрутной матрице  $P$  размера  $(S + D) \times (S + D)$ . Ее элементы  $P_{i,j} \geq 0$  – вероятности перехода заявки из узла  $i$  в узел  $j$ , при этом  $P_{i,i} = 0$ ,  $\sum_{j=1}^{S+D} P_{i,j} = 1$ ,  $i = \overline{1, S+D}$ . Если  $j$  – фиктивный узел, то заявка покидает СеМО.

Управляемые СеМО имеют две отличительные особенности. Первая – часть узлов относится к классическим (стационарным) СМО [4]. Для их формального описания применяется символика Кендалла–Башарина, в которой узел  $i \in S$  представляется в виде:

$$A_i / B_i^X / y_i / z_i, \quad (1)$$

где  $A_i$  – входящий поток заявок;  $B_i$  и  $X_i$  – законы распределения времени обслуживания и размера обслуживаемых групп заявок в каналах;  $y_i$  – число каналов;  $z_i$  – вместимость очереди. Если параметры входящего потока в узел  $i$  неизвестны, то на первой позиции в (1) ставится символ «\*».

Другая часть узлов относится к управляемым СМО [14–16], в которых допустима регулировка по определенным правилам: (а) интенсивности поступления и обслуживания заявок в каналах; (б) числа работающих каналов; (в) вместимости очереди. Для описания таких узлов в (1) применяются:

- в случае (а)  $A_i(t)$  и  $B_i(t)$  – параметры потока заявок, и их обслуживания зависят от времени;
- в случае (б)  $u_i(n_i)$ , где  $u_i$  и  $n_i$  – минимальное и максимальное число работающих каналов;
- в случае (в)  $z_i(X)$  – вместимость очереди меняется динамически и становится равной размеру поступающей или обслуживаемой группы заявок в узле.

Вторая отличительная особенность управляемых СеМО заключается в том, что значения  $P_{i,j}$  могут меняться при наступлении заданных событий, тогда как в стационарных СеМО они неизменны. В частности, если свободного места в узле  $j$  недостаточно для принятия заявок с узла  $i$ , то выбирается доступный альтернативный маршрут. Если его нет или он недоступен, то происходит временная блокировки каналов узла  $i$  до тех пор, пока в узле  $j$  не освободится достаточно места.

**Методика моделирования.** Модель в виде управляемой СеМО строится в три этапа: описание входящих грузопотоков, моделирование процесса их обслуживания в подсистемах порта и учет различных маршрутов движения грузов внутри системы.

*Описание входящих грузопотоков.* Грузы прибывают в порт на разных типах транспорта, которые считаются источниками грузопотоков. Их модели в ТМО – входящие потоки заявок на обслуживание. Под заявкой понимается единица измерения массы груза, как правило, тонна.

Баржи движутся независимо друг от друга (отсутствие последействия). Среднее их число в сутки известно и не меняется (стационарность). Следовательно, входящие потоки барж можно описать стационарным Пуассоновским (простейшим –  $M_i$ ) потоком заявок. В нем промежутки времени между поступлением заявок описываются экспоненциальным распределением  $\exp(\lambda)$ , где  $\lambda$  – интенсивность. В отличие от барж среднее число прибывающих автомобилей в порт в течение суток может существенно меняться в зависимости от смены. Поэтому для описания их поступления используем нестационарный Пуассоновский поток ( $M_i(t)$ ).

Протяженность морских маршрутов и влияние большого числа факторов приводят к тому, что время поступления судна в порт не может быть точно определено. В этой связи, согласно Центральной предельной теореме, время между поступлением судов можно принять случайной величиной, которая подчиняется нормальному распределению  $N(\mu; \sigma)$ , где  $\mu$  – математическое ожидание,  $\sigma$  – среднеквадратическое отклонение. Такой поток заявок обозначим далее через  $G_i$ .

Транспортные средства имеют существенный разброс по вместимости, а размеры партий груза в них далеко не всегда заранее известны получателю. Следовательно, все представленные потоки будут неординарными, а размеры групп – случайными величинами. Для их описания используется дискретное равномерное распределение  $U(a; b)$ , где  $a$  и  $b$  – наименьшая и наибольшая партии грузов.

*Обработка грузов в подсистемах* моделируются узлами СеМО разных типов:

- $A_i^X / B_i^X / y_i / 0$  – многоканальные СМО с отказами применяются для моделирования: работы якорной и автомобильной стоянок, где транспортные средства ожидают разрешения на вход в порт; движения грузовиков через ворота; перевозки грузов на внутренних грузовиках. В этих подсистемах парковочное место или само транспортное средство выполняет роль обслуживающего устройства.

- $* / B_i^X / y_i / z_i$  – многоканальные СМО с ограниченной вместимостью очереди используются для описания работы складов и причалов. Здесь каналами является погрузочное оборудование, а очередь – доступная площадь для размещения груза.

- $A_i^X / B_i^Y / y_i / z_i(X)$  – многоканальные СМО с меняющейся вместимостью очереди описывают процесс разгрузки судна на причалах. Каналы соответствуют оборудованию на них, а очередь – размеру прибывающей на судне партии груза.

- $* / B_i^X / 1 / z_i(X)$  – одноканальные СМО с меняющейся вместимостью очереди моделируют процесс погрузки товара на судно и отправление его из системы. Каналом является судоходный канал, очередь – размер отправляемой на судне партии груза.

- $* / B_i^X / u_i(n_i) / 0$  – СМО с отказами и меняющимся числом работающих каналов применяются для описания движения внешних грузовиков между воротами и складами. Каналы описывают работу грузовиков, число которых равно  $u_i$  в дневную и  $n_i$  в ночную смену.

Грузы перевозятся на транспорте и перегружаются партиями, поэтому во всех узлах допустимо групповое обслуживание заявок. Из очереди заявки выбираются согласно дисциплине FCFS (First Come, First Served), т.е. в порядке поступления.

**Описание движения грузов.** Для описания процесса принятия транспорта в порт применяется дисциплина полного отказа: если в узле число свободных мест меньше, чем размер прибывающей группы заявок, то они получают отказ в обслуживании и покидают систему. Принятые заявки движутся по системе в соответствии с заданными маршрутами, хранящимися в маршрутной матрице.

## 2. Предметное описание и математическая модель объекта исследования

**Описание объекта.** Порт Куангнинь (далее – Порт) расположен в ключевом экономическом районе на севере Вьетнама. Порт обрабатывает корма для животных, древесную щепу, строительные материалы, руду, металлолом и контейнеры. Основную долю экспортных грузов составляет древесная щепа, а импортных грузов – корма для животных (95% общего грузооборота). Они доставляются в Порт тремя видами транспорта. На морских судах поступают корма для животных. Согласно данным за первые 6 месяцев 2024 г., в среднем прибывает 3 судна в неделю. Древесная щепа поступает по внутренним водным путям на баржах и автомобильным транспортом на грузовиках. В среднем ежедневно прибывает 6 барж и 125 грузовиков, из которых в дневную смену (с 6:00 до 18:00) поступает 50 грузовиков с щепой, а в ночную – 75.

В 46 км от порта Куангнинь в море находится якорная стоянка на 6 мест. Также в 600 м от Порта расположена якорная стоянка для барж, вмещающая до 20 единиц. Среднее время движения от стоянок до порта с учетом швартовки составляет 3 ч для судов и 20 мин для барж.

В самом порту имеется три зоны: причальная, складская и пропускной пункт, которые представлены на рис. 1. Причальная зона включает четыре причала (№ 1, 2, 3, 4). Причал № 1 оборудован двумя береговыми кранами для разгрузки древесной щепы с барж, а причал № 2 – тремя береговыми кранами и предназначен для перегрузки животных кормов с морских судов. Причал № 4 оборудован тремя конвейерными системами для транспортировки щепы в складские отсеки судна. Причал № 3 используется как для экспорта древесной щепы, так и для импорта кормов для животных, поэтому он оснащен тремя береговыми кранами и тремя конвейерными системами.

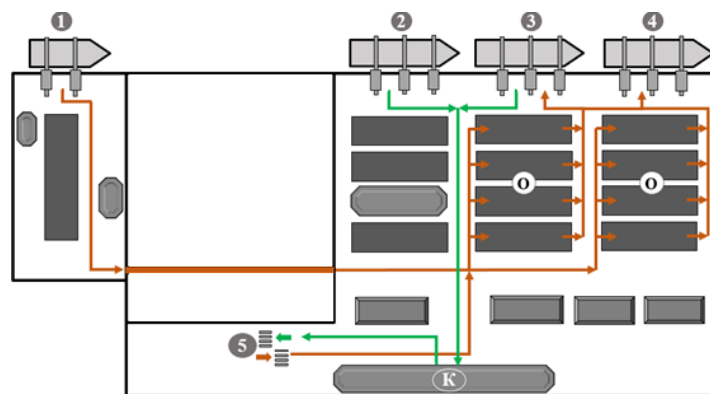


Рис. 1. Схема порта Куангнинь  
Fig. 1. Scheme of Quang Ninh port

На территории Порта расположено два типа складов: 6 крытых складов для хранения кормов для животных «К» (см. рис. 1), которые вмещают 90 тыс. т груза; 8 открытых складов «О» (см. рис. 1) вместимостью 240 тыс. т для древесной щепы. На обоих типах складов действует по 6 экскаваторов (грузовой фронт). На пропускном пункте (ворота 5 на рис. 1) имеется 2 въездных и 2 выездных полосы. Также перед воротами со стороны дороги расположена стоянка на 25 мест.

Перевозка товаров между причалами и складами осуществляется с помощью внутренних грузовиков: корма для животных перевозятся 20 грузовиками; древесная щепа – 30 грузовиками, из которых



10 обслуживают только причал № 1. Вывоз груза из Порта происходит следующим образом: в дневную смену в среднем прибывает 18 внешних грузовиков в час, а в вечернюю – 27 в час.

**Математическая модель.** Порт Куангнинь ранее рассматривался авторами в [13], однако исследовался только процесс перегрузки экспортных товаров. Из-за этого не была изучена работа причалов № 2 и № 3 и крытых складов. Далее представлена модель порта Куангнинь с учетом перегрузки как экспортных, так и импортных грузов в системе, а также особенностей функционирования причала № 3.

**Описание входящих грузопотоков.** В модели предполагается, что одной заявкой на обслуживание является одна тонна груза. В Порт прибывает три вида транспорта, следовательно, имеется три грузопотока. Для описания потока древесной щепы с барж применяется простейший поток ( $M_1$ ), а с грузовиков – неординарный Пуассоновский поток ( $M_2(t)$ ). Входящий поток кормов для животных моделируется неординарным потоком, в котором промежутки времени между поступлением групп заявок подчинены нормальному распределению. Параметры этих потоков представлены в табл. 1.

Таблица 1

Модели входящих грузовых потоков

Поток	Вид транспорта	Распределение интервалов времени	Распределение размеров групп
$M_1$	Баржи	$\exp(0,25)$	$U(800; 1\ 000)$
$M_2(t)$	Грузовики	$\exp(4,17)$ с 6:00 до 18:00 и $\exp(6,25)$ с 18:00 до 6:00	$U(30; 35)$
$G_1$	Морские суда	$N(56; 20)$	$U(30\ 000; 42\ 150)$

**Описание работы подсистем.** Для описания работы якорных и автомобильной стоянок, ворот и движения внутренних грузовиков, привоза товара на внешних грузовиках применяется 9 многоканальных СМО с отказами (Узлы 1, 3–6, 8, 13, 16 и 19). Функционирование складов моделируется двумя многоканальными СМО с конечными очередями (Узлы 7 и 17). Работа внешних грузовиков, которые вывозят товар из Порта, описывается СМО с переменным числом работающих каналов (Узел 18), их число зависит от смены.

Процесс разгрузки барж и судов на причалах № 1 и № 2 соответственно описывается двумя многоканальными СМО с изменяющейся вместимостью очереди (Узлы 2 и 15). На причале № 4 происходят загрузка судов и отправление их из системы. Для моделирования его работы используется два узла: Узел 9 – многоканальная СМО с конечной очередью – отображает работу конвейерных систем; Узел 10 – одноканальная СМО с изменяющейся вместимостью очереди – судоходного канала. На причале № 3 происходят разгрузка, погрузка судна и его отправление из системы, поэтому применяется три узла (Узлы 11, 12 и 14), аналогичных Узлам 9, 10 и 15.

Таблица 2

Модели работы элементов Порта

Узел	Элемент	Модель	$T_i$ (часы)	$X_i$ (тонны)
1	Якорная стоянка для барж	$M_1^X/G^X/20/0$	$N(0,33; 0,08)$	1 000
2	Причал № 1 для разгружаемых барж	$*/M^X/2/X_1$	$\exp(18,2)$	$U(13; 15)$
3	Внутренние грузовики А	$*/M^X/10/0$	$\exp(5)$	15
4	Автомобильная стоянка	$M_2(t)^X/M^X/25/0$	$\exp(240)$	35
5	Ворота въезда	$*/M^X/2/0$	$\exp(60)$	35
6	Внешние грузовики А	$*/M^X/10/0$	$\exp(12)$	35
7	Открытые склады	$*/M^X/6/240000$	$\exp(21,4)$	$U(13; 15)$
8	Внутренние грузовики Б	$*/M^X/20/0$	$\exp(10)$	15
9 & 11	Конвейерные системы причалов № 4 и № 3	$*/M^X/3/90$	$\exp(60)$	$U(3; 4)$
10	Причал № 4 для исходящих судов	$*/G^X/1/X_{10}$	$N(192; 20)$	$U(35\ 000; 44\ 000)$
12	Причал № 3 для исходящих судов	$*/G^X/1/X_{12}$	$N(192; 20)$	$U(35\ 000; 44\ 000)$
13	Якорная стоянка для судов	$G_1^X/G^X/6/0$	$N(3; 0,5)$	50 000
14 & 15	Береговые краны причалов № 3 и № 2	$*/M^X/3/X_{13}$	$\exp(24)$	$U(13; 15)$
16	Внутренние грузовики В	$*/M^X/20/0$	$\exp(4)$	15
17	Крытые склады	$*/M^X/6/90000$	$\exp(12,5)$	$U(32; 35)$
18	Внешние грузовики Б	$*/M^X/18(27)/0$	$\exp(1)$	35
19	Ворота выезда	$*/M^X/2/0$	$\exp(60)$	35

Таким образом, работа подсистем Порты описывается СеМО с 19 узлами, формальное описание которых в терминах ТМО представлено в табл. 2, где:  $T_i$  – распределение времени обслуживания;  $X_i$  – распределение размера обслуживаемой группы заявок в канале.

*Описание маршрутов движения грузов.* Обработка импортных и экспортных товаров в Порту осуществляются отдельными подсистемами. Однако многоцелевой причал № 3 используется для экспорта или импорта, когда причалы № 2 или № 4 заняты. При этом на причале № 3 одновременно обрабатывается только один вид товаров, и импорт имеет приоритет. Для учета этих особенностей в модели, во-первых, маршруты движения заявок могут меняться. Заявки после обслуживания в Узле 8 следуют в Узел 9 и, только если он занят, направляются в Узел 11. Аналогично заявки движутся между Узлами 13, 15 и 14. Во-вторых, между Узлами 11 и 14 имеется связь: если в Узел 14 поступает заявка, то работа Узла 11 блокируется до тех пор, пока Узел 14 не опустеет.

В модели имеется три входящих потока заявок, поэтому к 19 узлам необходимо добавить еще три фиктивных ( $O_1, O_2, O_3$ ). Следовательно, маршрутная матрица  $P$  будет иметь размер  $22 \times 22$ . Ее элементы определяются как относительные частоты – отношения размера потока грузов, поступающих в отдельную подсистему, к общему объему грузов в одном направлении. Она сильно разрежена и неинформативна, поэтому элементы  $P_{i,j} > 0$  представлены в виде весов на рис. 2.

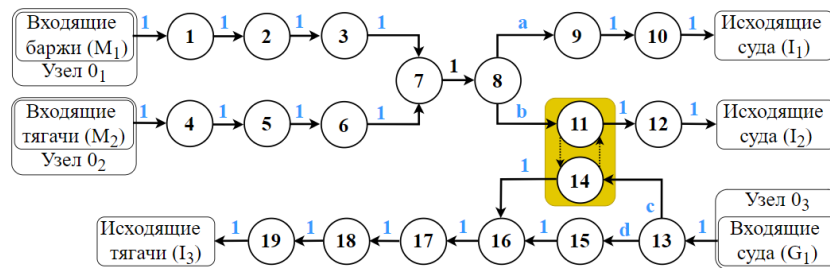


Рис. 2. Схема СеМО работы Порты  
Fig. 2. Scheme of the Port's operation

Здесь переменные  $a, b, c$  и  $d$  принимают значения в зависимости от заполненности Узлов 9 и 15:

$$(a; b) = \begin{cases} (1; 0), E_9(t) \leq F_9(t), \\ (0; 1), E_9(t) > F_9(t), \end{cases} \quad \text{и} \quad (c; d) = \begin{cases} (1; 0), E_{15}(t) > F_{15}(t), \\ (0; 1), E_{15}(t) \leq F_{15}(t), \end{cases} \quad (2)$$

где  $E_i(t), F_i(t)$  – размер поступающей группы заявок и число свободных мест в очереди Узла  $i$  в момент времени  $t$  соответственно.

Таким образом, математическая модель работы порта Куангнинь имеет вид открытой СеМО с тремя неординарными входящими потоками и 22 узлами. Два потока заявок описывают прибытие товаров на баржах и грузовиках, а один – на морских судах. Узлы СеМО отличаются типом, числом каналов и вместимостью очереди. Три из них фиктивные – источники потоков заявок, 13 узлов – стационарные СМО, 6 узлов – управляемые СМО.

### 3. Вычислительный эксперимент

Получаемая управляемая СеМО слишком сложна для аналитического исследования, поэтому для определения показателей ее эффективности применяется имитационная модель, основанная на дискретно-событийном подходе моделирования и методе Монте-Карло [12]. Она реализована в виде программы, которая предназначена для определения показателей эффективности СеМО различной структуры и сложности, в том числе с наличием управляемых СМО. Программа способна моделировать системы, в которых имеется до 100 узлов и до 50 групповых входящих потоков заявок с учетом изменения их параметров со временем.

С помощью программы выполнено два вычислительных эксперимента. Целью первого была оценка текущей загрузки Порты, а второго – определение максимальной допустимой нагрузки и узких

мест в структуре объекта. Для каждого эксперимента проведено по 10 пусков программы. Виртуальное время моделирования каждого составило 365 дней. Усредненные результаты пусков представлены далее в таблицах и на рисунках, где используются следующие обозначения:  $m_1$ ,  $m_2$  и  $g_1$  – общее число групп заявок, поступивших из потоков  $M_1$ ,  $M_2$  и  $G_1$  соответственно;  $K_i$  – коэффициент использования каналов в узле  $i$ ;  $L_i$  – средняя длина очереди;  $b_i$  – суммарная продолжительность (в часах) блокировки работы всех каналов в узле  $i$ ;  $P_L$  – вероятность отказа.

**Эксперимент 1.** В табл. 3–5 и на рис. 3 приведены результаты исследования модели.

Таблица 3

Результаты эксперимента 1

Узел	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$K_i$	0,015	0,468	0,324	0,001	0,045	0,044	0,564	0,527	0,855	0,993	
$L_i$	–	199,3	–	–	–	–	4999,4	–	63,3	29776,2	
$b_i$	1 906,7	344,5	-	1,5	–	–	15 840,1	63 242,2	13 313,7	–	
Узел	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$P_L$	
$K_i$	0,519	0,908	0,012	0,120	0,612	0,569	0,866	0,866	0,164		
$L_i$	37,8	24 094,2	–	2 295,4	11 043,1	–	13 461,0	–	–		
$b_i$	5 296,4	–	152,1	1 004,6	1 458,1	177,8	32 068,9	68,5	–		
$m_1$	2192,4	$M_1$ (заявок)	1 973 873,8	$m_2$	45 589,9	$M_2$ (заявок)	1 481 579,2	$g_1$	155,2	$G_1$ (заявок)	5 597 974,8

Представленные в табл. 3 данные используем для проверки адекватности полученной модели, а затем для анализа работы Порта. При проверке сравнивались следующие показатели:

а)  $m_1$ ,  $m_2$  и  $g_1$  с количеством прибывших барж ( $q$ ), внешних грузовиков ( $e$ ) и морских судов ( $r$ ) за год соответственно; б) доля заявок, прибывших из каждого потока  $m_i^* = m_i / (m_1 + m_2 + g_1)$ ,  $i = \overline{1,3}$ , с соответствующими соотношениями объемов грузов с барж ( $q^*$ ), внешних грузовиков ( $e^*$ ) и морских судов ( $r^*$ ); в) средняя длина очереди в Узле 17 ( $L_{17}$ ) со средним фактическим объемом груза в крытых складах ( $L^*$ ). Результат проверки представлен в табл. 4. При этом наибольшая относительная погрешность ( $\Delta$ ) составила 0,6%, а средняя 0,4%.

Таблица 4

Результаты проверки адекватности модели

$m_1$	2 192,4	$m_2$	45 589,9	$g_1$	155,2	$m_1^*$	0,217	$m_2^*$	0,163	$g_1^*$	0,620	$L_{17}$	13 461
$q$	2 190,0	$e$	45 670,0	$r$	156,0	$q^*$	0,218	$e^*$	0,164	$r^*$	0,618	$L^*$	13 500
$\Delta$ (%)	0,1	$\Delta$ (%)	0,1	$\Delta$ (%)	0,5	$\Delta$ (%)	0,5	$\Delta$ (%)	0,6	$\Delta$ (%)	0,3	$\Delta$ (%)	0,3

Теперь проанализируем представленные в табл. 3 результаты. Средняя продолжительность блокировки каналов Узла 1 составляет  $b_1 / 2192,4 = 0,87$  ч, что можно интерпретировать как среднее время ожидания отдельной баржи на якорной стоянке, а среднее время ожидания морского судна (Узел 13) –  $b_{13} / 155,2 = 0,98$  ч. Согласно регламенту принятия судов в Порту, время ожидания баржи не должно превышать 5, а судна – 10 ч. В противном случае Порт будет оплачивать штраф за простой транспорта. Расчетные значения времени ожидания на якорных стоянках относительно малы, следовательно, Порт эффективно справляется с текущим уровнем работы. Средняя длина очереди в Узле 17 равна  $L_{17} = 13 461$ , что соответствует заполнению крытых складов на 14,96%. Таким образом, Порт работает в штатном режиме, а его загрузка относительно невелика. Теперь рассмотрим работу порта в течение суток. Наиболее существенные колебания коэффициента использования каналов ( $K_i$ , табл. 5), составляющие до 21,5% от среднесуточного значения, наблюдаются в Узле 19 (ворота). Однако его абсолютное значение относительно низкое:  $K_{19} < 0,2$ , поэтому выездные ворота не препятствуют транспортировке грузов.

На рис 3, а представлено изменение интенсивности поступления потока  $M_2$  (внешних грузовиков) и его влияние на среднюю длину очереди Узла 7 (открытых складов), а на рис 3, б – число

работающих каналов в Узле 18 в зависимости от времени суток и средняя длина очереди Узла 17 (крытых складов). Интерпретируем эти результаты: для открытых складов максимальное отклонение заполненности от среднесуточного значения составляет 2,8%, а для крытых – 5,5%. Следовательно, на складах должен быть запас свободного места в 3 и 6% соответственно, что позволит бесперебойно принимать грузы с судов и барж и нивелировать суточные колебания работы грузовиков.

Таблица 5

Эксперимент 1 – Коэффициент использования каналов в узлах ( $K_i$ ) по сменам

Узел	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
6 <sup>00</sup> –18 <sup>00</sup>	0,016	0,476	0,329	0,001	0,036	0,035	0,520	0,481	0,836	0,992	0,495	0,907	0,011	0,097	0,615	0,558	0,854	0,855	0,127
18 <sup>00</sup> –6 <sup>00</sup>	0,015	0,468	0,324	0,001	0,053	0,052	0,552	0,511	0,860	0,993	0,517	0,908	0,011	0,099	0,619	0,563	0,856	0,854	0,197

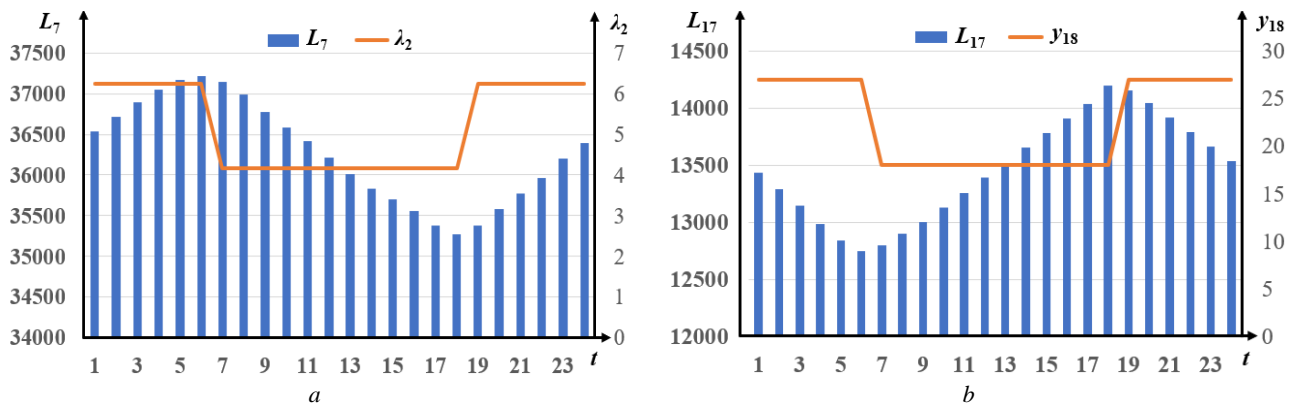


Рис. 3. Эксперимент 1 – Колебание средней длины очереди в Узлах 7 (a) и 17 (b) по часам  
Fig. 3. Experiment 1 – Fluctuations in the average queue length in Nodes 7 (a) and 17 (b) by hours

На больших промежутках времени колебания интенсивности поступления и отправления грузов на внешних грузовиках не оказывают существенного влияния на работу системы в целом. Следовательно, далее во время исследования работы Порты при росте грузопотоков достаточно рассмотрения стационарных результатов моделирования.

**Эксперимент 2** – прогнозирование работы Порты при увеличении числа прибывающих транспортных средств с грузом. По сравнению с экспериментом 1 интенсивности потоков  $M_1$  и  $M_2$  увеличим с 10 до 80%, а промежуток времени между поступлением заявок в  $G_1$  уменьшим на 10–40%. Также увеличим соответствующим образом интенсивности обслуживания в Узлах 10, 12 и 18 для сохранения баланса между числом прибывающих и отправляющихся групп заявок (транспортных средств). Результаты экспериментов представлены в табл. 6, где:  $w_1$  и  $w_{13}$  – средние продолжительности ожидания барж и судов на якорных стоянках соответственно.

Таблица 6

Результаты эксперимента 2

$G_1$ (%)	$M_1, M_2$ (%)	0	10	20	30	40	50	60	70	80
0	$w_1$	0,87	1,11	1,30	1,61	1,88	2,55	3,13	4,62	5,52
	$w_{13}$	0,98	1,31	1,68	1,86	2,07	2,34	2,86	3,10	3,36
10	$w_1$	0,89	1,07	1,33	1,63	1,91	2,51	2,99	4,51	5,89
	$w_{13}$	1,81	2,67	2,87	3,16	3,45	3,66	4,05	4,60	5,39
20	$w_1$	0,92	1,07	1,25	1,57	1,94	2,46	2,99	4,64	5,74
	$w_{13}$	3,13	3,79	4,24	4,78	5,29	5,85	6,55	7,85	8,79
30	$w_1$	0,86	1,12	1,33	1,66	1,88	2,50	3,09	4,60	5,75
	$w_{13}$	7,38	7,71	8,97	9,34	10,57	11,89	13,39	14,67	16,28
40	$w_1$	0,84	1,11	1,24	1,54	1,95	2,57	3,13	4,55	5,42
	$w_{13}$	16,23	18,44	19,78	21,24	23,16	24,31	28,90	31,39	35,51

Далее рассмотрим работу Порта вначале при увеличении объемов экспорта и импорта по отдельности, а затем их общий рост.

1. При увеличении интенсивности потоков  $M_1$  и  $M_2$  (экспорт древесной щепы) на 80% число необслуженных заявок из потока  $M_1$  в среднем составляет 994,9 за год, т.е. вероятность отказа становится ненулевой, а  $w_1 = 5,52 > 5$  ч (см. табл. 5). Это означает, что Порт перегружен и в моменты пиковой нагрузки не способен вовремя принимать поступающие баржи с грузом.

2. При увеличении интенсивности потока  $G_1$  (корма для животных) на 40% среднее время ожидания судна на якорной стоянке составляет  $w_{13} = 16,23 > 10$  ч. Также наблюдается увеличение времени хранения товара на складах до  $t_7 = 51,06$  ч, т.е. более двух суток, что недопустимо, так как за данное время корма для животных могут быть испорчены из-за высокой влажности.

3. При увеличении объемов экспорта на 70% и импорта на 30% среднее время ожидания барж составляет  $w_1 = 4,60 < 5$  ч, однако для судов  $w_{13} = 14,67 > 10$  ч, что недопустимо. Оба этих параметра удовлетворяют требованиям при росте объемов экспорта на 70% и импорта на 20%. Такие значения можно рассматривать в качестве максимальной допустимой нагрузки на систему.

Таким образом, в настоящее время порт Куангнинь имеет запас пропускной способности, который с текущими параметрами работы позволит перегрузить по отношению к уровню 2024 г.: 1) на 70% больше грузов при увеличении только объема экспорта; 2) на 30% больше грузов при увеличении объема импорта; 3) на 70% больше экспортных и на 20% больше импортных грузов при росте обоих грузопотоков. В третьем случае Порт будет перегружать максимально допустимый объем груза, который составляет 12,7 млн т в год.

Узкими местами системы соответственно являются: в случае 1 – береговые краны причала № 1; в случае 2 – береговые краны причала № 2 и внешние грузовики, вывозящие корма для животных; в случае 3 – конвейерные системы и береговые краны на причалах № 2, 3 и 4. Именно из-за недостаточной пропускной способности этих устройств происходит значительный рост времени простоя барж и судов на якорных стоянках. Для устранения этих узких мест, а также повышения эффективности работы всей системы предлагается увеличить скорость обработки грузов конвейерных систем и береговых кранов на 5%. Это потребует относительно небольших финансовых затрат и позволит обработать на 80% больше экспортных и на 30% больше импортных грузов по отношению к уровню 2024 г., т.е. 13,5 млн т в год.

### Заключение

В статье предложена методика математического моделирования универсального морского порта, в котором происходит смена технологии погрузки / разгрузки судов в зависимости от типа обрабатываемого товара. Ее отличие от ранее разработанного подхода моделирования транспортных систем заключается в применении управляемой сети массового обслуживания, что позволяет учесть в получаемых моделях возможность выбора альтернативного маршрута движения груза при перегрузке подсистем порта и изменение параметров их работы, которые зависят от смены. С помощью данного математического аппарата возможно в относительно короткие сроки построить модели различных портов, в частности с существенно отличающимся числом причалов и количественным сочетанием разных типов грузов.

Методика апробирована на примере универсального морского порта Куангнинь, который является одним из крупнейших во Вьетнаме. По результатам численного исследования полученной СеМО определены текущая и максимальная загрузки объекта, а также выявлены узкие места в его структуре и даны рекомендации по повышению пропускной способности, что показывает эффективность предложенного модельного подхода.

Перспективным направлением дальнейших исследований является развитие предложенного подхода для описания многопрофильных портовых комплексов, в структуру которых включены различные специализированные терминалы. Последнее, в частности, актуально для Сахалина, где планируется строительство нового портового комплекса на восточном побережье.

Список источников

1. Ботвинов В.Ф. Устройство и оборудование морского порта. М. : РУТ (МИИТ), 2012. 128 с.
2. 2024 Review of maritime transport : United Nations conference on trade and development. URL: [https://unctad.org/system/files/official-document/rmt2024\\_en.pdf](https://unctad.org/system/files/official-document/rmt2024_en.pdf) (accessed: 15.05.2025).
3. Вишневецкий В.М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. М. : Техносфера, 2003. 512 с.
4. Edmond E.D., Maggs R.P. How useful are queue models in port investment decisions for container berths? // *Journal of the Operational Research Society*. 1978. V. 29 (8). P. 741–750. doi: 10.1057/jors.1978.162
5. Roy D., De Koster R. Optimal stack layout configurations at automated container terminals using queuing network models // *Handbook of Terminal Planning* / J.W. Böse (ed.). Springer-Verlag, 2020. P. 437–461. doi: 10.1007/978-3-030-39990-0\_19
6. Zhang X., Li H., Wu M. Optimization of resource allocation in automated container terminals // *Sustainability*. 2022. V. 14 (24). Art. 16869. doi: 10.3390/su142416869
7. Roy D., De Koster R., Bekker R. Modeling and Design of Container Terminal Operations // *Operations Research*. 2020. V. 68 (3). P. 686–715. doi: 10.1287/opre.2019.1920
8. Legato P., Mazza R.M. Queueing analysis for operations modeling in port logistics // *Maritime Business Review*. 2020. V. 5 (1). P. 67–83. doi:10.1108/MABR-09-2019-0035
9. Babeli K., Hess S., Hess M. Capacity utilization of the container terminal as multiphase service system // *European Transport*. 2022. V. 86 (4). P. 1–15.
10. Guo S., Wang H., Wang S. Network disruptions and ripple effects: queueing model, simulation, and data analysis of port congestion // *Journal of Marine Science and Engineering*. 2023. V. 11 (9). Art. 1745. doi: 10.3390/jmse11091745
11. Kazakov A., Lempert A., Zharkov M. Modeling of a coal transshipment complex based on a queueing network // *Applied Sciences*. 2024. V. 14 (16). Art. 6970. doi: 10.3390/app14166970
12. Лемперт А.А., Жарков М.Л., Казаков А.Л., Ву Х.З. Моделирование морского контейнерного терминала с использованием сети массового обслуживания // *Управление большими системами*. 2024. № 112. С. 310–337.
13. Ву Х.З. Исследование универсального морского порта во Вьетнаме с использованием сети массового обслуживания // *System Analysis & Mathematical Modeling*. 2025. Т. 7, № 1. С. 72–83.
14. Назаров А.А. Управляемые системы массового обслуживания. Томск : Том. гос. ун-т, 1984. 234 с.
15. Полин Е.П., Монсеева С.П., Рожкова С.В. Асимптотический анализ неоднородной системы массового обслуживания  $M|M|\infty$  в марковской случайной среде // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2019. № 47. С. 75–83. doi: 10.17223/19988605/47/9
16. Цициашвили Г.И., Харченко Ю.А. Управляемые системы массового обслуживания со стационарным равномерным распределением // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2024. № 68. С. 59–65. doi: 10.17223/19988605/68/6

References

1. Botvinov, V.F. (2012) *Ustroystvo i oborudovanie morskogo porta* [Seaport structure and equipment]. Moscow: RUT (MIIT).
2. UNO. (2024) *2024 Review of maritime transport: United Nations conference on trade and development*. [Online] Available from: [https://unctad.org/system/files/official-document/rmt2024\\_en.pdf](https://unctad.org/system/files/official-document/rmt2024_en.pdf) (Accessed: 15th May 2025).
3. Vishnevsky, V.M. (2003) *Teoreticheskie osnovy proektirovaniya komp'yuternykh setey* [Theoretical foundations of computer network design]. Moscow: Technosphaera.
4. Edmond, E.D. & Maggs, R.P. (1978) How useful are queue models in port investment decisions for container berths? *Journal of the Operational Research Society*. 29(8). pp. 741–750. DOI: 10.1057/jors.1978.162
5. Roy, D. & De Koster, R. (2020) Optimal stack layout configurations at automated container terminals using queuing network models. In: Böse, J.W. (ed) *Handbook of Terminal Planning*. Springer-Verlag. pp. 437–461. DOI: 10.1007/978-3-030-39990-0\_19
6. Zhang, X., Li, H. & Wu, M. (2022) Optimization of resource allocation in automated container terminals. *Sustainability*. 14(24). pp. 16869. DOI: 10.3390/su142416869.
7. Roy, D., De Koster, R. & Bekker, R. (2020) Modeling and Design of Container Terminal Operations. *Operations Research*. 68(3). pp. 686–715. DOI:10.1287/opre.2019.1920
8. Legato, P. & Mazza, R.M. (2020) Queueing analysis for operations modeling in port logistics. *Maritime Business Review*. 5(1). pp. 67–83. DOI:10.1108/MABR-09-2019-0035
9. Babeli, K., Hess, S. & Hess, M. (2022) Capacity utilization of the container terminal as multiphase service system. *European Transport*. 86(4). pp. 1–15.
10. Guo, S., Wang, H. & Wang, S. (2023) Network disruptions and ripple effects: queueing model, simulation, and data analysis of port congestion. *Journal of Marine Science and Engineering*. 11(9). pp. 1745. DOI: 10.3390/jmse11091745
11. Kazakov, A., Lempert, A. & Zharkov, M. (2024) Modeling of a coal transshipment complex based on a queueing network. *Applied Sciences*. 14(16). pp. 6970. DOI: 10.3390/app14166970
12. Lempert, A.A., Zharkov, M.L., Kazakov, A.L. & Vu, H.G. (2024) Modeling of a sea container terminal using a queueing network. *Upravlenie bol'shimi sistemami – Large-scale Systems Control*. 112. pp. 310–337.
13. Vu, H.G. (2024) A study on universal seaport in Vietnam using queueing network. *System Analysis & Mathematical Modeling*. 7(1). pp. 72–83.

14. Nazarov, A.A. (1984) *Upravlyayemye sistemy massovogo obsluzhivaniya* [Controlled Queuing Systems]. Tomsk: TSU.
15. Polin, E.P., Moiseeva, S.P. & Rozhkova, S.V. (2019) Asimptotic analysis of heterogeneous queuing system  $M|M|\infty$  in a Markov random environment. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 47. pp. 75–83. DOI: 10.17223/19988605/47/9
16. Tsitsiashvili, G.Sh. & Kharchenko, Yu.N. (2024) Controlled queuing systems with a stationary uniform distribution. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 68. pp. 59–65. DOI: 10.17223/19988605/68/6

**Информация об авторах:**

**Казаков Александр Леонидович** – профессор, профессор РАН, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук (Иркутск, Россия); профессор Института информационных технологий и анализа данных Иркутского национального исследовательского технического университета (Иркутск, Россия). E-mail: kazakov@icc.ru

**Жарков Максим Леонидович** – кандидат технических наук, старший научный сотрудник Института динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук (Иркутск, Россия). E-mail: zharkm@mail.ru

**Ву Хоанг Занг** – аспирант Института информационных технологий и анализа данных Иркутского национального исследовательского технического университета (Иркутск, Россия). E-mail: giangtrang14022016@gmail.com

**Вклад авторов:** все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Information about the authors:**

**Kazakov Alexander L.** (Professor, Professor of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russian Federation; Professor, Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russian Federation). E-mail: kazakov@icc.ru

**Zharkov Maxim L.** (Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russian Federation). E-mail: zharkm@mail.ru

**Vu Giang Hoang** (Post-Graduate Student, Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russian Federation). E-mail: giangtrang14022016@gmail.com

**Contribution of the authors:** the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

*Поступила в редакцию 11.06.2025; принята к публикации 02.09.2025*

*Received 11.06.2025; accepted for publication 02.09.2025*

Научная статья  
УДК 519.872  
doi: 10.17223/19988605/72/2

## Нелинейная аппроксимация квантилей распределения времени отклика fork-join системы массового обслуживания с подсистемами $M|M|1$

Анастасия Владимировна Горбунова

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова  
Российской академии наук, Москва, Россия, avgorbunova@list.ru*

**Аннотация.** Рассматривается система с разделением и параллельным обслуживанием заявок с пуассоновским входящим потоком и показательным распределением времени обслуживания на приборах. С помощью данной системы массового обслуживания моделируются различные типы физических структур, в которых происходит разделение исходной задачи на части для сокращения времени решения. В работе предлагается аналитическая оценка для квантилей распределения одного из важнейших показателей производительности подобных систем – времени отклика системы, т.е. времени пребывания заявки в системе. Вывод выражения основывается на элементах теории копул, их диагональных сечений, а также на имитационном моделировании системы с разделением и параллельным обслуживанием.

**Ключевые слова:** система с разделением и параллельным обслуживанием заявок; среднее время отклика; квантили распределения; копула; диагональное сечение; имитационное моделирование.

**Для цитирования:** Горбунова А.В. Нелинейная аппроксимация квантилей распределения времени отклика fork-join системы массового обслуживания с подсистемами  $M|M|1$  // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2025. № 72. С. 16–27. doi: 10.17223/19988605/72/2

Original article  
doi: 10.17223/19988605/72/2

## Nonlinear approximation of quantiles of the response time distribution of a fork-join queueing system with $M|M|1$ subsystems

Anastasia V. Gorbunova

*V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences,  
Moscow, Russian Federation, avgorbunova@list.ru*

**Abstract.** A fork-join queueing system with a Poisson input flow and exponential distribution of service time on servers is considered. Using this queueing system, various types of physical structures are modeled in which the original problem is divided into parts to reduce the solution time. The paper proposes an analytical estimate for the distribution quantiles of one of the most important performance indicators of such systems -- the system response time, i.e., the time a request stays in the system. The derivation of the expression is based on elements of the copula theory, their diagonal sections, and on simulation modeling of a fork-join queueing system.

**Keywords:** fork-join queueing system; average response time; distribution quantiles; copula; diagonal section; simulation modeling.

**For citation:** Gorbunova, A.V. (2025) Nonlinear approximation of quantiles of the response time distribution of a fork-join queueing system with  $M|M|1$  subsystems. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 72. pp. 16–27. doi: 10.17223/19988605/72/2



## Введение

В статье исследуется система массового обслуживания (СМО) с разделением и параллельным обслуживанием заявок с пуассоновским входящим потоком и показательным распределением времени обслуживания. Система с разделением (с различными вариантами распределений для входящего потока и времен обслуживания) удобна для моделирования разнообразных процессов, в которых происходит разделение сложной комплексной задачи на составные части – подзадачи, которые обрабатываются в параллельном режиме с целью сокращения времени обработки исходной задачи.

Система с разделением и параллельным обслуживанием, или fork-join система массового обслуживания (в англоязычной версии термина), является предметом изучения многих исследователей, как отечественных, так и зарубежных, о чем свидетельствует множество публикаций [1–14]. Тем не менее точный результат известен лишь для такой характеристики, как среднее время пребывания заявки в системе только для случая системы с двумя подсистемами типа  $M|M|1$  [4]. Для остальных вариантов архитектуры fork-join системы известны лишь приближения для величины среднего времени отклика. В меньшей степени изучались моменты более высоких порядков этой случайной величины, например дисперсия [4, 10, 11].

Также стоит отметить появление в последние годы работ, посвященных анализу квантилей распределения времени отклика, в частности [9, 10], что свидетельствует об актуальности оценки данного показателя системы, несмотря на все трудности проведения подобного анализа.

Сложность анализа систем с разделением и параллельным обслуживанием обусловлена наличием зависимости между временами пребывания частей от одной заявки в подсистемах. Зависимость между временами пребывания подзаявок в подсистемах fork-join системы с параллельным обслуживанием заявок возникает в силу общих для них моментов поступления в эти подсистемы. Флуктуации входного потока заявок в большую или меньшую сторону (по числу поступлений за какое-то время) приводят к увеличению или уменьшению длины очередей в подсистемах и, соответственно, увеличению или уменьшению времен пребывания подзаявок от одной заявки в подсистемах. Работ, посвященных изучению зависимостей времен пребывания подзаявок, совсем немного, однако для подсистем типа  $M|M|1$  в [3] было получено точное выражения для коэффициента корреляции между временами пребывания в подсистемах, а в [4] для более сложной архитектуры системы – оценка этого показателя.

Основная задача исследования состоит в построении аналитической аппроксимации для квантилей распределения времени отклика fork-join системы как функции нескольких переменных. Причем полученная формула должна быть компактной и с минимальным числом параметров, которые необходимо было бы оценивать, а также обладать хорошей точностью приближения (в смысле максимального и среднего модуля относительного отклонения от данных имитационного моделирования квантилей по некоторой сетке параметров).

Данная статья является развитием работы [1], в которой оцениваются квантили распределения времени отклика в частном случае двух подсистем  $M|M|1$ . Здесь же методика для оценки квантилей распределения времени пребывания заявок в fork-join системе обобщается на большее количество подсистем  $K$ ,  $K \geq 2$ , что, естественно, гораздо сложнее. Подход включает в себя элементы теории копул [2, 15, 16], визуальный анализ данных, методы оптимизации и имитационное моделирование. В отличие от работ [9, 10] применение копул позволяет выстроить логическую цепочку этапов предложенного подхода и обосновать выбор типа функциональной зависимости для аналитического выражения оценки квантилей времени отклика. Кроме того, методы, предложенные в статьях [9, 11] справедливы только для квантилей высокого уровня, в то время как подход, основанный на теории копул, позволяет определять квантили для значений вероятностей гораздо более широкого диапазона.

## 1. Математическая модель fork-join системы массового обслуживания

Рассматривается классическая система с разделением и параллельным обслуживанием, в которую поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью  $\lambda > 0$ . В момент поступления заявка

разделяется ровно на  $K \geq 2$  подзаявок. Далее каждая из подзаявок поступает в одну из  $K$  подсистем, каждая из которых состоит из одного обслуживающего прибора и очереди с неограниченным числом мест для ожидания. Все приборы являются однородными, а время обслуживания имеет показательное распределение с параметром (интенсивностью)  $\mu > 0, \lambda < \mu$ .

После обслуживания подзаявки сразу не покидают систему, а ожидают окончания обслуживания последней подзаявки, составляющей исходную заявку, в условной точке сборки заявок (не занимая при этом прибор), находящейся за приборами системы (рис. 1). Затем происходит непосредственная сборка заявки из  $K$  обслуженных подзаявок, время которой считаем равным нулю, после чего заявка покидает систему.

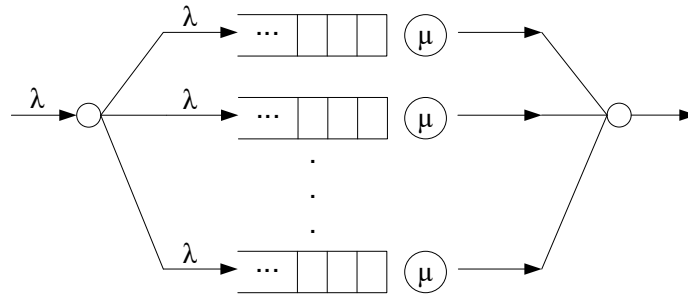


Рис. 1. Система с разделением и параллельным обслуживанием заявок  
Fig. 1. Fork-join queueing system

Таким образом, время пребывания заявки в системе, или время отклика системы  $R_K$ , определяется максимальным временем обслуживания одной из изначально составляющих ее подзаявок, т.е.

$$R_K = \max\{\xi_1, \dots, \xi_K\}, \quad (1)$$

где  $\xi_i$  – время пребывания  $i$ -й подзаявки в  $i$ -й подсистеме,  $i = 1, \dots, K$ .

Поскольку в дальнейшем для определения оценки квантилей распределения времени отклика системы с разделением и параллельным обслуживанием заявок наряду с элементами теории копул и методом оптимизации будет использоваться имитационное моделирование, то ограничимся числом подсистем  $K = 2, \dots, 20$ . При этом методика вывода искомой оценки будет справедлива и для большего числа подсистем, но при этом будет требовать больше вычислительных затрат на организацию симуляции. Также для удобства положим  $\lambda = 1$  (без потери в общности рассматриваемой системы) и будем менять уровень загрузки системы  $\rho = \lambda / \mu$  за счет изменения значения интенсивности обслуживания  $\mu$ .

## 2. Оценка квантилей распределения времени отклика

Рассмотрим случайную величину времени отклика системы с разделением и параллельным обслуживанием заявок  $R_K$  из (1), которая представляет собой максимум из  $K$  ( $K \geq 2$ ), что важно отметить, независимых случайных величин времен пребывания подзаявок в подсистемах исследуемой системы.

Функция распределения величины  $R_K$  имеет вид:

$$F_{R_K}(x) = P(\max(\xi_1, \dots, \xi_K) < x) = P(\xi_1 < x, \dots, \xi_K < x).$$

В этой связи обратимся к элементам теории копул [15]. Согласно определению копулой называется многомерная функция распределения, определенная на  $K$ -мерном единичном кубе, при этом каждое частное распределение является равномерным на отрезке  $[0, 1]$ . Согласно теореме Склера любую функцию распределения можно представить с помощью копулы, т.е.

$$F(x_1, \dots, x_K) = C(F_1(x_1), \dots, F_K(x_K)),$$

где  $F_i(x_i)$  – частные функции распределения,  $i = 1, \dots, K$ . Если функции  $F_i(x_i)$  являются непрерывными, то такое представление единственно. Диагональным сечением  $K$ -мерной копулы называется функция

$$\delta(y) = C(y, \dots, y), \quad y \in [0, 1],$$

где  $C$  – это копула-функция.

В случае рассматриваемой системы с разделением и параллельным обслуживанием маргинальные функции распределения времен пребывания подзаявок в подсистемах идентичны, соответственно,  $F_i(x) = F(x)$ ,  $i = 1, \dots, K$ . В результате можем представить выражение для функции распределения времени отклика системы с помощью диагонального сечения копулы, а именно

$$F_{R_K}(x) = P(\xi_1 < x, \dots, \xi_K < x) = C(F(x), \dots, F(x)) = \delta(F(x)) = \delta(y). \quad (2)$$

Далее, с одной стороны,  $F_{R_K}(x_p) = p$ , поэтому квантили распределения времени отклика  $R_K$  уровня  $p$  определяются как

$$x_p = F_{R_K}^{-1}(p),$$

и, соответственно, с другой стороны,  $\delta(F(x_p)) = p$ , откуда квантили уровня  $p$  также равны

$$x_p = F^{-1}(\delta^{-1}(p)).$$

Причем известно, что функция распределения времени пребывания подзаявки в подсистеме типа  $M_\lambda | M_\mu | 1$  имеет показательное распределение с параметром  $(\mu - \lambda)$ , т.е.

$$F(x) = 1 - e^{-(\mu - \lambda)x}, \quad F^{-1}(x) = -\frac{\ln(1 - x)}{\mu - \lambda},$$

соответственно,

$$x_p = -\frac{\ln(1 - \delta^{-1}(p))}{\mu - \lambda}. \quad (3)$$

Далее необходимо определить выражение для диагонального сечения.

Согласно определению для диагонального сечения можем записать следующее:

$$\delta(y) = C(y, \dots, y) = P(U_1 < y, \dots, U_K < y) = P(\max(U_1, \dots, U_K) < y),$$

где случайные величины  $U_i$  имеют равномерное распределение на отрезке  $[0, 1]$ .

В соответствии с преобразованием Смирнова для генерации случайных величин с заданной функцией распределения (строго возрастающей, как в нашем случае) можем записать, что

$$\xi_i = F^{-1}(U_i),$$

откуда

$$U_i = F(\xi_i) = 1 - e^{-(\mu - \lambda)\xi_i}.$$

Поэтому, опять же в силу строгого возрастания функции  $F(x)$ , справедливо

$$\begin{aligned} P(\max(U_1, \dots, U_K) < y) &= P(\max(1 - e^{-(\mu - \lambda)\xi_1}, \dots, 1 - e^{-(\mu - \lambda)\xi_K}) < y) = \\ &= P(1 - e^{-(\mu - \lambda)\max(\xi_1, \dots, \xi_K)} < y) = P(1 - e^{-(\mu - \lambda)R_K} < y). \end{aligned}$$

Введем случайную величину  $Y_K = 1 - e^{-(\mu - \lambda)R_K}$ , следовательно, получаем для диагонального сечения

$$\delta(y_p) = P(Y_K < y_p) = p. \quad (4)$$

Для того чтобы оценить выражение для диагонального сечения  $\delta(y)$ , воспользуемся данными имитационного моделирования для случайных величин  $\xi_i$ ,  $i = 1, \dots, K$  – времен пребывания в подсистемах системы с разделением и параллельным обслуживанием заявок.

С помощью программной среды Python для системы с разделением и параллельным обслуживанием заявок было смоделировано порядка 10 млн наборов из  $K$  случайных величин  $(\xi_1, \dots, \xi_K)$  для значений загрузки системы  $\rho = \lambda/\mu = \{0,50, 0,55, \dots, 0,90\}$  и 5 млн наборов величин  $(\xi_1, \dots, \xi_K)$  для более низких значений загрузки системы  $\rho = \{0,10, 0,15, \dots, 0,45\}$  для различного числа подсистем  $K = 2, \dots, 20$ .

Далее вычисляются соответствующие каждому из смоделированных наборов случайных времен пребывания в подсистемах значения случайных величин  $Y_K = 1 - e^{-(\mu - \lambda)\max(\xi_1, \dots, \xi_K)}$ . Затем статистически оценивается диагональное сечение с помощью полученных посредством симуляции от 5 до 10 млн пар  $(y_p, p)$ , т.е. фактически вычисляются квантили случайной величины  $Y_K$  для соответствующих им вероятностей  $p = \{0,20, 0,25, \dots, 0,90\}$ , где  $\hat{p} \approx \delta(y_p)$  согласно формуле (4).

Теперь необходимо определить функциональную зависимость между величинами квантилей  $y_p$  и соответствующими им вероятностями, или уровнями  $p$ . Для этого проведем визуальный анализ данных.

На рис. 2 для случаев  $K = 3$  и  $K = 20$  представлены графики зависимости между  $\ln y_p$  и  $\ln p$  для различных уровней загрузки системы, построенные по данным имитационного моделирования. Аналогичная картина наблюдается для всех значений числа подсистем  $K$  в рамках заданного диапазона от 2 до 20, т.е. имеется линейная (или очень близкая к линейной) зависимость между логарифмами, что свидетельствует в пользу степенного вида функции для диагонального сечения, а именно

$$\ln p = f(\rho, K) \cdot \ln y_p,$$

где  $f(\rho, K)$  выступает в роли углового коэффициента для соответствующих значений загрузки и числа подсистем. Таким образом, можем записать

$$\delta(y_p) = p = y_p^{f(\rho, K)}. \quad (5)$$

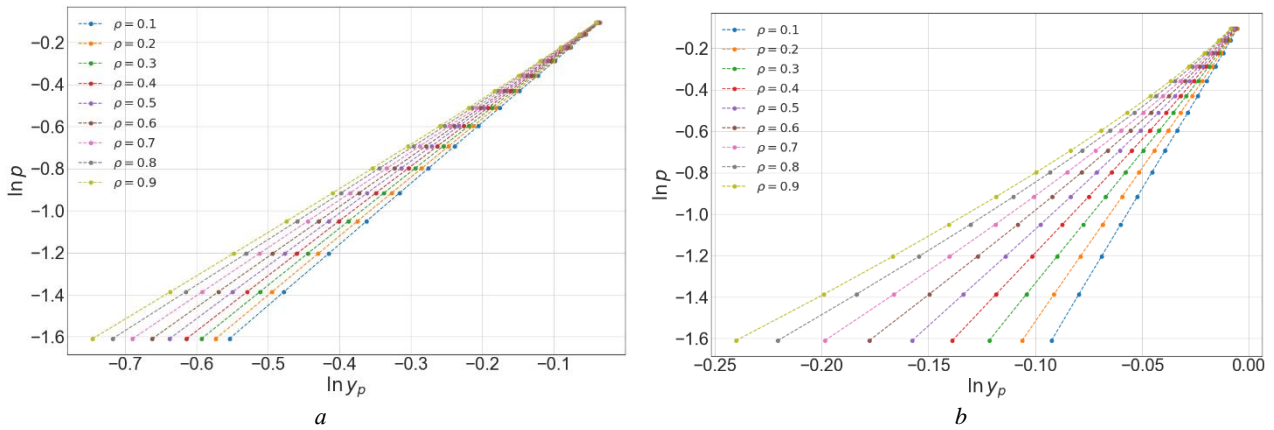


Рис. 2. Зависимость  $\ln p$  от  $\ln y_p$  для числа подсистем:  $K = 3$  (a);  $K = 20$  (b)  
Fig. 2. Dependence of  $\ln p$  on  $\ln y_p$  for the number of subsystems: a)  $K = 3$ ; b)  $K = 20$

Тогда в качестве оценок квантилей получаем

$$\hat{x}_p = -\frac{\ln \left( 1 - p^{\frac{1}{f(\rho, K)}} \right)}{\mu - \lambda}, \quad (6)$$

и, подбирая разные функции  $f$ , можем получать оценки разной точности.

Чтобы конкретизировать вид функции  $f(\rho, K)$ , проанализируем отношение  $\ln p / \ln y_p$ . На рис. 3 представлена зависимость данного отношения от значения загрузки  $\rho$  при  $K = 3$  и  $K = 20$ .

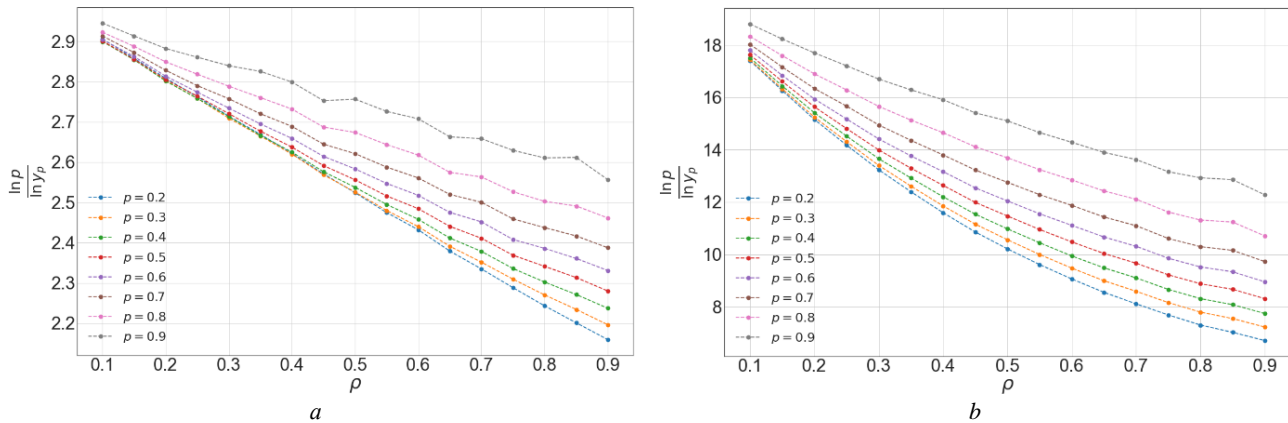


Рис. 3. Зависимость отношения  $\ln p / \ln y_p$  от  $\rho$  для числа подсистем:  $K = 3$  (a);  $K = 20$  (b)  
Fig. 3. Dependence of the ratio  $\ln p / \ln y_p$  on  $\rho$  for the number of subsystems: a)  $K = 3$ ; b)  $K = 20$

Стоит отметить, что при  $\rho \rightarrow 0$  фактически справедлива независимость времен пребывания в подсистемах, т.е. при независимости случайных величин  $\xi_i, i = 1, \dots, K$ , выражение (2) преобразуется следующим образом:

$$F_{R_K}(x) = \delta(F(x)) = P(\xi_1 < x, \dots, \xi_K < x) = (F(x))^K, \quad (7)$$

что соответствует  $f(\rho, K) \rightarrow K$  и, соответственно, при подстановке  $f(\rho, K) = K$  в (5) полностью согласуется с (7):

$$\delta(F(x)) = (F(x))^K.$$

В работе [1] для случая  $K = 2$  использовалась функция  $f(\rho, 2) = 2 - C\rho$ . Это наводит на мысль попробовать приближения вида  $K - C\rho$  и  $K(1 - C\rho)$ , однако их проверка с помощью (6) приводит к плохим результатам.

Более тонкий подход заключается в обращении к приближению копулой Гумбеля, которая показала хорошее согласие с данными в работе [2] в случае  $K = 2$ , обладает степенным диагональным сечением и является абсолютно непрерывной (в отличие, например, от копулы Маршалла–Олкина), поэтому используется для моделирования абсолютно непрерывных многомерных распределений. В общем случае  $K$ -мерная копула Гумбеля имеет вид:

$$C(y_1, \dots, y_K) = \exp\left\{-\left((-\ln y_1)^\theta + \dots + (-\ln y_K)^\theta\right)^{1/\theta}\right\}, \quad \theta > 1,$$

откуда  $\delta(y) = y^{K^{1/\theta}}$ . Таким образом, при  $K = 2$  в [2] получалось  $\theta = (\ln 2) / \ln(2 - C\rho)$ , откуда в общем случае  $f(\rho, K) = (2 - C\rho)^{(\ln K)/(\ln 2)}$ . Если же использовать более простое приближение  $\theta = 1 / (1 - C\rho)$ , имеющее сходный график, получаем  $f(\rho, K) = K^{1-C\rho}$ . Проверка с помощью (6) показывает, что последний вариант дает наилучшее соответствие.

Таким образом, получаем следующее выражение для приближения диагонального сечения:

$$\delta(y_p) \approx y_p^{K^{1-C\rho}}, \quad (8)$$

откуда следует, что

$$\delta^{-1}(p) \approx p^{\frac{1}{K^{1-C\rho}}}. \quad (9)$$

В результате после подстановки (9) в формулу (3) для квантилей распределения времени отклика системы с разделением на  $K$  подзаявок и их параллельным обслуживанием получаем следующую аналитическую оценку:

$$\hat{x}_p = -\frac{\ln(1 - p^{\frac{1}{K^{1-C\rho}}})}{\mu - \lambda}. \quad (10)$$

Чтобы определить константу  $C$ , воспользуемся методом оптимизации Нелдера–Мида [17]. Будем минимизировать по имеющимся данным симуляции для времени отклика модуль абсолютного значения максимальной погрешности приближения формулы (10), т.е.

$$\max_C \left| \frac{x_p - \hat{x}_p}{x_p} \right| \rightarrow \min.$$

В результате получаем значение  $C \approx 0,3490997$ .

В табл. 1 представлены значения максимальной (MaxAPE, %), минимальной (MinAPE, %) и средней (MAPE, %) относительных погрешностей приближения значений квантилей распределения времени отклика формулой (10), рассчитанные на наборе данных из  $N = 4\,845$  элементов, где

$$\text{MAPE} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{x_{p,i} - \hat{x}_{p,i}}{x_{p,i}} \right| \cdot 100\%, \quad \text{MaxAPE} = \max_{1 \leq i \leq N} \left| \frac{x_{p,i} - \hat{x}_{p,i}}{x_{p,i}} \right| \cdot 100\%, \quad \text{MinAPE} = \min_{1 \leq i \leq N} \left| \frac{x_{p,i} - \hat{x}_{p,i}}{x_{p,i}} \right| \cdot 100\%,$$

а  $x_{p,i}$  и  $\hat{x}_{p,i}$  –  $i$ -е значения квантилей, полученные, соответственно, с помощью имитационного моделирования и с помощью формулы (аналитической оценки) в наборе из  $N$  элементов.

Таблица 1

**Погрешности приближений значений квантилей распределения времени отклика системы  $x_p$ ,  $K = 2, \dots, 20$ , рассчитанные с помощью формулы (10), в сравнении с результатами имитационного моделирования**

Оцениваемая характеристика	Типы ошибок		
	MaxAPE, %	MinAPE, %	MAPE, %
Квантиль времени отклика $x_p$	9,534643	0,000551	2,505877

Несмотря на довольно низкое значение средней погрешности приближения, его максимальное значение, которое хоть и укладывается в рамки инженерной погрешности, желательно было бы снизить. Попробуем учесть наблюдаемую на рис. 3 зависимость кривых от  $p$  аналогично тому, как это делалось в [1], заменяя константу  $C$  на выражение  $C_1 - C_2 p^2$ . В результате уточненная оценка для квантилей времени отклика примет вид:

$$\hat{x}_p = -\frac{\frac{1}{\ln(1 - p^{K^{1-(C_1 - C_2 p^2)^p}})}}{\mu - \lambda}. \quad (11)$$

Значения констант  $C_1$  и  $C_2$  в (11), как и ранее, определим с помощью метода Нелдера–Мида, соответственно, получим следующие  $C_1 \approx 0,390797$ ,  $C_2 \approx 0,221811$ .

Погрешности аппроксимации для оценки (11) представлены в табл. 2.

Таблица 2

**Погрешности приближений значений квантилей распределения времени отклика системы  $x_p$ ,  $K = 2, \dots, 20$ , рассчитанные с помощью формулы (11), в сравнении с результатами имитационного моделирования**

Оцениваемая характеристика	Типы ошибок		
	MaxAPE, %	MinAPE, %	MAPE, %
Квантиль времени отклика $x_p$	5,498891	0,000306	1,116448

Как можно заметить, максимальное значение погрешности приближения значительно уменьшилось (примерно в 2 раза), равно как и средняя погрешность приближения. На рис. 4 наглядно демонстрируется качество приближения формулы (11).

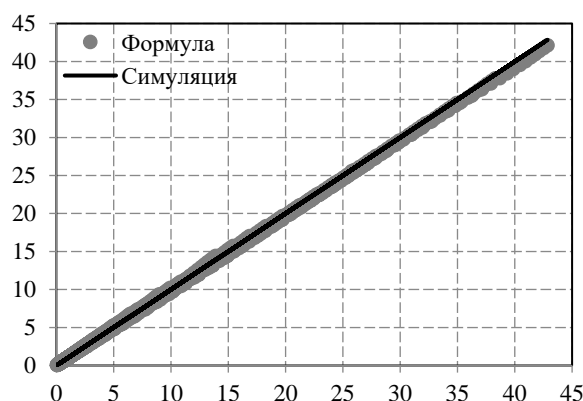


Рис. 4. Сравнение результатов имитационного моделирования квантилей распределения времени отклика  $R_K$  системы с разделением и параллельным обслуживанием для числа подсистем  $K = 2, \dots, 20$ , вероятностей  $p \in \{0,20; 0,25; \dots; 0,90\}$  и загрузки  $\rho \in \{0,10; 0,15; \dots; 0,90\}$  с формулой (11)

Fig. 4. Comparison of the results of simulation modeling of the quantiles of the distribution of the response time  $R_K$  of a fork-join queueing system for the number of subsystems  $K = 2, \dots, 20$ , probabilities  $p \in \{0,20; 0,25; \dots; 0,90\}$  and load  $\rho \in \{0,10; 0,15; \dots; 0,90\}$  with formula (11)

Заметим, что нашей задачей было получить равномерную (по относительной точности) оценку квантилей по всем  $K$  от 2 до 20. При конкретных  $K$  аналогичным образом можно получить гораздо более точные оценки, как это было сделано ранее для  $K = 2$ .

### 3. Сравнение с другими методами

В данном разделе проведем сравнение результата, полученного с помощью комплексного подхода, опирающегося на интеллектуальный анализ данных, т.е. посредством применения комбинации нескольких методов анализа: элементов теории копул, визуального анализа данных и оптимизации, – с результатом аппроксимации, который будет получен без использования теории копул. А именно будем аппроксимировать исходную функцию, заданную, как и ранее, таблицей значений ее аргументов – уровня вероятности  $p$ , числа подсистем  $K$ , загрузки системы  $\rho$  – и соответствующих им значений целевой функции, т.е. квантилей, с помощью ее представления в виде полинома.

Как известно, любую непрерывную функцию можно аппроксимировать с любой степенью точности, при этом известны различные подходы к аппроксимации непрерывных функций многих переменных, однако нельзя сказать, что все они просты в своей реализации; в частности, речь может идти о серьезных вычислительных затратах на их организацию [18–21].

Одним из наиболее распространенных и известных методов является аппроксимация с помощью многочленов, однако при этом точность аппроксимации повышается с увеличением степени многочлена. В данной работе остановимся на результатах аппроксимации полиномами первой и второй степени, поскольку увеличение степени полинома ведет к увеличению количества коэффициентов в одночленах, составляющих полином, и априори будет значительно проигрывать выражению (11), в котором их всего два ( $C_1$  и  $C_2$ )

Итак, поскольку для  $K = 1$  квантиль уровня  $p$  определяется выражением

$$x_{p,1} = -\frac{\ln(1-p)}{\mu - \lambda}, \quad (12)$$

то возьмем данное значение за базовое и рассмотрим следующий полином первой степени для приближения квантилей уровня  $p$  для числа подсистем  $K$ :

$$x_{p,K} \approx \hat{x}_{p,K} = x_{p,1}(C_0 + C_1p + C_2\rho + C_3K). \quad (13)$$

Далее, как и ранее, будем оптимизировать полученное выражение, минимизируя модуль максимального абсолютного значения погрешности приближения методом Нелдера–Мида:

$$\max_C \left| \frac{x_{p,K} - \hat{x}_{p,K}}{x_{p,K}} \right| \rightarrow \min,$$

что дает следующие значения коэффициентов в модели (13)

$$C_0 \approx 3,890744, \quad C_1 \approx -3,467565, \quad C_2 \approx -0,420018, \quad C_3 \approx 0,129885.$$

Погрешности аппроксимации для оценки (13) представлены в табл. 3. На рис. 5 наглядно демонстрируется качество полученного приближения.

Таблица 3

**Погрешности приближений значений квантилей распределения времени отклика системы  $x_{p,K}$ ,  $K = 2, \dots, 20$ , рассчитанные с помощью формулы (13), в сравнении с результатами имитационного моделирования**

Оцениваемая характеристика	Типы ошибок		
	MaxAPE, %	MinAPE, %	MAPE, %
Квантиль времени отклика $x_p$	47,625180	0,008507	14,401126

Теперь рассмотрим приближение искомой функции для квантилей полиномом второй степени

$$x_{p,K} \approx \hat{x}_{p,K} = x_{p,1}(C_0 + C_1p + C_2\rho + C_3K + C_4p\rho + C_5\rho K + C_6pK + C_7p^2 + C_8\rho^2 + C_9K^2). \quad (14)$$

Далее, действуя аналогичным образом, т.е. применяя метод оптимизации, получаем следующие значения для искомых коэффициентов:

$$C_0 \approx 2,992137, \quad C_1 \approx -3,872610, \quad C_2 \approx -2,262913, \quad C_3 \approx 0,576742, \quad C_4 \approx 2,434478, \\ C_5 \approx -0,333510, \quad C_6 \approx -0,026966, \quad C_7 \approx 1,240389, \quad C_8 \approx 0,195363, \quad C_9 \approx -0,009761.$$

Погрешности аппроксимации для оценки (14) представлены в табл. 4, а на рис. 6 можно наглядно проследить за качеством полученного приближения.

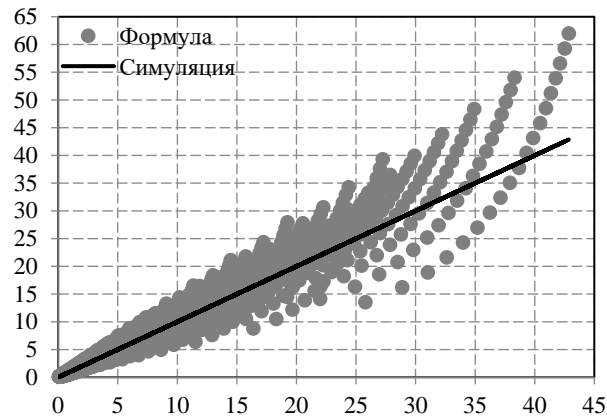


Рис. 5. Сравнение результатов имитационного моделирования квантилей распределения времени отклика  $R_K$  системы с разделением и параллельным обслуживанием для числа подсистем  $K = 2, \dots, 20$ , вероятностей  $p \in \{0,20; 0,25; \dots; 0,90\}$  и загрузки  $\rho \in \{0,10; 0,15; \dots; 0,90\}$  с формулой (13)

Fig. 5. Comparison of the results of simulation modeling of the quantiles of the distribution of the response time  $R_K$  of a fork-join queueing system for the number of subsystems  $K = 2, \dots, 20$ , probabilities  $\{0,20; 0,25; \dots; 0,90\}$  and load  $\rho \in \{0,10; 0,15; \dots; 0,90\}$  with formula (13)

Таблица 4

**Погрешности приближений значений квантилей распределения времени отклика системы  $x_{p,K}$ ,  $K = 2, \dots, 20$ , рассчитанные с помощью формулы (14), в сравнении с результатами имитационного моделирования**

Оцениваемая характеристика	Типы ошибок		
	MaxAPE, %	MinAPE, %	MAPE, %
Квантиль времени отклика $x_p$	24,362991	0,005232	12,480062

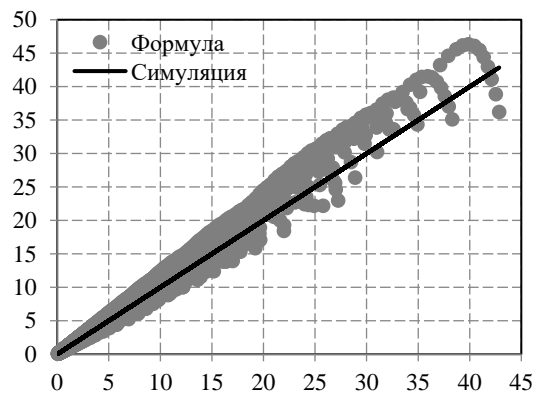


Рис. 6. Сравнение результатов имитационного моделирования квантилей распределения времени отклика  $R_K$  системы с разделением и параллельным обслуживанием для числа подсистем  $K = 2, \dots, 20$ , вероятностей  $p \in \{0,20; 0,25; \dots; 0,90\}$  и загрузки  $\rho \in \{0,10; 0,15; \dots; 0,90\}$  с формулой (14)

Fig. 6. Comparison of the results of simulation modeling of the quantiles of the distribution of the response time  $R_K$  of a fork-join queueing system for the number of subsystems  $K = 2, \dots, 20$ , probabilities  $p \in \{0,20; 0,25; \dots; 0,90\}$  and load  $\rho \in \{0,10; 0,15; \dots; 0,90\}$  with formula (14)

Таким образом, сравнивая результаты приближения формул (10), (11) и формул (13), (14), можно заключить, что приближение, полученное с использованием теории копул, имеет лучшую степень точности аппроксимации по всем трем типам характеристик (максимальная, минимальная и средняя погрешности приближения).

Разумеется, если увеличивать степень полинома, то можно добиться лучшего качества приближения и во втором случае, но при этом будет расти и число одночленов, причем для полинома второй степени их количество уже составляет десять единиц.



Кроме того, вариант построения аналитического приближения для квантилей времени отклика напрямую, благодаря использованию только результатов симуляции и оптимизации коэффициентов при одночленах, является менее содержательным, поскольку совершенно не учитывает природу моделируемых случайных величин и их зависимость в частности, а опирается лишь на теорию об аппроксимации функций нескольких переменных. Поэтому полученное таким образом приближенное аналитическое выражение представляется малоприменимым для использования при дальнейшем анализе системы (с разделением и параллельным обслуживанием), например при оптимизации ее параметров.

Использование же теории копул, наоборот, имеет под собой теоретическую основу, что позволяет использовать результаты подхода не только для определения квантилей времени отклика для промежуточных значений на заданных числовых интервалах параметров системы, но и при дальнейшем исследовании системы, давая тем самым возможность продвинуться (хоть и не в полной мере) в понимании сути явления.

### Заключение

В статье описан подход к оценке квантилей распределения времени отклика системы с разделением и параллельным обслуживанием заявок. Основывается подход на применении копул, их диагональных сечений, а также визуальном анализе данных, оптимизации и имитационном моделировании. Исследование системы с разделением считается трудной задачей, поэтому большинство исследований посвящено аппроксимации величины среднего времени отклика. Здесь же предлагается подход к оценке более тонкой характеристики данной случайной величины – ее квантилей, что на практике представляет больший интерес, поскольку характеризует величину времени пребывания заявки в системе, которая не будет превышена с заданной вероятностью.

Проведен сравнительный анализ результатов применения предложенного подхода с результатами аппроксимации квантилей времени отклика как функции нескольких переменных напрямую с помощью многочлена без применения теории копул, из которого следует, что аналитическое выражение, полученное с помощью нового метода, обладает лучшей точностью и является более компактным, требует оценки меньшего числа коэффициентов.

Использование элементов теории копул, которые по своему определению содержат в себе информацию о зависимости между случайными величинами, представляет собой некоторую теоретическую опору, на базе которой возможно построить приближения искомых величин, хотя и делая при этом некоторые эвристические заключения. Известны различные виды копул и, соответственно, их диагональных сечений, поэтому выбор в пользу степенного вида функциональной зависимости осуществляется на основе визуального анализа данных (построения графиков функций), что является одной из составных частей интеллектуального анализа данных, а также исходя из того, что в двумерном случае в более ранней работе [1] для данного типа копула-функции было получено хорошее числовое соответствие.

Немногочисленные подходы к оценке квантилей, предлагаемые на текущий момент, позволяют определять их значения только для высоких уровней вероятностей. Метод, предложенный в статье, значительно расширяет диапазон уровней вероятностей и, несмотря на все множество составляющих его этапов, является менее сложным в реализации, поскольку известные подходы либо требуют длительной вычислительной процедуры, либо уступают в качестве получаемых оценок, требуя при этом также проведения имитационного моделирования на промежуточных этапах построения оценок. Кроме того, представленный в статье подход не накладывает ограничений на структуру системы с разделением и параллельным обслуживанием и может быть применен для систем с другими вариантами распределений для входящего потока и времени обслуживания.

### Список источников

1. Горбунова А.В., Лебедев А.В. О новом подходе к оценке квантилей времени отклика системы с разделением и параллельным обслуживанием заявок // Управление большими системами: сборник трудов (электронный журнал). 2024. № 108. С. 6–21. doi: 10.25728/ubs.2024.108.1

2. Gorbunova A.V., Lebedev A.V. Copulas and quantiles in Fork-Join queueing systems // *Advances in Systems Science and Applications*. V. 24 (1). P. 1–19. doi: 10.25728/assa.2024.24.1.1585
3. Gorbunova A.V., Lebedev A.V. Correlations of the Sojourn Times of Subtasks in Fork-Join Queueing Systems with M|M|1-type Subsystems // *Advances in Systems Science and Applications*. 2024. V. 24 (2). P. 1–18. doi: 10.25728/assa.2024.2024.02.1641
4. Gorbunova A.V., Lebedev A.V. Nonlinear approximation of characteristics of a Fork-Join queueing system with pareto service as a model of parallel structure of data processing // *Mathematics and Computers in Simulation*. 2023. V. 214. P. 409–428. doi: 10.1016/j.matcom.2023.07.029
5. Nelson R., Tantawi A.N. Approximate analysis of fork/join synchronization in parallel queues // *IEEE Transactions on Computers*. 1988. V. 37 (6). P. 739–743. doi: 10.1109/12.2213
6. Varma S., Makowski A.M. Interpolation approximations for symmetric Fork-Join queues // *Performance Evaluation*. 1994. V. 20. P. 245–265. doi: 10.1016/0166-5316(94)90016-7
7. Kemper B., Mandjes M. Mean sojourn time in two-queue fork-join systems: Bounds and approximations // *OR Spectrum*. 2012. V. 34. P. 723–742. doi: 10.1007/s00291-010-0235-y
8. Thomasian A. Analysis of fork/join and related queueing systems // *ACM Computing Surveys (CSUR)*. 2014. V. 47 (2). P. 1–71. doi: 10.1145/2628913
9. Qiu Zh., Perez J.F., Harrison P.G. Beyond the mean in fork-join queues: Efficient approximation for response-time tails // *Performance Evaluation*. 2015. V. 91. P. 99–116. doi: 10.1016/j.peva.2015.06.007
10. Nguyen M., Alesawi S., Li N., Che H., Jiang H. A black-box Fork-Join latency prediction model for data-intensive applications // *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*. 2020. V. 31 (9). P. 1983–2000. doi: 10.1109/TPDS.2020.2982137
11. Enganti P., Rosenkrantz T., Sun L., Wang Z., Che H., Jiang H. ForkMV: Mean-and-variance estimation of Fork-Join queueing networks for datacenter applications // *Proc. IEEE International Conference on Networking, Architecture and Storage (NAS)*. 2022. P. 1–8. doi: 10.1109/NAS55553.2022.9925531
12. Sethuraman S. Analysis of Fork-Join Systems: Network of Queues with Precedence Constraints. Boca Raton : CRC Press, 2022. 104 p.
13. Жидкова Л.А., Моисеева С.П. Исследование системы параллельного обслуживания кратных заявок простейшего потока // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2011. Т. 17, № 4. С. 49–54.
14. Моисеева С.П., Панкратова Е.В., Убонова Е.Г. Исследование бесконечнолинейной системы массового обслуживания с разнотипным обслуживанием и входящим потоком марковского восстановления // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2016. Т. 35, № 2. С. 46–53. doi: 10.17223/19988605/35/5
15. Nelsen R. An introduction to copulas. Berlin : Springer, 2006. 269 p.
16. Лебедев А.В. Верхняя граница среднего минимума зависимых случайных величин с известным коэффициентом Кендалла // *Теория вероятностей и ее применения*. 2019. Т. 64, вып. 3. С. 578–589. doi: 10.4213/tvp5199
17. Nelder J.A., Mead R. A Simplex Method for Function Minimization // *Computer Journal*. 1965. V. 7 P. 308–313.
18. Колмогоров А.Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного и сложения // *Доклады АН СССР*. 1957. Т. 114, № 5. С. 953–956.
19. Арнольд В.И. О представлении функций нескольких переменных в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных // *Математическое просвещение*. 1958. № 3. С. 41–61.
20. Горбань А.Н. Обобщенная аппроксимационная теорема и вычислительные возможности нейронных сетей // *Сибирский журнал вычислительной техники*. 1998. Т. 1, № 1. С. 11–24.
21. Бутырский Е.Ю., Кувалдин И.А., Чалкин В.П. Аппроксимация многомерных функций // *Научное приборостроение*. 2010. Т. 20, № 2. С. 82–92.

## References

1. Gorbunova, A.V. & Lebedev, A.V. (2024a) On a new approach to estimating response time quantiles of a Fork-Join queueing system. *Upravlenie bol'shimi sistemami – Large-Scale Systems Control*. 108. pp. 6–21. DOI: 10.25728/ubs.2024.108.1
2. Gorbunova, A.V. & Lebedev, A.V. (2024b) Copulas and quantiles in Fork-Join queueing systems. *Advances in Systems Science and Applications*. 24(1). pp. 1–19. DOI: 10.25728/assa.2024.24.1.1585
3. Gorbunova, A.V. & Lebedev, A.V. (2024c) Correlations of the Sojourn Times of Subtasks in Fork-Join Queueing Systems with M|M|1-type Subsystems. *Advances in Systems Science and Applications*. 24(2). pp. 1–18. DOI: 10.25728/assa.2024.2024.02.1641
4. Gorbunova, A.V. & Lebedev, A.V. (2023) Nonlinear approximation of characteristics of a Fork-Join queueing system with Pareto service as a model of parallel structure of data processing. *Mathematics and Computers in Simulation*. 214. pp. 409–428. DOI: 10.1016/j.matcom.2023.07.029
5. Nelson, R. & Tantawi, A.N. (1988) Approximate analysis of fork/join synchronization in parallel queues. *IEEE Transactions on Computers*. 37(6). pp. 739–743. DOI: 10.1109/12.2213
6. Varma, S. & Makowski, A.M. (1994) Interpolation Approximations for Symmetric Fork-Join Queues. *Performance Evaluation*. 20. pp. 245–265. DOI: 10.1016/0166-5316(94)90016-7
7. Kemper, B. & Mandjes, M. (2012) Mean sojourn time in two-queue fork-join systems: Bounds and approximations. *OR Spectrum*. 34. pp. 723–742. DOI: 10.1007/s00291-010-0235-y

8. Thomasian, A. (2014) Analysis of fork/join and related queueing systems. *ACM Computing Surveys (CSUR)*. 47(2). pp. 1–71. DOI: 10.1145/2628913
9. Qiu, Zh., Perez, J.F. & Harrison, P.G. (2015) Beyond the mean in fork-join queues: Efficient approximation for response-time tails. *Performance Evaluation*. 91. pp. 99–116. DOI: 10.1016/j.peva.2015.06.007
10. Nguyen, M., Alesawi, S., Li, N., Che, H. & Jiang, H. (2020) A black-box Fork-Join latency prediction model for data-intensive applications. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*. 31(9). p. 1983–2000. DOI: 10.1109/TPDS.2020.2982137
11. Enganti, P., Rosenkrantz, T., Sun, L., Wang, Z., Che, H. & Jiang, H. (2022) ForkMV: Mean-and-variance estimation of Fork-Join queueing networks for datacenter applications. *Proc. IEEE International Conference on Networking, Architecture and Storage (NAS)*. pp. 1–8. DOI: 10.1109/NAS55553.2022.9925531
12. Sethuraman, S. (2022) *Analysis of Fork-Join systems: Network of queues with precedence constraints*. Boca Raton: CRC Press.
13. Zhidkova, L.A. & Moiseeva, S.P. (2011) Research of the parallel service system of multiple requests of the simplest flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 17(4). pp. 49–54.
14. Moiseeva, S.P., Pankratova, E.V. & Ubonova, E.G. (2016) Research of infinite-line queueing system with heterogeneous service and input Markov renewal flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 35(2). pp. 46–53. DOI: 10.17223/19988605/35/5
15. Nelsen, R. (2006) *An Introduction to Copulas*. Berlin, Germany: Springer.
16. Lebedev, A.V. (2019) Upper Bound for the Expected Minimum of Dependent Random Variables with Known Kendall's Tau. *Teoriya veroyatnostey i ee primeneniya – Theory of Probability and its Applications*. 64(3). pp. 465–473. DOI: 10.1137/S0040585X97T989623
17. Nelder, J.A. & Mead, R.A (1965) Simplex Method for Function Minimization. *Computer Journal*. 7. pp. 308–313.
18. Kolmogorov, A.N. (1957) O predstavlenii nepreryvnykh funktsiy neskol'kikh peremennykh v vide superpozitsii nepreryvnykh funktsiy odnogo peremennogo i slozheniya [On the representation of continuous functions of many variables by superposition of continuous functions of one variable and addition]. *Doklady AN SSSR*. 114(5). pp. 953–956.
19. Arnold, V.I. (1958) O predstavlenii funktsiy neskol'kikh peremennykh v vide superpozitsii funktsiy men'shego chisla peremennykh [On the representation of functions of several variables by superpositions of functions of fewer variables]. *Matematicheskoe prosveshchenie*. 3. pp. 41–61.
20. Gorban, A.N. (1998) Obobshchennaya approksimatsionnaya teorema i vychislitel'nye vozmozhnosti neyronnykh setey [Generalized approximation theorem and computational capabilities of neural networks]. *Sibirskiy zhurnal vychislitel'noy tekhniki*. 1(1). pp. 11–24.
21. Butyrskiy, E.Yu., Kuvaldin, I.A. & Chalkin, V.P. (2010) Approksimatsiya mnogomernykh funktsiy [Multidimensional functions' approximation]. *Nauchnoe priborostroenie*. 20(2). pp. 82–92.

**Информация об авторе:**

**Горбунова Анастасия Владимировна** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук (Москва, Россия). E-mail: avgorbunova@list.ru

*Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.*

**Information about the authors:**

**Gorbunova Anastasia V.** (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation). E-mail: avgorbunova@list.ru

*The author declares no conflicts of interests.*

*Поступила в редакцию 24.03.2025; принята к публикации 02.09.2025*

*Received 24.03.2025; accepted for publication 02.09.2025*

Научная статья  
УДК 004.94  
doi: 10.17223/19988605/72/3

## Конструктивный подход к оцениванию статистической устойчивости моделей сложных систем

Юлия Валентиновна Доронина<sup>1</sup>, Александр Владимирович Скатков<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Севастопольский государственный университет, Севастополь, Россия

<sup>2</sup> Институт природно-технических систем, Севастополь, Россия

<sup>1</sup> YVDoronina@sevsu.ru

<sup>2</sup> vm1945@yandex.ru

**Аннотация.** Рассматриваются проблемы квалиметрического оценивания полимодельных комплексов на основе полумарковских моделей. Предложены конструктивный подход и прикладные основы в развитие нового раздела квалиметрии – моделиметрии. При анализе статистической устойчивости функций распределения времени пребывания системы в выделенных состояниях предложено применение критерия Колмогорова–Смирнова, что позволило сравнивать выборочные данные на основе расстояния между этими функциями распределения. Оценивание их свойств позволяет принимать решения с минимальным риском ошибок 1-го и 2-го рода.

**Ключевые слова:** квалиметрия; статистическая устойчивость; адекватность модели; сложная техническая система; вероятность перехода.

**Для цитирования:** Доронина Ю.В., Скатков А.В. Конструктивный подход к оцениванию статистической устойчивости моделей сложных систем // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2025. № 72. С. 28–38. doi: 10.17223/19988605/72/3

Original article  
doi: 10.17223/19988605/72/3

## A constructive approach to evaluating the statistical stability of models for complex systems

Yulia V. Doronina<sup>1</sup>, Alexander V. Skatkov<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Sevastopol State University, Sevastopol, Russia

<sup>2</sup> Institute of Natural and Technical Systems, Sevastopol, Russia

<sup>1</sup> YVDoronina@sevsu.ru

<sup>2</sup> vm1945@yandex.ru

**Abstract.** The problems of qualimetric assessment of polymodel complexes based on semi-Markov models are considered. A constructive approach and applied foundations for the development of a new branch of qualimetry, modelometry, are proposed. When analyzing the statistical stability of the distribution functions of the system's residence time in selected states, the Kolmogorov-Smirnov criterion was proposed, which made it possible to compare sample data based on the distance between these distribution functions. Evaluating their properties allows you to make decisions with minimal risk of errors of the 1st and 2nd kind.

**Keywords:** qualimetry; statistical stability; adequacy of the model; complex technical system; probability of transition.

**For citation:** Doronina, Yu.V., Skatkov, A.V. (2025) A constructive approach to evaluating the statistical stability of models for complex systems. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 72. pp. 28–38. doi: 10.17223/19988605/72/3

## Введение

Проектирование и поддержание эффективного функционирования сложных технических систем (СТС) в большинстве случаев представляют собой нетривиальные задачи, которые решаются зачастую комплексно, что порождает ряд объективных трудностей. Заложенные при проектировании конструктивные особенности влияют на дальнейшую эксплуатацию и могут быть эффективно контролируемы. При эксплуатации СТС добиться четкого следования регламентным состояниям при наличии минимальной неопределенности, не влияющей на процесс оценивания состояний, затруднительно. Это обусловлено следующими основными факторами:

- 1) конструктивно-эксплуатационной сложностью СТС (т.е. сложность самой системы и потенциальная сложность ее функционирования);
- 2) нестационарностью условий эксплуатации (невозможность получения однородной и стационарной среды, в которой функционирует СТС);
- 3) наличием определенного уровня потенциальной неопределенности при эксплуатации (за счет внешних условий, явлений или вмешательства человека) и др.

Для решения проблем подобного характера применяются различные классы моделей, например детерминированные, на основе дифференциальных уравнений, стохастические модели Маркова, уравнения диффузии как частный вид дифференциальных уравнений и т.п. Для дифференциальных уравнений оценивание качества моделей как задача квалиметрии полностью решена: может быть исследована их устойчивость по Ляпунову, которая предполагает изучение поведения решений при малых изменениях начальных условий. Для стохастических моделей определенных классов полностью проработанные методы квалиметрии отсутствуют (рис. 1).

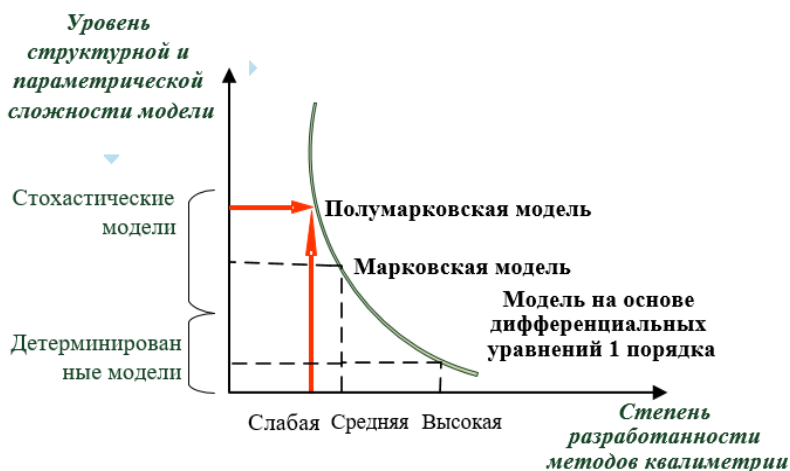


Рис. 1. Схема, отражающая степень проработанности квалиметрических методов в различных видах моделей

Fig. 1. A scheme reflecting the degree of elaboration of qualimetric methods in various types of models

Приведенная на рис. 1 схема укрупненно иллюстрирует проблему слабой проработанности методов квалиметрии, например, для полумарковских моделей, на фоне наличия методов оценки качества детерминированных моделей. Это приводит к необходимости систематизации квалиметрических подходов в моделировании в целом и, более того, необходимости создания конструктивного подхода к методологическим аспектам моделирования.

В основе конструктивного подхода решения задач квалиметрии, на наш взгляд, следует понимать триединую задачу:

I – методическое обеспечение решения проблемы (т.е. формирование методологической базы формализованного описания проблемы квалиметрии моделей);

II – алгоритмическую проработку методологии (алгоритмизация экспериментальной части задач, обеспечивающих решение проблемы квалиметрии моделей);

III – сведение задачи квалиметрии к моделям принятия решений (т.е. формирование планов экспериментальной части, обеспечивающих решение проблемы квалиметрии моделей в рамках конкретной задачи, которая решается исследуемыми моделями).

Таким образом, учитывая реализованные этапы I–III и используя имитационное моделирование как инструмент получения статистик, мы можем получить основу конструктивного решения задач квалиметрии комплексно на основе полумарковской модели функционирования СТС.

## 1. Статистическая устойчивость как задача квалиметрии сложных объектов и их моделей

Оценивание статистической устойчивости представляет собой важную задачу квалиметрического анализа не только сложных объектов, но и их моделей. Понятие квалиметрии устоялось в рамках науки об измерении и количественной оценке качества объектов и процессов реального мира. Термин «квалиметрия» является стандартизованным в ГОСТ 15467–79 «Управление качеством продукции. Основные понятия. Термины и определения» и относится исключительно к этой области [1].

Основные задачи квалиметрии в области оценивания качества объектов производства:

- обоснование номенклатуры показателей качества;
- разработка методов определения показателей качества объектов и их оптимизации;
- оптимизация типоразмеров и параметрических рядов изделий;
- разработка принципов построения обобщенных показателей качества и обоснование условий их использования в задачах стандартизации и управления качеством.

В [2–4] показано, что квалиметрия выступает взаимосвязанной системой теорий различной степени общности, в числе которых специальные квалиметрии, к ним относятся:

- а) экспертная квалиметрия, где оценки даются экспертами или автоматизированными экспертными системами;
- б) вероятностно-статистическая квалиметрия, использующая методы теории вероятностей и математической статистики, оценивая однородность генеральной совокупности и выборки, совпадение законов распределения, эргодичность, марковость и т.п.;
- в) индексная квалиметрия, использующая меры качества, полученные при нормировке на базе индексации (сравнения);
- г) таксономическая квалиметрия (или квалиметрическая таксономия), основывающаяся на классах качества (квалитаксонах) объекта, при этом рассматриваются вид, сорт и другие характеристики объекта и такие же характеристики классифицирующей системы и др.

Таким образом, на основе анализа механизмов явлений и процессов, протекающих в сложных объектах, устоялись терминология и методология квалиметрических метрик качества [5–7].

Несмотря на наличие методологических оснований квалиметрии сложных объектов, модели, как и их прообразы, зачастую не могут быть оценены на основании общего подхода в связи со следующими факторами:

- сложность предметных областей, нестационарность характеристик функционирования объектов приводит к гибридизации и многомерности моделей, что, в свою очередь, усложняет их квалиметрическое оценивание;
- в ряде случаев ограниченная или полная неопределенность начальных условий при оценивании качества моделей;
- требования, накладываемые на объем данных, подлежащих оцениванию по результатам работы моделей;
- нет регулирующих нормативных актов, заказчик и рад бы провести имитационное исследование, но оно не входит в перечень рекомендованных и в спецификацию работ, особенно для государственных предприятий, не может быть включено в прямом виде [8, 9] и др.

Проблема квалиметрии моделей существует и является крайне актуальной. Это более сложная задача, чем построение самой модели, поскольку, например, для полимодельного гибридного комплекса

требуется определить (и / или задать априорно) допустимые уровни чувствительности, устойчивости, параметрической настройки или организованности, адекватности и др.

Квалиметрия моделей, например в [3–4], рассматривалась в аспекте полимоделирования. Предложено выполнять сопоставление модели объекту по целостному свойству через измерение расстояния  $\rho(M, ob)$  между соответствующими точками в  $n$ -мерном пространстве элементарных свойств объекта. В качестве аргумента в соответствующих функционалах рассматривают величину разности выходных состояний объекта  $y_j(Ob)$  и модели  $y_j(M)$ . В этом случае условие адекватности  $|y_j(Ob) - y_j(M)| \leq \varepsilon$  по  $n$  свойствам обобщается в условие  $\rho(M, ob) \leq \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ . Метрики на основе расстояния  $\rho(M, ob)$  в [3] рекомендовано использовать для оценки моделей по адекватности.

На примере исследования адекватности модели можно видеть, что для динамических нестационарных моделей это оценка конкретного момента или интервала времени, в течение которого модель функционирует. Расход ресурса объекта исследований, изменения внешней среды, условий моделирования и другие факторы приводят к тому, что метрика адекватности модели не является актуальной. Неразрешимость задачи этого уровня нивелируется оцениванием статистических свойств не объекта, а самой модели. То есть в процессе исследования модели решаются вопросы:

- (1) в какой степени свойства модели зависят от случайных возмущений в точке, в области, системная характеристика;
- (2) как зависит качество модели от рефакторинга (модификации программы) или субъекта ее модификации (программиста);
- (3) связь и взаимообусловленность внутренних и внешних (структуры кода, программного управления и т.п.) свойств моделей и др.

На рис. 2. показано взаимодействие задач, процессов и субъектов процесса моделирования.

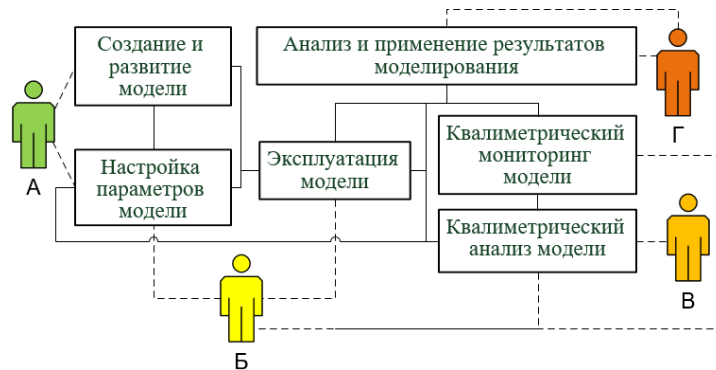


Рис. 2. Эргодические процессы принятия решений, определяющие квалиметрические свойства моделей с разделением полномочий лиц, принимающих решения

Fig. 2. Ergodic decision-making processes that determine the qualimetric properties of models with the separation of powers of decision makers

Приведенные на рис. 2. задачи и процессы, как правило, управляются одним или несколькими лицами, принимающими решения (ЛПР), исходя из особенностей гибридных моделей и предметных областей с учетом факторов (1)–(3). Это, безусловно, приводит к проблемам оценивания качества моделей и неприменимости известных метрик либо ограничениям их применения. Так, на рис. 2 можно видеть, что полномочия ЛПР могут значительно отличаться: например, А – решения по созданию, развитию и настройке моделей; Б – решения по настройке и эксплуатации моделей; В – решения по квалиметрическому мониторингу моделей; Г – решения по анализу и применению результатов моделирования и др. Подобная декомпозиция задач может быть реализована различными способами, исходя из практической целесообразности, но в целом способствует сокращению времени на процесс принятия решений и выделяет группы полномочий локальных ЛПР.

Проблема оценивания адекватности модели представляет собой известную сложность в связи с ее нестационарностью и сильной зависимостью от условий моделирования, качества данных, качества

их обработки и задач моделирования в конкретный момент времени. На практике при исследовании свойств объекта (СТС) модель является «первичной», т.е. объект подбирается под существующую модель. Для нивелирования приведенных проблем целесообразно оценивать статистические свойства модели, разделяя внутренние (зависимость от генератора случайных чисел, влияние размаха входных данных на устойчивость результата, зависимость от объема выборки и т.п.) и внешние свойства модели (управляемость, структурная открытость и т.п. с точки зрения программного кода).

Авторами в [10] рассматривалась проблема оценивания статистической устойчивости квазигомогенной стационарной марковской модели (ММ) без поглощающих состояний, описывающей функционирования СТС. Полученные результаты позволили сформировать комплекс квалиметрических характеристик таких моделей на основе базовых мер статистической устойчивости, волатильности и их свойств.

Далее будет рассмотрен квалиметрический анализ полумарковских моделей (ПММ) и предложены меры их оценивания.

## 2. Оценивание статистической устойчивости как задача квалиметрического анализа полумарковских моделей на основе комплекса специальных метрических характеристик

В случаях, когда требуется детализованное представление о функционировании СТС с учетом времени пребывания в каждом из состояний, используется подход, основанный на идее о полумарковости процессов [11].

Модели в [10] рассматриваются при отсутствии поглощающих состояний, СТС находится в стационарном (квазистационарном) режиме,  $S_0$  – стартовое состояние системы;  $S_n$  –  $n$ -е состояние, в котором оказывается система после  $n$ -го перехода.

Для того чтобы процесс был определен для всех  $t > 0$ , считается, что на любом конечном отрезке времени  $[0; \tau]$  может произойти лишь конечное число переходов. Построенный таким образом процесс  $\{S_k; \Theta_k; t > 0\}$ , где  $S_k$  – состояние СТС на  $k$ -м шаге,  $\Theta_k$  – время пребывания в состоянии  $S_k$ , принято называть полумарковским процессом [11].

Время пребывания СТС в некотором состоянии  $S_k$  – случайная величина (СВ)  $\Theta_k$  с функцией распределения (ФР)  $F_k = P\{\Theta_k \leq t\}$ , у ФР  $F_k(t)$  существует плотность  $f_k(t)$ .

В дальнейших рассуждениях символом  $\xrightarrow{M_x}$  будем обозначать отображение, осуществляемое имитационной моделью (ИМ)  $M_x$ ;  $M_m$  – обозначения ИМ с результатом в виде матрицы. Обозначим  $D$  множество допустимых планов оценивания статистической устойчивости моделей ( $J = |D|$ ), тогда для ПМП реализуемый план моделирования имеет вид:

$$\Pi_{j,k} \langle \cdot \rangle, \Omega_j \langle P_{j,k}, F_{j,k} \rangle, \quad (1)$$

где  $\langle \cdot \rangle$  – вектор параметров моделирования (например, для модели Маркова  $n$  – скаляр, задающий число сгенерированных цепочек ММ  $\langle S_0, S_1, \dots, S_n \rangle$ ,  $n = |N|$ ,  $l_m$  – длина  $m$ -й цепи Маркова,  $l = |L|$ ,  $k$  – кратность запусков модели,  $k = |K|$ );  $P = \|P_{ij}\|$  – матрица вероятностей пребывания СТС в состояниях,  $P_{j,k}$  – элемент такой матрицы;  $F = \|F_{ij}\|$  – матрица ФР времен пребывания СТС в состояниях,  $F_{j,k}$  – элемент такой матрицы.

В качестве оценочных параметров примем  $\gamma_p^{M_x}, \gamma_F^{M_x}$  как оценки текущих статистик полумарковской модели ПММ  $M_x$  по полученным результатам экспериментов  $\Omega_j \langle P_{j,k}, F_{j,k} \rangle$ ;  $\tilde{\gamma}_{p,F} \langle \tilde{\gamma}_{p,j,k}, \tilde{\gamma}_{F,j,k} \rangle$  – ожидаемые ЛПР оценки статистики ПММ  $M_x$  в виде линейных векторов  $\tilde{\gamma}_{p,j,k}, \tilde{\gamma}_{F,j,k}$ ;  $\Delta \gamma_{p,F} \langle \Delta \gamma_{p,j,k}, \Delta \gamma_{F,j,k} \rangle$  – мера близости текущей и заданной (ожидаемой) оценок статистики модели  $M_x$



в виде линейных векторов  $\Delta\gamma_{p_{j,k}}, \Delta\gamma_{F_{j,k}}$ ;  $\varepsilon_p$  – характеристика точности модели по  $p_{j,k}$ ;  $\varepsilon_F$  – характеристика точности модели по  $F_{j,k}$ ;  $p_1, p_2$  – соответствующие доверительные вероятности оценок параметров модели.

В качестве оценочного параметра примем  $\gamma^{M_x}$  как оценку текущей статистики модели  $M_x$  по полученным результатам экспериментов в виде вектора  $\omega_j$ ;  $\tilde{\gamma}$  – ожидаемая ЛППР оценка статистики модели  $M_x$ ;  $\Delta\gamma$  – мера близости текущей и заданной (ожидаемой) оценок статистики модели  $M_x$ ;  $\varepsilon$  – характеристика точности модели;  $p$  – доверительная вероятность оценки параметров модели.

Тогда модель  $M_x$ , реализованная в рамках одного из видов математических схем моделирования, является статистически устойчивой, если для квазиметрической оценки ее устойчивости, начиная с некоторых  $n_i \geq n_0$ ,  $\langle \cdot \rangle$  будет выполняться условие

$$\left| \gamma^{M_x}(\omega \langle \cdot \rangle) - \tilde{\gamma} \right|_{\varepsilon, p} \leq \Delta\gamma \quad (2)$$

с учетом условия сходимости по статистической вероятности [12].

Под  $P$ -устойчивостью ПМП будем понимать обеспечение максимального отклонения в матрице  $P$  не более чем на  $\varepsilon_p$ ;  $F$ -устойчивость ПМП будем понимать как обеспечение максимального отклонения в матрице  $F$  не более чем на  $\varepsilon_F$ .

Для обеспечения методического единства конструктивного подхода необходимо ввести ряд формальных определений.

*Определение 1 (полная устойчивость в классе моделей  $P$  и в классе моделей  $F$ ).* Назовем полностью устойчивыми ( $P$ - и  $F$ -устойчивыми) результаты моделирования СТС на основе ПМП в виде статистик  $\Omega_j \langle p_{j,k}, F_{j,k} \rangle$ , если для любых  $\varepsilon_p > 0$ ,  $\varepsilon_F > 0$  можно указать  $\delta > 0$  такое, что из неравенств

$$\begin{cases} \left| \gamma_p^{M_x} \langle n_j, l_j, k_j, \Omega_j \langle p_{j,k} \rangle \rangle - \tilde{\gamma}_p \langle \tilde{\gamma}_{p_{j,k}} \rangle \right|_{\varepsilon_p, p_1} \leq \Delta\gamma_p \langle \Delta\gamma_{p_{j,k}} \rangle, \\ \left| \gamma_F^{M_x} \langle n_j, l_j, k_j, \Omega_j \langle F_{j,k} \rangle \rangle - \tilde{\gamma}_F \langle \tilde{\gamma}_{F_{j,k}} \rangle \right|_{\varepsilon_F, p_2} \leq \Delta\gamma_F \langle \Delta\gamma_{F_{j,k}} \rangle, \end{cases} \quad (3)$$

следуют неравенства

$$\begin{cases} \left| \gamma_p^{M_x} \langle n_j, l_j, k_j, \Omega_j \langle p_{j,k} \rangle \rangle - \tilde{\gamma}_p \langle \tilde{\gamma}_{p_{j,k}} \rangle \right|_{\varepsilon_p, p_1} \leq \varepsilon_p, \\ \left| \gamma_F^{M_x} \langle n_j, l_j, k_j, \Omega_j \langle F_{j,k} \rangle \rangle - \tilde{\gamma}_F \langle \tilde{\gamma}_{F_{j,k}} \rangle \right|_{\varepsilon_F, p_2} \leq \varepsilon_F \end{cases} \quad (4)$$

при  $t \geq t_0$  и с учетом условия сходимости по статистической вероятности, что определяет в общем случае принадлежность полученных результатов статистик окрестностям  $\delta > 0$  точек  $\varepsilon_p > 0$ ,  $\varepsilon_F > 0$ .

*Определение 2 (частичная устойчивость моделей в классе моделей  $P$  или в классе моделей  $F$ ).* Назовем частично устойчивыми (или устойчивыми в классе моделей  $P$  или в классе моделей  $F$ ) результаты моделирования СТС на основе ПМП в виде статистик  $\Omega_j \langle p_{j,k}, F_{j,k} \rangle$ , если для любых  $\varepsilon_p > 0$ ,  $\varepsilon_F > 0$  можно указать  $\delta > 0$  такое, что из одного из неравенств (3) следует одно соответствующее неравенство из (4) при  $t \geq t_0$  и с учетом условия сходимости по статистической вероятности, что определяет в общем случае принадлежность полученных результатов статистик окрестностям  $\delta > 0$  точек  $\varepsilon_p > 0$ ,  $\varepsilon_F > 0$ .

На основе определений 1 и 2 возможна постановка ряда исследовательских задач. Например, определение дрейфа ФР времени пребывания СТС в состояниях при построении имитационных моделей ее функционирования, оценивание дрейфа ФР при условии изменчивости среднеквадратического отклонения и математического ожидания или одного из них.

Перспективы получения аналитических оценок в соответствии с определениями 1 и 2 на настоящее время отсутствуют, в связи с чем предлагается перейти к вычислительным оценкам, которые можно получить по результатам наблюдений за реальными процессами и в результате моделирования.

**Определение 3.** Квалиметрическая задача моделирования конструктивно решена, если получена тройка:  $M \langle B, T, K \rangle$ , где  $B$  – тип модели (может быть определен согласно схемам моделирования  $D, Q, A, P$ ) [8];  $T$  – тип топологии гибридной модели [13];  $K$  – метрики качества метамодели  $M$ .

Определения 1–3 в совокупности являются основой методологической части конструктивного подхода к оцениванию статистической устойчивости моделей сложных систем. В отличие от проверки адекватности и чувствительности модели, предложенный подход не только учитывает эти аспекты в рамках анализа их статистической устойчивости, но и позволяет принимать решения с минимальным риском ошибок 1-го и 2-го рода.

Далее рассмотрим результаты проведенного моделирования по предложенным метрикам определений 1–3.

### 3. Пример и результаты моделирования оценок статистической устойчивости полумарковских моделей на основе конструктивного подхода

Исследуем статистическую устойчивость ПММ в предположении о наличии точечного возмущения в матрице  $F$  на основе критерия Колмогорова–Смирнова [11]. Критерий Колмогорова–Смирнова предназначен для проверки согласия эмпирического распределения с заданным непрерывным теоретическим распределением, т.е. для проверки гипотезы  $H_0: F(x) = F_0(x)$  при всех возможных значениях аргумента  $x$ , где  $F(x)$  – функция распределения элементов выборки,  $F_0(x)$  – заданная (т.е. полностью известная) функция теоретического распределения. В нашем случае ФР  $F(x)$  и  $F_0(x)$  представляют собой ФР времен пребывания СТС в состояниях  $i$  и  $j$  [14]:

$$\sqrt{n}D_n(\theta^*) = \sqrt{n} \sup_x |F_n(x) - F(x; \theta^*)|, \quad (5)$$

где  $n$  – объем исследуемой выборки,  $D_n(\theta^*)$  – дисперсия оценки параметра  $\theta^*$ .

Схема процесса моделирования следующая: определяется множество состояний СТС, формируется матрица переходов и соответствующий ей граф переходов в состояния.

На основе специально разработанного программного продукта [10] реализуется построение цепочки переходов по матрице вероятностей переходов (дивергенция матрицы выбиралась равной 1, исходя из формулы  $\text{div} \|P_{ij}\| = \min P_{ij} / \max P_{ij}$ , чтобы получить сбалансированный процесс для формирования базовых статистик; рис. 3).

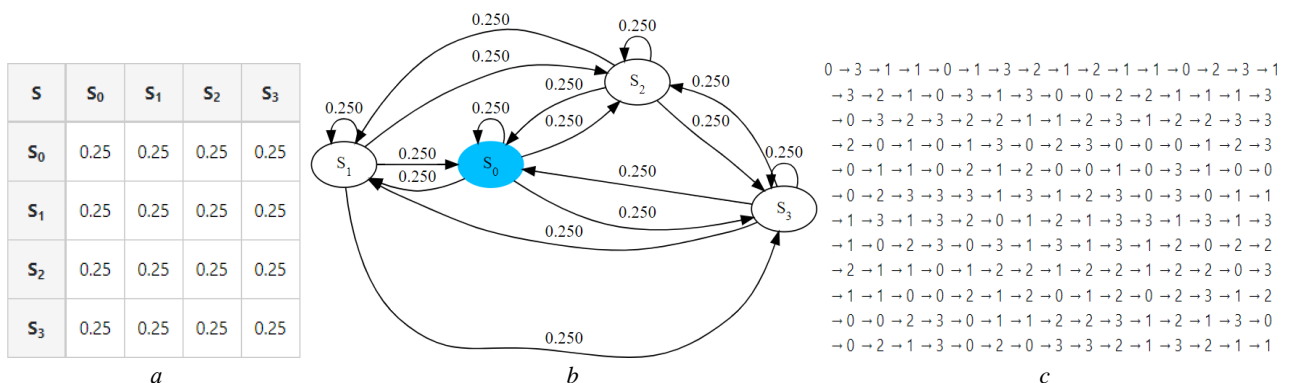


Рис. 3. Этапы моделирования процесса функционирования сложной технической системы: матрица переходов (a); граф состояний (b); фрагмент полученных реализаций переходов (фрагмент цепочки переходов в состояния) (c)  
Fig. 3. Stages of modeling the process of functioning of complex technical systems: a) transition matrix; b) graph of states; c) fragment of the obtained transition implementations (fragment of the chain of transitions to states)

Для рассматриваемого примера:  $S_0$  – начальное состояние СТС,  $S_1$  – состояние отказа технических или программных средств,  $S_2$  – состояние восстановления,  $S_3$  – состояние профилактики; длина цепочки переходов  $l = 1\ 125$ ; распределение времен пребывания в состояниях в рассматриваемом примере равномерное с математическим ожиданием  $m = 50$  (см. рис. 3).

Приведенные на рис. 3 элементы отображения этапов моделирования позволяют получать характеристики процесса, целесообразные для оценивания квалиметрических свойств моделей. Например, на рис. 3 показана визуализация матрицы переходов, графа переходов с отображением начального состояния и полученной цепочки переходов при соответствующих начальных заданных параметрах моделирования.

Для оценивания временных характеристик процесса каждому состоянию  $S_i$  ставится в соответствие время пребывания в конкретный момент времени (на  $j$ -м шаге цепочки переходов) с учетом вида распределения случайной величины, по каждому состоянию формируются гистограммы распределения времен пребывания в них (рис. 4). В табл. 1 приведена описательная статистика полученных значений времен пребывания по каждому из состояний  $S_0$ – $S_3$  СТС.

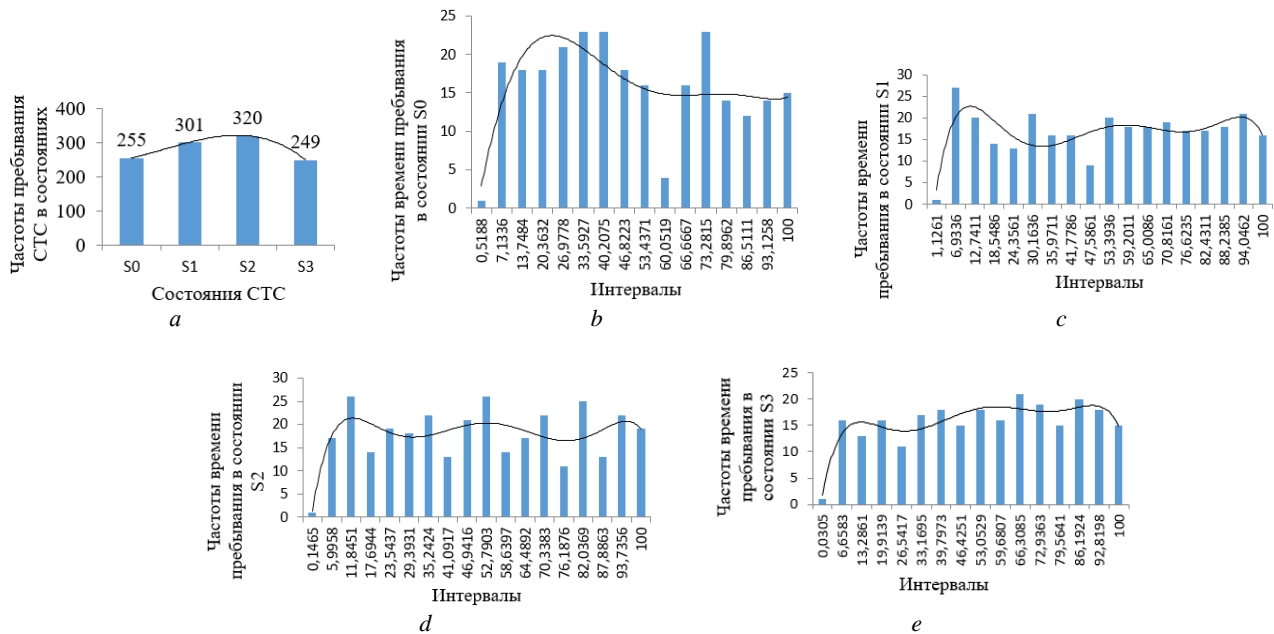


Рис. 4. Результаты моделирования: гистограмма частот пребывания сложной технической системы в состояниях  $S_0$ – $S_3$  (a); распределение времен пребывания в состоянии  $S_0$  (b); распределение времен пребывания в состоянии  $S_1$  (c); распределение времен пребывания в состоянии  $S_2$  (d); распределение времен пребывания в состоянии  $S_3$  (e)  
Fig. 4. Simulation results: a) a histogram of the frequencies of a complex technical system in states  $S_0$ – $S_3$ ; b) distribution of residence times in  $S_0$ ; c) distribution of residence times in  $S_1$ ; d) distribution of residence times in  $S_2$ ; e) the distribution of residence times in the  $S_3$

Таблица 1

Описательная статистика полученных значений времен пребывания  
по каждому из состояний СТС

Метрика	Значение			
	$S_0$	$S_1$	$S_2$	$S_3$
Среднее	46,3	49,7	49,4	51,6
Стандартная ошибка	1,8	1,72	1,6	1,8
Медиана	41,6	50,8	49,8	52,4
Стандартное отклонение	28,3	29,9	28,9	28,1
Дисперсия выборки	798,7	893,9	835,5	787,9
Экспесс	–1,1	–1,3	–1,2	–1,1
Асимметричность	0,2	–0,1	0,0	–0,1

Полученные результаты моделирования (см. рис. 4, табл. 1) и значения метрик отражают этап получения статистических оценок одной реплики процесса функционирования СТС, которая при использовании критерия Колмогорова–Смирнова выступит в роли заданного непрерывного теоретического распределения  $F_0(x)$  в формуле (5).

Этапы 1, 2 повторяются для получения другой реплики полумарковского процесса функционирования СТС. Вторая полученная реплика ПМП будет использована для проверки гипотезы  $H_0: F(x) = F_0(x)$  при всех возможных значениях аргумента  $x$ .

На рис. 5 приведены результаты оценивания статистической устойчивости ПММ в предположении о наличии точечного возмущения в матрице  $F$  на основе критерия Колмогорова–Смирнова в зависимости от объема выборки.



Рис. 5. Оценки статистической устойчивости полумарковской модели по состояниям в зависимости от объема выборочных данных

Fig. 5. Estimates of the statistical stability of the Semi-markov model by states depending on the volume of sample data

Исходя из полученных результатов, представленных на рис. 5, можно сделать вывод, что с ростом объема выборочных данных статистическая устойчивость заметно растет, сохраняя тенденцию относительно состояний СТС.

Следующая группа экспериментов проводилась относительно изменения начальных условий:

- 1) группа экспериментов при условии начального состояния  $S_3$  – профилактика СТС,
- 2) группа экспериментов – при условии начального состояния  $S_1$  – отказ СТС, оценки статистической устойчивости ПММ по состояниям в зависимости от объема выборки в этом случае изображены на рис. 6.

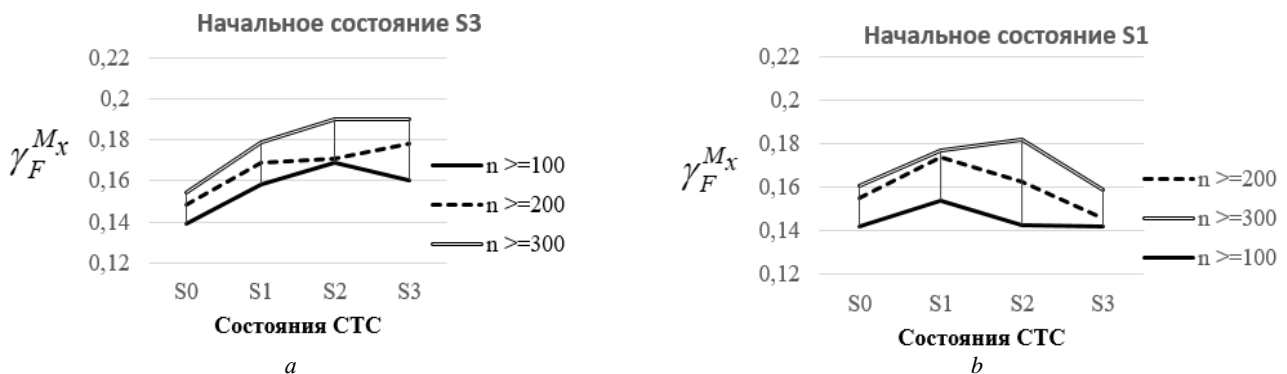


Рис. 6. Оценки статистической устойчивости полумарковской модели по состояниям в зависимости от объема выборочных данных: при начальном состоянии  $S_3$  (a), при начальном состоянии  $S_1$  (b)

Fig. 6. Estimates of the statistical stability of the Semi-markov model by states depending on the volume of sample data: a) at the initial state  $S_3$ , b) at the initial state  $S_1$

Приведенные на рис. 6 результаты моделирования зависимости статистической устойчивости ФР времен пребывания в состояниях СТС от объемов выборок от 100 до 300 показывают влияние начального состояния на полученные оценки. Например, при начальном состоянии  $S_3$  наилучшее значение метрики СУ 0,192 при  $n = 300$ , тогда как при начальном состоянии  $S_1$  значение метрики СУ 0,178 при  $n = 300$  (для этого состояния); имеются различия в оценках по каждому состоянию СТС, что говорит о необходимости учета этих фактов при оценивании качества моделей данного типа.

Получение характеристик СУ и влияющих параметров, например начального условия или объема выборки либо и того и другого вместе, приводит к формированию управленческих решений по планированию экспериментальной части задач квалиметрического анализа моделей, что относится к третьей составляющей предложенного конструктивного подхода.

Таким образом, согласно определению 3, в рамках конструктивного подхода получена тройка следующего вида:  $M$  <тип модели: ПММ; тип топологии гибридной модели: иерархическая; метрики качества метамодели: полная и частная статистическая устойчивость>. Подробное классификационное описание процесса исследования системы с учетом предложенного конструктивного подхода позволило описывать пространство моделей, факторов и параметров при принятии решений по оценке их качества. Дальнейшие исследования связаны с получением оценок статистической устойчивости модели ПМП в зависимости от изменения начальных условий моделирования (начального состояния СТС), что позволит получить более широкий спектр оценочных метрик СУ моделей на основе ПМП.

### Заключение

В задачах исследования сложных систем и процессов зачастую приходится иметь дело с гибридными сложными моделями, оценивание их свойств (прежде всего – качества) представляется весьма затруднительным, а следовательно, не дает гарантии получения приемлемых результатов исследования. Авторами предложены конструктивный подход и прикладные основы нового раздела квалиметрии – моделеметрии, а также определение конструктивного решения квалиметрической задачи моделеметрии, которое представляет собой триединство методологических, алгоритмических и управленческих решений в рамках квалиметрического анализа этих моделей и позволяет описывать пространство моделей, факторов и параметров при принятии решений по оценке их качества.

В статье отмечено, что для сложных стохастических моделей, например полумарковских, анализ их качества нетривиален. В рамках решения задачи оценивания качества метамodelей предлагается применение критерия Колмогорова–Смирнова для оценивания статистической устойчивости функции распределения времени пребывания системы в выделенных состояниях. Критерий позволяет сравнивать выборочные данные на основе расстояния между функциями распределений времен пребывания в состояниях сложной технической системы. Результаты модельных экспериментов показали широкие перспективы применения метрик статистической устойчивости полумарковских моделей для детализованного описания процессов функционирования сложных технических систем, что позволит принимать обоснованные решения по их работе и развитию.

### Список источников

1. ГОСТ 15467–79. Управление качеством продукции. Основные понятия. Термины и определения (с Изменением № 1). М. : Стандартинформ, 2009. 22 с.
2. Звягин Л.С. Мягкие имитационные модели региональных экономических систем // Мягкие измерения и вычисления. 2018. № 10. С. 41–46.
3. Микони С.В., Соколов Б.В. Юсупов Р.М. Квалиметрия моделей и полимодельных комплексов. М. : РАН, 2018. 314 с.
4. Микони С.В. Улучшение познавательной функции понятий технической диагностики с применением системного подхода и собственных свойств модели // Онтология проектирования. 2020. Т. 10, № 2 (36). С. 163–175.
5. Gorban I.I. The Statistical Stability Phenomenon. Springer, 2017. 361 p. doi: 10.1007/978-3-319-43585-5
6. Ростовцев Ю.Г., Юсупов Р.М. Проблема обеспечения адекватности субъектно-объектного моделирования // Известия вузов. Приборостроение. 1991. № 7. С. 7–14.
7. Okhtilev M.Yu., Gnidenko A.S., Alferov V.V., Salukhov V.I., Nazarov D.I. Methods and Algorithms of Integrated Modeling of Complex Technical Objects in Dynamically Changing Conditions // Proc. of the International Scientific Conference MMET NW. 2018. P. 282–284.
8. Тутубалин В.Н., Барабашева Ю.М., Девяткова Г.Н., Угер Е.Г. Принципы проверки статистической корректности обработки результатов классического эксперимента Кавендиша // Машиностроение и компьютерные технологии. 2016. № 4. С. 170–193.
9. Советов Б. Я. и др. Имитационное моделирование систем. Петровдворец: ВУНЦ ВМФ. 2010.
10. Доронина Ю.В., Скатков А.В. Анализ статистической устойчивости стационарных марковских моделей // Труды СПИИРАН. 2019. № 5 (18). С. 1119–1148.
11. Корольюк В.С., Турбин А.Ф. Полумарковские процессы и их приложения. Киев : Наукова думка, 1976. 184 с.
12. Вагнер В., Ермаков С. М. Стохастическая устойчивость и параллелизм метода Монте-Карло // Доклады Академии наук. 2001. Т. 379, № 4. С. 439–441.
13. Доронина Ю.В., Скатков А.В. Особенности квалиметрического анализа полимодельных комплексов с переменной топологией при исследовании сложных технических систем // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2021. № 56. С. 49–58. doi: 10.17223/19988605/56/6

14. Орлов А.И. Непараметрические критерии согласия Колмогорова, Смирнова, омега-квадрат и ошибки при их применении // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2014. № 97. С. 31–45.

## References

1. Russian Federation. (n.d.) *GOST 15467–79. Upravlenie kachestvom produktsii. Osnovnye ponyatiya. Terminy i opredeleniya (s Izmeneniyem № 1)* [Product quality management. Basic concepts. Terms and definitions (with Change No. 1)]. Moscow: Standartinform.
2. Zvyagin, L.S. (2018) Myagkie imitatsionnye modeli regional'nykh ekonomicheskikh sistem [Soft imitation models of regional economic systems]. *Myagkie izmereniya i vychisleniya*. 10. pp. 41–46.
3. Mikoni, S.V., Sokolov, B.V. & Yusupov, R.M. (2018) *Kvalimetriya modeley i polimodel'nykh kompleksov* [Qualimetry of models and polymodel complexes]. Moscow: RAS.
4. Mikoni, S.V. (2020) Uluchshenie poznatel'noy funktsii ponyatiy tekhnicheskoy diagnostiki s primeneniem sistemnogo podkhoda i sobstvennykh svoystv modeli [Improving the cognitive function of technical diagnostics concepts using a systematic approach and model properties]. *Ontologiya proektirovaniya*. 10(2(36)). pp. 163–175.
5. Gorban, I.I. (2017) *The Statistical Stability Phenomenon*. Springer. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-43585-5>
6. Rostovtsev, Yu.G. & Yusupov, R.M. (1991) Problema obespecheniya adekvatnosti sub"ektno-ob"ektnogo modelirovaniya [The problem of ensuring the adequacy of subject-object modeling]. *Izvestiya vuzov. Priborostroenie*. 7. pp. 7–14.
7. Okhtilev, M.Yu., Gnidenko, A.S., Alferov, V.V., Salukhov, V.I. & Nazarov, D.I. (2018) Methods and Algorithms of Integrated Modeling of Complex Technical Objects in Dynamically Changing Conditions. *Proceedings of the International Scientific Conference MMET NW*. 2018. pp. 282–284.
8. Tutubalin, V.N., Barabasheva, Yu.M., Devyatkov, G.N. & Uger, E.G. (2016) Printsipy proverki statisticheskoy korrektnosti obrabotki rezul'tatov klassicheskogo eksperimenta Kavendisha [Principles of checking the statistical correctness of processing the results of the classical Cavendish experiment]. *Mashinostroyeniye i komp'yuternyye tekhnologii*. 4. pp. 170–193.
9. Sovetov, B.Ya. et al. (2010) *Imitatsionnoye modelirovaniye sistem* [Simulation Modeling of Systems]. Petrodvorets: VUNTS VMF.
10. Doronina, Yu.V. & Skatkov, A.V. (2019) Analiz statisticheskoy ustoychivosti statsionarnykh markovskikh modeley [Analysis of statistical stability of stationary Markov models]. *Trudy SPIIRAN*. 5(18). pp. 1119–1148. DOI: 10.15622/sp.2019.18.5.1119-1148
11. Korolyuk, V.S. (1976) *Polumarkovskie protsessy i ikh prilozheniya* [Semi-Markov processes and their applications]. Kyiv: Naukova dumka. 184 p.
12. Wagner, V. & Ermakov, S.M. (2001) Stokhasticheskaya ustoychivost' i parallelizm metoda Monte-Karlo [Stochastic stability and parallelism of the Monte Carlo method]. *Doklady Akademii nauk*. 379(4). pp. 439–441.
13. Doronina, Yu.V. & Skatkov, A.V. (2021) Qualimetric analysis of polymodel complexes with variable topology in the study of complex technical systems. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 56. pp. 49–58. DOI: 10.17223/19988605/56/6
14. Orlov, A.I. (2014) Neparаметрические критерии согласия Колмогорова, Смирнова, омега-квадрат и ошибки при их применении [Nonparametric goodness-of-fit tests Kolmogorov, Smirnov, omega-squared and errors in their application]. *Politematicheskii setevoy elektronnyy nauchnyy zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta*. 97. pp. 31–45.

## Информация об авторах:

**Доронина Юлия Валентиновна** – доктор технических наук, доцент, профессор кафедры информационных технологий и компьютерных систем Института информационных технологий Севастопольского государственного университета (Севастополь, Россия). E-mail: YVDoronina@sevsu.ru

**Скатков Александр Владимирович** – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории гидрофизических и биоэлектронных измерительных систем и технологий Института природно-технических систем (Севастополь, Россия). E-mail: vm1945@mail.ru

**Вклад авторов:** все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## Information about the authors:

**Doronina Yulia V.** (Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Professor of the Department of Information Technologies and Computer Systems of the Institute of Information Technologies, Sevastopol State University, Sevastopol, Russian Federation). E-mail: YVDoronina@sevsu.ru

**Skatkov Alexander V.** (Doctor of Technical Sciences, Expert of the Russian Academy of Sciences, Professor of the Department of Information Technology and Computer Systems at the Institute of Information Technology and Management in Technical Systems, Sevastopol State University). E-mail: vm1945@mail.ru

**Contribution of the authors:** the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 17.03.2025; принята к публикации 02.09.2025

Received 17.03.2025; accepted for publication 02.09.2025

Научная статья  
УДК 004.93`12  
doi: 10.17223/19988605/72/4

## Модели сверточных нейронных сетей YOLO с механизмом внимания для систем компьютерного зрения реального времени

Вадим Александрович Клековкин<sup>1</sup>, Николай Григорьевич Марков<sup>2</sup>,  
Степан Геннадьевич Небаба<sup>3</sup>

<sup>1, 2, 3</sup> Национальный исследовательский Томский политехнический университет, Томск, Россия

<sup>1</sup> vak37@tpu.ru

<sup>2</sup> markovng@tpu.ru

<sup>3</sup> stepanlfx@tpu.ru

**Аннотация.** Разрабатываются и исследуются новые модели сверточных нейронных сетей (СНС) с механизмом внимания, позволяющие решать задачи объектного детектирования малоразмерных летающих объектов (ЛО). В качестве исходных моделей выбрано две базовых модели СНС класса YOLO: YOLOv5s и YOLOv8s. На их основе создано четыре гибридных модели СНС с использованием модулей SWT и SEA, реализующих различные варианты механизма внимания. Для обучения, валидации и комплексного исследования этих моделей использовался датасет, изображения которого содержат от одного до нескольких ЛО трех классов: «Птица», «Беспилотный летательный аппарат (БПЛА) самолетного типа» и «БПЛА вертолетного типа». Исследования показали, что гибридная модель YOLOv8s + SEA является наиболее предпочтительным вариантом при создании систем компьютерного зрения реального времени для детектирования малоразмерных ЛО.

**Ключевые слова:** система компьютерного зрения реального времени; сверточная нейронная сеть YOLO; обнаружение и классификация летающих объектов; механизм внимания.

**Для цитирования:** Клековкин В.А., Марков Н.Г., Небаба С.Г. Модели сверточных нейронных сетей YOLO с механизмом внимания для систем компьютерного зрения реального времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2025. № 72. С. 39–50. doi: 10.17223/19988605/72/4

Original article  
doi: 10.17223/19988605/72/4

## YOLO convolutional neural network models with attention mechanism for real-time computer vision systems

Vadim A. Klekovkin<sup>1</sup>, Nikolay G. Markov<sup>2</sup>, Stepan G. Nebaba<sup>3</sup>

<sup>1, 2, 3</sup> National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation, vak37@tpu.ru

<sup>1</sup> vak37@tpu.ru

<sup>2</sup> markovng@tpu.ru

<sup>3</sup> stepanlfx@tpu.ru

**Abstract.** New models of convolutional neural networks (SNN) with an attention mechanism are being developed and investigated to solve the problems of object detection of small-sized flying objects (FO). Two basic CNN models of the YOLO class were selected as the initial ones for the development of new CNN models: YOLOv5s and YOLOv8s. Based on them, four hybrid CNN models were created using the SWT module and the SEA module, implementing different versions of the attention mechanism. For training, validation and research of the basic and hybrid models, a dataset with labeled images of small-sized FO of three classes was used: «Unmanned aerial vehicle (UAV) of helicopter type», «UAV of airplane type» and «Bird». Research has demonstrated that the hybrid YOLOv8s + SEA model is the most preferable option for designing real-time computer vision systems intended for the detection of small-sized FO.

**Keywords:** real-time computer vision system; YOLO convolutional neural network; detection and classification of flying objects; attention mechanism.

**For citation:** Klekovkin, V.A., Markov, N.G., Nebaba, S.G. (2025) YOLO convolutional neural network models with attention mechanism for real-time computer vision systems. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 72. pp. 39–50. doi: 10.17223/19988605/72/4

## Введение

В последние годы в России и за рубежом интенсивно ведутся разработки систем компьютерного зрения (СКЗ) различного назначения. Чаще всего СКЗ создаются на основе современных моделей сверточных нейронных сетей (СНС). Именно СКЗ с такими моделями СНС должны позволять решать прикладные задачи компьютерного зрения, относящиеся к четырем классам [1, 2]: семантическая сегментация (Semantic Segmentation) изображений, распознавание единичного объекта (Object Recognition) на изображении, объектное детектирование (Object Detection) и, наконец, четвертый класс задач – распознавание экземпляров объекта (Instance Segmentation) одного класса на изображении.

Отметим, что сегодня наиболее востребованными являются СКЗ, позволяющие решать задачи объектного детектирования, когда на изображениях обнаруживаются и классифицируются объекты различных классов. Именно такие СКЗ используются в системах управления автономным наземным и воздушным транспортом, в системах мониторинга воздушного пространства и мониторинга опасных технологических объектов [3, 4]. Учитывая, что во многих случаях объекты на анализируемых такими системами изображениях являются подвижными, СКЗ, чтобы обнаружить и удерживать их в поле зрения на изображении, должны функционировать в режиме реального времени. При этом масштаб реального времени в каждой конкретной задаче определяется потенциальной скоростью перемещения подвижных объектов. Важной проблемой при создании многих СКЗ реального времени для решения задач объектного детектирования подвижных объектов является необходимость детектирования объектов разных размеров (по линейным размерам, по площади). В [4, 5] показано, что детектирование объектов малого размера (часто говорят, масштаба) представляет особую сложность для современных моделей СНС. Сегодня, несмотря на общие успехи в достижении высокой точности детектирования с помощью таких моделей, все ещё сохраняется значительный разрыв между точностью детектирования объектов малого и большого масштабов. Все это указывает на актуальность создания высокоточных моделей СНС для решения задач детектирования объектов малых размеров с помощью СКЗ реального времени.

В данной статье рассматривается задача объектного детектирования на изображениях малоразмерных подвижных объектов, находящихся в воздушном пространстве и представляющих собой летающие объекты (ЛО) трех классов. Для решения такой задачи необходимо разрабатывать СКЗ реального времени, удовлетворяющие жестким требованиям по производительности и точности детектирования ЛО малых размеров. В основу этих СКЗ должны быть положены модели СНС, также удовлетворяющие таким требованиям. Для этого в работе создаются и исследуются гибридные модели СНС класса YOLO с использованием механизма внимания. По результатам их комплексных исследований выбирается наиболее эффективная с точки зрения точности и скорости объектного детектирования модель (модели) для использования в СКЗ реального времени.

## 1. Системы компьютерного зрения для детектирования подвижных объектов

Объектное детектирование подвижных объектов является одной из основных задач компьютерного зрения и выполняется как совокупность трех подзадач: обнаружения одного или нескольких объектов на изображении, их локализации (определение местоположения объектов на изображении) и выявления класса каждого из объектов. Далее под термином «детектирование» будем понимать процесс решения этих трех подзадач. Для решения задач детектирования в самых различных областях сегодня



на основе современных моделей СНС разрабатываются СКЗ, учитывающие специфику решения каждой задачи. Так, при создании СКЗ, осуществляющих мониторинг подвижных объектов, учитывается, что такие системы должны как обнаруживать и классифицировать объекты, так и отслеживать перемещение каждого из них в пространстве. Для этого СКЗ должны функционировать в режиме реального времени, причем масштаб реального времени в значительной степени определяется скоростью перемещения объектов в пространстве. В работах [3–5] показано, что во многих современных СКЗ, функционирующих в режиме реального времени, значительные ресурсы отводятся на вычисление модели СНС. Отсюда следует, что при создании перспективных СКЗ необходимо использовать эффективные по скорости вычисления модели СНС. Обычно для оценки минимальной достаточной скорости детектирования объектов на изображении с помощью СКЗ реального времени используется известный показатель – количество анализируемых изображений / кадров в секунду (Frames Per Second, FPS), причем в большинстве случаев детектирования подвижных объектов значение этого показателя должно быть не менее 25–30, а часто и значительно более этого порога [3, 5].

Другим основным требованием к модели СНС, планируемой для включения в состав СКЗ реального времени, является высокая точность детектирования (обнаружения и классификации) подвижных объектов на изображениях. Отметим, что эти требования к модели СНС – высокая скорость ее вычисления и высокая точность детектирования подвижных объектов на изображениях – противоречат друг другу, так как для повышения точности детектирования требуются более ресурсоемкие модели СНС, скорость вычисления которых заметно меньше, чем у более компактных моделей. Общепринятыми метриками оценки точности детектирования объектов на изображении являются AP (Average Precision, средняя точность классификации) для каждого класса объектов и mAP (mean Average Precision) – усредненное значение AP по всем классам. Чаще всего применяют метрики  $AP_{0,5}$  и  $mAP_{0,5}$ , которые получают для порогового значения IoU (метрики, показывающей долю пересечения двух рамок на объекте), равного 0,5 [5, 6]. Точность детектирования объектов на изображениях можно считать достаточной, если значения метрики  $AP_{0,5}$  для каждого класса объектов и метрики  $mAP_{0,5}$  по всем классам объектов выше заданного порогового значения. Опираясь на результаты работ [2, 4–7], выявлено, что это пороговое значение обычно не менее 0,9.

На изображениях может одновременно присутствовать несколько подвижных объектов разных классов, причем они могут иметь разные размеры. Детектирование объектов, размеры которых относительно размеров анализируемого изображения малы (обычно не более  $32 \times 32$  пикселя по занимаемой каждым из них площади, как это было предложено при формировании известного датасета MS COCO [8]), представляет особую сложность. В [6, 7] показано, что к малоразмерным объектам следует отнести, например, птиц и беспилотные летательные аппараты (БПЛА) самолетного типа, которые находятся на значительном удалении от СКЗ. Контуры таких объектов обладают высокой степенью схожести, что делает их классификацию непростой задачей. Отсюда можно сделать вывод об актуальности разработки высокоточных моделей СНС для решения задач детектирования объектов малых размеров с помощью СКЗ реального времени.

## 2. Постановка задачи исследований

Цель данного проекта – разработка и исследование новых моделей СНС с механизмом внимания на основе хорошо себя зарекомендовавших моделей из класса YOLO. Выбранная по результатам исследований наиболее эффективная из таких гибридных моделей СНС должна детектировать на RGB-изображениях малоразмерные подвижные объекты и удовлетворять изложенным выше требованиям по точности их детектирования и скорости вычисления модели. Это позволит рекомендовать такую модель СНС для реализации в СКЗ реального времени. В качестве подвижных объектов на изображениях будем рассматривать малоразмерные летающие объекты (ЛО) в воздушном пространстве трех классов: БПЛА вертолетного типа, БПЛА самолетного типа и класс «Птица».

Для обучения, валидации и исследования разработанных и базовых моделей СНС будем использовать датасет с малоразмерными ЛО на размеченных RGB-изображениях размером  $416 \times 416$  пикселей

из [7]. Число объектов в этом датасете 4 540, при этом распределение по классам ЛО следующее: БПЛА вертолетного типа – 1 437 объектов, БПЛА самолетного типа – 1 663 объекта, объектов класса «Птица» – 1 440. На одном изображении может присутствовать один либо два и более ЛО. Датасет разделен на обучающую, валидационную и тестовую выборки в следующем соотношении: 70% всех изображений – обучающая выборка, 20% изображений – валидационная, 10% изображений – тестовая выборка.

Кратко остановимся на выборе исходных (далее – базовых) моделей, на основе которых будут создаваться гибридные модели СНС с механизмом внимания. Анализ моделей СНС для решения задач объектного детектирования, проведенный в работах [4–6], позволяет считать, что наиболее подходящими для детектирования ЛО на изображениях с учетом требования к высокой скорости вычисления моделей являются модели класса YOLO [9]. Модели СНС этого класса относятся к одноэтапным детекторам и поэтому являются высокопроизводительными. Кроме того, как показывает опыт их применения [5, 9], они имеют весьма высокую точность детектирования объектов на изображениях. Предлагается выбрать базовые модели СНС из этого класса, начиная с моделей с современными архитектурами из семейства YOLOv5 [10] и заканчивая хорошо себя зарекомендовавшими моделями семейства YOLOv8 [11]. Как следует из результатов исследований [11], полученных при решении одной из прикладных задач, модели семейства YOLOv5 являются более высокопроизводительными, чем модели семейства YOLOv8, однако часть моделей второго семейства показывает более высокую точность детектирования. В итоге в качестве базовых моделей из этих семейств выбраны модели YOLOv5s и YOLOv8s. Отметим, что согласно результатам исследований из [5, 7, 10, 11] эти модели являются компромиссными вариантами, поскольку каждая из них в своем семействе в значительной степени удовлетворяет взаимоисключающим требованиям по точности детектирования объектов и скорости вычисления модели. Появившиеся недавно модели YOLOv9, YOLOv10 и YOLOv11 пока недостаточно подробно исследованы, а также практически не апробированы при решении прикладных задач. По этой причине здесь они не рассматривались в качестве базовых моделей СНС.

### 3. Гибридные модели СНС

Проведенный анализ исследований наиболее известных моделей нейронных сетей с механизмом внимания [12–18] позволил считать, что для разработки гибридных моделей СНС из довольно большого многообразия моделей, где реализован механизм внимания, следует выбрать модули с механизмами внимания SEAttention [16] и SWIN-Transformer [17]. Модуль SEAttention (далее – SEA) широко применяется благодаря своей простоте, вычислительной эффективности и способности повышать репрезентативную способность исходных моделей СНС. Этот модуль содержит блок сжатия и блок возбуждения (SE, Squeeze-Excitation), которые используются для сбора глобальной информации, захвата взаимосвязей по каналам и улучшения репрезентативности. Глобальная пространственная информация собирается в модуле сжатия путем глобального усреднения. Модуль возбуждения захватывает взаимосвязи по каналам и выводит вектор внимания с помощью полностью связанных слоев и нелинейных слоев (ReLU и сигмоида). Затем каждый канал входного признака масштабируется путем умножения соответствующего элемента в векторе внимания.

Модуль SWIN-Transformer – это иерархический Transformer, представление которого вычисляется с помощью смещенных окон [17]. Схема смещенных окон обеспечивает большую эффективность, ограничивая вычисления собственного внимания неперекрывающимися локальными окнами, а также допуская межоконные соединения. Модуль SWIN-Transformer (далее – SWT) извлекает визуальные признаки на основе механизма самовнимания, что позволяет захватывать глобальную и локальную контекстную информацию об объектах на изображении и в итоге улучшает извлечение признаков объектов. Подход смещенных окон обеспечивает лучшую масштабируемость и производительность этого модуля по сравнению с хорошо известными трансформерами.

Рассмотрим более детально каждую из разработанных с использованием модулей SEA и SWT гибридных моделей.

### 3.1. Модель YOLOv5s + SEA

Модуль SEA добавлен в архитектуру базовой модели YOLOv5 путем замены блока C3 (кросс-ступенчатый частичный блок, состоящий из трех сверточных слоев с пропусками соединений) в ее структуре Backbone. Полученная таким образом гибридная модель YOLOv5s + SEA имеет архитектуру, показанную на рис. 1. Добавленный модуль SEA выделен на этой схеме розовым цветом.

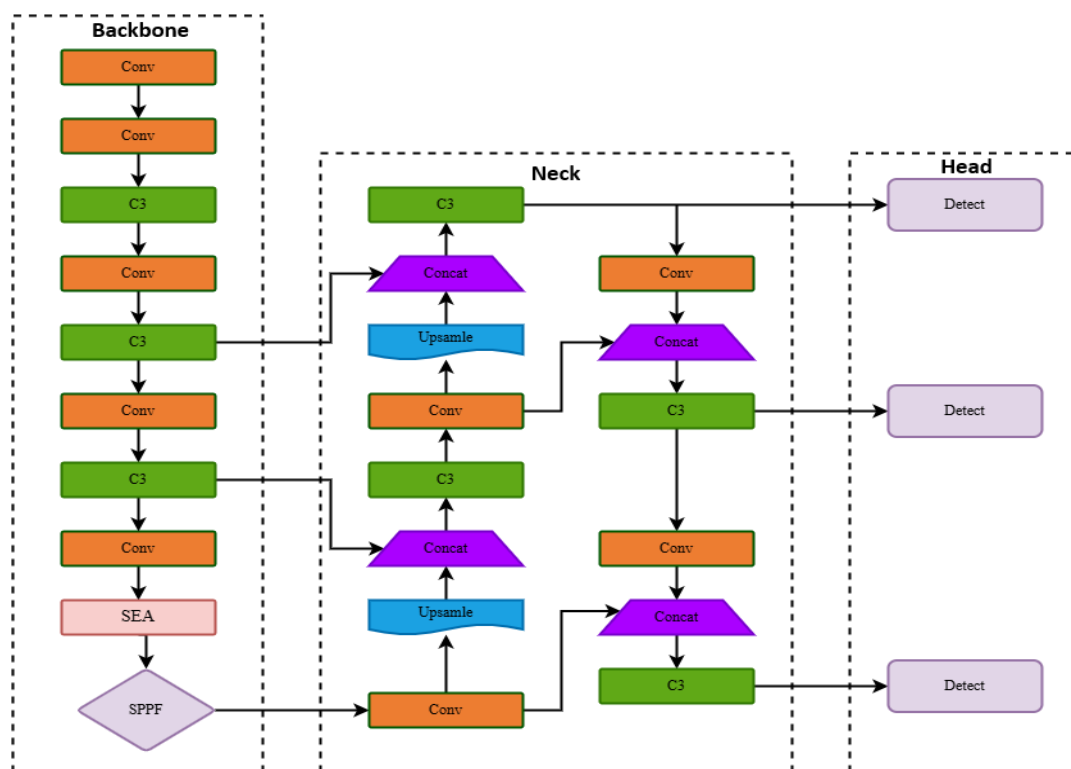


Рис. 1. Архитектура гибридной модели YOLOv5s + SEA  
Fig. 1. Architecture of the hybrid model YOLOv5s + SEA

Известно, что блок C3 в классической реализации YOLOv5s обладает несколькими недостатками, ключевыми из которых являются отсутствие канального внимания (равное отношение ко всем признакам, в том числе шумовым) и слабая адаптация к мелким объектам (отсутствует механизм адаптивного усиления полезных признаков).

Модуль SEA выполняется в три этапа: этап Squeeze – глобальное усреднение по пространственным измерениям, этап Excitation – поиск зависимостей между каналами путем обучения весов двуслойного перцептрона, наконец, Scale – масштабирование полученного вектора внимания на пространство признаков. Это позволяет усилить информативные каналы и подавить шумовые. При этом количество вычислений растет незначительно, т.е. на скорости вычислений замена блока сказывается минимально.

Использование гибридной модели для решения задачи объектного детектирования малоразмерных объектов позволит улучшить фокусировку на целевой информации о таких объектах, а также подавить нерелевантную информацию о признаках ЛО на изображениях, что должно в итоге привести к повышению точности детектирования малоразмерных объектов.

### 3.2. Модель YOLOv5s + SWT

Ключевыми особенностями модуля SWT являются:

- иерархическая структура – работа с изображениями как с последовательностью патчей, которые постепенно объединяются в более крупные блоки (аналогично блокам модели CHC), сохраняя свойство мультимасштабности;

- оконное внимание (Window-based Self-Attention) – разбиение изображения на неперекрывающиеся локальные окна и вычисление параметра внимания только внутри окна, что снижает вычислительную сложность модуля;
- смещенные окна (Shifted Windows) – на каждом следующем слое окна сдвигаются на половину их размера, что позволяет учитывать связи между разными областями;
- линейная сложность – благодаря локальным окнам и иерархии SWIN-Transformer масштабируется лучше классических модулей внимания.

Указанные особенности позволяют предположить, как и в случае модуля SEA, что гибридная модель за счет модуля SWT должна быть более эффективной при детектировании малоразмерных ЛО, чем использование классических моделей ЧС. Точность детектирования объектов может повышаться также за счет лучшего захвата глобальных зависимостей на изображении.

Вместе с тем гибридная модель, использующая модуль SWT, требует больше памяти, чем базовая модель ЧС, и вычислительно она более сложна.

Поскольку в модуле SWT схема смещенных окон обеспечивает большую эффективность выделения признаков объектов на изображении, ограничивая вычисления собственного внимания неперекрывающимися локальными окнами, а также допуская межоконные соединения, добавим модуль SWT в архитектуру базовой модели YOLOv5s путем замены блока C3 в структуре Backbone. Архитектура полученной таким образом гибридной модели, получившей название YOLOv5s + SWT, приведена на рис. 2.

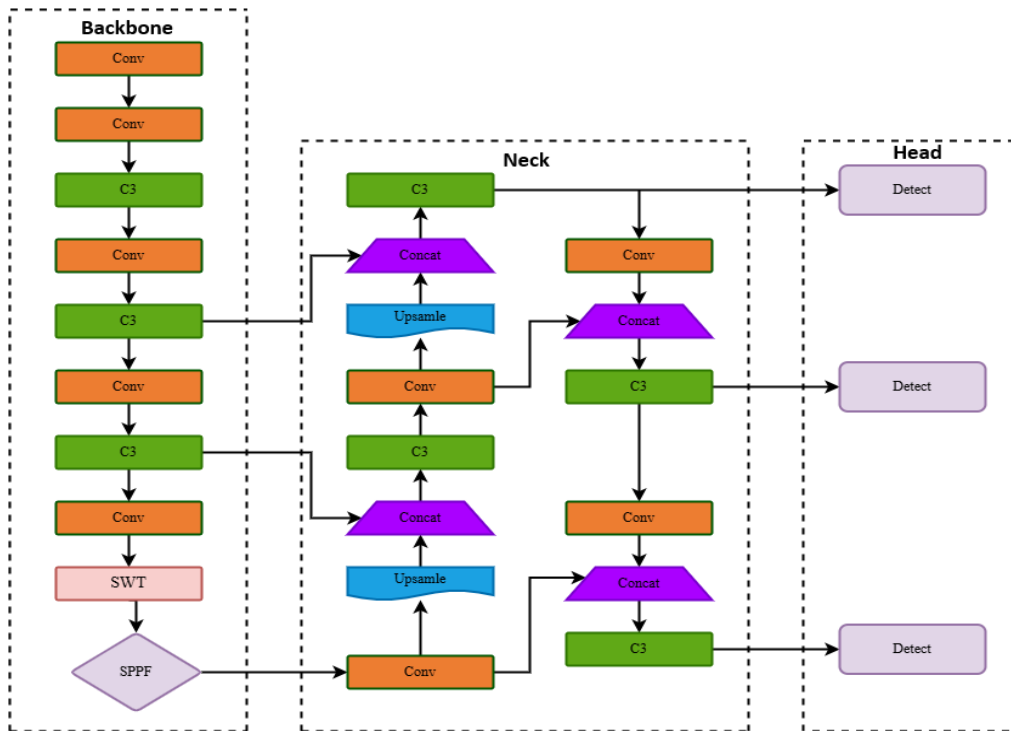


Рис. 2. Архитектура гибридной модели YOLOv5s + SWT  
Fig. 2. Architecture of the hybrid model YOLOv5s + SWT

Добавленный модуль SWT выделен на этой схеме розовым цветом. Реализованный в модели механизм самовнимания, который позволяет захватывать глобальную и локальную контекстную информацию об объектах, ведет к улучшению извлечения признаков. Это должно позволить лучше сохранить контекстную информацию об ЛО и в итоге повысить точность детектирования объектов.

### 3.3. Модель YOLOv8s + SEA

При построении гибридной модели на основе базовой модели YOLOv8s возможны два основных варианта использования модуля SEA – замена блоков C2F (аналогично тому, как в модели YOLOv5s

заменяется блок C3), либо включение модуля SEA как дополнительного блока без изменения существующей последовательности блоков архитектуры базовой модели. Последний вариант имеет ряд преимуществ, в частности подразумевает минимальное вмешательство в оригинальную архитектуру базовой модели, обратную совместимость с этой архитектурой и улучшение работы с мультимасштабными объектами на изображении.

В случае модели YOLOv8s было решено выбрать вариант добавления модуля SEA в структуру Neck ее архитектуры. Благодаря включению модуля SEA в структуру Neck механизм внимания помогает модели определить, какие признаки наиболее важны, прежде чем передавать их на уровни обнаружения объекта. Архитектура гибридной модели YOLOv8s + SEA приведена на рис. 3. Добавленный модуль SEA выделен на схеме розовым цветом.

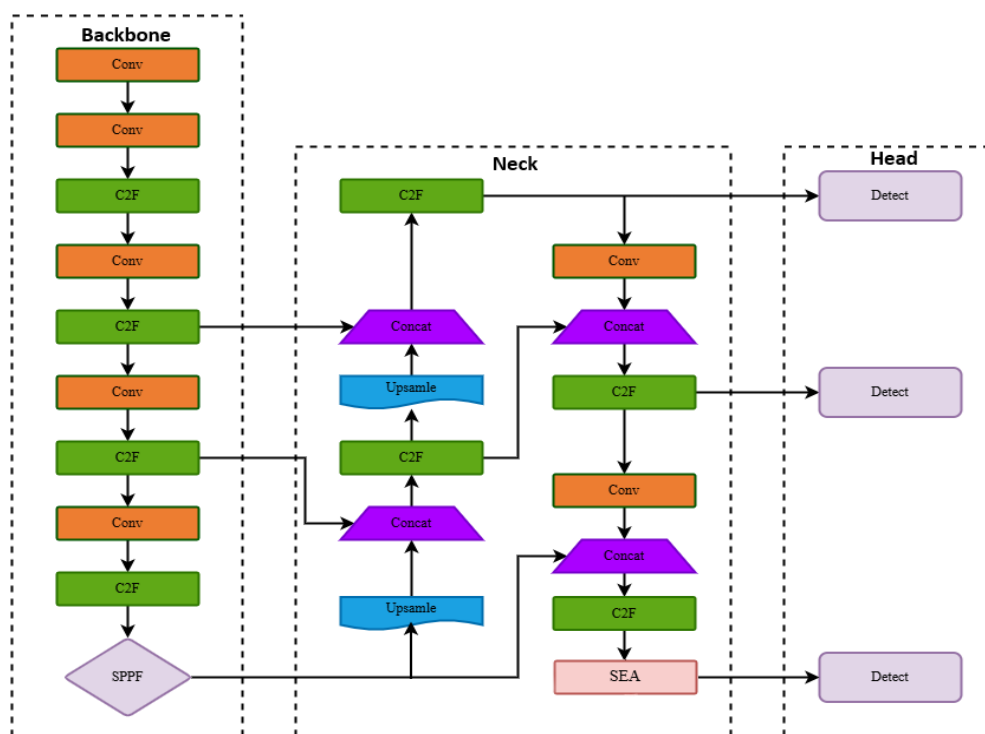


Рис. 3. Архитектура гибридной модели YOLOv8s + SEA

Fig. 3. Architecture of the hybrid model YOLOv8s + SEA

Рассмотрим особенности этой гибридной модели:

- SEA-модуль располагается в месте слияния признаков, что минимизирует влияние на вычислительную сложность гибридной модели;
- количество SEA-модулей можно относительно легко регулировать;
- сохраняется оригинальная архитектура базовой модели YOLOv8s.

### 3.4. Модель YOLOv8s + SWT

Блок C2F в архитектуре модели YOLOv8s представляет собой усовершенствованный вариант блока C3 в архитектуре модели YOLOv5s с дополнительными skip-соединениями (более быстрая реализация узкого места CSP с двумя свертками). Основной его функцией является агрегация мультимасштабных признаков на разных уровнях модели. Этот блок, как и блок C3 в архитектуре модели YOLOv5s, обладает рядом ограничений, среди которых локальная природа сверточных операций, ограниченное рецептивное поле и фиксированные шаблоны извлечения признаков объектов.

При этом модуль SWT позволяет реализовать глобальное взаимодействие признаков через механизм внимания, поддерживает адаптивную оценку значимости регионов и иерархическое представление признаков объектов.

Учитывая изложенное, было решено добавить модуль SWT в архитектуру модели YOLOv8s путем замены четвертого блока C2F в структуре Backbone. Архитектура гибридной модели YOLOv8s + SWT приведена на рис. 4. Добавленный модуль SWT на рис. 4 выделен розовым цветом.

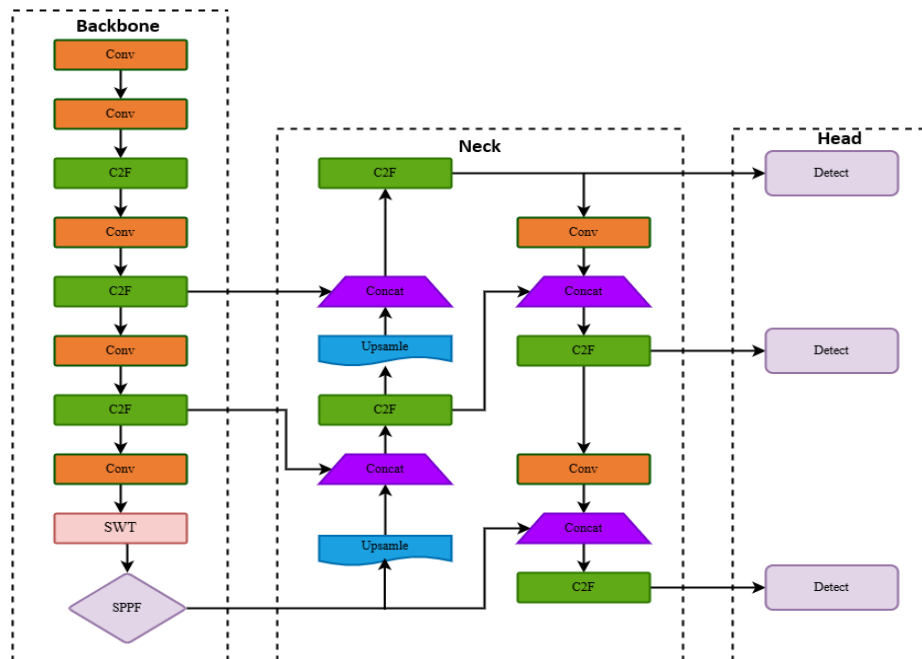


Рис. 4. Архитектура гибридной модели YOLOv8s + SWT  
Fig. 4. Architecture of the hybrid model YOLOv8s + SWT

#### 4. Результаты исследования моделей СНС и их обсуждение

После обучения и валидации разработанных и базовых моделей СНС на обучающей и валидационной выборках из датасета [7] были проведены исследования этих моделей с использованием его тестовой выборки. Исследования проводились по точности детектирования ЛО и по скорости вычисления моделей. В табл. 1 приведены результаты по точности детектирования по метрике  $AP_{0,5}$  объектов каждого класса и по метрике  $mAP_{0,5}$  объектов всех классов для обученных базовой модели YOLOv5s и гибридных моделей на ее основе.

Таблица 1

Результаты исследования базовой модели YOLOv5s и гибридных моделей на ее основе по точности детектирования ЛО

Класс	$AP_{0,5}$ , $mAP_{0,5}$		
	YOLOv5s	YOLOv5s + SWT	YOLOv5s + SEA
БПЛА самолетного типа	0,935	0,947	0,941
Птица	0,930	0,907	0,920
БПЛА вертолетного типа	0,961	0,967	0,956
<b>Все классы</b>	0,942	0,940	0,939

Анализ результатов, представленных в табл. 1, позволяет считать, что все модели демонстрируют довольно высокую точность детектирования ЛО по метрикам  $AP_{0,5}$  и  $mAP_{0,5}$ , превышающую их пороговое значение 0,9.

Гибридная модель YOLOv5s + SWT показывает лучшие результаты для объектов классов «БПЛА самолетного типа» и «БПЛА вертолетного типа» по сравнению с результатами для объектов этих классов, полученных с помощью гибридной модели YOLOv5s + SEA и базовой модели YOLOv5s. Это указывает на эффективность использования SWIN-Трансформера для обнаружения и классификации малоразмерных объектов данных классов. Однако для объектов класса «Птица» обе гибридные модели

дают точность детектирования ниже, чем у базовой модели YOLOv5s. Более того, результаты по точности детектирования объектов по метрике  $mAP_{0,5}$ , получаемые с помощью этих моделей, несколько ниже, чем у базовой модели YOLOv5s.

В табл. 2 приведены результаты по точности детектирования по метрике  $AP_{0,5}$  ЛО каждого класса и по метрике  $mAP_{0,5}$  объектов всех классов для обученных базовой модели YOLOv8s и гибридных моделей на ее основе. Анализ этих результатов позволяет сделать следующие выводы.

Таблица 2

**Результаты исследования базовой модели YOLOv8s и гибридных моделей на ее основе по точности детектирования ЛО**

Класс	$AP_{0,5}$ , $mAP_{0,5}$		
	YOLOv8s	YOLOv8s + SWT	YOLOv8s + SEA
БПЛА самолетного типа	0,937	0,925	0,942
Птица	0,935	0,925	0,933
БПЛА вертолетного типа	0,966	0,956	0,971
<b>Все классы</b>	0,946	0,935	0,948

Базовая модель и гибридные модели демонстрируют высокую точность детектирования объектов по метрикам  $AP_{0,5}$  и  $mAP_{0,5}$  в диапазоне значений от 0,925 до 0,971 (значительное превышение порогового значения 0,9 этих метрик). Отметим, что все результаты в табл. 2 лучше, чем соответствующие результаты для модели YOLOv5s и гибридных моделей на ее основе, приведенные в табл. 1.

Гибридная модель YOLOv8s + SEA демонстрирует лучшие результаты по точности детектирования объектов по метрикам  $AP_{0,5}$  и  $mAP_{0,5}$  по сравнению с моделями YOLOv8s + SWT и YOLOv8s, а для объектов класса «БПЛА вертолетного типа» – наилучший результат (значение метрики  $AP_{0,5}$  = 0,971). Однако эта модель незначительно уступает базовой модели YOLOv8s по точности детектирования в случае объектов класса «Птица». Результаты для всех классов объектов в случае гибридной модели YOLOv8s + SWT хуже, чем у базовой модели YOLOv8s. Это указывает на то, что гипотеза о повышении точности детектирования малоразмерных объектов путем замены четвертого блока C2F в структуре Backbone модели YOLOv8s на модуль SWT не подтвердилась.

Из анализа результатов исследования, приведенных в табл. 1 и 2, следует вывод о том, что гибридная модель YOLOv8s + SEA является наиболее предпочтительным вариантом при создании СКЗ реального времени с повышенным требованием к точности детектирования малоразмерных ЛО.

В табл. 3 приведены результаты исследований на тестовой выборке обученных базовых моделей YOLOv5s и YOLOv8s и гибридных моделей на их основе в виде усредненной скорости вычисления этих моделей. Результаты показаны в виде значений метрик времени вычисления Inference и NMS (в миллисекундах) и FPS для RGB – изображения размером  $416 \times 416$  пикселей.

Таблица 3

**Результаты исследования базовых моделей YOLOv5s и YOLOv8s и гибридных моделей по усредненной скорости вычисления**

Модель CHC	Inference, мс	NMS, мс	FPS
YOLOv5s	3,2	2,4	179
YOLOv5s + SWT	3,0	2,4	185
YOLOv5s + SEA	3,0	2,4	185
YOLOv8s	4,6	1,8	156
YOLOv8s + SWT	4,9	1,8	149
YOLOv8s + SEA	4,5	2,3	147

На основе представленных в табл. 3 результатов можно сделать следующие выводы. У модели YOLOv8s время вычисления одного изображения Inference значительно выше (4,6 мс) по сравнению со значением этого показателя у модели YOLOv5s (3,2 мс), что дает более низкое значение FPS, равное 156, по сравнению со значением 179 у модели YOLOv5s. То есть модель YOLOv5s демонстрирует лучшую производительность, чем модель YOLOv8s.

Гибридные модели YOLOv5s + SWT и YOLOv5s + SEA показывают максимальное значение FPS, равное 185, что делает данные модели наиболее эффективными среди всех исследуемых здесь моделей.

Гибридная модель YOLOv8s + SWT имеет время Inference 4,9 мс и значение FPS, равное 149, а модель YOLOv8s + SEA показывает соответственно 4,5 мс и FPS, равное 147. Это указывает на снижение усредненной скорости их вычислений по сравнению с базовой моделью YOLOv8s.

Модель YOLOv5s и гибридные модели на ее основе демонстрируют лучшие значения усредненной скорости вычислений по сравнению с моделью YOLOv8s и гибридными моделями на ее основе. Это позволяет считать их более предпочтительными для решения задач, требующих высокой производительности СКЗ реального времени.

### Заключение

Анализ ряда исследований по точности объектного детектирования ЛО на изображениях показал, что существует актуальная проблема повышения точности детектирования таких объектов малых размеров. Для ее решения предлагается разрабатывать и исследовать новые модели СНС с механизмом внимания. В качестве исходных для разработки таких новых моделей СНС выбраны две базовые модели класса YOLO: YOLOv5s и YOLOv8s. На их основе создано четыре гибридных модели СНС с использованием модуля SWT и модуля SEA, реализующих два варианта механизма внимания.

По результатам обучения, валидации и исследования базовых и гибридных моделей на датасете с размеченными изображениями малоразмерных ЛО трех классов выявлено, что обе базовые модели и гибридные модели на их основе по точности детектирования ЛО по метрикам  $AP_{0,5}$  и  $mAP_{0,5}$  превышают весьма высокий заданный порог 0,9 и могут использоваться в качестве основы в СКЗ реального времени для детектирования малоразмерных объектов. Однако гибридная модель YOLOv8s + SEA является наиболее предпочтительным вариантом при создании СКЗ реального времени с повышенным требованием к точности детектирования малоразмерных ЛО.

Результаты исследования моделей по скорости вычислений показали, что все они позволяют превысить пороговое значение метрики FPS, равное 25, и поэтому могут использоваться в составе СКЗ реального времени. Модель YOLOv5s и гибридные модели на ее основе по скорости вычислений эффективнее, чем модель YOLOv8s и гибридные модели на ее основе. Это позволяет считать их более предпочтительными для решения задач, требующих высокой производительности от СКЗ реального времени. Однако выбор из них конкретной модели зависит от выдвигаемых требований к точности детектирования малоразмерных ЛО каждого класса и от масштаба реального времени.

### Список источников

1. Tan M., Pang R., Le Q.V. EfficientDet: Scalable and Efficient Object Detection // CVPR. 2020. Art. 09070. URL: <https://arxiv.org/abs/1911.09070> (accessed: 10.04.2025).
2. Гудфеллоу Я., Бенджио И., Курвилль А. Глубокое обучение. М. : ДМК-Пресс, 2018. 652 с.
3. Zoev I.V., Markov N.G., Ryzhova S.E. Intelligent computer vision system for unmanned aerial vehicles for monitoring technological objects of oil and gas industry // Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering. 2019. V. 330 (11). P. 34–49. doi: 10.18799/24131830/2019/11/2346
4. Alzubaidi L., Zhang J., Humaidi A.J., Al-Dujaili A., Duan Y., Al-Shamma O., Santamaría J., Fadhel M.A., Al-Amidie M., Farhan L. Review of deep learning: Concepts, CNN architectures, challenges, applications, future directions // Journal of Big Data. 2021. V. 8 (53). P. 1–77. doi: 10.1186/s40537-021-00444-8
5. Небаба С.Г., Марков Н.Г. Сверточные нейронные сети семейства YOLO для мобильных систем компьютерного зрения // Компьютерные исследования и моделирование. 2024. Т. 16, № 3. С. 615–631. doi: 10.20537/2076-7633-2024-16-3-615-631
6. Wu S., Lu X., Guo C., Guo H. Accurate UAV Small Object Detection Based on HRFPN and EfficientVMamba // Sensors. 2024. V. 24 (5). Art. 4966. doi: 10.3390/s24154966
7. Клековкин В.А., Марков Н.Г., Небаба С.Г. Обнаружение и классификация малоразмерных летающих объектов на изображениях с использованием сверточных нейронных сетей семейства YOLOv5 // Доклады ТУСУР. 2024. Т. 27, № 4. С. 103–110. doi: 10.21293/1818-0442-2024-27-4-103-110
8. Lin T.Y., Maire M., Belongie S., Hays J., Perona P., Ramanan D., Zitnick C.L. Microsoft COCO: Common objects in context // Computer Vision—ECCV 2014: 13th European Conference, Zurich, Switzerland, September 6–12, 2014 : proc. Springer International Publishing, 2014. Pt. V 13. P. 740–755. doi: 10.48550/arXiv.1405.0312



9. Bochkovskiy A., Wang C.Y., Liao H.Y.M. YOLOv4: Optimal Speed and Accuracy of Object Detection // arXiv. 2020. Art. 10934v1. P. 1–17. doi: 10.48550/arXiv.2004.10934
10. Olorunshola O.E., Irhebhude M.E., Ewwiekpaefe A.E. A Comparative Study of YOLOv5 and YOLOv7 Object Detection Algorithms // Journal of Computing and Social Informatics. 2023. V. 2. P. 1–12. doi: 10.33736/jcsi.5070.2023
11. Филичкин С.А., Вологдин С.В. Сравнение эффективности алгоритмов YOLOv5 и YOLOv8 для обнаружения средств индивидуальной защиты человека // Интеллектуальные системы в производстве. 2023. Т. 21, № 3. С. 124–131.
12. Vaswani A. et al. Attention is all you need // 31st Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS 2017), Long Beach, CA, USA. V. 30. URL: <https://arxiv.org/abs/1706.03762> (accessed: 10.04.2025).
13. Dosovitskiy A. et al. An image is worth 16x16 words: Transformers for image recognition at scale // arXiv. 2020. Art. 11929. doi: arXiv:2010.11929. 2020
14. Han K. et al. A survey on visual transformer // arXiv. 2022. Art. 12556. doi: 10.48550/arXiv.2012.12556
15. Li J., Zhang J., Shao Y., Liu F. SRE-YOLOv8: An Improved UAV Object Detection Model Utilizing Swin Transformer and RE-FPN // Sensors. 2024. V. 24 (12). Art. 3918. doi: 10.3390/s24123918
16. Hu J., Shen L., Sun G. Squeeze-and-excitation networks // IEEE / CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2018. P. 7132–7141. doi: 10.1109/CVPR.2018.00745
17. Liu Z., Lin Y., Cao Y., Hu H., Wei Y., Zhang Z., Lin S., Guo B. Swin transformer: Hierarchical vision transformer using shifted windows // IEEE / CVF International Conference on Computer Vision (ICCV). 2021. P. 9992–10002. doi: 10.48550/arXiv.2103.14030
18. Yang J. et al. Focal modulation networks // Advances in Neural Information Processing Systems 35 (NeurIPS 2022). 2022. V. 35. P. 4203–4217.

## References

1. Tan, M., Pang, R. & Le, Q.V. (2020) EfficientDet: Scalable and Efficient Object Detection. *CVPR 2020*. Art. 09070. [Online] Available from: <https://arxiv.org/abs/1911.09070> (Accessed: 10th April 2025).
2. Goodfellow, I., Bengio, Y. & Courville, A. (2018) *Глубокое обучение* [Deep Learning]. Translated from English. Moscow: DMK-Press.
3. Zoev, I.V., Markov, N.G. & Ryzhova, S.E. (2019) Intelligent computer vision system for unmanned aerial vehicles for monitoring technological objects of oil and gas industry. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering*. 330(11). pp. 34–49. DOI: 10.18799/24131830/2019/11/2346
4. Alzubaidi, L., Zhang, J., Humaidi, A.J., Al-Dujaili, A., Duan, Y., Al-Shamma, O., Santamaría, J., Fadhel, M.A., Al-Amidie, M. & Farhan, L. (2021) Review of deep learning: Concepts, CNN architectures, challenges, applications, future directions. *Journal of Big Data*. 8(53). pp. 1–77. DOI: 10.1186/s40537-021-00444-8
5. Nebaba, S.G. & Markov, N.G. (2024) Convolutional neural networks of the YOLO family for mobile computer vision systems. *Компьютерные исследования и моделирование*. 16(3). pp. 615–631. DOI: 10.20537/2076-7633-2024-16-3-615-631
6. Wu, S., Lu, X., Guo, C. & Guo, H. (2024) Accurate UAV Small Object Detection Based on HRFPN and EfficientViMamba. *Sensors*. 24(5). Art. 4966. DOI: 10.3390/s24154966
7. Klekovkin, V.A., Markov, N.G. & Nebaba, S.G. (2024) Detection and classification of small flying objects in images using convolutional neural networks of the YOLOv5 family. *Doklady TUSUR*. 27(4). pp. 103–110. DOI: 10.21293/1818-0442-2024-27-4-103-110
8. Lin, T.Y., Maire, M., Belongie, S., Hays, J., Perona, P., Ramanan, D. & Zitnick, C.L. (2014) Microsoft COCO: Common objects in context. *Computer Vision—ECCV 2014*. 13th European Conference, Zurich, Switzerland, September 6–12. Proceedings, Part V 13. Springer International Publishing. pp. 740–755. DOI: 10.48550/arXiv.1405.0312
9. Bochkovskiy, A., Wang, C.Y. & Liao, H.Y.M. (2020) YOLOv4: Optimal Speed and Accuracy of Object Detection. *Journal arXiv, preprint arXiv*. 10934v1. pp. 1–17. DOI: 10.48550/arXiv.2004.10934
10. Olorunshola, O.E., Irhebhude, M.E. & Ewwiekpaefe, A.E. (2023) A Comparative Study of YOLOv5 and YOLOv7 Object Detection Algorithms. *Journal of Computing and Social Informatics*. 2. pp. 1–12. DOI: 10.33736/jcsi.5070.2023
11. Filichkin, C.A. & Vologdin, S.V. (2023) Comparison of the effectiveness of YOLOv5 and YOLOv8 algorithms for detecting personal protective equipment. *Интеллектуальные системы в производстве*. 21(3). pp. 124–131.
12. Vaswani, A. et al. (2017) Attention is all you need. *Advances in Neural Information Processing Systems*. 30. [Online] Available from: <https://arxiv.org/abs/1706.03762>
13. Dosovitskiy, A. et al. (2020) An image is worth 16x16 words: Transformers for image recognition at scale. *arXiv preprint arXiv:2010.11929*
14. Han, K. et al. (2020) A survey on visual transformer. *arXiv preprint arXiv:2012.12556*
15. Li, J., Zhang, J., Shao, Y. & Liu, F. (2024) SRE-YOLOv8: An Improved UAV Object Detection Model Utilizing Swin Transformer and RE-FPN. *Sensors*. 24(12). Art. 3918. DOI: 10.3390/s24123918
16. Hu, J., Shen, L. & Sun, G. (2018) Squeeze-and-excitation networks. *IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. pp. 7132–7141. DOI: 10.1109/CVPR.2018.00745
17. Liu, Z., Lin, Y., Cao, Y., Hu, H., Wei, Y., Zhang, Z., Lin, S. & Guo, B. (2021) Swin transformer: Hierarchical vision transformer using shifted windows. *IEEE/CVF International Conference on Computer Vision (ICCV)*. pp. 9992–10002. DOI: 10.48550/arXiv.2103.14030
18. Yang J. et al. (2022) Focal modulation networks. *Advances in Neural Information Processing Systems*. 35. pp. 4203–4217.

**Информация об авторах:**

**Клековкин Вадим Александрович** – аспирант отделения информационных технологий Инженерной школы информационных технологий и робототехники Национального исследовательского Томского политехнического университета (Томск, Россия). E-mail: vak37@tpu.ru

**Марков Николай Григорьевич** – доктор технических наук, профессор отделения информационных технологий Инженерной школы информационных технологий и робототехники Национального исследовательского Томского политехнического университета (Томск, Россия). E-mail: markovng@tpu.ru

**Небаба Степан Геннадьевич** – кандидат технических наук, доцент отделения информационных технологий Инженерной школы информационных технологий и робототехники Национального исследовательского Томского политехнического университета (Томск, Россия). E-mail: stepanlfx@tpu.ru

**Вклад авторов:** все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Information about the authors:**

**Klekovkin Vadim A.** (Post-Graduate Student, National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: vak37@tpu.ru

**Markov Nikolay G.** (Doctor of Technical Sciences, Professor, National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: markovng@tpu.ru

**Nebaba Stepan G.** (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: stepanlfx@tpu.ru

**Contribution of the authors:** the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

*Поступила в редакцию 05.05.2025; принята к публикации 02.09.2025*

*Received 05.05.2025; accepted for publication 02.09.2025*

Научная статья

УДК 519.21

doi: 10.17223/19988605/72/5

**Исследование затухающего дополнительного потока событий в системе с входящим ММРР-потоком методом марковского суммирования****Анатолий Андреевич Назаров<sup>1</sup>, Диана Дамировна Даммер<sup>2</sup>**<sup>1, 2</sup> *Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия*<sup>1</sup> *nazarov.tsu@gmail.com*<sup>2</sup> *di.dammer@yandex.ru*

**Аннотация.** Рассматривается модель массового обслуживания с входящим ММРР-потоком заявок и неограниченным количеством приборов. Заявка в течение времени своего обслуживания независимо от других заявок генерирует события дополнительного потока. С использованием методов марковского суммирования и асимптотического анализа находится характеристическая функция числа событий дополнительного потока, формируемого на промежутке  $[0, \infty)$  всеми заявками, поступившими в систему на промежутке времени  $(-\infty, T]$ ,  $T > 0$ . Задача решается как для экспоненциального времени обслуживания, так и в случае произвольного распределения времени обслуживания. Приводятся численные результаты при заданных значениях параметров системы.

**Ключевые слова:** система массового обслуживания; характеристическая функция; метод марковского суммирования; дополнительный поток.

**Для цитирования:** Назаров А.А., Даммер Д.Д. Исследование затухающего дополнительного потока событий в системе с входящим ММРР-потоком методом марковского суммирования // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2025. № 72. С. 51–60. doi: 10.17223/19988605/72/5

Original article

doi: 10.17223/19988605/72/5

**Study of the decaying additional flow of events in a system with an input MMPP-flow using the Markov summation method****Anatoly A. Nazarov<sup>1</sup>, Diana D. Dammer<sup>2</sup>**<sup>1, 2</sup> *National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*<sup>1</sup> *nazarov.tsu@gmail.com*<sup>2</sup> *di.dammer@yandex.ru*

**Abstract.** A queuing system with an unlimited number of servers and input MMPP-flow of requests is considered. During the time of service in the system, request generate additional flow events independently of other requests. Using the methods of Markov summation and asymptotic analysis, the characteristic function of the number of events of the additional flow formed on the interval  $[0, \infty)$  by all requests received in the system within the interval of time  $(-\infty, T]$ ,  $T > 0$  is found. The problem is solved both for exponential service time and for an arbitrary distribution of service time. Numerical results are given for various values of the system parameters.

**Keywords:** queueing system; characteristic function; Markov summation method; additional flow.

**For citation:** Nazarov, A.A., Dammer, A.A. (2025) Study of the decaying additional flow of events in a system with an input MMPP-flow using the Markov summation method. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 72. pp. 51–60. doi: 10.17223/19988605/72/5

## Введение

Исследования в области теории массового обслуживания демонстрируют разнообразие применяемых моделей и методов с целью прогнозирования, оптимизации и управления реальными процессами и объектами. В качестве таких объектов могут выступать, например, страховые компании и другие коммерческие организации [1–2]. Также с помощью методов теории массового обслуживания моделируют работу железнодорожных станций [3], функционирование телекоммуникационных сетей [4], процессы в военной отрасли [5–6], в сфере интернета вещей [7] и т.д. В качестве предмета исследований в таких моделях могут быть входящие потоки заявок и их параметры [8], число занятых приборов или число обслуживаемых заявок в системе [9], длина очереди на обслуживание [10], выходящие потоки [11–12] и др. Многообразие работ по данной тематике демонстрирует необходимость развития методов и подходов для анализа различных характеристик исследуемых моделей массового обслуживания.

В данной работе рассматривается система массового обслуживания с входящим ММРР-потокм заявок и неограниченным количеством приборов. Каждая заявка в течение времени обслуживания независимо от других заявок генерирует события некоторого дополнительного потока. Такие дополнительные потоки моделируют, например, потоки выплат клиентам страховой компании по факту наступления страховых случаев, потоки денежных операций в рамках накопительного банковского счета, когда клиент в любой момент времени имеет возможность снимать средства или пополнять счет, потоки заказов товаров и услуг, например вызовов такси с установленного мобильного приложения и т.д. Подобные потоки в своих трудах рассматривали М.С. Бартлетт [13] для исследования транспортных потоков и П.А.В. Льюис и Д.Р. Кокс [14] для моделирования отказов вычислительных машин. Также в работах [15–17] с помощью метода марковского суммирования исследуется дополнительный поток, сгенерированный заявками, поступившими в систему после заданного начального момента времени  $t = 0$ ; в [18–19] заявки учитываются и до начального момента в условиях простейшего входящего потока. В данном исследовании впервые с использованием комбинации методов марковского суммирования и асимптотического анализа находится характеристическая функция числа событий дополнительного потока, формируемого на промежутке  $[0, \infty)$  всеми входящего ММРР-потокм заявками, поступившими в систему на промежутке времени  $(-\infty, T]$ ,  $T > 0$ . Так как количество событий дополнительного потока после момента времени  $T$  с течением времени будет убывать, то такой поток назовем затухающим. Задача решается как для экспоненциального времени обслуживания, так и для произвольного распределения времени обслуживания. Приводятся численные результаты при заданных значениях параметров системы.

## 1. Описание модели и постановка задачи

Рассмотрим систему массового обслуживания с входящим ММРР-потокм заявок и неограниченным количеством приборов. Время обслуживания имеет экспоненциальный закон распределения с параметром  $\mu$  или характеризуется произвольной функцией распределения  $B(x)$  (рис. 1).

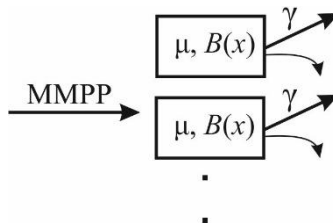


Рис. 1. Модель системы массового обслуживания с  $d$ -потокм  
Fig. 1. Model of a queueing system with  $d$ -flow

Каждая заявка, приходящая в систему, в течение времени обслуживания на приборе генерирует с интенсивностью  $\gamma$  события дополнительного потока, который будем называть локальным  $d$ -потокм; суммарным  $d$ -потокм будем называть дополнительный поток, сформированный всеми заявками [16].

Предполагается, что заявки поступают в систему на промежутке  $(-\infty, T]$ ,  $T > 0$ , а события формируемого этими заявками дополнительного потока учитываются на интервале  $[0, \infty)$ .

Обозначим  $i(t)$  – число событий локального  $d$ -потока от заявки, поступившей в момент времени  $t$ ,  $n(t)$  – число событий суммарного  $d$ -потока, сформированных заявками, поступившими в систему на промежутке  $(-\infty, t]$ ;  $r(i, t) = P\{i(t) = i\}$ ,  $P(n, t) = P\{n(t) = n\}$ . Задача состоит в нахождении характеристической функции числа  $n(t)$  событий суммарного  $d$ -потока, сформированного на  $[0, \infty)$  заявками входящего потока при условии, что в момент времени  $t = 0$  в системе находится какое-то количество заявок. На рис. 2 изображена схема формирования  $d$ -потока: моменты  $t_i$  на оси времени обозначают моменты поступления заявок в систему на промежутке  $(-\infty, T]$ , точки – моменты наступления событий  $d$ -потока на промежутке  $[0, \infty)$ . Для решения поставленной задачи будем использовать метод марковского суммирования, который был введен и описан в [16], а также метод асимптотического анализа [20].

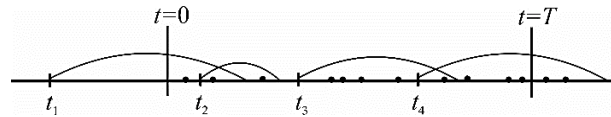


Рис. 2. Схема формирования  $d$ -потока

Fig. 2. Scheme for generating  $d$ -flow

## 2. Характеристическая функция числа событий суммарного $d$ -потока

### 2.1. Метод марковского суммирования

Будем считать, что входящий ММРР-поток управляется цепью Маркова  $k(t)$  и характеризуется следующими матрицами: диагональной матрицей  $\Lambda$  с элементами  $\lambda_k$  на главной диагонали, где  $\lambda_k$  – условные интенсивности поступления входящих заявок, когда цепь Маркова  $k(t)$  находится в состоянии  $k$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ ; квадратной размерности  $K$  матрицей  $Q$  инфинитезимальных характеристик  $q_{vk}$ , которая определяет марковскую цепь  $k(t)$ .

Определим двумерный процесс  $\{n(t), k(t)\}$ , который в описанных выше условиях является марковским. Согласно методу марковского суммирования [16] необходимо:

1. Определить характеристику числа  $n(t)$  суммарного  $d$ -потока в виде вероятности

$$P_k(n, t) = P\{n(t) = n, k(t) = k\}, \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

2. Найти вид вероятности  $r(i, t)$  для локального  $d$ -потока и соответствующую характеристическую функцию.

3. Составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей из п. 1.

4. Решить систему уравнений из п. 3, получить искомое распределение из п. 1.

Реализуя первый этап, для вероятностей  $P_k(n, t)$  запишем равенства

$$\begin{aligned} P_k(n, t + \Delta t) = & P_k(n, t)(1 - \lambda_k \Delta t)(1 + q_{kk} \Delta t) + \sum_{v \neq k} P_v(n, t) q_{vk} \Delta t + \\ & + \lambda_k \Delta t \sum_{i=0}^n P_k(n-i, t) r(i, t) + o(\Delta t), \quad k = 1, 2, \dots, K. \end{aligned} \quad (1)$$

В (1) присутствует вероятность  $r(i, t)$ , выражение для которой было получено в работе [18] в виде (2) для модели с простейшим входящим потоком и экспоненциальным обслуживанием (тип входящего потока не будет влиять на вид этой вероятности, так как  $r(i, t)$  характеризует локальный  $d$ -поток, а значит, будет зависеть от распределения обслуживания и интенсивности  $d$ -потока):

$$r(i, t) = \begin{cases} \mu \int_0^\infty \frac{(\gamma x)^i}{i!} e^{-x(\gamma + \mu)} dx, & t \geq 0, \\ 1 - e^{\mu t} + \frac{\mu e^{\mu t}}{\gamma + \mu}, & t < 0, i = 0, \\ \mu e^{-\gamma t} \int_{-t}^\infty \frac{(\gamma(z+t))^i}{i!} e^{-z(\gamma + \mu)} dz, & t < 0, i > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Система дифференциальных уравнений Колмогорова после преобразований равенств (1) будет иметь вид:

$$\frac{\partial P_k(n,t)}{\partial t} = \lambda_k \sum_{i=0}^n P_k(n-i,t) r(i,t) + \sum_v P_v(n,t) q_{vk} - \lambda_k P_k(n,t), \quad k=1,2,\dots,K. \quad (3)$$

Систему (3) для частичных характеристических функций  $H_k(u,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} P_k(n,t)$  запишем в виде:

$$\frac{\partial H_k(u,t)}{\partial t} = (R(u,t) - 1) H_k(u,t) \lambda_k + \sum_v H_v(u,t) q_{vk}, \quad k=1,2,\dots,K, \quad (4)$$

где  $R(u,t)$  – характеристическая функция распределения вероятностей (2) локального  $d$ -потока. Выражение для  $R(u,t)$  также получено в работе [18] и имеет следующий вид:

$$R(u,t) = \begin{cases} \frac{\mu}{\gamma + \mu - \gamma e^{ju}}, & t \geq 0, \\ 1 - e^{\mu t} + \frac{\mu e^{\mu t}}{\gamma + \mu - \gamma e^{ju}}, & t < 0. \end{cases} \quad (5)$$

Введя векторную характеристическую функцию  $\mathbf{H}(u,t) = \{H_1(u,t), H_2(u,t), \dots, H_K(u,t)\}$ , систему (4) можем записать в виде матричного уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial t} = \mathbf{H}(u,t) \{ \mathbf{Q} + (R(u,t) - 1) \mathbf{\Lambda} \} \quad (6)$$

с начальным условием  $\mathbf{H}(u, -\infty) = \mathbf{R}$ .

Матричное уравнение (6) определяет однородную систему линейных дифференциальных уравнений относительно частичных характеристических функций  $H_k(u,t)$  с переменными по  $t$  коэффициентами. Аналитическое решение системы (6) записать не представляется возможным, поэтому решение этой системы будем искать методом асимптотического анализа. Таким образом, п. 4 метода марковского суммирования будем реализовывать с использованием метода асимптотического анализа.

## 2.2. Метод асимптотического анализа

Для реализации метода асимптотического анализа найдем выражение для математического ожидания числа  $n(t)$  событий суммарного  $d$ -потока. Так как

$$\left. \frac{1}{j} \frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial u} \right|_{u=0} = \mathbf{m}(t), \quad \left. \frac{1}{j} \frac{\partial R(u,t)}{\partial u} \right|_{u=0} = R_1(t),$$

то, дифференцируя уравнение (6) по переменной  $u$  в нуле, получим неоднородную систему дифференциальных уравнений относительно  $\mathbf{m}(t)$ :

$$\mathbf{m}'(t) = \mathbf{m}(t) \mathbf{Q} + \mathbf{R} \mathbf{\Lambda} R_1(t). \quad (7)$$

Вектор  $\mathbf{R} = \mathbf{H}(0,t)$ , присутствующий в (7), есть вектор-строка стационарного распределения вероятностей значений цепи Маркова  $k(t)$ , удовлетворяющий системе уравнений

$$\mathbf{R} \mathbf{Q} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{R} \mathbf{E} = \mathbf{1},$$

где  $\mathbf{E}$  – единичный вектор-столбец,  $\mathbf{0}$  – нулевая вектор-строка. Умножая систему (7) на  $\mathbf{E}$ , получим равенство

$$\mathbf{m}'(t) \mathbf{E} = (\mathbf{R} \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}) \cdot R_1(t),$$

из которого можем записать выражение

$$\mathbf{m}(t) \mathbf{E} = \mathbf{R} \mathbf{\Lambda} \mathbf{E} \cdot \int_{-\infty}^t R_1(x) dx.$$

Заметим, что компоненты вектора  $\mathbf{m}(t)$  являются частичными математическими ожиданиями числа событий, наступивших в суммарном  $d$ -потоке,  $\mathbf{m}(t) \mathbf{E}$  – полным математическим ожиданием; скаляр  $\mathbf{R} \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}$  – интенсивностью входящего ММРР-потока.

Для реализации метода асимптотического анализа в уравнении (6) выполним замену

$$\mathbf{H}(u, t) = \mathbf{H}_2(u, t) \exp \left\{ j u \mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{E} \cdot \int_{-\infty}^t R_1(x) dx \right\}, \quad -\infty < t \leq T, \quad (8)$$

тогда для векторной характеристической функции  $\mathbf{H}_2(u, t)$  централизованного случайного процесса  $n(t) - Mn(t)$  получим задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{H}_2(u, t)}{\partial t} = \mathbf{H}_2(u, t) \{ \mathbf{Q} + (R(u, t) - 1) \mathbf{A} - j u \mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{E} R_1(x) \mathbf{I} \}, \\ \mathbf{H}_2(u, -\infty) = \mathbf{R}, \end{cases} \quad (9)$$

где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица. Для решения этой задачи метод асимптотического анализа реализуем в предельном условии  $T \rightarrow \infty$ . Введем следующие обозначения:

$$\frac{1}{T} = \varepsilon^2, \quad u = \varepsilon w, \quad \tau = \varepsilon^2 t, \quad t = \tau T, \quad \mathbf{H}_2(u, t) = \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon),$$

с учетом которых задачу (9) перепишем в виде:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon) \cdot \{ \mathbf{Q} + (R(\varepsilon w, \tau T) - 1) \mathbf{A} - j \varepsilon w \cdot \mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{E} \cdot R_1(\tau T) \mathbf{I} \}, \\ \mathbf{F}(w, -\infty, \varepsilon) = \mathbf{R}. \end{cases} \quad (10)$$

Выполняя предельный переход при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и обозначая  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon) = \mathbf{F}(w, \tau)$ , для векторной функции  $\mathbf{F}(w, \tau)$  получим систему уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{F}(w, \tau) \mathbf{Q} = 0, \\ \mathbf{F}(w, -\infty) = \mathbf{R}. \end{cases} \quad (11)$$

Решение  $\mathbf{F}(w, \tau)$  системы (11) можно записать в виде:  $\mathbf{F}(w, \tau) = \Phi(w, \tau) \mathbf{R}$ , где  $\Phi(w, \tau)$  – скалярная функция. Решение  $\mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon)$  задачи (10) запишем в виде разложения

$$\mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon) = \Phi(w, \tau) \{ \mathbf{R} + j \varepsilon w \mathbf{f} R_1(\tau T) \} + \mathbf{O}(\varepsilon^2). \quad (12)$$

Подставляя (12) в (10) и производя разложение с точностью до порядка  $\varepsilon^2$ , получим равенство

$$\mathbf{R} \{ \mathbf{Q} + j \varepsilon w R_1(\tau T) (\mathbf{A} - \mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{E} \cdot \mathbf{I}) \} + j \varepsilon w \mathbf{f} R_1(\tau T) \mathbf{Q} = \mathbf{O}(\varepsilon^2),$$

из которого для вектора  $\mathbf{f}$  с учетом свойств вектора  $\mathbf{R}$  можем записать неоднородное уравнение

$$\mathbf{f} \mathbf{Q} = \mathbf{R} (\mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{E} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}).$$

Решение  $\mathbf{f}$  этого уравнения можно записать в виде:

$$\mathbf{f} = \mathbf{C} \mathbf{R} + \mathbf{f}_0, \quad (13)$$

где  $\mathbf{C}$  – произвольная константа, а  $\mathbf{f}_0$  – частное решение неоднородного уравнения, удовлетворяющее некоторому дополнительному условию, например  $\mathbf{f}_0 \mathbf{E} = 0$ .

Далее уравнение из (10) умножим на  $\mathbf{E}$  и представим  $R(\varepsilon w, \tau T)$  в виде разложения

$$R(\varepsilon w, \tau T) = M \{ e^{j w i(\tau T)} \} = 1 + j \varepsilon w M i(\tau T) + \frac{(j \varepsilon w)^2}{2} M i^2(\tau T) + O(\varepsilon^3),$$

где  $M i(\tau T) = R_1(\tau T)$ ,  $M i^2(\tau T) = R_2(\tau T)$ , получим

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} \mathbf{E} = \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon) \cdot \left\{ j \varepsilon w R_1(\tau T) (\mathbf{A} \mathbf{E} - \mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) + j^2 \frac{(\varepsilon w)^2}{2} R_2(\tau T) \mathbf{A} \mathbf{E} \right\} + \mathbf{O}(\varepsilon^3). \quad (14)$$

Подставляя в (14) разложение (12), запишем

$$\varepsilon^2 \frac{1}{\Phi(w, \tau)} \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} \mathbf{R} \mathbf{E} = \frac{(j \varepsilon w)^2}{2} \{ 2 R_1^2(\tau T) \mathbf{f} (\mathbf{A} \mathbf{E} - \mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) + R_2(\tau T) \mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{E} \} + \mathbf{O}(\varepsilon^3).$$

В это равенство подставим разложение (13) и, выполнив несложные преобразования, получим уравнение

$$\frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} = \Phi(w, \tau) \frac{(j w)^2}{2} \{ 2 \mathbf{f}_0 \mathbf{A} \mathbf{E} R_1^2(\tau T) + \mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{E} R_2(\tau T) \}. \quad (15)$$

Решение  $\Phi(w, \tau)$  уравнения (15) имеет вид:

$$\Phi(w, \tau) = \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\tau T} [2f_0 \Lambda E R_1^2(x) + \mathbf{R} \Lambda E R_2(x)] dx \right\}.$$

Возвращаясь к переменным  $u$  и  $t$ , для скалярной функции  $\mathbf{H}_2(u, t) \mathbf{E}$  получим аппроксимацию

$$\mathbf{H}_2(u, t) \mathbf{E} = \exp \left\{ \frac{(ju)^2}{2} \int_{-\infty}^t [2f_0 \Lambda E R_1^2(x) + \mathbf{R} \Lambda E R_2(x)] dx \right\}.$$

В силу замены (8) аппроксимацию характеристической функции  $Me^{ju\tau(T)}$  числа событий суммарного  $d$ -потока можно записать в виде:

$$\mathbf{H}(u, T) \mathbf{E} = \exp \left\{ ju \mathbf{R} \Lambda \mathbf{E} \cdot \int_{-\infty}^T R_1(x) dx + \frac{(ju)^2}{2} \int_{-\infty}^T [2f_0 \Lambda E R_1^2(x) + \mathbf{R} \Lambda E R_2(x)] dx \right\}, \quad (16)$$

т.е. в виде характеристической функции гауссовского распределения с параметрами

$$\kappa_1 = \mathbf{R} \Lambda \mathbf{E} \cdot \int_{-\infty}^T R_1(x) dx, \quad \kappa_2 = 2f_0 \Lambda \mathbf{E} \int_{-\infty}^T R_1^2(x) dx + \mathbf{R} \Lambda \mathbf{E} \int_{-\infty}^T R_2(x) dx, \quad (17)$$

где

$$R_1(t) = \begin{cases} \frac{\gamma}{\mu} e^{\mu t}, & t < 0, \\ \frac{\gamma}{\mu}, & t \geq 0, \end{cases} \quad R_2(t) = \begin{cases} \frac{\gamma}{\mu} \left( 1 + 2 \frac{\gamma}{\mu} \right) e^{\mu t}, & t < 0, \\ \frac{\gamma}{\mu} \left( 1 + 2 \frac{\gamma}{\mu} \right), & t \geq 0. \end{cases}$$

### 3. Характеристическая функция числа событий суммарного $d$ -потока для модели с произвольным обслуживанием

Для решения задачи нахождения характеристической функции числа событий суммарного  $d$ -потока в модели с произвольным временем обслуживания методом марковского суммирования в первую очередь необходимо найти выражения для вероятностей  $r(i, t)$  и соответствующей характеристической функции  $R(u, t)$ . В работе [19] получены выражения для этих функций в рамках задачи исследования числа событий затухающего суммарного  $d$ -потока в условиях простейшего входящего потока и произвольного времени обслуживания в случае поступления заявок в систему на  $(-\infty, T]$ . Так как тип входящего потока не влияет на вид  $r(i, t)$  и  $R(u, t)$ , то для задачи с входящим ММРР-поток и произвольным обслуживанием можно записать полученное в [19] выражение в виде (18) для  $R(u, t)$ :

$$R(u, t) = \begin{cases} \int_0^{\infty} \exp\{\gamma x(e^{ju} - 1)\} dB(x), & t \geq 0, \\ B(-t) + \exp\{\gamma t(e^{ju} - 1)\} \int_{-t}^{\infty} \exp\{\gamma z(e^{ju} - 1)\} dB(z), & t < 0. \end{cases} \quad (18)$$

Общий вид аппроксимации характеристической функции в данных условиях не будет отличаться от вида выражения (16), но, очевидно, параметры (17) теперь будут зависеть от  $R_1(t)$  и  $R_2(t)$ , которые с учетом функции (18) будут определяться следующими выражениями:

$$R_1(t) = \begin{cases} \gamma \int_{-t}^{\infty} (z+t) dB(z), & t < 0, \\ \gamma \int_0^{\infty} z dB(z), & t \geq 0, \end{cases} \quad R_2(t) = \begin{cases} \int_{-t}^{\infty} (\gamma(z+t) + \gamma^2(z+t)^2) dB(z), & t < 0, \\ \int_0^{\infty} (\gamma z + \gamma^2 z^2) dB(z), & t \geq 0. \end{cases}$$



#### 4. Численные результаты

С помощью системы Mathcad были реализованы численные эксперименты, в рамках которых при заданных значениях параметров модели было получено дискретное распределение вероятностей числа  $n(T)$  событий затухающего  $d$ -потока, сформированного на промежутке  $[0, \infty)$  заявками, поступившими в систему на  $(-\infty, T]$ .

Для модели с экспоненциальным временем обслуживания и модели с произвольным обслуживанием проведена численная реализация для входящего ММРР-потока заявок, который определяется следующими квадратными размерности  $K = 3$  матрицами:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -0,4 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & -0,6 & 0,5 \\ 0,3 & 0,3 & -0,6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

и для параметров  $T = 15$  и  $\mu = 0,5$ . В качестве произвольного распределения времени обслуживания рассмотрены гамма-распределение и распределение Вейбулла с такими параметрами формы  $\alpha$  и масштаба  $\beta$ , чтобы среднее время обслуживания для этих распределений совпадало со средним для экспоненциального обслуживания. Для гамма-распределения  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$ , для распределения Вейбулла  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 2,257$ . На рис. 3–5 представлены дискретные распределения вероятностей  $P(n, T)$ , аппроксимирующие теоретическое распределение, для трех значений параметра  $\gamma$ , равных 0,5, 1,0 и 1,5 соответственно:  $PE(n, T)$  для экспоненциального распределения времени обслуживания,  $PG(n, T)$  – для гамма-распределения,  $PW(n, T)$  – для распределения Вейбулла.

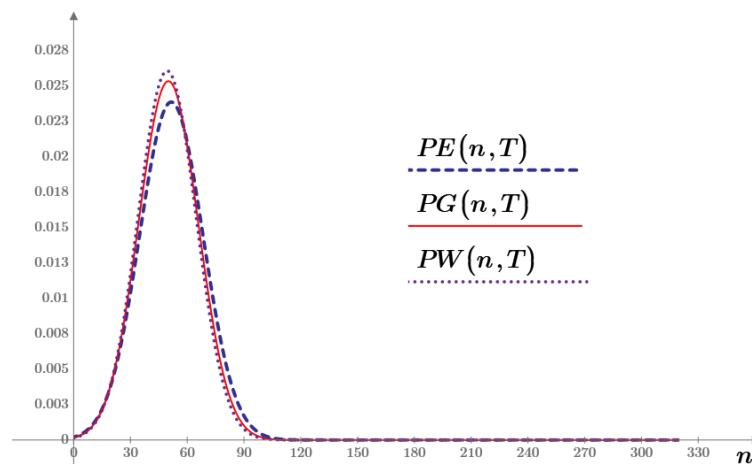


Рис. 3. Распределение вероятностей  $P(n, T)$  при  $\gamma = 0,5$   
Fig. 3. Probability distribution  $P(n, T)$  for  $\gamma = 0,5$

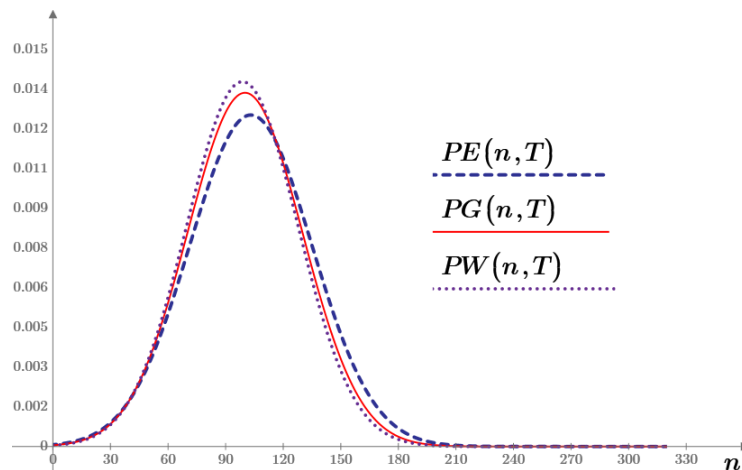


Рис. 4. Распределение вероятностей  $P(n, T)$  при  $\gamma = 1,0$   
Fig. 4. Probability distribution  $P(n, T)$  for  $\gamma = 1,0$

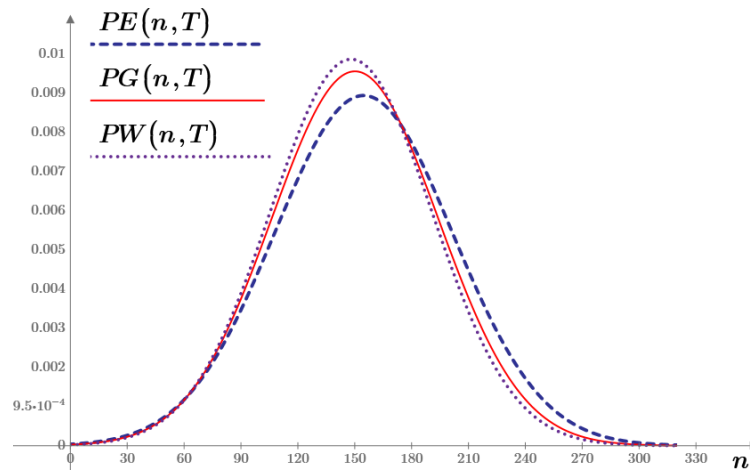


Рис. 5. Распределение вероятностей  $P(n, T)$  при  $\gamma = 1,5$

Fig. 5. Probability distribution  $P(n, T)$  for  $\gamma = 1,5$

**Значения математических ожиданий  $Mn(T)$  и средних квадратических отклонений  $\sigma n(T)$**

	$PE(n, T)$	$PG(n, T)$	$PW(n, T)$
$\gamma = 0,5$	$Mn(t) = 51,557$ $\sigma n(T) = 16,727$	$Mn(t) = 50,041$ $\sigma n(T) = 15,748$	$Mn(t) = 49,353$ $\sigma n(T) = 15,306$
$\gamma = 1,0$	$Mn(t) = 103,115$ $\sigma n(T) = 31,876$	$Mn(t) = 100,082$ $\sigma n(T) = 29,865$	$Mn(t) = 98,707$ $\sigma n(T) = 28,955$
$\gamma = 1,5$	$Mn(t) = 154,672$ $\sigma n(T) = 46,998$	$Mn(t) = 150,123$ $\sigma n(T) = 43,952$	$Mn(t) = 148,06$ $\sigma n(T) = 42,572$

В таблице представлены значения математических ожиданий и средних квадратических отклонений числа  $n(T)$  событий суммарного  $d$ -потока при заданных выше значениях параметров для различных распределений времени обслуживания и различных значений интенсивностей локального  $d$ -потока. По приведенным в таблице данным наблюдается тенденция к увеличению числовых характеристик для всех распределений с увеличением интенсивности локального  $d$ -потока. Несмотря существенное различие в распределениях времени обслуживания, наблюдается незначительная разница в значениях числовых характеристик с относительной погрешностью в пределах 2–6% для одного значения  $\gamma$ ; причем пределы погрешностей сохраняются и для других значений интенсивности  $\gamma$ .

**Заключение**

В данной работе рассмотрена модель массового обслуживания, в рамках которой исследуется поток дополнительных событий. Найдено выражение аппроксимации в предельном условии  $T \rightarrow \infty$  характеристической функции числа событий затухающего  $d$ -потока от заявок, поступивших на промежутке  $(-\infty, T]$ ,  $T > 0$ . Проведены численные эксперименты, получены кривые дискретных распределений для различных значений параметров модели. Результаты исследований, например, в случае финансовой или информационной нагрузки событий в дополнительных потоках, могут быть полезны для оптимизации и управления экономической деятельностью предприятий с учетом временных промежутков поступления клиентов в компанию и генерации событий дополнительных потоков.

**Список источников**

1. Afeche P. Incentive-compatible revenue management in queueing systems: Optimal strategic delay // Manufacturing & Service Operations Management. 2013. V. 15 (3). P. 423–443. doi: 10.1287/msom.2013.0449
2. Dammer D. Research of mathematical model of insurance company in the form of queueing system in a random environment // Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications : Proc. of the 16th International Conference. 2017. V. 800. P. 204–214. doi: 10.1007/978-3-319-68069-9\_17
3. Жарков М.Л., Павидис М.М. Моделирование железнодорожных станций на основе сетей массового обслуживания // Актуальные проблемы науки Прибайкалья : сб. ст. / отв. ред. И.В. Бычков, А.Л. Казаков. Иркутск : Иркут. гос. ун-т, 2020. Вып. 3. С. 79–84.

4. Вишневецкий В.М., Дудин А.Н. Системы массового обслуживания с коррелированными входными потоками и их применение для моделирования телекоммуникационных сетей // Автоматика и телемеханика. 2017. № 8. С. 3–59. doi: 10.1134/S000511791708001X
5. Артемов А.С., Герасимов А.В. Применение теории массового обслуживания при исследовании сложных организационно-технических систем военного назначения // Военная мысль. 2011. № 12. С. 3–10.
6. Nikolic N.V. The 110th anniversary of queueing theory: its applications in the military // Military Technical Courier. 2019. V. 67 (4). P. 806–819. doi: 10.5937/vojtechg67-22460
7. Малахов С.В., Якупов Д.О., Осипова А.А., Копылова Д.А., Зеленина Е.А. Применение системы массового обслуживания для исследования характеристик канала связи в IoT-сетях // Вестник Новосибирского государственного университета. Сер. Информационные технологии. 2024. Т. 22, № 1. С. 49–61. doi: 10.25205/1818-7900-2024-22-1-49-61
8. Поспелов П.И., Таташев А.Г., Терентьев А.В., Карелина М.Ю., Яшина М.В. Потоки Бартлетта и математическое описание автотранспортных потоков // Научные технологии в космических исследованиях земли. Информатика, вычислительная техника и управление. 2021. Т. 13, № 6. С. 34–41. doi: 10.36724/2409-5419-2021-13-6-34-41
9. Постников В.М., Спиридонов С.Б., Семкин П.С. Подход к приближенной оценке числа заявок в системах массового обслуживания типа GI/G/C // Естественные и технические науки. 2019. № 7 (133). С. 185–192.
10. Берговин А.К., Ушаков В.Г. О длине очереди в системе со смешанными приоритетами в условиях критической загрузки // Вестник Московского университета. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2024. № 3. С. 54–59. doi: 10.55959/MSU/0137-0782-15-2024-47-3-54-59
11. Ушаков В.Г., Ушаков Г.Н. Выходящие потоки в однолинейной системе с относительным приоритетом // Информатика и ее применения. 2019. Т. 13, № 4. С. 42–47. doi: 10.14357/19922264190407
12. Лапатын И.Л., Назаров А.А. Выходящий поток RQ-системы M/GI/1 асимптотически рекуррентный // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, № 1. С. 100–110. doi: 10.18500/1816-9791-2021-21-1-100-110
13. Bartlett M.S. The spectral analysis of point processes // Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology. 1963. V. 25 (2). P. 264–281. doi: 10.1111/j.2517-6161.1963.tb00508.x
14. Cox D.R., Lewis P.A.W. The Statistical Analysis of Series of Events. London : Methuen, 1966. 285 p.
15. Nazarov A., Dammer D. Methods of limiting decomposition and Markovian summation in queueing system with infinite number of servers // Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications : Proc. in the 17th International Conference. 2018. V. 912. P. 71–82. doi: 10.1007/978-3-319-97595-5\_6
16. Назаров А.А., Даммер Д.Д. Исследование дополнительно формируемого потока в системе с неограниченным числом приборов и рекуррентным обслуживанием методом марковского суммирования // Автоматика и телемеханика. 2019. № 12. С. 133–145. doi: 10.1134/S0005231019120080
17. Даммер Д.Д., Федерягина П.В. Исследование дополнительно формируемого потока в системе с экспоненциальным обслуживанием и неограниченным числом приборов методом марковского суммирования // Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы междунар. науч. конф. / под общ. ред. И.С. Шмырина. Томск : Изд-во Том. гос. ун-та, 2020. С. 260–265.
18. Даммер Д.Д. Исследование дополнительно формируемого потока на бесконечном интервале в системе с экспоненциальным обслуживанием // Информационные технологии и математическое моделирование : материалы XXII Междунар. конф. им. А.Ф. Терпугова. Томск : Изд-во Том. гос. ун-та, 2023. С. 89–94.
19. Даммер Д.Д. Исследование числа страховых выплат в компании с произвольно распределенной продолжительностью договора // Математическое и компьютерное моделирование в экономике, страховании и управлении рисками : материалы XII Междунар. науч.-практ. конф. / отв. ред. В.А. Балаш. Саратов : Саратов. ун-т, 2023. Вып. 8. С. 39–43.
20. Назаров А.А., Моисеева С.П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск : Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.

## References

1. Afeche, P. (2013). Incentive-compatible revenue management in queueing systems: Optimal strategic delay. *Manufacturing & Service Operations Management*. 15(3). pp. 423–443. DOI: 10.1287/msom.2013.0449
2. Dammer, D. (2017) Research of mathematical model of insurance company in the form of queueing system in a random environment. *Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications*. Proc. of the 16th International Conference. Vol. 800. pp. 204–214. DOI: 10.1007/978-3-319-68069-9\_17
3. Zharkov, M.L. & Pavidis, M.M. (2020) Modelirovanie zheleznodorozhnykh stantsiy na osnove setey massovogo obsluzhivaniya [Modelling of railway stations based on queueing networks]. In: Bychkov, I.V. & Kazakov, A.L. (eds) *Aktual'nye problemy nauki Priбайkal'ya* [Topical Issues of Science in Transbaikalia]. Vol. 3. pp. 79–84.
4. Vishnevskiy, V.M. & Dudin, A.N. (2017) Queueing systems with correlated arrival flows and their applications to modeling telecommunication networks. *Automation and Remote Control*. 78(8). pp. 1361–1403. DOI: 10.1134/S000511791708001X
5. Artemov, A.S. & Gerasimov, A.V. (2011) Primenenie teorii massovogo obsluzhivaniya pri issledovanii slozhnykh organizatsionno-tekhnicheskikh sistem voennogo naznacheniya [Application of the queueing theory in the study of complex organizational and technical systems for military purposes]. *Voennaya mysl'*. 12. pp. 3–10.
6. Nikolic, N.V. (2019) The 110th anniversary of queueing theory: its applications in the military. *Military Technical Courier*. 67(4). pp. 806–819. DOI: 10.5937/vojtechg67-22460

7. Malakhov, S.V., Yakupov, D.O., Osipova, A.A., Kopylova, D.A. & Zelenina, E.A. (2024) The use of a queuing system to study the characteristics of the communication channel in iot networks. *Vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Informatsionnye tekhnologii*. 22(1). pp. 49–61. DOI: 10.25205/1818-7900-2024-22-1-49-61
8. Pospelov, P.I., Tatashev, A.G., Terentiev, A.V., Karelina, M.Yu. & Yashina, M.V. (2021) Bartlett flows and mathematical description of motor traffic flows. *Naukoyemkie tekhnologii v kosmicheskikh issledovaniyakh zemli. Informatika, vychislitel'naya tekhnika i upravlenie*. 13(6). pp. 34–41. DOI: 10.36724/2409-5419-2021-13-6-34-41
9. Postnikov, V.M., Spiridonov, S.B. & Semkin, P.S. (2019) Podkhod k priblizhennoy otsenke chisla zayavok v sistemakh massovogo obsluzhivaniya tipa GI/G/S [Approach to an approximate estimate of the number of applications in queueing systems type GI/G/C]. *Estestvennye i tekhnicheskie nauki*. 133. pp. 185–192.
10. Bergovin, A.K. & Ushakov, V.G. (2024) O dline ocheredi v sisteme so smeshannymi prioritetami v usloviyakh kriticheskoy zagruzki [On the queue length in a mixed priority system under critical load]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 15. Vychislitel'naya matematika i kibernetika*. 3. pp. 54–59. DOI: 10.55959/MSU/0137-0782-15-2024-47-3-54-59
11. Ushakov, V.G. & Ushakov, G.N. (2019) The output streams in the single server queueing system with a head of the line priority. *Informatika i ee primeneniya*. 13(4). pp. 42–47. DOI: 10.14357/19922264190407
12. Lapatin, I.L., & Nazarov, A.A. (2021). Output process of the M|GI|1 is an asymptotical renewal process. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*. 21(1). pp. 100–110. DOI: 10.18500/1816-9791-2021-21-1-100-110
13. Bartlett, M.S. (1963) The Spectral Analysis of Point Processes. *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology*. 25(2). pp. 264–296. DOI: 10.1111/j.2517-6161.1963.tb00508.x
14. Cox, D.R. & Lewis, P.A.W. (1966) *The Statistical Analysis of Series of Events*. London: Methuen.
15. Nazarov, A.A. & Dammer, D.D. (2018) Methods of limiting decomposition and Markovian summation in queueing system with infinite number of servers. *Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications*. Proc. of the 16th International Conference. Vol. 912. pp. 71–82. DOI: 10.1007/978-3-319-97595-5\_6
16. Nazarov, A.A. & Dammer, D.D. (2019) A study of additionally generated flows in systems with unlimited number of devices and recurrent servicing with the Markov summation method. *Automation and Remote Control*. 80(12). pp. 2195–220. DOI: 10.1134/S0005231019120080
17. Dammer, D.D. & Federyagina, P.V. (2020) Study of additionally generated flow in a system with exponential service and unlimited number of devices by the Markov summation method. In: Shmyrin, I.S. (ed.) *Matematicheskoe i programnoe obespechenie informatsionnykh, tekhnicheskikh i ekonomicheskikh sistem* [Mathematical and software support for information, technical and economic systems]. Tomsk: Tomsk State University. pp. 260–265.
18. Dammer, D.D. (2023) Issledovanie dopolnitel'no formiruемого potoka na beskonechnom intervale v sisteme s eksponentsial'nym obsluzhivaniem [Study of additionally generated flow on infinite interval in system with exponential service]. *Informatsionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie* [Information Technology and Mathematical Modeling]. Proc. of the 22nd International Conference. Tomsk. pp. 89–94.
19. Dammer, D.D. (2023) Issledovanie chisla strakhovykh vyplat v kompanii s proizvol'no raspredelennoy prodolzhitel'nost'yu dogovora [Research of the number of insurance payments in a company with an arbitrary distributed duration of the contract]. *Matematicheskoe i komp'yuternoe modelirovanie v ekonomike, strakhovanii i upravlenii riskami* [Mathematical and computer modeling in economics, insurance and risk management]. Proc. of the 12th International Conference. Vol. 8. Saratov. pp. 39–43.
20. Nazarov, A.A. & Moiseeva, C.P. (2006) *Metod asimptoticheskogo analiza v teorii massovogo obsluzhivaniya* [Method of Asymptotic Analysis in Queueing Theory]. Tomsk: NTL.

#### Информация об авторах:

**Назаров Анатолий Андреевич** – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: nazarov.tsu@gmail.com

**Даммер Диана Дамировна** – доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: di.dammer@yandex.ru

**Вклад авторов:** все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

#### Information about the authors:

**Nazarov Anatoly A.** (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: nazarov.tsu@gmail.com

**Dammer Diana D.** (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: di.dammer@yandex.ru

**Contribution of the authors:** the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 22.03.2025; принята к публикации 02.09.2025

Received 22.03.2025; accepted for publication 02.09.2025

## ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

## DATA PROCESSING

Научная статья

УДК 004.056.5+519.237

doi: 10.17223/19988605/72/6

**Использование  $F$ -меры для определения порогового значения обнаружения цифровых водяных знаков в изображениях****Виктор Андреевич Анжин<sup>1</sup>, Вадим Николаевич Тренькаев<sup>2</sup>**<sup>1, 2</sup> *Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия*<sup>1</sup> *viktor.anjin@gmail.com*<sup>2</sup> *kziiktvn@gmail.com*

**Аннотация.** Предлагается способ определения пороговой границы обнаружения для цифровых водяных знаков, использующих оценку уровня корреляции на этапе обнаружения. Задача обнаружения цифрового водяного знака рассматривается как задача бинарной классификации изображений, что позволяет использовать метрики качества бинарных классификаторов, в частности  $F$ -меру. В этом случае оптимальное пороговое значение уровня корреляции, которое балансирует ошибки обнаружения разного рода, соответствует максимальному значению  $F$ -меры. Значения  $F$ -меры вычисляются на заданном наборе тестовых изображений и заданном наборе операций, моделирующих воздействия на изображения в процессе передачи или вследствие действий злоумышленника, направленных на удаление водяного знака. Предлагаются способы уменьшения объема вычислений при поиске максимума  $F$ -меры. Производится сравнение предложенного подхода к выбору порогового значения со статистическим методом.

**Ключевые слова:** цифровой водяной знак;  $F$ -мера; пороговое значение обнаружения цифровых водяных знаков; защита от несанкционированного копирования.

**Для цитирования:** Анжин В.А., Тренькаев В.Н. Использование  $F$ -меры для определения порогового значения обнаружения цифровых водяных знаков в изображениях // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2025. № 72. С. 61–70. doi: 10.17223/19988605/72/6

Original article

doi: 10.17223/19988605/72/6

**Detection threshold selection for correlation based digital image watermarks through  $F$ -score optimization****Viktor A. Anzhin<sup>1</sup>, Vadim N. Trenkaev<sup>2</sup>**<sup>1, 2</sup> *National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*<sup>1</sup> *viktor.anjin@gmail.com*<sup>2</sup> *kziiktvn@gmail.com*

**Abstract.** The approach for selecting the detection threshold for correlation based digital image watermarks is proposed. The watermark detection process is treated as a binary classification problem, enabling the use of the  $F$ -score as a quality metric. Within this framework, the optimal detection threshold corresponds to the maximum  $F$ -score value. The  $F$ -score is computed over a set of test images and a predefined set of operations that simulate distortions introduced during transmission or watermark removal attacks. Methods for improving the computational efficiency of  $F$ -score maximization are proposed. The proposed approach to choosing a threshold value is compared with the statistical method.

**Keywords:** digital watermark;  $F$ -score; detection threshold; content protection.

**For citation:** Anzhin, V.A., Trenkaev, V.N. (2025) Detection threshold selection for correlation based digital image watermarks through F-score optimization. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 72. pp. 61–70. doi: 10.17223/19988605/72/6

## Введение

Цифровой водяной знак (ЦВЗ) представляет собой информацию, скрыто встроенную в цифровые данные (контейнер) с целью выявления нелегального распространения защищаемой информации. ЦВЗ применяется для защиты авторских прав и предотвращения несанкционированного копирования. Контейнер с водяным знаком может подвергаться различным воздействиям, приводящим к его искажению и затрудняющим процесс обнаружения ЦВЗ. Сами воздействия обусловлены как естественными причинами, например процедурами обработки данных при передаче или потерями в канале связи, так и преднамеренными действиями злоумышленника, направленными на удаление или изменение ЦВЗ. Далее в качестве контейнера рассматривается цифровое изображение.

Существует большое количество алгоритмов встраивания и обнаружения ЦВЗ [1–3]. При этом для цифровых изображений известно несколько основных способов внедрения водяных знаков: на уровне пикселей изображения [4]; после дискретного косинусного преобразования (ДКП) изображения [5–7]; после вейвлет-преобразования изображения [8]. Для большинства алгоритмов в качестве ЦВЗ используются случайные данные, например белый гауссовский шум [9]. Обнаружение осуществляется путем оценки уровня корреляции между проверяемым ЦВЗ и контейнером, предположительно его содержащим. Если уровень корреляции превышает выбранное значение, называемое пороговым значением обнаружения, то делается вывод, что в контейнер встроен ЦВЗ. Уровень корреляции оценивается с использованием различных подходов, но основными являются линейная и нормализованная корреляции, а также коэффициент корреляции [4].

Выбор порогового значения обнаружения существенно влияет на результат работы алгоритма обнаружения. Слишком низкое пороговое значение может приводить к большому числу ложных обнаружений водяного знака, т.е. к фиксации наличия водяного знака в изображениях, которые его в действительности не содержат. Слишком высокое пороговое значение может приводить к большому числу пропусков водяного знака. Известно [10], что воздействие злоумышленника на контейнер почти не влияет на вероятность ложного обнаружения ЦВЗ, но может приводить к увеличению пропусков ЦВЗ. Для алгоритмов встраивания на базе ДКП или вейвлет-преобразований в работах [11–12] и [13] соответственно используется статистический метод определения порогового значения, в рамках которого фиксируется допустимый уровень ошибок обнаружения, с учетом которого рассчитывается пороговая граница обнаружения. Действия злоумышленника могут иметь разнообразный характер, что затрудняет их формализованное описание и включение в статистическую модель. В результате возможна ситуация, в которой выбранная в качестве допустимой вероятность ошибки пропуска обнаружения дает пороговое значение, которое показывает целевые результаты при обнаружении ЦВЗ при отсутствии воздействия злоумышленника на контейнер, но приводит к значительному числу пропусков обнаружения при наличии такого воздействия. Стоит отметить, что статистические методы выбора порогового значения обнаружения привязаны к конкретным алгоритмам встраивания и обнаружения, а также статистическим параметрам встраиваемого ЦВЗ.

В данной работе задача обнаружения ЦВЗ рассмотрена как задача бинарной классификации изображений, в которой проверяемое изображение классифицируется как содержащее или не содержащее ЦВЗ. Это позволяет использовать метрики качества бинарных классификаторов [14], в частности  $F$ -меру, для оценки качества обнаружения ЦВЗ при различных пороговых значениях. В этом случае оптимальное пороговое значение, которое балансирует ошибки обнаружения, соответствует максимальному значению  $F$ -меры. Значения  $F$ -меры могут быть вычислены на заданном наборе тестовых изображений и заданном наборе воздействий на контейнер (группы фильтров), в том числе направленных на удаление ЦВЗ. Предложенный подход апробирован на двух алгоритмах: 1)  $E\_BLIND/D\_CC$  – алгоритм, в котором ЦВЗ встраивается на уровне пикселей изображения аналогично алгоритму

Е\_BLIND/D\_LC [4], но при обнаружении используется коэффициент корреляции; 2) ДКП-ЦВЗ – алгоритм из [5], в котором операции встраивания и обнаружения выполняются над коэффициентами, полученными после ДКП изображения.

В работе исследуются способы уменьшения объема вычислений при поиске максимума  $F$ -меры, в частности на основе различных методов оптимизации унимодальных функций. Проводится вычислительный эксперимент, направленный на выявление минимального количества тестовых изображений, на котором возможно вычислять пороговое значения обнаружения ЦВЗ без потери качества. Производится сравнение предложенного подхода к выбору порогового значения со статистическим методом из [6].

Программные реализации используемых алгоритмов внедрения и обнаружения ЦВЗ, выполненные на языке C++, а также Python-скрипты проведения вычислительных экспериментов и полученные результаты доступны по ссылке [15].

## 1. Метод определения порогового значения обнаружения ЦВЗ на основе $F$ -меры

Далее рассматриваются методы обнаружения цифровых водяных знаков, основанные на оценке корреляции между заданным ЦВЗ и проверяемым изображением. В случае если значение корреляции больше, чем заданное пороговое значение  $\theta$  (пороговое значение обнаружения ЦВЗ), считается, что в контейнере присутствует ЦВЗ, что может быть неверно. В данной работе используются линейная корреляция и коэффициент корреляции, рассчитываемые по формулам из [4]:

$$Z_{lc}(a, b) = \frac{1}{N} \sum_i a_i b_i, \quad (1)$$

$$\tilde{s} = \frac{s}{|s_{\max}|}, \quad (2)$$

$$Z_{nc}(a, b) = \sum_i \tilde{a}_i \tilde{b}_i, \quad (3)$$

$$\bar{s} = s - \tilde{s}, \quad (4)$$

$$Z_{cc}(a, b) = Z_{nc}(a, b). \quad (5)$$

Формулы (1), (3) и (5) описывают вычисление линейной корреляции, нормализованной корреляции и коэффициента корреляции между двумя последовательностями  $a$  и  $b$ , содержащими  $N$  элементов. Для вычисления линейной корреляции  $Z_{lc}$  по формуле (1) производится покомпонентное перемножение соответствующих элементов последовательностей  $a$  и  $b$  с последующим суммированием результатов и делением на число элементов  $N$ . Формула (2), в которой  $|s_{\max}|$  обозначает максимальное абсолютное значение среди элементов последовательности  $s$ , описывает процедуру нормализации последовательности путем деления каждого ее элемента на максимальное абсолютное значение в ней. При расчете нормализованной корреляции  $Z_{nc}$  по формуле (3) выполняются покомпонентное перемножение и суммирование элементов нормализованных последовательностей. Формула (4), где  $\bar{s}$  обозначает среднее значение элементов последовательности  $s$ , описывает процедуру вычисления отклонений элементов последовательности  $s$  от среднего  $\bar{s}$ . Коэффициент корреляции  $Z_{cc}$  между последовательностями  $a$  и  $b$  в формуле (5) вычисляется как нормализованная корреляция  $Z_{nc}$ , рассчитанная для последовательностей  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ , элементы которых представляют собой отклонения исходных значений соответствующих последовательностей от среднего.

Задача обнаружения ЦВЗ может быть рассмотрена как задача бинарной классификации изображений, что позволяет использовать  $F$ -меру для оценки качества алгоритма обнаружения ЦВЗ. Напомним, что существует разные метрики качества классификатора: точность, полнота, арифметическое среднее, геометрическое среднее.  $F$ -мера представляет собой гармоническое среднее между точностью и полнотой, что дает возможность сбалансированно оценить качество алгоритма.

Значение  $F$ -меры вычисляется по формуле из [14]:

$$F\text{-мера} = \frac{2TP}{2TP + FP + FN}. \quad (6)$$

В формуле (6) используются следующие обозначения:  $TP$  – количество изображений с ЦВЗ, в которых водяной знак обнаружен;  $FP$  – количество изображений без ЦВЗ, в которых водяной знак ошибочно обнаружен;  $FN$  – количество изображений с ЦВЗ, в которых водяной знак не обнаружен.

Опишем способ вычисления  $F$ -меры в зависимости от порогового значения  $\theta$ .

Для каждого изображения  $I$  из базы изображений  $B$  выполняются следующие шаги:

*Шаг 1.* Генерация и внедрение случайного ЦВЗ в изображение  $I$ . Результатом этого шага является изображение с водяным знаком  $I_w$ .

*Шаг 2.* Воздействие операций из набора  $D$  на изображения  $I$  и  $I_w$ . В результате получается два набора изображений:

$\text{Filtr}(I_w)$  – результаты преобразований изображения  $I_w$  с водяным знаком;

$\text{Filtr}(I)$  – результаты преобразований изображения  $I$  без водяного знака.

*Шаг 3.* Вычисление уровня корреляции между ЦВЗ и изображениями  $I$ ,  $I_w$  и наборами изображений  $\text{Filtr}(I_w)$  и  $\text{Filtr}(I)$ .

*Шаг 4.* Обнаружение ЦВЗ методом оценки уровня корреляции при фиксированном пороговом значении  $\theta$ .

*Шаг 5.* Вычисление  $F$ -меры оцениваемого порогового значения  $\theta$  по формуле (6).

Отметим, что шаги с 1-го по 3-й зависят от алгоритма внедрения ЦВЗ и наборов изображений  $B$  и воздействий  $D$ , но не зависят от порогового значения  $\theta$ , выполняются один раз и являются предварительными вычислениями. Шаги 4 и 5 позволяют построить зависимость  $F$ -меры от порогового значения  $\theta$ .

Максимальное значение  $F$ -меры может быть найдено методом последовательного перебора пороговых значений из некоторого интервала. В качестве границ интервала можно использовать минимальное и максимальное значения корреляций, которые получены по результатам шага 3.

В рамках проводимых далее экспериментов зависимость  $F$ -меры от порогового значения  $\theta$  строится для базы данных Flickr8K [16], включающей 8 091 изображение. В рамках эксперимента в качестве фильтров использовались инструменты FFmpeg [17]:

- 1) 2D ДКП-фильтр с использованием dctdnoiz с коэффициентом sigma 5;
- 2) 2D ДКП-фильтр с использованием dctdnoiz с коэффициентом sigma 10;
- 3) размытие с помощью фильтра unsharp с параметрами: 3:3:-0,25:3:3:-0,25;
- 4) увеличение резкости с помощью фильтра unsharp с параметрами: 3:3:0,25:3:3:0,25;
- 5) перекодирование JPEG с уровнем квантования 1;
- 6) перекодирование JPEG с уровнем квантования 25.

Данный набор фильтров содержит воздействия размытием и увеличением резкости, вносящие искажения, которые можно субъективно охарактеризовать как средние, а также ДКП-фильтрацию и JPEG-перекодирование с парой коэффициентов, первый из которых вносит несущественные искажения, а второй – существенные. Рассмотренный набор операций моделирует воздействия злоумышленника и искажения, возникающие при передаче изображений.

На рис. 1 представлены результаты вычисления функции  $F$ -меры для алгоритмов E\_BLIND/D\_CC (см. рис. 1, а, с, е) и для алгоритмов ДКП-ЦВЗ (см. рис. 1, b, d, f) с использованием трех коэффициентов силы встраивания. Коэффициенты силы встраивания, обозначаемые  $\alpha$ , выбраны таким образом, чтобы полученные после встраивания результаты субъективно характеризовались как незаметные (см. рис. 1, а, b), ограниченно заметные (см. рис. 1, с, d) и существенно заметные искажения (см. рис. 1, е, f). По оси абсцисс отложены пороговые значения, а по оси ординат – значения  $F$ -меры в диапазоне от 0 до 1. Красными точками отмечены обнаруженные максимумы функции  $F$ -меры.



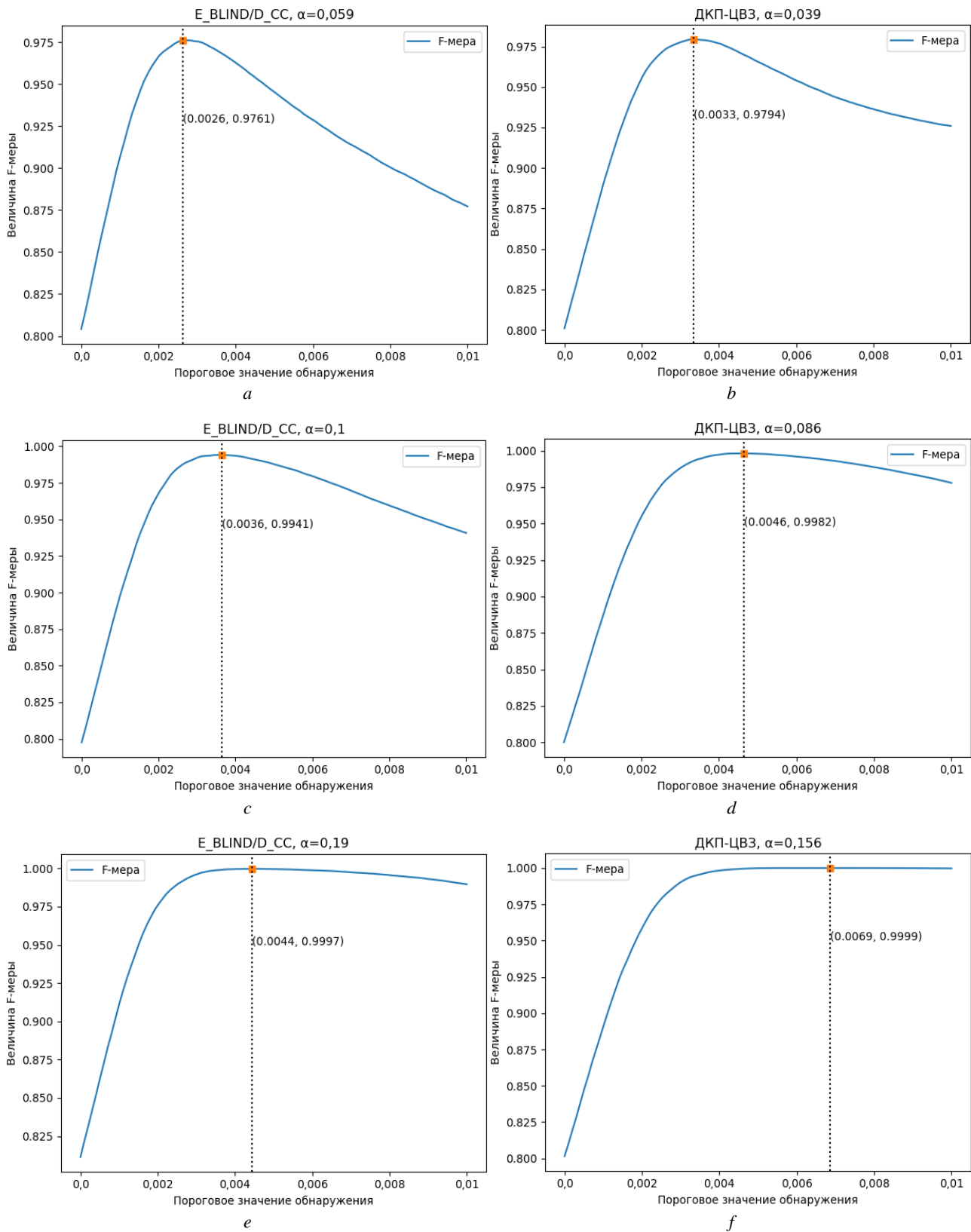


Рис. 1. График зависимости оценки  $F$ -меры от порогового значения обнаружения  $\theta$

Fig. 1. Graph of the  $F$ -measure on the detection threshold value  $\theta$

Из полученных в ходе эксперимента результатов видно, что для всех рассмотренных алгоритмов и коэффициентов силы встраивания функция  $F$ -меры, рассчитанная по предложенному алгоритму, имеет единственный максимум, т.е. является унимодальной.

## 2. Способы ускорения вычисления оптимального порогового значения

### 2.1. Сокращение количества используемых в эксперименте изображений

В предложенном методе определения порогового значения наиболее трудоемкими являются шаги с 1-го по 3-й (внедрение ЦВЗ, фильтрация, вычисление корреляции), повторяющиеся для каждого изображения из тестового набора. В связи с этим представляет интерес нахождение подмножества тестового набора, на котором сохраняются полученные на всем наборе оптимальные значения искомых параметров.

Для выявления такого сокращенного тестового набора для алгоритмов E\_BLIND/D\_CC и ДКП-ЦВЗ проведена экспериментальная оценка нижней границы количества изображений, позволяющая сохранять качество полученных результатов нахождения оптимального порогового значения. Для этих целей проведен вычислительный эксперимент, заключающийся в поиске порогового значения с использованием наборов изображений разной мощности из базы Flickr8K. В рамках эксперимента были рассчитаны отклонения  $F$ -меры и порогового значения, полученных на сокращенных наборах изображений, от таковых, полученных на полном наборе из 8 091 изображения.

Результаты вычислительного эксперимента представлены на рис 2. Рисунок 2, *a* характеризует зависимость отклонения максимума  $F$ -меры, вычисленной на базе сокращенного набора тестовых изображений, относительно эталонного значения максимума  $F$ -меры, вычисленного с использованием полного набора тестовых изображений. По оси абсцисс отложено количество тестовых изображений, а по оси ординат – модуль разности между эталонным значением и значением максимума  $F$ -меры, вычисленной на базе заданного количества тестовых изображений. Аналогично рис. 2, *b* характеризует отклонения оптимального порогового значения, найденного с использованием сокращенного набора тестовых изображений, относительно оптимального порогового значения, полученного на базе полного набора тестовых изображений.

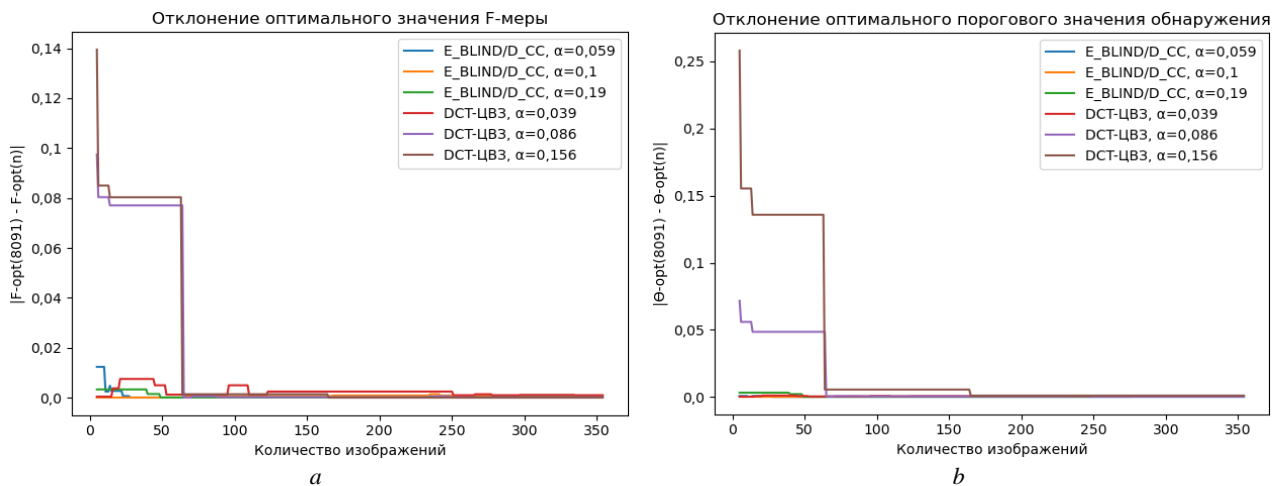


Рис. 2. Отклонения найденного максимума  $F$ -меры (*a*) и оптимального порогового значения обнаружения (*b*) в зависимости от количества используемых в эксперименте изображений

Fig. 2. Deviations of the found maximum  $F$ -measure value (*a*) and the detection threshold value (*b*) depending on the number of images

Из графиков на рис. 2 видно, что существенные отклонения порядка 0,08 и более максимума  $F$ -меры от эталонного значения начинают появляться при количестве изображений, меньшем чем 75. Для порогового значения обнаружения 50 изображений приводят к отклонению порядка 0,15, а при использовании 175 и более изображений пороговое значение обнаружения колеблется в окрестности эталонного значения.

Таким образом, экспериментально показано, что можно существенно ускорить процесс нахождения порогового значения обнаружения, используя малое количество тестовых изображений (в рассмот-

ренном случае 175 вместо 8 091), но принимая во внимание, что полученное пороговое значение будет близким к оптимальному.

## 2.2. Использование методов оптимизации унимодальных функций

Если  $F$ -мера как функция от порогового значения имеет один локальный максимум, то для нахождения ее максимума можно использовать методы одномерной оптимизации унимодальных функций, в частности метод золотого сечения [18] и метод Брента [19]. В работе для алгоритмов E\_BLIND/D\_CC и ДКП-ЦВЗ для разных коэффициентов силы встраивания ЦВЗ проведено экспериментальное сравнение данных методов оптимизации при использовании их для нахождения максимума  $F$ -меры. Коэффициенты силы встраивания выбраны таким образом, чтобы полученные после встраивания результаты субъективно характеризовались как незаметные, ограниченно заметные и существенно заметные искажения. В табл. 1 представлены количества вычислений  $F$ -меры при поиске максимума.

Таблица 1

Количество вычислений  $F(x)$  в ходе оптимизации

Метод встраивания ЦВЗ	Золотое сечение	Метод Брента
E_BLIND/D_CC, $\alpha=0,059$	46	33
E_BLIND/D_CC, $\alpha=0,1$	43	20
E_BLIND/D_CC, $\alpha=0,19$	43	24
ДКП-ЦВЗ, $\alpha=0,039$	45	34
ДКП-ЦВЗ, $\alpha=0,086$	46	26
ДКП-ЦВЗ, $\alpha=0,156$	41	12

Из полученных результатов видно, что для рассматриваемых в ходе эксперимента методов внедрения и обнаружения ЦВЗ и наборов коэффициентов силы встраивания метод Брента позволяет найти оптимальный порог обнаружения с использованием наименьшего количества вычислений функции  $F$ -меры.

## 3. Сравнение со статистическим методом выбора порогового значения обнаружения

Существуют работы, в которых пороговое значение обнаружения выбирается на основе статистической модели, в рамках которой корреляция между проверяемым контейнером и ЦВЗ рассматривается как случайная величина. В случае отсутствия ЦВЗ в контейнере значение корреляции имеет распределение, близкое к нормальному с нулевым средним. При наличии ЦВЗ корреляция подчиняется иному распределению, характеризующемуся смещением среднего в сторону положительных значений. Пороговое значение выбирается на основе анализа этих распределений.

В работе [6] представлен алгоритм встраивания ЦВЗ на базе ДКП, использующий при обнаружении линейную корреляцию. Пороговые значения обнаружения ЦВЗ вычисляются по изображению, в котором осуществляется проверка наличия ЦВЗ. Для этого алгоритма в рамках анализа статистической модели построены следующие формулы выбора порогового значения обнаружения:

$$T = \frac{\alpha}{2M} \sum_{i=1}^M |t_i^*|, \quad (7)$$

$$T = \frac{\alpha}{3M} \sum_{i=1}^M |t_i^*|. \quad (8)$$

В формулах (7) и (8)  $t_i^*$  – это  $i$ -й ДКП-коэффициент проверяемого на наличие ЦВЗ изображения,  $M$  – количество коэффициентов, используемых для встраивания,  $\alpha$  – коэффициент силы встраивания.

В данной работе проведено сравнение предложенного метода определения порогового значения обнаружения ЦВЗ на основе  $F$ -меры со статистическим методом из [6]. Опишем методику проведенного эксперимента. Вначале на базе сокращенного тестового набора изображений Flickr8K и набора фильтров FFmpeg по предложенной методике на основе  $F$ -меры вычисляется пороговое значение обнаружения, равное 59,36093. Используется коэффициент силы встраивания  $\alpha = 0,796$ . В этом случае

ЦВЗ не вызывает ярко выраженных искажений и сохраняется после фильтрации. Далее проводится вычислительный эксперимент по оценке полученных пороговых значений. В каждое изображение из набора Flickr30K [20], который содержит 31 783 изображения, внедряется случайный ЦВЗ. Потом полученные изображения перекодируются с использованием кодека WebP [21], что моделирует воздействие злоумышленника. По формулам (7) и (8) для каждого из проверяемых изображений вычисляется пороговое значение обнаружения. Затем вычисляется количество успешных обнаружений и пропусков обнаружений ЦВЗ до и после перекодирования, а также количество ложных обнаружений ЦВЗ в изображениях, его не содержащих.

Результаты сравнения представлены в табл. 2. Первая строка таблицы содержит результаты эксперимента, в котором пороговое значение получено на основе предлагаемого метода, вторая и третья строки – пороговые значения, вычисленные по формулам (7) и (8) соответственно.

Таблица 2

**Количество успешных обнаружений и пропусков обнаружений ЦВЗ**

Алгоритм выбора порогового значения обнаружения	Количество успешных обнаружений	Количество пропусков обнаружений	Количество успешных обнаружений после фильтрации	Количество пропусков обнаружений после фильтрации	Количество ложных обнаружений
Предлагаемый алгоритм	31778	5	30881	902	3
Статистический метод, формула (7)	31782	1	1130	30653	0
Статистический метод, формула (8)	31783	0	24018	7765	0

Все три оцениваемых варианта выбора пороговой границы обнаружения показывают практически одинаковые результаты на изображениях без фильтрации. Использование порогового значения, рассчитанного по формуле (7), приводит к большому количеству пропусков обнаружения (30 653 пропуска на 31 783 изображениях) после перекодирования с использованием кодека WebP. Пороговое значение, полученное по формуле (8), дает лучшую устойчивость ЦВЗ к фильтрации через перекодирование кодеком WebP, тем не менее приводит к значительному количеству пропусков (7 765 пропусков на 31 783 изображениях, 24%). Предложенный метод выбора порогового значения позволяет добиться минимального количества пропусков после фильтрации (902 пропуска на 31 783 изображениях, 3%), что сопровождается небольшим числом (3) ложных обнаружений ЦВЗ.

Таким образом, экспериментально показано, что предложенный метод выбора порогового значения обнаружения ЦВЗ по сравнению со статистическим методом позволяет сохранить высокий уровень успешных обнаружений после воздействия злоумышленника, демонстрируя сбалансированное соотношение между пропущенными и ложными обнаружениями.

### Заключение

В работе рассматривается задача выбора величины пороговой границы обнаружения для алгоритмов обнаружения ЦВЗ, опирающихся на использование корреляции между ЦВЗ и контейнером. Неверный выбор порогового значения уровня корреляции может приводить либо к большому числу ложных обнаружений ЦВЗ, либо к большому числу пропусков ЦВЗ. В работе оптимальное пороговое значение обнаружения предлагается определять, используя метрики качества бинарных классификаторов, в частности  $F$ -меру. Оценка  $F$ -меры рассчитывается в ходе вычислительного эксперимента с набором тестовых изображений. Вычисление  $F$ -меры включает встраивание ЦВЗ в изображения из тестового набора, фильтрацию изображений, вычисление корреляции. Далее для разных значений пороговой границы вычисляется  $F$ -мера. Оптимальное значение уровня корреляции, которое балансирует ошибки обнаружения ЦВЗ, соответствует максимальному значению  $F$ -меры. Предложенный подход определения порогового значения обнаружения ЦВЗ апробирован на двух известных из литературы алгоритмах внедрения и обнаружения ЦВЗ для разных коэффициентов силы встраивания.

Экспериментально показано, что можно существенно ускорить процесс нахождения порогового значения обнаружения ЦВЗ предложенным методом, сокращая базу тестовых изображений без потери качества полученного решения. Для представленных в работе алгоритмов внедрения и обнаружения

ЦВЗ получено сокращение до 175 вместо исходных 8 091 изображения. Произведена оценка количества вычислений  $F$ -меры, требуемых для поиска максимума с использованием методов оптимизации унимодальных функций. Показано, что метод Брента позволяет найти оптимальный порог обнаружения с использованием наименьшего количества вычислений функции  $F$ -меры.

Проведено сравнение предложенного метода со статистическим подходом к получению пороговой границы обнаружения. Результаты сравнения показали, что пороговое значение, выбранное с использованием статистической оценки, приводит к значительному числу пропусков обнаружений в случае воздействия злоумышленника на изображения с ЦВЗ. Использование порогового значения, определенного на основе максимизации оценки  $F$ -меры, позволяет существенно снизить количество пропусков обнаружений, что сопровождается небольшим числом ложных обнаружений ЦВЗ.

#### Список источников

1. Грибунин В.Г., Оков И.Н., Туринцев И.В. Цифровая стеганография. М. : СОЛОН-Пресс, 2016. 262 с.
2. Cox I.J., Miller M.L., Bloom J.A. Watermarking applications and their properties // Proc. Int. Conf. on Information Technology: Coding and Computing (Cat. No. PR00540). IEEE, 2000. P. 6–10.
3. Wan W. et al. A comprehensive survey on robust image watermarking // Neurocomputing. 2022. V. 488. P. 226–247. doi: 10.1016/j.neucom.2022.02.083
4. Cox I. et al. Digital watermarking and steganography. Morgan Kaufmann, 2007. xxviii, 593 p.
5. Cox I. J. et al. Secure spread spectrum watermarking for multimedia // IEEE Transactions on Image Processing. 1997. V. 6 (12). P. 1673–1687.
6. Barni M. et al. A DCT-domain system for robust image watermarking // Signal Processing. 1998. V. 66 (3). P. 357–372.
7. Cox I.J. et al. Secure spread spectrum watermarking for images, audio and video // Proc. of 3rd IEEE Int. Conf. on Image Processing. 1996. V. 3. P. 243–246.
8. Jabade V.S., Gengaje S.R. Literature review of wavelet based digital image watermarking techniques // Int. J. of Computer Applications. 2011. V. 31 (7). P. 28–35.
9. Thanki R.M., Kher R.K., Vyas D.D. Robustness of correlation based watermarking techniques using WGN against different order statistics filters // Int. J. of Computer Science and Telecommunications. 2011. V. 2 (4). P. 45–49.
10. Piva A. et al. Threshold selection for correlation-based watermark detection // Proc. of COST. 1998. V. 254. P. 67–72.
11. Briassoulis A., Strintzis M.G. Locally optimum nonlinearities for DCT watermark detection // IEEE Transactions on Image Processing. 2004. V. 13 (12). P. 1604–1617.
12. Wang J. et al. Locally optimum detection for Barni's multiplicative watermarking in DWT domain // Signal Processing. 2008. V. 88 (1). P. 117–130.
13. Kwon S.G. et al. Watermark detection algorithm using statistical decision theory // Proc. IEEE Int. Conference on Multimedia and Expo. 2002. V. 1. P. 561–564.
14. Powers D.M.W. Evaluation: from precision, recall and F-measure to ROC, informedness, markedness and correlation // arXiv. 2010. Art. 16061. doi: 10.48550/arXiv.2010.16061
15. Watermark Detection Threshold Selection // github.com. URL: <https://github.com/anjin-viktor/watermark-detection-threshold-selection> (accessed: 09.02.2025).
16. Rashtchian C. et al. Collecting image annotations using amazon's mechanical turk // Proc. of the NAACL HLT 2010 Workshop on Creating Speech and Language Data with Amazon's Mechanical Turk. 2010. C. 139–147.
17. A complete, cross-platform solution to record, convert and stream audio and video // FFmpeg. URL: [ffmpeg.org](https://ffmpeg.org) (accessed: 09.02.2025).
18. Press W., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. Numerical Recipes in C. Cambridge et al. : Cambridge University Press, 1988. xxvi, 994 p.
19. Brent R.P. Algorithms for minimization without derivatives. Courier Corporation, 2013.
20. Plummer B.A. et al. Flickr30k entities: Collecting region-to-phrase correspondences for richer image-to-sentence models // Proc. of the IEEE Int. Conf. on Computer Vision. 2015. P. 2641–2649.
21. Формат изображения для Интернета. URL: <https://developers.google.com/speed/webp> (дата обращения: 09.02.2025).

#### References

1. Gribunin, V.G., Okov, I.N. & Turintsev, I.V. (2016) *Tsifrovaya steganografiya* [Digital Steganography]. Moscow: SOLON-Press.
2. Cox, I.J., Miller, M.L. & Bloom, J.A. (2000) Watermarking applications and their properties. *Proc. Int. Conf. on Information Technology: Coding and Computing (Cat. No. PR00540)*. IEEE. pp. 6–10.
3. Wan, W. et al. (2022). A comprehensive survey on robust image watermarking. *Neurocomputing*. 488. pp. 226–247. DOI: 10.1016/j.neucom.2022.02.083
4. Cox, I., Miller, M., Bloom, J., Fridrich, J. & Kalker, T. (2007) *Digital Watermarking and Steganography*. Morgan Kaufmann.

5. Cox, I.J., Kilian, J., Leighton, F.T. & Shamoon, T. (1997) Secure spread spectrum watermarking for multimedia. *IEEE Transactions on Image Processing*. 6(12). pp. 1673–1687.
6. Barni, M., Bartolini, F., Cappellini, V. & Piva, A. (1998) A DCT-domain system for robust image watermarking. *Signal Processing*. 66(3). pp. 357–372.
7. Cox, I.J., Kilian, J., Leighton, T. & Shamoon, T. (1996) Secure spread spectrum watermarking for images, audio and video. *Proceedings of 3rd IEEE Int. Conf. on image processing*. 3. pp. 243–246.
8. Jabade, V.S. & Gengaje, S.R. (2011) Literature review of wavelet based digital image watermarking techniques. *International Journal of Computer Applications*. 31(7). pp. 28–35.
9. Thanki, R.M., Kher, R.K. & Vyas, D.D. (2011) Robustness of correlation based watermarking techniques using WGN against different order statistics filters. *International Journal of Computer Science and Telecommunications*. 2(4). pp. 45–49.
10. Piva, A., Barni, M., Bartolini, F. & Cappellini, V. (1998) Threshold selection for correlation-based watermark detection. *Proceedings of COST*. 254. pp. 67–72.
11. Briassouli, A. & Strintzis, M.G. (2004) Locally optimum nonlinearities for DCT watermark detection. *IEEE Transactions on Image Processing*. 13(12). pp. 1604–1617.
12. Wang, J. et al. (2008) Locally optimum detection for Barni's multiplicative watermarking in DWT domain. *Signal Processing*. 88(1). pp. 117–130.
13. Kwon, S.G., Lee, S.H., Kwon, K.K., Kwon, K.R. & Lee, K.I. (2002) Watermark detection algorithm using statistical decision theory. *Proceedings IEEE Int. Conf. on Multimedia and Expo*. 1. pp. 561–564.
14. Powers, D.M. (2020) Evaluation: from precision, recall and F-measure to ROC, informedness, markedness and correlation. *arXiv preprint arXiv:2010.16061*.
15. *Watermark Detection Threshold Selection* / [github.com](https://github.com/anjin-viktor/watermark-detection-threshold-selection). [Online] Available from: <https://github.com/anjin-viktor/watermark-detection-threshold-selection> (Accessed: 9th February 2025).
16. Rashtchian, C., Young, P., Hodosh, M. & Hockenmaier, J. (2010) Collecting image annotations using amazon's mechanical turk. *Proceedings of the NAACL HLT 2010 Workshop on Creating Speech and Language Data with Amazon's Mechanical Turk*. June. pp. 139–147.
17. FFmpeg. (n.d.) *A complete, cross-platform solution to record, convert and stream audio and video*. [Online] Available from: [ffmpeg.org](https://ffmpeg.org) (Accessed: 9th September 2025).
18. Press, W., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T. & Flannery, B.P. (1988) *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press.
19. Brent, R.P. (2013) *Algorithms for Minimization Without Derivatives*. Courier Corporation.
20. Plummer, B.A., Wang, L., Cervantes, C.M., Caicedo, J.C., Hockenmaier, J. & Lazebnik, S. (2015) Flickr30k entities: Collecting region-to-phrase correspondences for richer image-to-sentence models. *Proceedings of the IEEE Int. Conf. on Computer Vision*. pp. 2641–2649.
21. Google.com. (n.d.) *Format izobrazheniya dlya Interneta* [An image format for the Web]. [Online] Available from: <https://developers.google.com/speed/webp/> (Accessed: 9th September 2025).

#### Информация об авторах:

**Анжин Виктор Андреевич** – аспирант кафедры компьютерной безопасности Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: [viktor.anjin@gmail.com](mailto:viktor.anjin@gmail.com)

**Тренькаев Вадим Николаевич** – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры компьютерной безопасности Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: [kziiktvn@gmail.com](mailto:kziiktvn@gmail.com)

**Вклад авторов:** все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

#### Information about the authors:

**Anzhin Viktor A.** (Post-Graduate Student, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: [viktor.anjin@gmail.com](mailto:viktor.anjin@gmail.com)

**Trenkaev Vadim N.** (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: [kziiktvn@gmail.com](mailto:kziiktvn@gmail.com)

**Contribution of the authors:** the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 10.05.2025; принята к публикации 02.09.2025

Received 10.05.2025; accepted for publication 02.09.2025

Научная статья

УДК 004.021

doi: 10.17223/19988605/72/7

## Алгоритм высокопроизводительного обнаружения регионов низкой сложности в длинных геномных последовательностях

Ростислав Сергеевич Воробьев<sup>1</sup>, Александр Владимирович Замятин<sup>2</sup>,  
Татьяна Сергеевна Геращенко<sup>3</sup>, Анастасия Алексеевна Коробейникова<sup>5</sup>,  
Евгений Владимирович Денисов<sup>5</sup>

<sup>1, 3, 4, 5</sup> Научно-исследовательский институт онкологии Томского национального исследовательского  
медицинского центра Российской академии наук, Томск, Россия

<sup>1, 2</sup> Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия

<sup>1</sup> tsu@rvorobev.ru

<sup>2</sup> zamyatin@mail.tsu.ru

<sup>3</sup> t\_gerashchenko@oncology.tomsk.ru

<sup>4</sup> shegolmay@gmail.com

<sup>5</sup> d\_evgeniy@oncology.tomsk.ru

**Аннотация.** Обнаружение регионов низкой сложности (Low Complexity Regions, LCR) в геномных последовательностях представляет важную задачу для множества биоинформационных инструментов, включая выравнивание последовательностей, дизайн зондов и обнаружение вариантов. В настоящей работе представлен DUSTSCAN – инструмент и модификация алгоритма DUST (оценка распределения частот уникальных триплетов в последовательности) для идентификации LCR с применением параллельных вычислений для значительного ускорения расчетов. Проводится сравнительный анализ DUSTSCAN с другими версиями алгоритма DUST. Результаты показывают значительный прирост в скорости обнаружения регионов низкой сложности.

**Ключевые слова:** алгоритм; параллельные вычисления; регионы низкой сложности.

**Благодарности:** Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ № 075-00490-25-04 (регистрационный номер 125042105351-3).

**Для цитирования:** Воробьев Р.С., Замятин А.В., Геращенко Т.С., Коробейникова А.А., Денисов Е.В. Алгоритм высокопроизводительного обнаружения регионов низкой сложности в длинных геномных последовательностях // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2025. № 72. С. 71–79. doi: 10.17223/19988605/72/7

Original article

doi: 10.17223/19988605/72/7

## A high-performance algorithm for detecting low-complexity regions in long genomic sequences

Rostislav S. Vorobev<sup>1</sup>, Alexander V. Zamyatin<sup>2</sup>, Tatiana S. Gerashchenko<sup>3</sup>,  
Anastasia A. Korobeynikova<sup>4</sup>, Evgeny V. Denisov<sup>5</sup>

<sup>1, 3, 4, 5</sup> Cancer Research Institute, Tomsk National Research Medical Center, Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation

<sup>1, 2</sup> National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

<sup>1</sup> tsu@rvorobev.ru

<sup>2</sup> zamyatin@mail.tsu.ru

<sup>3</sup> t\_gerashchenko@oncology.tomsk.ru

<sup>4</sup> shegolmay@gmail.com

<sup>5</sup> d\_evgeniy@oncology.tomsk.ru

**Abstract.** Detection of Low Complexity Regions (LCR) in genomic sequences is a crucial task for numerous bioinformatics tools, including sequences alignment, probes design, variants calling. This study introduces DUSTSCAN as a modification of the DUST algorithm (score estimation of frequencies distribution of unique triplets in a sequence) for identifying Low Complexity Regions, utilizing parallel computing to significantly accelerate calculations. This research presents a comparative analysis of DUSTSCAN with other versions of the DUST algorithm. The results demonstrate a significant improvement in detection speed, making the new approach particularly valuable for large-scale genomic data processing tasks. The developed tool can be effectively applied in various bioinformatics pipelines, enhancing the performance of tasks that require LCR identification in genomic sequences.

**Keywords:** algorithm; parallel computing; low complexity regions.

**Acknowledgments:** The study was carried out according to the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation № 075-00490-25-04 (Registration number 125042105351-3).

**For citation:** Vorobev, R.S., Zamyatin, A.V., Gerashchenko, T.S., Korobeynikova, A.A., Denisov, E.V. (2025) A high-performance algorithm for detecting low-complexity regions in long genomic sequences. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 72. pp. 71–79. doi: 10.17223/19988605/72/7

## Введение

Геномные последовательности содержат регионы с различной степенью сложности и вариативности [1]. Регионы низкой сложности (Low Complexity Regions, LCR) – участки геномных последовательностей с повторяющимися или смещенными нуклеотидными композициями – представляют особый интерес и вызов для множества биоинформационных методов [2–4]. Эти регионы могут значительно затруднять работу алгоритмов выравнивания последовательностей [5], влиять на обнаружение структурных и точечных вариантов [6–8], ухудшать качество сборки геномов и транскриптомов, а также снижать специфичность зондов для ДНК-гибридизации [9–11].

Для идентификации регионов низкой сложности в геномных последовательностях существует несколько различных подходов. Классический алгоритм DUST, основанный на анализе частот  $k$ -меров, изначально разработан для анализа белковых последовательностей, но затем был адаптирован и для анализа нуклеотидных последовательностей [12]. Позднее А. Morgulis и соавт. представили симметричную реализацию алгоритма, известную как SDUST, которая эффективнее с вычислительной точки зрения [2].

Для выявления участков низкой сложности в геномных последовательностях могут использоваться два взаимодополняющих алгоритма: классический DUST и его симметричная модификация SDUST [2].

Алгоритм DUST основан на анализе распределения триплетов ( $k$ -меров размера 3) нуклеотидов в скользящих окнах фиксированной длины. Для окна  $w$  значение сложности определяется как

$$DUST(w) = \frac{1}{w-2} \sum_{i=1}^{64} \frac{c_i(c_i-1)}{2}, \quad (1)$$

где  $c_i$  – частота  $i$ -го триплета в рассматриваемом окне (например, разные триплеты AAA и AAT).

Несмотря на широкое применение, оригинальный алгоритм DUST (1) обладает существенными недостатками асимметричности относительно обратной последовательности генома и контекстной зависимостью, что означает, что результат маскирования подпоследовательности может зависеть от ее окружения.

Для преодоления ограничений классического подхода был разработан алгоритм SDUST (Symmetric DUST), обладающий улучшенными характеристиками при сохранении базового принципа оценки комплексности.

Для подпоследовательности длиной  $w$  оценка сложности определяется как

$$SDUST(w) = \frac{1}{w-2} \sum_{i=1}^{32} \frac{c_i^{sym}(c_i^{sym}-1)}{2}, \quad (2)$$

где  $c_i^{sym}$  – частота вхождений симметричного триплета (учитывается как прямая, так и обратно-комплементарная форма записи; например, AAT и его обратно-комплементарная форма ATT).



Алгоритм SDUST (2) превосходит оригинальный DUST по качеству маскирования [2].

Значения алгоритма DUST лишь демонстрируют оценку сложности некой последовательности и затем могут быть использованы для выделения низко-сложных участков в геномной последовательности. Для выделения непосредственно самих регионов низкой сложности с начальными и конечными координатами используется пороговое значение. Удовлетворяющие пороговому значению оценки образуют LCR, координаты которого рассчитываются, исходя из относительных позиций в геномной последовательности.

Помимо подходов, основанных на частотах  $k$ -меров, существуют методы идентификации LCR на основе энтропии Шеннона [3, 13], лингвистической сложности [4], и другие специализированные алгоритмы. Например, программа RepeatMasker использует подход, основанный на выравнивании для маскирования повторяющихся элементов [14], а fastqc и fastp включают инструменты для оценки чрезмерной представленности  $k$ -меров в данных секвенирования [15, 16].

С ростом объемов геномных данных, особенно с появлением технологий высокопроизводительного секвенирования, возникает необходимость в эффективных алгоритмах для анализа LCR в больших датасетах. Графические процессоры (GPU) предоставляют возможность значительного ускорения вычислений благодаря массивному параллелизму [17–21]. Вычисления общего назначения на графических процессорах (GPGPU) успешно применяются в различных биоинформационных задачах, таких как выравнивание последовательностей, поиск сходства, предсказание структуры белков, анализ транскриптомов [20].

Однако многие существующие инструменты на основании имеющихся модификаций алгоритма DUST все еще требуют значительного времени для обработки длинных геномных последовательностей, что особенно заметно при обработке больших геномных последовательностей.

## 1. Постановка задачи

В данной работе предлагается модификация DUSTSCAN, которая включает в себя ускорение обнаружения регионов низкой сложности за счет распараллеливания вычислений.

Основная идея алгоритма заключается в параллельной обработке множества регионов исходной геномной последовательности с применением скользящих окон для анализа частот триплетов и дополнительной пост-обработки для объединения результатов и выявления начальных и конечных позиций регионов. В отличие от классических реализаций алгоритма DUST, которые оптимизированы для последовательной обработки, DUSTSCAN использует массивный параллелизм для одновременной обработки множества окон и определения координат границ регионов. Каждая позиция в геномной последовательности является потенциальной начальной точкой для скользящего окна. Каждая исходная последовательность разбивается на регионы, для каждого из которых параллельно вычисляется  $DUST(w)$ . За счет задания фиксированного порогового значения выделяются позиции-кандидаты для формирования регионов низкой сложности, которые на этапе пост-обработки фильтруются с помощью порогового значения и объединяются во множество начальных и конечных координат соответствующих регионов в рамках координат исходных геномных последовательностей (рис. 1).

Для исходной последовательности  $G$  производится разбиение на  $k$  перекрывающихся фрагментов  $C_i$  размером  $M$ :

$$C_i = G[i \cdot M : (i+1) \cdot M + W - 1], \text{ при } i = 0, 1, \dots, k-1, \quad (3)$$

где  $W$  – размер окна анализа.

Для каждого чанка  $C_i$  параллельно вычисляется множество локальных регионов  $R_i^{local}$  с использованием DUST:

$$R_i^{local} = \{r_j^{local} = (s_j^{local}, e_j^{local}, score_j) : DUST(w_i) > \theta\}, \quad (4)$$

где  $s_j^{local}$  и  $e_j^{local}$  – локальные координаты начала и конца  $j$ -го региона в чанке  $C_i$ , а  $\theta$  – пороговое значение оценки.

Глобальные координаты регионов определяются через преобразование

$$R_i^{global} = \left\{ \left( s_j^{local} + i \cdot M, e_j^{local} + i \cdot M, score_j \right) : \left( s_j^{local}, e_j^{local}, score_j \right) \in R_i^{local} \right\} \quad (5)$$

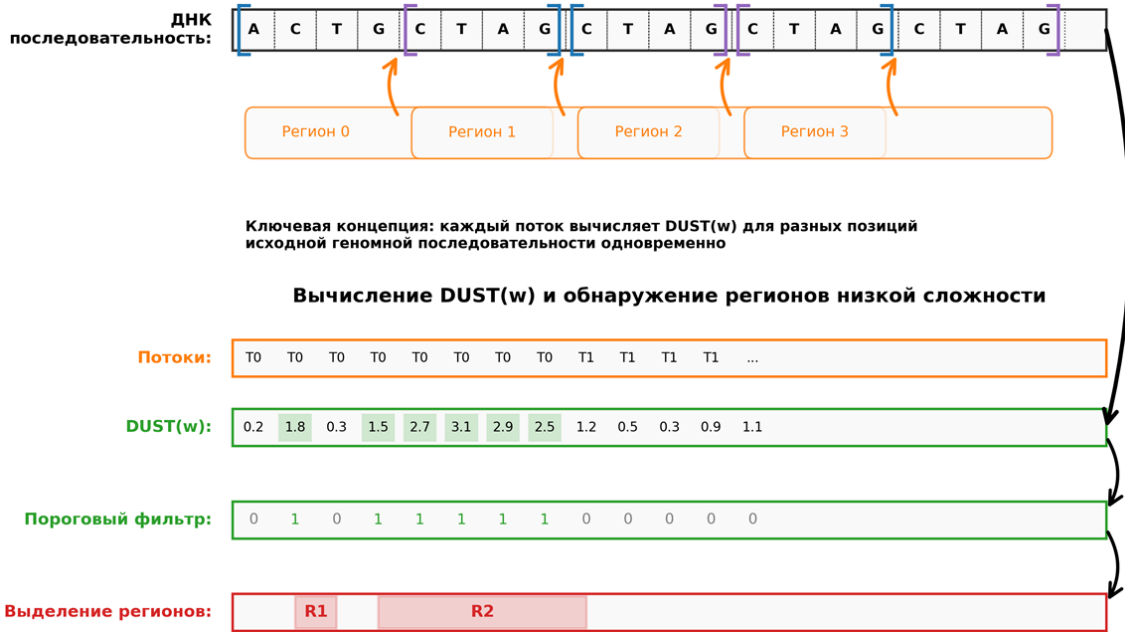


Рис. 1. Концептуальная схема параллельной обработки в DUSTSCAN (R1, R2 – обнаруженные регионы)

Fig. 1. Conceptual scheme of parallel processing in DUSTSCAN (R1, R2 – detected regions)

Финальное множество регионов формируется объединением и последующим слиянием перекрывающихся участков:

$$R_{final} = merge\left(\bigcup_{i=0}^{k-1} R_i^{global}, d_{merge}\right), \quad (6)$$

где  $d_{merge}$  – максимальное расстояние для слияния соседних регионов.

Данный подход обеспечивает масштабируемость вычислений и позволяет эффективно использовать как многоядерные CPU, так и массивно-параллельные GPU-архитектуры.

## 2. Параметры тестовой среды

Проведена оценка скорости выполнения инструмента *dustscan* с существующими инструментами *sdust* и *dustmasker*. В качестве тестовых данных использовался геном человека **GRCh38** (*GCF\_000001405.40\_GRC\_h38.p14*) размером ~ 3,2 Гб.

Тестирование производительности проводилось на двух серверах:

**e5:** 2 × Intel Xeon CPU E5-2680 v4 @ 2.40GHz @ 2.40GHz (всего 28 ядер, 56 потоков); 188 Гб DDR4 оперативной памяти; GPU NVIDIA A4000 16 Гб; ОС Ubuntu 24.04 LTS; CUDA: 12.8.

**gold:** 2 × Intel Xeon Gold 6252 CPU @ 2.10GHz (всего 48 ядер, 96 потоков); 256 Гб DDR4 оперативной памяти; ОС Ubuntu 24.04 LTS.

Для оценки близости результатов определения регионов низкой сложности используется коэффициент сходства Жаккара. Он определяет меру сходства между двумя множествами  $A$  и  $B$  как отношение мощности их пересечения к мощности объединения:

$$J(A, B) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|}. \quad (7)$$

Значение  $J(A, B) \in [0, 1]$ , где 0 соответствует полному различию множеств, а 1 – их полному совпадению.

### 3. Результаты

Проведен сравнительный анализ производительности *dustscan*, *sdust* и *dustmasker*. Каждый тест выполнен 20 раз, и рассчитаны медианные значения времени выполнения и стандартное отклонение. Результаты измерений представлены в таблице.

Время выполнения и параметры запуска для различных инструментов

Название	Инструмент	Время, мс	Конфигурация
SDUST	sdust	321 318 ( $\pm 664$ )	-w 64 -t 1
DustMasker	dustmasker	281 780 ( $\pm 3 784$ )	-w 64 -level 1
gpu-w64	dustscan	131 935 ( $\pm 85$ )	-w 64 -t 0,1 (без -O3)
gpu-o3-w64	dustscan	63 613 ( $\pm 432$ )	-w 64 -t 0,1
gpu-o3-w24	dustscan	32 909 ( $\pm 435$ )	-w 24 -t 0,1
e5-56-w64	dustscan	63 816 ( $\pm 878$ )	-w 64 -t 0,1 -c 56
e5-16-w64	dustscan	119 773 ( $\pm 9 504$ )	-w 64 -t 0,1 -c 16
e5-8-w64	dustscan	189 179 ( $\pm 3 385$ )	-w 64 -t 0,1 -c 8
e5-4-w64	dustscan	343 007 ( $\pm 3 366$ )	-w 64 -t 0,1 -c 4
e5-1-w64	dustscan	1 128 039 ( $\pm 14 927$ )	-w 64 -t 0,1 -c 1
gold-96-w64	dustscan	33 004 ( $\pm 543$ )	-w 64 -t 0,1 -c 96
gold-56-w64	dustscan	51 263 ( $\pm 645$ )	-w 64 -t 0,1 -c 56
gold-16-w64	dustscan	75 352 ( $\pm 1 059$ )	-w 64 -t 0,1 -c 16
gold-8-w64	dustscan	132 567 ( $\pm 1 754$ )	-w 64 -t 0,1 -c 8
gold-4-w64	dustscan	234 493 ( $\pm 3 103$ )	-w 64 -t 0,1 -c 4
gold-1-w64	dustscan	838 646 ( $\pm 11 098$ )	-w 64 -t 0,1 -c 1
e5-56-w24	dustscan	47 437 ( $\pm 716$ )	-w 24 -t 0,1 -c 56
e5-16-w24	dustscan	70 878 ( $\pm 994$ )	-w 24 -t 0,1 -c 16
e5-8-w24	dustscan	101 233 ( $\pm 1 404$ )	-w 24 -t 0,1 -c 8

Как видно из таблицы, наилучшие результаты продемонстрированы *gpu-o3-w24* и *gold-96-w24*, что показывает ускорение в  $\sim 9,8$  раз по сравнению с реализацией *sdust* и в  $\sim 8,6$  раз по сравнению с *dustmasker*. Интересно, что CPU-режим *dustscan* с использованием 96 потоков среди рассматриваемых конфигураций показывает сопоставимую производительность с *gpu-o3*.

На основе полученных результатов рассчитаны параллельное ускорение и параллельная эффективность для CPU-реализации с различным количеством потоков. Параллельное ускорение определяется как отношение времени выполнения на одном потоке ко времени выполнения на  $N$  потоках:

$$S_N = \frac{T_1}{T_N} \quad (8)$$

Параллельная эффективность определяется как отношение параллельного ускорения к количеству потоков:

$$E_N = \frac{S_N}{N} = \frac{T_1}{N \times T_N} \quad (9)$$

На рис. 2 изображены графики параллельного ускорения (а) [21], параллельной эффективности (b) [21], масштабирования времени обработки (с). При сравнении времени выполнения оптимизированной сборки DUSTSCAN и неоптимизированной сборки (рис. 2, d) можно заметить разницу во времени выполнения анализа с и без применения флага компиляции «-O3», что может указывать на существенный размер накладных расходов CPU при чтении исходных данных, их передаче в видеопамять и обратно, а также записи в файл.

На рис. 3 продемонстрировано сравнение сторонних инструментов с нашим (в отобранных для сравнения конфигурациях).

Помимо производительности, произведена оценка качества обнаружения регионов низкой сложности при сравнении результатов DUSTSCAN с результатами SDUST с сопоставимыми параметрами с использованием в качестве оценки коэффициента сходства Жаккара (7). При сравнении множеств

регионов (с учетом их начальных и конечных координат) были получены пересечение в 2 939 517 111 нуклеотида (intersection), объединение в 3 136 906 988 нуклеотидов (union), метрика Жаккара 0,937075 при 39 961 409 перекрывающихся сегментах (n\_intersections).

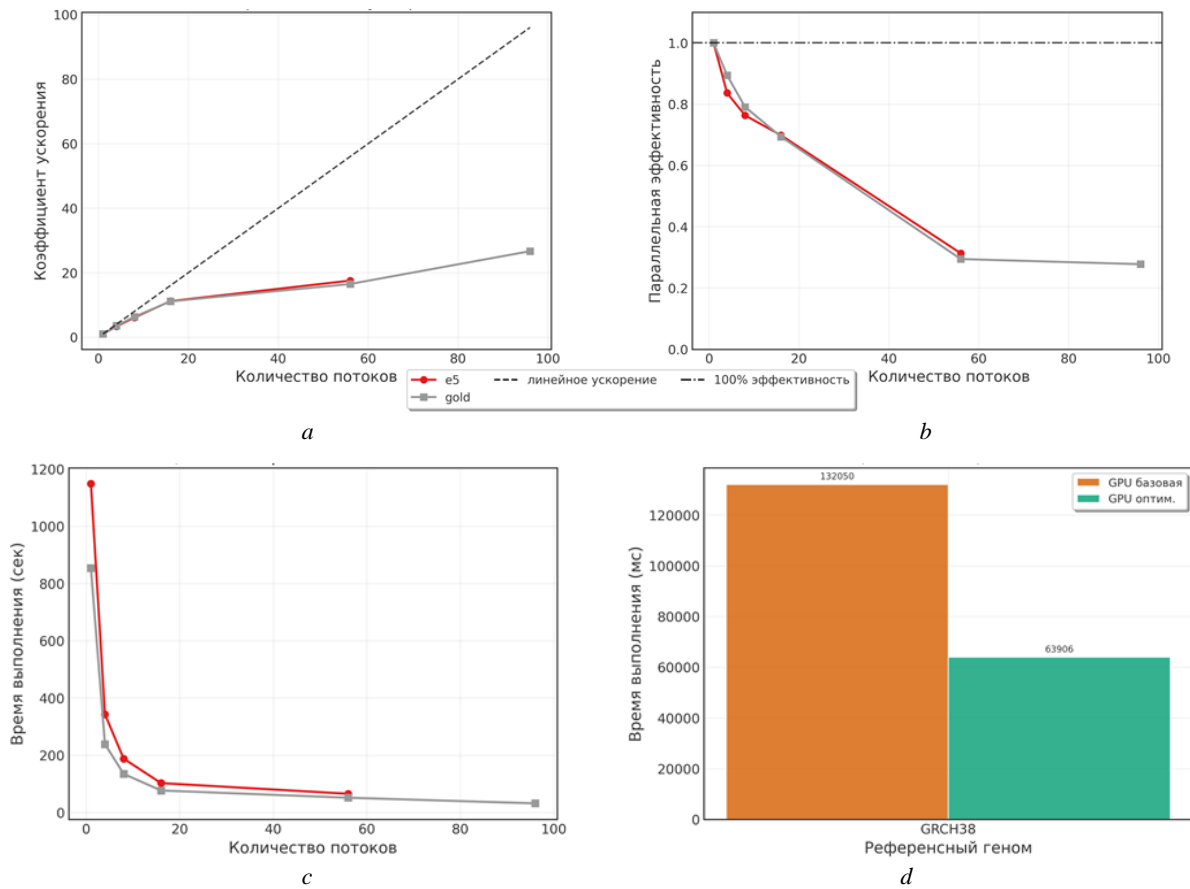


Рис. 2. Графики сравнения производительности: *a* – параллельное ускорение CPU (8); *b* – параллельная эффективность (9); *c* – масштабирование времени выполнения анализа; *d* – накладные CPU-расходы при использовании анализа с использованием GPU (неоптимизированная сборка и сборка, собранная с ключом «-O3»).

Fig. 2. Comparisons plots: *a*) CPU parallel acceleration (8); *b*) CPU parallel efficiency (9); *c*) scaling of analysis execution time; *d*) CPU overhead when using GPU analysis (non-optimized build and build compiled with the “-O3” flag).

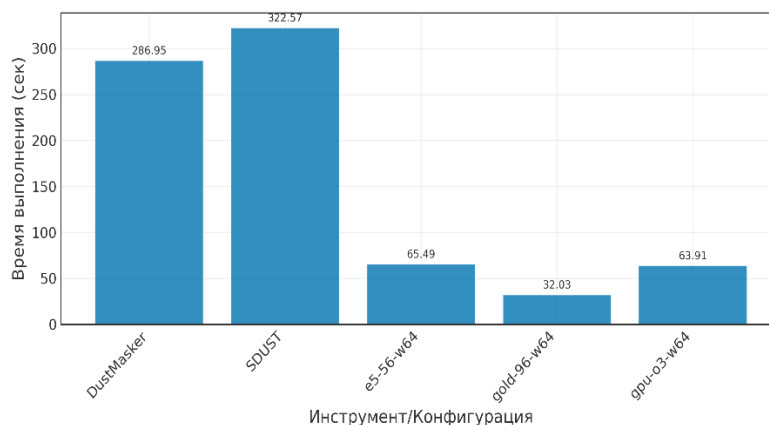


Рис. 3. Сравнение инструментов по времени выполнения анализа

Fig. 3. Comparison of tools by analysis time

Коэффициент сходства Жаккара  $\sim 0,94$  указывает на высокое, но не идеальное совпадение между результатами DUSTSCAN и SDUST, однако стоит отметить, что DUSTSCAN гораздо менее

чувствителен к мелким регионам и успешно идентифицирует основные регионы низкой сложности, что может быть особенно важно для приложений, связанных с дизайном олигонуклеотидных ДНК-зондов.

## Заключение

Проблема обнаружения LCR является чрезвычайно острой в рамках задачи подбора ДНК-зондов. На данный момент широко распространенные инструменты имеют ряд ограничений, которые призван разрешить алгоритм, предложенный в рамках данной работы.

DUSTSCAN представляет собой параллельную модификацию алгоритма DUST, что позволяет решать актуальную на данный момент задачу обнаружения LCR в геномных последовательностях.

Результаты показывают, что DUSTSCAN обеспечивает многократное ускорение (в 8–10 раз) по сравнению с SDUST при обработке полного генома человека, что существенно сокращает затрачиваемое на обнаружение LCR время. Ускорение относительно DustMasker составляет свыше 4 раз.

Интересно отметить, что CPU-режим *dustscan* с использованием 96 потоков показывает производительность, сопоставимую с GPU-режимом. Это можно объяснить затратами на передачу данных между CPU и GPU, а также накладными расходами на инициализацию и запуск CUDA-ядер [20].

Особенно эффективен DUSTSCAN при обработке очень длинных непрерывных геномных последовательностей.

Несмотря на значительное ускорение, DUSTSCAN имеет ряд ограничений. Он потребляет больше памяти, чем другие инструменты (за счет параллельного вычисления для различных регионов исходной последовательности). Размер обрабатываемого блока ограничен объемом доступной видеопамяти, что может быть проблемой для очень длинных последовательностей. Передача данных между CPU и GPU может создавать дополнительные накладные расходы, особенно для небольших последовательностей, где преимущества параллельной обработки не компенсируют эти расходы. Это же будет бутылочным горлышком при попытке реализации распределенной модификации алгоритма. Чем меньше размер последовательности, тем менее эффективным будет GPU-режим. Также DUSTSCAN может определять границы регионов иначе, чем SDUST, что может быть критично для некоторых приложений, особенно чувствительных к коротким последовательностям регионов низкой сложности.

В качестве направлений дальнейшего развития и улучшения DUSTSCAN можно назвать оптимизацию использования и работы с памятью и передачи данных между CPU и GPU, а также модификацию CUDA-ядер для выполнения полного цикла анализа (включая пост-обработку) на GPU.

В целом DUSTSCAN демонстрирует высокий потенциал использования распараллеливания для ускорения выделения из последовательности референсного генома регионов низкой сложности.

## Список источников

1. Компо Ф., Певзнер. П. Алгоритмы биоинформатики. М. : ДМК-Пресс, 2023. 682 с.
2. Morgulis A., Gertz M., Schäffer A.A., Agarwala R. A Fast and Symmetric DUST Implementation to Mask Low-Complexity DNA Sequences // Journal of Computational Biology. 2006. V. 13 (5). P. 1028–1040. doi: 10.1089/cmb.2006.13.1028
3. Orlov Y.L., Potapov V.N. Complexity: an internet resource for analysis of DNA sequence complexity // Nucleic Acids Research. 2004. V. 32. P. W628–W633. doi: 10.1093/nar/gkh466
4. Orlov Y.L., Orlova N.G. Bioinformatics tools for the sequence complexity estimates // Biophysical Reviews. 2023. V. 15. P. 1367–1378. doi: 10.1007/s12551-023-01140-y
5. Altschul S.F., Madden T.L., Schäffer A.A., Zhang J., Zhang Z., Miller W., Lipman D.J. Gapped BLAST and PSI-BLAST: a new generation of protein database search programs // Nucleic Acids Research. 1997. V. 25, is. 17. P. 3389–3402. doi: 10.1093/nar/25.17.3389
6. Goldfeder R.L., Priest J.R., Zook J.M., Grove M.E., Waggott D., Wheeler M.T., Salit M., Ashley E.A. Medical implications of technical accuracy in genome sequencing // Genome Medicine. 2016. V. 8. Art. 24. doi: 10.1186/s13073-016-0269-0
7. Koboldt D.C. Best practices for variant calling in clinical sequencing // Genome Medicine. 2020. V. 12. Art. 91. doi: 10.1186/s13073-020-00791-w
8. Lau T.Y. et al. The Neoantigen Landscape of the Coding and Noncoding Cancer Genome Space // The Journal of Molecular Diagnostics. 2022. V. 24 (6). P. 541–554. doi: 10.1016/j.jmoldx.2022.02.004

9. Shalon D., Smith S.J., Brown P.O. A DNA microarray system for analyzing complex DNA samples using two-color fluorescent probe hybridization // *Genome research*. 1996. V. 6 (7). P. 639–645. doi: 10.1101/gr.6.7.639
10. Haas B.J., Dobin A., Li B., Stransky N., Pochet N., Regev A. Accuracy assessment of fusion transcript detection via read-mapping and de novo fusion transcript assembly-based methods // *Genome Biology*. 2019. V. 20. Art. 213. doi: 10.1186/s13059-019-1842-9
11. Feng Y., Guo Q., Chen W., Han C. A Low-Complexity Deep Learning Model for Predicting Targeted Sequencing Depth from Probe Sequence // *Applied Sciences*. 2023. V. 13 (12). Art. 6996. doi: 10.3390/app13126996
12. Wootton J.C., Federhen S. Statistics of local complexity in amino acid sequences and sequence databases // *Computers & Chemistry*. 1993. V. 17, is. 2. P. 149–163. doi: 10.1016/0097-8485(93)85006-X
13. Velichkovski G., Gusev M., Mileski D. CUDA Calculation of Shannon Entropy for a Sliding Window System // 32nd Telecommunications Forum (TELFOR), November 2024. Belgrade : IEEE, 2024. P. 1–4. doi: 10.1109/TELFOR63250.2024.10819103
14. Frith M.C. A new repeat-masking method enables specific detection of homologous sequences // *Nucleic Acids Research*. 2011. V. 39, is. 4. Art. e23. doi: 10.1093/nar/gkq1212
15. Chen S., Zhou Y., Chen Y., Gu J. fastp: an ultra-fast all-in-one FASTQ preprocessor // *Bioinformatics*. 2018. V. 34, is. 17. P. i884–i890. doi: 10.1093/bioinformatics/bty560
16. Schmieder R., Edwards R. Fast Identification and Removal of Sequence Contamination from Genomic and Metagenomic Datasets // *PLoS ONE*. 2011. V. 6 (3). Art. e17288. doi: 10.1371/journal.pone.0017288
17. Kirk D.B., Hwu W.W. *Programming Massively Parallel Processors: A Hands-on Approach*, 3rd ed. Morgan Kaufmann, 2016. xix, 258 p.
18. Sanders J., Kandrot E. *CUDA by Example: An Introduction to General-Purpose GPU Programming*. Addison-Wesley Professional, 2010. xix, 290 p.
19. Боресков А.В. и др. Параллельные вычисления на GPU. Архитектура и программная модель CUDA : учеб. пособие. М. : Изд-во Моск. ун-та, 2015. 336 с. (Суперкомпьютерное образование).
20. Jarnot P., Ziemska-Legiecka J., Grynberg M., Gruca A. Insights from analyses of low complexity regions with canonical methods for protein sequence comparison // *Briefings in Bioinformatics*. 2022. V. 23, is. 5. Art. bbac299. doi: 10.1093/bib/bbac299
21. Замятин А.В. *Интеллектуальный анализ данных: учебное пособие*. Томск : Изд. Дом Том. гос. ун-та, 2020. 196 с.

## References

1. Compeau, P. & Pevzner, P. (2018) *Algoritmy bioinformatiki* [Bioinformatics Algorithms]. Moscow: DMK-press.
2. Morgulis, A., Gertz, M., Schäffer, A.A. & Agarwala, R. (2006) A Fast and Symmetric DUST Implementation to Mask Low-Complexity DNA Sequences. *Journal of Computational Biology*. 13(5). pp. 1028–1040. DOI: 10.1089/cmb.2006.13.1028
3. Orlov, Y.L. & Potapov, V.N. (2004) Complexity: an internet resource for analysis of DNA sequence complexity. *Nucleic Acids Research*. 32. pp. W628–W633. DOI: 10.1093/nar/gkh466
4. Orlov, Y.L. & Orlova, N.G. (2023) Bioinformatics tools for the sequence complexity estimates. *Biophysical Reviews*. 15. pp. 1367–1378. DOI: 10.1007/s12551-023-01140-y
5. Altschul, S.F., Madden, T.L., Schäffer, A.A., Zhang, J., Zhang, Z., Miller, W. & Lipman, D.J. (1997) Gapped BLAST and PSI-BLAST: a new generation of protein database search programs. *Nucleic Acids Research*. 25(17). pp. 3389–3402. DOI: 10.1093/nar/25.17.3389
6. Goldfeder, R.L., Priest, J.R., Zook, J.M., Grove, M.E., Waggott, D., Wheeler, M.T., Salit, M. & Ashley, E.A. (2016) Medical implications of technical accuracy in genome sequencing. *Genome Medicine*. 8. Art. 24. DOI: 10.1186/s13073-016-0269-0
7. Koboldt, D.C. (2020) Best practices for variant calling in clinical sequencing. *Genome Medicine*. 12. Art. 91. DOI: 10.1186/s13073-020-00791-w
8. Lau, T.Y. et al. (2022) The Neoantigen Landscape of the Coding and Noncoding Cancer Genome Space. *The Journal of Molecular Diagnostic*. 24(6). pp. 541–554. DOI: 10.1016/j.jmoldx.2022.02.004
9. Shalon, D., Smith, S.J. & Brown, P.O. (1996) A DNA microarray system for analyzing complex DNA samples using two-color fluorescent probe hybridization. *Genome Research*. 6(7). pp. 639–645. DOI: 10.1101/gr.6.7.639
10. Haas, B.J., Dobin, A., Li, B., Stransky, N., Pochet, N. & Regev, A. (2019) Accuracy assessment of fusion transcript detection via read-mapping and de novo fusion transcript assembly-based methods. *Genome Biology*. 20. Art. 213. DOI: 10.1186/s13059-019-1842-9
11. Feng, Y., Guo, Q., Chen, W. & Han, C. (2023) A Low-Complexity Deep Learning Model for Predicting Targeted Sequencing Depth from Probe Sequence. *Applied Sciences*. 13(12). Art. 6996. DOI: 10.3390/app13126996
12. Wootton, J.C. & Federhen, S. (1993) Statistics of local complexity in amino acid sequences and sequence databases. *Computers & Chemistry*. 17(2). pp. 149–163. DOI: 10.1016/0097-8485(93)85006-X
13. Velichkovski, G., Gusev, M. & Mileski, D. (2024) CUDA Calculation of Shannon Entropy for a Sliding Window System. *Proceedings IEEE, 32nd Telecommunications Forum (TELFOR)*. November 2024. DOI: 10.1109/TELFOR63250.2024.10819103
14. Frith, M.C. (2011) A new repeat-masking method enables specific detection of homologous sequences. *Nucleic Acids Research*. 39(4). Art. e23. DOI: 10.1093/nar/gkq1212
15. Chen, S., Zhou, Y., Chen, Y. & Gu, J. (2018) fastp: an ultra-fast all-in-one FASTQ preprocessor. *Bioinformatics*. 34(17). pp. i884–i890. DOI: 10.1093/bioinformatics/bty560
16. Schmieder, R. & Edwards, R. (2011) Fast identification and removal of sequence contamination from genomic and metagenomic datasets. *PLoS ONE*. 6(3). Art. e17288. DOI: 10.1371/journal.pone.0017288

17. Kirk, D.B. & Hwu, W.W. (2016) *Programming massively parallel processors: A Hands-on Approach*. 3rd ed. Morgan Kaufmann.
18. Sanders, J. & Kandrot, E. (2010) *CUDA by Example: An Introduction to General-Purpose GPU Programming*. Addison-Wesley Professional.
19. Boreskov, A.V. & et al. (2015) *Parallel'nye vychisleniya na GPU. Arkhitektura i programmaya model' CUDA* [Parallel computing on GPU. CUDA architecture and programming model]. Moscow: Moscow University.
20. Jarnot, P., Ziemska-Legiecka, J., Grynberg, M. & Gruca, A. (2022) Insights from analyses of low complexity regions with canonical methods for protein sequence comparison. *Briefings in Bioinformatics*. 23(5). Art. bbac299. DOI: 10.1093/bib/bbac299
21. Zamyatin, A.V. (2020) *Intellectual'nyy analiz dannykh* [Data Mining]. Tomsk: Tomsk State University.

**Информация об авторах:**

**Воробьев Ростислав Сергеевич** – младший научный сотрудник Научно-исследовательского института онкологии Томского национального исследовательского медицинского центра Российской академии наук (Томск, Россия); аспирант Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: tsu@rvorobev.ru

**Замятин Александр Владимирович** – профессор, доктор технических наук, директор Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: zamyatin@mail.tsu.ru

**Геращенко Татьяна Сергеевна** – кандидат медицинских наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института онкологии Томского национального исследовательского медицинского центра Российской академии наук (Томск, Россия). E-mail: t\_gerashchenko@oncology.tomsk.ru

**Коробейникова Анастасия Алексеевна** – младший научный сотрудник Научно-исследовательского института онкологии Томского национального исследовательского медицинского центра Российской академии наук (Томск, Россия). E-mail: shegolmay@gmail.com

**Денисов Евгений Владимирович** – доктор биологических наук, заведующий лабораторией Научно-исследовательского института онкологии Томского национального исследовательского медицинского центра Российской академии наук (Томск, Россия). E-mail: d\_evgeniy@oncology.tomsk.ru

**Вклад авторов:** все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Information about the authors:**

**Vorobev Rostislav S.** (Junior Researcher, Cancer Research Institute, Tomsk National Research Medical Center, Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation; Post-Graduate Student, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tsu@rvorobev.ru

**Zamyatin Alexander V.** (Doctor of Technical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: zamyatin@mail.tsu.ru

**Gerashchenko Tatiana S.** (Candidate of Medical Sciences, Cancer Research Institute, Tomsk National Research Medical Center, Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation). E-mail: t\_gerashchenko@oncology.tomsk.ru

**Korobeynikova Anastasia A.** (Junior Researcher, Cancer Research Institute, Tomsk National Research Medical Center, Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation). E-mail: shegolmay@gmail.com

**Denisov Evgeny V.** (Doctor of Biological Sciences, Cancer Research Institute, Tomsk National Research Medical Center, Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation). E-mail: d\_evgeniy@oncology.tomsk.ru

**Contribution of the authors:** the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 10.06.2025; принята к публикации 02.09.2025

Received 10.06.2025; accepted for publication 02.09.2025

Научная статья

УДК 519.2

doi: 10.17223/19988605/72/8

**Робастное управление на финансовых рынках с транзакционными издержками  
при логарифмических функциях полезности****Сергей Алексеевич Гондин<sup>1</sup>, Алена Андреевна Мурзинцева<sup>2</sup>,  
Сергей Маркович Пергаменщиков<sup>3</sup>, Евгений Анатольевич Пчелинцев<sup>4</sup>**<sup>1, 2, 3, 4</sup> *Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия*<sup>3</sup> *Universite de Rouen, Rouen, France*<sup>1</sup> *gondin02@mail.ru*<sup>2</sup> *alshishkovatomsk@gmail.com*<sup>3</sup> *serge.pergamenchchikov@univ-rouen.fr*<sup>4</sup> *evgen-pch@yandex.ru*

**Аннотация.** Рассматривается задача оптимального управления инвестиционным портфелем при логарифмических функциях полезности на финансовых рынках Блэка–Шоулса. Формулируется соответствующая теорема верификации и строятся оптимальные стратегии инвестирования и потребления в явном виде. Затем, основываясь на подходе Леланда–Лепинетта, эти стратегии модифицируются и показывается, что полученные стратегии инвестирования и потребления являются оптимальными в асимптотической постановке, когда число пересмотров портфеля стремится к бесконечности. Изучены случаи малых и больших транзакций. Устанавливается, что построенные стратегии робастны, т.е. устойчивы при изменении параметров рынка. Приводятся результаты численного моделирования Монте-Карло, которые на практике подтверждают теоретические выводы.

**Ключевые слова:** финансовый рынок; оптимальное потребление и инвестирование; робастное стохастическое управление; динамическое программирование; уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана; транзакционные издержки.

**Благодарности:** Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта № 24-11-00191.

**Для цитирования:** Гондин С.А., Мурзинцева А.А., Пергаменщиков С.М., Пчелинцев Е.А. Робастное управление на финансовых рынках с транзакционными издержками при логарифмических функциях полезности // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2025. № 72. С. 80–91. doi: 10.17223/19988605/72/8

Original article

doi: 10.17223/19988605/72/8

**Robust control in financial markets with transaction costs  
under logarithmic utility functions****Serguei A. Gondin<sup>1</sup>, Alyona A. Murzintseva<sup>2</sup>, Serguei M. Pergamenschchikov<sup>3</sup>, Evgeny A. Pchelintsev<sup>4</sup>**<sup>1, 2, 3, 4</sup> *National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*<sup>3</sup> *Universite de Rouen, Rouen, France*<sup>1</sup> *gondin02@mail.ru*<sup>2</sup> *alshishkovatomsk@gmail.com*<sup>3</sup> *serge.pergamenchchikov@univ-rouen.fr*<sup>4</sup> *evgen-pch@yandex.ru*

**Abstract.** The problem of portfolio optimization under logarithmic utilities for Black-Scholes financial markets is considered. The corresponding verification theorem is formulated and optimal consumption/investment strategies are constructed explicitly. Then, based on the Leland-Lepinette approach, these strategies are modified and it is shown that



the obtained investment and consumption strategies are optimal in the asymptotic setting when the number of portfolio revisions tends to infinity. Cases of small and large transactions were studied. It is established that the constructed strategies are robust, i.e. stable when market parameters change. The results of Monte Carlo numerical simulation are given which in practice confirm theoretical conclusions.

**Keywords:** financial market; optimal consumption and investment; robust stochastic control; dynamic programming; Hamilton-Jacobi-Bellman equation; transaction costs.

**Acknowledgments:** The research was carried out with the financial support of the RSF as part of a scientific project № 24-11-00191.

**For citation:** Gondin, S.A., Murzintseva, A.A., Pergamenshchikov, S.M., Pchelintsev, E.A. (2025) Robust control in financial markets with transaction costs under logarithmic utility functions. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 72. pp. 80–91. doi: 10.17223/19988605/72/8

## Введение

В статье изучается задача оптимального управления на финансовом рынке Блэка–Шоулса, состоящем из безрискового и рискованного активов, определяемых уравнениями

$$\begin{cases} dB_t = r(t)B_t dt, & B_0 = 1, \\ dS_t = \mu(t)S_t dt + \sigma(t)S_t dW_t, & S_0 > 0, \end{cases} \quad (1)$$

где процентная ставка  $r(t)$ , тренд  $\mu(t)$  и волатильность  $\sigma(t)$  – неслучайные непрерывные  $[0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  функции,  $(W_t)_{t \geq 0}$  – стандартный скалярный винеровский процесс.

Задачи стохастического управления на финансовых рынках очень важны для финансовой индустрии, и имеется ряд работ, в которых разработаны эффективные методы их решения (см., напр.: [1] и ссылки в ней). В отличие от существующих работ, здесь предлагается построить робастные оптимальные стратегии потребления и инвестирования для рынков с транзакционными издержками и логарифмической функцией полезности. Следует отметить, что в задачах хеджирования робастные финансовые стратегии применяются сравнительно давно (см., напр.: [2–6] и ссылки в них). При этом в таких задачах робастность понимается как устойчивость с вероятностью единица относительно изменений в стоимостях рискованных активов, т.е. финансовая робастность. В данной работе используется статистическое определение робастности, означающее устойчивость свойств синтезируемых стратегий относительно изменений распределений рискованных активов в достаточно широких пределах. Для этого применяется подход из [7], разработанный для случая степенной функции полезности. К сожалению, сложность полученных оптимальных стратегий не дает возможности изучить вопрос об их робастности, и, кроме того, невозможно непосредственно без дополнительных условий применить теорему верификации, доказанную в [7], для модели с логарифмической функцией полезности, поскольку в данном случае, в отличие от степенных полезностей, целевые функционалы могут принимать сколь угодно малые отрицательные значения, стремящиеся к минус бесконечности. Поэтому для анализа целевых функционалов требуются дополнительные конструктивные условия, при которых возможно построение оптимальных стратегий. Следовательно, сначала доказывается соответствующая теорема верификации. Затем, чтобы учесть наличие транзакционных издержек, используется метод, разработанный для степенных полезностей в [7] на основе аппроксимирующих стратегий, предложенных Леландом [8] и Лепинеттом [9] для задач хеджирования на финансовых рынках с издержками.

Чтобы описать проблему робастного управления, определим рыночный параметр  $\lambda = (\lambda(t))_{0 \leq t \leq T}$  с  $\lambda(t) = (r(t), \mu(t), \sigma(t)) \in \mathbb{R}^3$ . Обозначим через  $\Lambda$  – некоторый компакт в  $\mathbf{C}^1([0, T], \mathbb{R}^3)$ . Пусть  $\alpha_t$  – количество рискованного актива  $S_t$  и  $\beta_t$  – количество безрискового актива  $B_t$  в портфеле инвестора в момент времени  $t$ . Тогда капитал портфеля  $X_t = \alpha_t S_t + \beta_t B_t$ . Применяя принцип самофинансируемости с потреблением (см., напр.: [1]) имеем, что капитал удовлетворяет СДУ:

$$dX_t = \alpha_t dS_t + \beta_t dB_t - \zeta_t dt, \quad X_0 = x, \quad (2)$$

где  $x > 0$  – начальный капитал,  $\zeta_t$  – интенсивность потребления, т.е. неотрицательный интегрируемый процесс, для которого интеграл  $\int_0^t \zeta_s ds$  – это общая сумма капитала, потребляемого инвестором на временном интервале  $[0, t]$ . Следуя [10], определим дробные финансовые стратегии инвестирования и потребления

$$\theta_t = \frac{\alpha_t S_t}{X_t} \text{ и } c_t = \frac{\zeta_t}{X_t}.$$

Заметим, что  $1 - \theta_t = \beta_t B_t / X_t$ . Поэтому, используя равенства из (1) в (2), получаем уравнение

$$\begin{cases} dX_t = X_t(r(t) + \theta_t \tilde{\mu}(t) - c_t)dt + \sigma(t)X_t \theta_t dW_t, \\ X_0 = x > 0, \end{cases} \quad (3)$$

где  $\tilde{\mu}(t) = \mu(t) - r(t)$ . Заметим, что введение дробных стратегий позволяет записать уравнение для капитала портфеля (3), в котором нет цены рискованного актива  $S_t$ .

Чтобы сформулировать задачу оптимального управления потреблением и инвестированием, введем целевую функцию

$$J_\lambda(x, v) := \mathbf{E}_{x, \lambda} \left( \int_0^T \ln(\zeta_t) dt + \ln X_T \right), \quad (4)$$

где  $\mathbf{E}_{x, \lambda}$  – условное математическое ожидание, соответствующее рыночному параметру  $\lambda \in \Lambda$  при заданном  $X_0 = x$ , интенсивность потребления  $\zeta_t = c_t X_t$ , случайный процесс  $v = (\theta_t, c_t)_{0 \leq t \leq T}$  – стратегия инвестирования и потребления. В работе решаем задачу максимизации целевой функции (4) на основе метода стохастического динамического программирования (СДП), согласно которому необходимо решать задачи оптимизации на интервалах  $[t, T]$  для всех  $0 \leq t \leq T$  для финансовых стратегий, согласованных с естественными фильтрациями  $(\mathcal{F}_{t,u})_{t \leq u \leq T}$  с  $\mathcal{F}_{t,u} = \sigma\{W_s - W_t, t \leq s \leq u\}$  – наименьшими  $\sigma$ -алгебрами, порожденными приращениями винеровского процесса. Всюду далее также  $\mathcal{F}_u = \mathcal{F}_{0,u}$ . Определим допустимые стратегии. Пусть  $\Theta \subseteq \mathbb{R}$  – некоторое замкнутое выпуклое множество.

**Определение.** Случайный процесс  $v = (\theta_u, c_u)_{t \leq u \leq T}$  называется *допустимой стратегией* на промежутке  $[t, T]$  для некоторого фиксированного  $x > 0$ , если он является согласованным с  $(\mathcal{F}_{t,u})_{t \leq u \leq T}$  процессом со значениями в  $\Theta \times \mathbb{R}_+$ , процесс  $(c_u)_{t \leq u \leq T}$  интегрируемый п.н. и такой, что уравнение (3) имеет единственное положительное сильное решение на  $[t, T]$  с  $X_t = x$ . Более того  $\int_0^T |\ln(c_u X_u)| du < \infty$  п.н. и

$$\mathbf{E}_{t,x,\lambda} \left( \int_t^T (\ln(c_u X_u))^- du + \sup_{t \leq u \leq T} (\ln X_u)^- \right) < \infty. \quad (5)$$

Здесь  $\mathbf{E}_{t,x,\lambda}$  – условное математическое ожидание, соответствующее рыночному параметру  $\lambda \in \Lambda$  при заданных  $X_t = x$  и  $(a)^- = -\min(a, 0)$  – отрицательная часть  $a$ .

Обозначим множество допустимых стратегий как  $\mathcal{V}_t$  и  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0$ . Для любого  $v \in \mathcal{V}$  по формуле Ито из (3) находим

$$X_t = x e^{\int_0^t (r(s) + \theta_s \tilde{\mu}(s) - c_s) ds} \mathcal{E}_t(V),$$

где  $\mathcal{E}_t(V) = e^{\int_0^t \theta_s \sigma(s) dW_s - \frac{1}{2} \langle V \rangle_t}$  – экспонента Долеан процесса  $V_t = \int_0^t \theta_s \sigma(s) dW_s$ , и скобка  $\langle V \rangle_t = \int_0^t \theta_s^2 \sigma^2(s) ds$  (подробнее см., напр.: в [11]). Наша цель – максимизировать целевую функцию (4) на множестве  $\mathcal{V}$ , т.е. найти такую стратегию  $v^* \in \mathcal{V}$ , что

$$J_\lambda(x, v^*) = \sup_{v \in \mathcal{V}} J_\lambda(x, v) =: J_\lambda^*(x). \quad (6)$$

Ввиду метода СДП, чтобы найти такую стратегию, нужно изучить значения функций на интервалах  $[t, T]$  для всех  $0 \leq t \leq T$ :

$$J_{\lambda}^*(t, x) := \sup_{v \in \mathcal{V}_t'} J_{\lambda}(t, x, v), \quad \lambda \in \Lambda, \quad (7)$$

где для  $v \in \mathcal{V}_t$

$$J_{\lambda}(t, x, v) := \mathbf{E}_{t,x,\lambda} \left( \int_t^T \ln(c_u X_u) du + \ln X_T \right).$$

При этом функционал  $J_{\lambda}(t, x, v)$  может принимать бесконечные значения для некоторых стратегий  $v$ . Отметим, что в работе [7] эта задача решена для степенной функции полезности.

Далее в разд. 1 формулируется теорема верификации и строятся стратегии управления. В разд. 2 приводятся основные результаты для задачи робастной оптимизации на финансовых рынках с учетом транзакционных издержек. В разд. 3 приводятся результаты численного моделирования Монте-Карло.

### 1. Теорема верификации. Стратегии инвестирования и потребления

Обобщим процесс  $\begin{cases} dX_t = X_t(r(t) + \theta_t \tilde{\mu}(t) - c_t)dt + \sigma(t)X_t \theta_t dW_t, \\ X_0 = x > 0, \end{cases}$  (3) и определение допустимых

стратегий. Определим процесс  $X_t$  со значениями в открытом выпуклом множестве  $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$  и процесс  $v_t$  со значениями в замкнутом множестве  $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^2$ . Пусть  $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$ ,  $X_t \in \mathcal{X}$ , является непрерывным процессом, который задается СДУ

$$dX_t = a(t, X_t, v_t)dt + b(t, X_t, v_t)dW_t. \quad (8)$$

Функции  $a: [0, T] \times \mathcal{X} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $b: [0, T] \times \mathcal{X} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$  являются неслучайными непрерывными и такими, что для любой неслучайной  $\mathbf{v} \in \mathcal{K}$  уравнение (8) при  $v \equiv \mathbf{v}$  имеет единственное сильное решение, при котором  $X_t \in \mathcal{X}$  на интервале  $[0, T]$  и

$$\int_0^T (|a(u, X_u, \mathbf{v})| + b^2(u, X_u, \mathbf{v})) du < \infty \quad \text{п.н.}$$

Зафиксируем функции полезности  $U_1: [0, T] \times \mathcal{X} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $U_2: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  такие, что для любой постоянной стратегии  $v_t \equiv \mathbf{v} \in \mathcal{K}$  для процесса (8) при  $0 \leq t \leq T$  и любого  $x \in \mathcal{X}$  выполняется следующее условие:

$$\mathbf{E}_{t,x} \left( \int_0^T (U_1(u, X_u, \mathbf{v}))^- du + \sup_{t \leq u \leq T} (U_2(X_u))^- \right) < \infty.$$

Чтобы применить метод СДП для задач оптимизации в модели (8), необходимо ввести определение допустимых стратегий на интервале  $[t, T]$  при  $0 \leq t \leq T$ .

**Определение.** Случайный процесс  $v = (v_u)_{t \leq u \leq T}$  называется *допустимым* на промежутке  $[t, T]$  для  $0 \leq t \leq T$  и для некоторого фиксированного  $x \in \mathcal{X}$ , если он является согласованным с  $(\mathcal{F}_{t,u})_{t \leq u \leq T}$  процессом с непрерывными траекториями со значениями во множестве  $\mathcal{K}$  и такой, что уравнение (8) имеет единственное положительное сильное решение на  $[t, T]$  с  $X_t = x$ , для которого  $X_u \in \mathcal{X}$  при  $t \leq u \leq T$  и выполняются следующие условия:

$$\int_t^T (|a(u, X_u, v_u)| + b^2(u, X_u, v_u) + |U_1(u, X_u, v_u)|) du < \infty \quad \text{п.н.}$$

и

$$\mathbf{E}_{t,x} \left( \int_t^T (U_1(u, X_u, v_u))^- du + \sup_{t \leq u \leq T} (U_2(X_u))^- \right) < \infty.$$

Напомним, что  $\mathcal{V}_t$  обозначает множество допустимых стратегий. Заметим, что для любых  $0 \leq t \leq T$  множество  $\mathcal{V}_t \neq \emptyset$ , так как по меньшей мере стратегия  $v_t \equiv \mathbf{v} \in \mathcal{V}_t$ . Обозначим  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0$ . Далее для любого  $v \in \mathcal{V}_t$  зададим целевую функцию как

$$J(t, x, v) := \mathbf{E}_{t,x} \left( \int_t^T U_1(u, X_u, v_u) du + U_2(X_T) \right).$$

Цель – найти допустимую стратегию  $v^* \in \mathcal{V}_t$  такую, что для любого  $0 \leq t \leq T$

$$J^*(t, x) := \sup_{v \in \mathcal{V}_t} J(t, x, v) = J(t, x, v^*). \quad (9)$$

Пусть далее  $g : [0, T] \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  – дважды непрерывно дифференцируемая по  $x$  функция. Определим функционал Гамильтона  $H(t, x, g) := \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{K}} H_0(t, x, g, \mathbf{v})$ , где

$$H_0(t, x, g, \mathbf{v}) = a(t, x, \mathbf{v}) g_x(t, x) + g_{xx}(t, x) \frac{\sigma^2(t) b^2(t, x, \mathbf{v})}{2} + U_1(t, x, \mathbf{v}).$$

Здесь  $g_x, g_{xx}$  – соответствующие производные функции  $g(t, x)$ . Запишем уравнение Гамильтона–Якоби–Белмана (HJB):

$$\begin{cases} z_t(t, x) + H(t, x, z) = 0, & t \in [0, T], \\ z(T, x) = U_2(x), & x \in \mathcal{X}. \end{cases} \quad (10)$$

Далее потребуются следующие условия:

**Н<sub>1</sub>.** Существует решение  $z \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathcal{X}, \mathbb{R})$  уравнения (10) такое, что для некоторого  $0 < \gamma < 1$ :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \sup_{x \in \mathcal{X}} \frac{|z(t, x)|}{|x|^{-\gamma} + |x|} < \infty.$$

**Н<sub>2</sub>.** Существует измеримая функция  $\mathbf{v}_0 : [0, T] \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{K}$  такая, что для решения  $z = z(t, x)$  уравнения (10) функционал Гамильтона  $H(t, x, z) = H_0(t, x, g, \mathbf{v}_0(t, x))$ .

**Н<sub>3</sub>.** Для любого  $x \in \mathcal{X}$  существует почти наверное единственное решение  $X^* = (X_t^*)_{0 \leq t \leq T}$  со значениями во множестве  $\mathcal{X}$  уравнения

$$dX_t^* = a^*(t, X_t^*) dt + (b^*(t, X_t^*)) dW_t, \quad X_0^* = x,$$

где  $a^*(t, x) = a(t, x, \mathbf{v}_0(t, x))$  и  $b^*(t, x) = b(t, x, \mathbf{v}_0(t, x))$ . Более того, процесс  $\mathbf{v}_0 = (\mathbf{v}_0(t, X_t^*))_{0 \leq t \leq T}$  является допустимым, т.е. принадлежит  $\mathcal{V}$ .

**Н<sub>4</sub>.** Для любого  $0 \leq t \leq T$  и любой допустимой стратегии  $v \in \mathcal{V}_t$ :  $\mathbf{E}_{t,x} \sup_{t \leq u \leq T} (z(u, X_u))^- < \infty$ .

**Н<sub>5</sub>.** Для любых  $0 \leq t \leq T$  и  $x \in \mathcal{X}$ :  $\mathbf{E}_{t,x} \sup_{t \leq u \leq T} |z(u, X_u^*)| < \infty$ .

Используя метод из [7], основанный на формуле Ито и теореме Лебега о мажорируемой сходимости, имеем следующую верификационную теорему.

**Теорема 1.** Пусть условия **Н<sub>1</sub>–Н<sub>5</sub>** выполнены. Тогда для любого  $0 \leq t \leq T$  и  $x \in \mathcal{X}$

$$z(t, x) = J^*(t, x) = J(t, x, v^*),$$

где оптимальная стратегия  $v^* = (v_s^*)_{t \leq s \leq T}$ ,  $v_s^* = \mathbf{v}_0(s, X_s^*)$  определена в терминах **Н<sub>2</sub>–Н<sub>3</sub>** и функция  $J^*(t, x)$  определена в (9).

Теперь применим теорему 1 к задаче (6). В этом случае управляющий процесс, описанный в (3), определен на пространстве  $\mathcal{X} = \mathbb{R}_+$ , допустимая стратегия  $v = (\theta_t, c_t)_{0 \leq t \leq T}$  со значениями в  $\mathcal{K} = \Theta \times \mathbb{R}_+$ , где  $\Theta = \mathbb{R}$ . Таким образом, чтобы изучить задачу оптимального потребления и инвестирования (7), применим теорему 1 с функциями полезности  $U_1(x, \mathbf{v}) = \ln(x\mathbf{c})$  и  $U_2(x) = \ln(x)$ , где  $x \in \mathcal{X}$ ,  $\mathbf{v} = (\theta, \mathbf{c}) \in \mathcal{K}$ . Процесс (3) может быть получен из модели (8) при

$$a(t, x, \mathbf{v}) = x(r(t) + \theta \tilde{\mu}(t) - \mathbf{c}) \text{ и } b(t, x, \mathbf{v}) = x \cdot \theta.$$

Нетрудно видеть, что уравнение HJB (10) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} z_t(t, x) + r(t)x z_x(t, x) + \max_{\theta \in \Theta} \Gamma(t, x, z, \theta) + \ln \frac{1}{z_x(t, x)} - 1 = 0, \\ z(T, x) = \ln(x), \end{cases} \quad (11)$$

где  $\Gamma(t, x, z, \theta) = x z_x(t, x) \theta \tilde{\mu}(t) + x^2 z_{xx}(t, x) \theta^2 \sigma^2(t) / 2$ . Более того, согласно условию **H<sub>2</sub>**, для того чтобы найти функцию оптимального управления  $\mathbf{v}_0 = (\theta_0, \mathbf{c}_0)$ , необходимо выбрать  $\theta_0 = \theta_0(t, x, z)$  и  $\mathbf{c}_0 = \mathbf{c}_0(t, x, z)$  следующим образом:

$$\theta_0 = \arg \max_{\theta \in \Theta} \Gamma(t, x, z, \theta) \quad \text{и} \quad \mathbf{c}_0 = \frac{1}{z_x(t, x)x}. \quad (12)$$

Используя далее метод разделения переменных Фурье, можем заключить, что решение уравнения HJB есть функция

$$z(t, x) = y(t) \ln x + A(t), \quad y(t) = T - t + 1, \quad (13)$$

где  $A(t) = \int_t^T y(u) (r(u) + F(u, \theta^*(u))) du - y(t) \ln(y(t))$ . Заметим, что для решения (13) функция  $\Gamma(t, x, z, \theta) = A(t)F(t, \theta)$  и

$$F(t, \theta) = \theta \tilde{\mu}(t) - \frac{\theta^2 \sigma^2(t)}{2}.$$

Более того, из (12) находим, что для решения (13)

$$\theta^*(t) = \theta_0(t) = \arg \max_{\theta \in \Theta} F(t, \theta) = \text{Pr}_{\Theta} \left( \frac{\tilde{\mu}(t)}{\sigma^2(t)} \right) \quad \text{и} \quad \mathbf{c}^*(t) = \mathbf{c}_0(t) = \frac{1}{y(t)}. \quad (14)$$

Здесь  $\text{Pr}_{\Theta}(\cdot)$  — проекция аргумента на множество  $\Theta$ . В данном случае эта функция является липшицевой, т.е.

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \sup_{0 \leq s, t \leq T} \frac{|\theta^*(t) - \theta^*(s)|}{|t - s|} < \infty.$$

Из (3) получаем, что соответствующий процесс стоимости портфеля  $(X_t^*)_{0 \leq t \leq T}$  определяется как

$$X_t^* = x e^{\int_0^t (r(s) + (\theta^*(s)) \tilde{\mu}(s)) ds - \int_0^t c^*(s) ds} \mathcal{E}_t(V^*), \quad (15)$$

где  $\mathcal{E}_t(V^*)$  — экспонента Долеан для процесса  $V_t^* = \int_0^t \theta^*(s) \sigma(s) dW_s$  с его квадратической характеристикой  $\langle V^* \rangle_t = \int_0^t (\theta^*(s))^2 \sigma^2(s) ds$ .

Изучим стратегию (14).

**Теорема 2.** Стратегия  $\mathbf{v}^* = (\theta^*(t), \mathbf{c}^*(t))_{0 \leq t \leq T}$ , определенная в (14), является решением задачи (6).

Более того, для всех  $0 \leq t \leq T$  и  $\lambda \in \Lambda$  оптимальное значение функции (7)

$$J_{\lambda}^*(t, x) = J_{\lambda}(t, x, \mathbf{v}^*) = y(t) \ln x + A(t), \quad (16)$$

где функции  $y(t)$  и  $A(t)$  определены в (13).

**Доказательство.** Подставим (13) в (11). Получаем, что функция  $A$  удовлетворяет следующему ОДУ:

$$\dot{A}(t) + (T - t + 1)(r(t) + F^*(t)) - \ln(T - t + 1) - 1 = 0, \quad A(T) = 0,$$

где  $F^*(t) = \max_{\theta \in \Theta} F(t, \theta)$ . Заметим, что функция  $\theta^*(t)$  непрерывна и функция (13) есть решение уравнения (11), т.е. выполнено условие **H<sub>1</sub>**. Функция оптимального управления  $\mathbf{v}_0 = (\theta_0, \mathbf{c}_0)$  из условия **H<sub>2</sub>** определена в (12). Из (15) следует, что  $\sup_{\lambda \in \Lambda} \mathbf{E}_{\lambda} \sup_{0 \leq t \leq T} |\ln(X_t^*)| < \infty$ . Функция  $\theta^*(t)$  непрерывна, значит стра-

тегия  $v^* = (\theta^*(t), c^*(t))_{0 \leq t \leq T}$  принадлежит  $\mathcal{V}$ , т.е. выполнено условие **Н3**. Свойство (5) влечет условие **Н4**. Вид решения (13) означает, что условие **Н5** также следует из равномерной интегрируемости. Следовательно, применяя теорему 1, приходим к требуемому результату. ■

**Замечание.** Стратегия (14) может быть получена на основе перехода к двойственной задаче (см. пример 6.6, с. 104 в [1]).

## 2. Робастное оптимальное управление на рынках с транзакционными издержками

Далее рассмотрим задачу оптимизации для финансовых рынков (1) с транзакционными издержками. Предположим, что процентная ставка положительна в некоторой окрестности точки  $t = T$ , т.е.  $\inf_{T-\delta \leq t \leq T} r(t) > 0$  для некоторого  $0 < \delta < T$ . Оптимальная стратегия определяется равенствами

$$\alpha_t^* = \theta^*(t) \hat{X}_t, \quad \beta_t^* = (1 - \theta^*(t)) \tilde{X}_t \quad \text{и} \quad \zeta_t^* = X_t^* / y(t),$$

где дробные стратегии  $\theta^*(t)$  и  $c^*(t)$  определены в (14),  $\hat{X}_t = X_t^* / S_t$ ,  $\tilde{X}_t = X_t^* / B_t$ , и процесс стоимости портфеля

$$X_t^* = x + \int_0^t \alpha_u^* dS_u + \int_0^t \beta_u^* dB_u - \int_0^t \zeta_u^* du.$$

**Предложение 1.** Процессы  $\hat{X}_t$ ,  $X_t^*$ ,  $\tilde{X}_t$  и  $S_t$  являются равномерно квадратично интегрируемыми, т.е.

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \mathbf{E}_\lambda \sup_{0 \leq t \leq T} \left( (\hat{X}_t)^2 + (X_t^*)^{-2} + (X_t^*)^2 + (\tilde{X}_t)^2 + S_t^2 \right) < \infty$$

и, более того,

$$\sup_{0 \leq s, t \leq T} \sup_{\lambda \in \Lambda} \frac{\mathbf{E}_\lambda \left( (\hat{X}_t - \hat{X}_s)^2 + (X_t^* - X_s^*)^2 + (\tilde{X}_t - \tilde{X}_s)^2 + (S_t - S_s)^2 \right)}{|t - s|} < \infty.$$

**Доказательство.** Утверждение следует из формулы Ито, свойств экспоненты Долеан и неравенства Дуба (см., например, [11]). ■

Теперь для учета транзакционных издержек введем дискретизированные стратегии для моментов перераспределения (ревизий) портфеля  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  как

$$\alpha_t^{(n)} = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{t_{k-1}}^* \mathbf{1}_{[t_{k-1}, t_k)}, \quad \beta_t^{(n)} = \sum_{k=1}^{n-1} \beta_{t_{k-1}}^* \mathbf{1}_{[t_{k-1}, t_k)} + \hat{\beta}_n \mathbf{1}_{[t_{n-1}, T]} \quad \text{и} \quad \zeta_t^{(n)} = \sum_{k=1}^{n-1} \zeta_{t_{k-1}}^* \mathbf{1}_{[t_{k-1}, t_k)} + \mathbf{1}_{[t_{n-1}, T]}. \quad (17)$$

Здесь  $\hat{\beta}_n - \mathcal{F}_{t_{n-1}}$ -измеримый поправочный коэффициент, определяемый ниже. На каждом интервале  $[t_{k-1}, t_k)$ ,  $k \geq 1$ , инвестор платит за транзакции пропорционально объему торгов в момент времени  $t_k$  величину  $\kappa S_{t_k} |\alpha_{t_k}^{(n)} - \alpha_{t_{k-1}}^{(n)}| = \kappa S_{t_k} |\alpha_{t_k}^* - \alpha_{t_{k-1}}^*|$ . Тогда общие транзакционные издержки на интервале  $[0, t]$

$$D_t^{(n)} = \kappa \sum_{t_k \leq t} S_{t_k} |\alpha_{t_k}^* - \alpha_{t_{k-1}}^*|,$$

где  $\kappa = \kappa_n > 0$  – транзакционный коэффициент пропорциональности, зависящий от числа ревизий  $n$ . Дополнительно определим величины

$$d_n = \kappa \sum_{k=1}^n \sqrt{t_k - t_{k-1}} \quad \text{и} \quad \delta_n = \max_{1 \leq k \leq n} \sqrt{t_k - t_{k-1}}.$$

Из определения процессов в (17) следует, что они являются càdlàg-процессами, и стратегия  $v_n = (\alpha_t^{(n)}, \beta_t^{(n)}, \zeta_t^{(n)})_{0 \leq t \leq T}$  является предсказуемой, поскольку функции  $\theta^*(t)$  и  $c^*(t)$  неслучайные (см., напр.: [11]). Из (14) и предложения 1 имеем

**Предложение 2.** Процессы, определенные в (17) являются равномерно интегрируемыми, т.е.

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \sup_{n \geq 3} \sup_{0=t_0 < t_1 < \dots < t_n=T} \frac{\mathbf{E}_\lambda \left( \left| \int_0^{t_{n-2}} \tilde{\alpha}_u^{(n)} dS_u \right| + \left| \int_0^{t_{n-1}} \tilde{\beta}_u^{(n)} dB_u \right| + \left| \int_0^{t_{n-1}} \tilde{\zeta}_u^{(n)} du \right| \right)}{\delta_n} < \infty,$$

где  $\tilde{\alpha}_u^{(n)} = \alpha_u^{(n)} - \alpha_u^*$ ,  $\tilde{\beta}_u^{(n)} = \beta_u^{(n)} - \beta_u^*$  и  $\tilde{\zeta}_u^{(n)} = \zeta_u^{(n)} - \zeta_u^*$ .

Значит, можем переписать процесс стоимости портфеля в виде:

$$X_t^{(n)} = x + \int_0^t \alpha_u^{(n)} dS_u + \int_0^t \beta_u^{(n)} dB_u - \int_0^t \zeta_u^{(n)} du - D_t^{(n)}. \quad (18)$$

Здесь  $\int_0^t \alpha_u^{(n)} dS_u = \int_0^{t_{n-2}} \alpha_u^{(n)} dS_u$  и  $\int_0^t \zeta_u^{(n)} du = \int_0^{t_{n-2}} \zeta_u^{(n)} du$  для всех  $t_{n-2} \leq t \leq T$  и транзакционные издержки  $D_t^{(n)} = D_{t_{n-1}}^{(n)}$  для  $t_{n-1} \leq t \leq T$ . Поэтому в терминальный момент  $X_T^{(n)} = X_{t_{n-1}}^{(n)} + \hat{\beta}_n (B_T - B_{t_{n-1}}) - (t_n - t_{n-1})$ . Теперь для всех  $n \geq 1$ , при которых  $B_T \neq B_{t_{n-1}}$ , положим

$$\hat{\beta}_n = \frac{\left( X_{t_{n-1}}^{(n)} \right)^+ + \varepsilon_n}{B_T - B_{t_{n-1}}}. \quad (19)$$

Тогда

$$X_T^{(n)} = \left( X_{t_{n-1}}^{(n)} \right)^+ + \varepsilon_n - (t_n - t_{n-1}).$$

Относительно параметра  $\varepsilon_n$  предположим, что выполнено условие

$$\varepsilon_n > 2(t_n - t_{n-1}) \text{ для всех } n \geq 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_n}{d_n} + \delta_n > 0. \quad (A)$$

Изучим асимптотику при  $n \rightarrow \infty$  целевой функции (4) соответствующей стратегии  $\mathbf{v}_n = (\alpha_t^{(n)}, \beta_t^{(n)}, \zeta_t^{(n)})_{0 \leq t \leq T}$ .

**Теорема 3.** Пусть моменты перераспределения портфеля  $t_k = kT/n$ ,  $k = \overline{1, n}$ , выполнено условие (A), и  $\kappa_n = o(n^{-1/2})$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда стратегия (18)–(19) является асимптотически робастной и оптимальной, т.е.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\lambda \in \Lambda} |J_\lambda(x, \mathbf{v}^{(n)}) - J_\lambda^*(x)| = 0, \quad (20)$$

где  $J_\lambda^*(x) = (T+1) \ln x + A(0)$ .

**Доказательство.** Заметим, что в условиях теоремы  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ . Покажем, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\lambda \in \Lambda} \int_0^T \mathbf{E}_\lambda |\ln \zeta_u^{(n)} - \ln \zeta_u^*| du = 0. \quad (21)$$

Поскольку для любых  $x, y > 0$

$$|\ln x - \ln y| \leq |x - y| / \min(x, y), \quad (22)$$

то при  $t_{k-1} < u \leq t_k$  и  $1 \leq k \leq n-1$

$$|\ln \zeta_u^{(n)} - \ln \zeta_u^*| \leq \frac{|\zeta_{t_{k-1}}^* - \zeta_u^*|}{\min(\zeta_{t_{k-1}}^*, \zeta_u^*)} \leq \left( \frac{1}{\zeta_{t_{k-1}}^*} + \frac{1}{\zeta_u^*} \right) |\zeta_{t_{k-1}}^* - \zeta_u^*|.$$

Поэтому из определения оптимального  $\zeta_u^*$  и неравенства Коши–Буняковского–Шварца имеем для любого  $\lambda \in \Lambda$

$$\mathbf{E}_\lambda |\ln \zeta_u^{(n)} - \ln \zeta_u^*| \leq 2T \sqrt{\mathbf{E}_\lambda |\zeta_{t_{k-1}}^* - \zeta_u^*|^2} \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbf{E}_\lambda (X_t^*)^{-2}.$$

Предложение 1 влечет существование такого  $C > 0$ , что при  $t_{k-1} < u \leq t_k$  и  $1 \leq k \leq n-1$

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \mathbf{E}_\lambda |\ln \zeta_u^{(n)} - \ln \zeta_u^*| \leq C \sqrt{u - t_{k-1}} \leq C \delta_n.$$

Тогда

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \int_0^{t_{n-1}} \mathbf{E}_\lambda |\ln \zeta_u^{(n)} - \ln \zeta_u^*| du \leq C t_{n-1} \delta_n \leq C T \delta_n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Более того, можем оценить потребление на интервале  $(t_{n-1}, T] = (t_{n-1}, t_n]$ :

$$\mathbf{E}_\lambda \int_{t_{n-1}}^{t_n} |\ln \zeta_u^{(n)} - \ln \zeta_u^*| du = \mathbf{E}_\lambda \int_{t_{n-1}}^{t_n} |\ln \zeta_u^*| du \leq C(T+1)\delta_n.$$

Тем самым приходим к (21). Далее, используя метод анализа транзакционных издержек из [7], получим

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\lambda \in \Lambda} \frac{\mathbf{E}_\lambda |X_T^{(n)} - X_T^*|}{\varepsilon_n} < \infty.$$

Применяя неравенство (22), имеем  $|\ln X_T^{(n)} - \ln X_T^*| = 4 |\ln(X_T^{(n)})^{1/4} - \ln(X_T^*)^{1/4}| \leq 4 |X_T^{(n)} - X_T^*|^{1/4} / m_n^{1/4}$ , где  $m_n = \min(X_T^{(n)}, X_T^*)$ . По неравенству Коши–Буняковского–Шварца

$$\mathbf{E} |\ln X_T^{(n)} - \ln X_T^*| \leq 4 (\mathbf{E} |X_T^{(n)} - X_T^*|)^{1/4} \sqrt{\mathbf{E} m_n^{-1/2}}.$$

Здесь  $\mathbf{E} m_n^{-1/2} = \mathbf{E}(X_T^*)^{-1/2} + \mathbf{E}(m_n^{-1/2} - (X_T^*)^{-1/2}) \leq \mathbf{E}(X_T^*)^{-1/2} + \mathbf{E}(X_T^*)^{-1/2} (X_T^{(n)})^{-1/2} (X_T^* - X_T^{(n)})^{1/2}$ . Из условия (A):  $X_T^{(n)} \geq \varepsilon_n / 2$ , поэтому  $\mathbf{E} m_n^{-1/2} \leq \mathbf{E}(X_T^*)^{-1/2} + \sqrt{2} \varepsilon_n^{-1/2} \sqrt{\mathbf{E} |X_T^{(n)} - X_T^*| \sqrt{\mathbf{E}(X_T^*)^{-1}}}$ . Следовательно,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\lambda \in \Lambda} \mathbf{E}_\lambda |\ln X_T^{(n)} - \ln X_T^*| = 0.$$

Отсюда и (21) приходим к утверждению теоремы 3. ■

Теперь рассмотрим оптимизационную задачу на рынках с большими транзакционными издержками, когда нормированный транзакционный коэффициент  $\sqrt{n} \kappa_n$  не стремится к 0 при  $n \rightarrow \infty$ . Предполагаем лишь, что  $\kappa_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . В этом случае необходимо изменить стратегию (17), используя подход Лепинетта [9]. Перераспределение портфеля предлагается осуществлять в моменты

$$t_k = \left( \frac{k}{n} \right)^q T, \quad k = \overline{1, n}, \quad (23)$$

где степень  $q = q_n \geq 1$  и такая, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{q_n}{n} + \kappa_n \sqrt{\frac{n}{q_n}} \right) = 0$ .

Например, можно взять  $q_n = \sqrt{n} + \kappa_n n$ . Отметим, что при больших издержках не допускается часто перераспределять портфель.

**Теорема 4.** Пусть моменты перераспределения портфеля определены в (23), выполнено условие (A), и  $\kappa_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда стратегия (18)–(19) является асимптотически робастной и оптимальной, т.е. удовлетворяет (20).

**Доказательство.** Поскольку ввиду (23)

$$t_k - t_{k-1} = qT \int_{(k-1)/n}^{k/n} x^{q-1} dx \leq \frac{qT}{n} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ , и можем применить рассуждения из доказательства теоремы 3. ■

### 3. Численное моделирование

В этом разделе приведены результаты численного анализа сходимости (20). Определим в модели рынка (1) следующие параметры:  $T = 5$ ,  $r = 0,055$ ,  $\mu = 0,06$ ,  $\sigma = 0,1$  и  $S_0 = 100$ . Функции полезности  $U_1(x, \mathbf{v}) = \ln(x\mathbf{c})$  и  $U_2(x) = \ln(x)$  с переменными  $\mathbf{v} = (\theta, \mathbf{c}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ . Стратегии рассчитываются по формулам (14), (15) и (17). Для этого полагаем



$$F(t, \theta) \equiv F(\theta) = \theta(\mu - r) - \frac{\theta^2 \sigma^2}{2}.$$

В этом случае  $\theta^* = \arg \max_{\theta \in \mathbb{R}} F(\theta) = (\mu - r) / \sigma^2 = 0,5$ ,

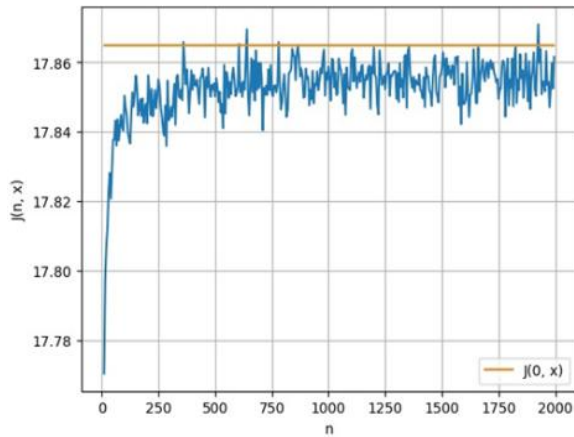
$$X_t^* = x e^{rt + \theta^*(\mu - r)t + \theta^* \sigma W_t - \int_0^t c^*(s) ds - \frac{(\theta^*)^2 \sigma^2}{2} t} \text{ и } J^*(0, x) = 6 \ln x + \frac{35}{2}(r + F(\theta^*)) - 6 \ln 6.$$

Положим начальный капитал  $x = 100$ . Целевые функции рассчитываются методом Монте-Карло по приближенной формуле

$$J(x, v^{(n)}) \approx \frac{1}{1000} \sum_{l=1}^{1000} \left( \int_0^T \ln \zeta_u^{(n,l)} du + \ln X_T^{(n,l)} \right),$$

где  $(\zeta_u^{(n,l)})_{0 \leq u \leq T}$  и  $X_T^{(n,l)}$  – интенсивность потребления и капитал, полученные по  $l$ -й реализации выборки.

Результаты приведены на рис. 1, 2. На рис. 1, а наблюдается сходимость (20) с ростом  $n$  для стратегий (17) при малых транзакционных издержках с  $\kappa_n = (2\sqrt{n} \ln n)^{-1}$ , график которой представлен на рис. 1, б.



Сходимость целевой функции

а

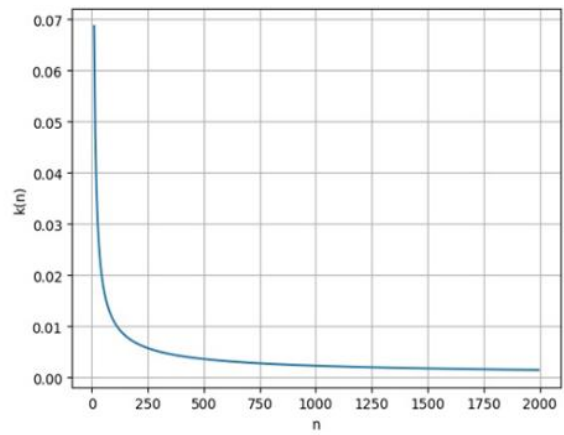
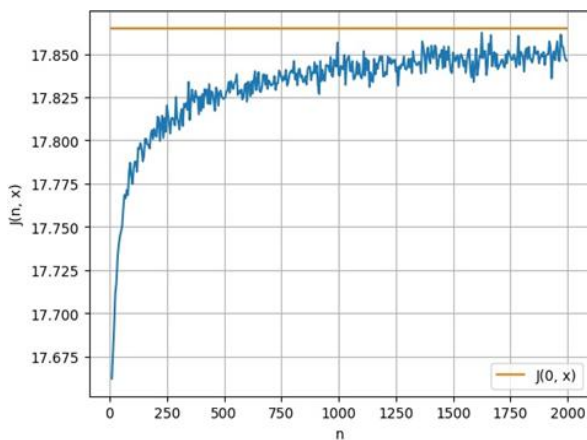


График коэффициента  $\kappa_n$

б

Рис. 1. Случай малых транзакционных издержек:

Fig.1. The case of small transaction costs



Сходимость целевой функции

а

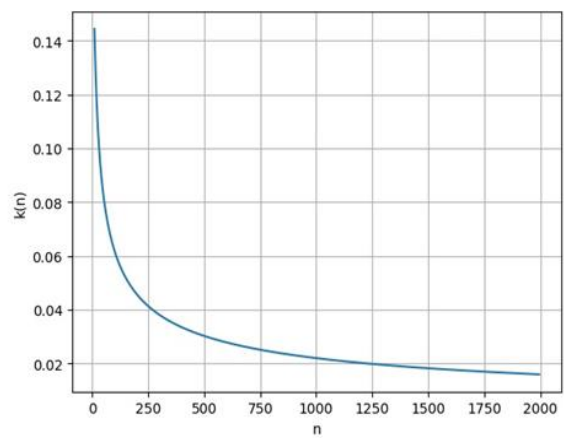


График коэффициента  $\kappa_n$

б

Рис. 2. Случай больших транзакционных издержек

Fig. 2. The case of large transaction costs

Для численного анализа сходимости в случае больших транзакционных издержек полагаем  $\kappa_n = 0,5\sqrt{\ln \ln n} / \sqrt{n}$ , график которой представлен на рис. 2, *b*. На рис. 2, *a* наблюдается сходимость (20) с ростом  $n$  для стратегий (17) и (23) при  $q_n = \ln n \cdot \ln \ln n$ .

На рис. 1, *a* и 2, *a* коричневая линия – теоретическое оптимальное значение целевой функции  $J^*(0, x) \approx 17,865$ , синяя линия – численные аппроксимации целевых функций.

### Заключение

В работе впервые рассматривается задача робастного оптимального стохастического управления для рынков Блэка–Шоулса с транзакционными издержками при логарифмических функциях полезности. При этом робастность определяется как устойчивость относительно изменений параметров рынка, которые являются внешними по отношению к инвестору и, как правило, ему неизвестны. Построены явные стратегии потребления и инвестирования, учитывающие как малые, так и большие размеры транзакционных издержек. Представленные теоретические результаты подтверждаются соответствующими экспериментальными данными, полученными в ходе моделирования по методу Монте-Карло.

### Список источников

1. Karatzas I., Shreve S.E. *Methods of Mathematical Finance*. New York : Springer, 1998.
2. Hobson D.G. Robust hedging of the lookback option // *Finance and Stochastics*. 1998. V. 2. P. 329–347.
3. Bertsimas D., Gupta V., Kallus N. Data-driven robust optimization // *Mathematical Programming*. 2018. V. 167. P. 235–292. doi: 10.1007/s10107-017-1125-8
4. Carassus L., Obløj J., Wiesel J. The robust superreplication problem: a dynamic approach // *SIAM J. Financial Math.* 2019. V. 10. P. 907–941. doi: 10.1137/21M1447040
5. Obløj J., Wiesel J. Robust estimation of superhedging prices // *Annals of Statistics*. 2021. V. 49. P. 508–530.
6. Cherif D., El Mansour M., Lepinette E. A short note on super-hedging an arbitrary number of European options with integer-valued strategies // *Journal of Optimization Theory and Applications*. 2024. V. 201. P. 1301–1312.
7. Egorov S., Pergamenschikov S.M. Optimal investment and consumption for financial markets with jumps under transaction costs // *Finance and Stochastics*. 2023. V. 28. P. 123–159.
8. Leland H. Option Pricing and Replication with Transactions Costs // *Journal of Finance*. 1985. V. 5. P. 1283–1301.
9. Lépinette E. Modified Leland's strategy for constant transaction costs rate // *Mathematical Finance*. 2012. V. 22 (4). P. 741–752.
10. Klüppelberg C., Pergamenschikov S.M. Optimal consumption and investment with bounded downside risk for power utility functions // *Optimality and Risk – Modern Trends in Mathematical Finance: the Kabanov Festschrift* / F. Delbaen, M. Rasonyi, C. Stricker (eds.). Heidelberg : Springer, 2009. P. 133–169.
11. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. *Теория мартингалов*. М. : Наука, 1986.

### References

1. Karatzas, I. & Shreve, S.E. (1998) *Methods of Mathematical Finance*. New York: Springer.
2. Hobson, D.G. (1998) Robust hedging of the lookback option. *Finance and Stochastics*. 2. pp. 329–347.
3. Bertsimas, D., Gupta, V. & Kallus, N. (2018) Data-driven robust optimization. *Mathematical Programming*. 167. pp. 235–292. DOI: 10.1007/s10107-017-1125-8
4. Carassus, L., Obløj, J. & Wiesel, J. (2019) The robust superreplication problem: a dynamic approach. *SIAM J. Financial Math.* 10. pp. 907–941. DOI: 10.1137/21M1447040
5. Obløj, J. & Wiesel, J. (2021) Robust estimation of superhedging prices. *Annals of Statistics*. 49. pp. 508–530.
6. Cherif, D., El Mansour, M. & Lepinette, E. (2024) A short note on super-hedging an arbitrary number of European options with integer-valued strategies. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 201. pp. 1301–1312.
7. Egorov, S. & Pergamenschikov, S.M. (2023) Optimal investment and consumption for financial markets with jumps under transaction costs. *Finance and Stochastics*. 28. pp. 123–159.
8. Leland, H. (1985) Option Pricing and Replication with Transactions Costs. *Journal of Finance*. 5. pp. 1283–1301.
9. Lépinette, E. (2012) Modified Leland's strategy for constant transaction costs rate. *Mathematical Finance*. 22(4). pp. 741–752.
10. Klüppelberg, C. & Pergamenschikov, S.M. (2009) *Optimal consumption and investment with bounded downside risk for power utility functions*. In: Delbaen, F., Rasonyi, M. & Stricker, C. (eds) *Kabanov Festschrift. Optimality and Risk – Modern Trends in Mathematical Finance*. Heidelberg: Springer. pp. 133–169.
11. Liptser, R.S. & Shiryaev, A.N. (1989) *Teoriya martingalov* [Theory of Martingales]. Moscow: Nauka.

**Информация об авторах:**

**Гондин Сергей Алексеевич** – младший научный сотрудник международной лаборатории статистики случайных процессов и количественного финансового анализа научного управления Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: gondin02@mail.ru

**Мурзинцева Алена Андреевна** – младший научный сотрудник международной лаборатории статистики случайных процессов и количественного финансового анализа научного управления Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: alshishkovatomsk@gmail.com

**Пергаменчиков Сергей Маркович** – профессор, доктор физико-математических наук, профессор лаборатории математики им. Рафаэля Салема Руанского университета (Руан, Франция); профессор кафедры математического анализа и теории функций механико-математического факультета Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: serge.pergamenchtchikov@univ-rouen.fr

**Пчелинцев Евгений Анатольевич** – доцент, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического анализа и теории функций механико-математического факультета Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: evgen-pch@yandex.ru

**Вклад авторов:** все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Information about the authors:**

**Gondin Serguei A.** (Researcher, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: gondin02@mail.ru

**Murzintseva Alyona A.** (Researcher, Tomsk State University, National Research Tomsk, Russian Federation). E-mail: alshishkovatomsk@gmail.com

**Pergamenshchikov Serguei M.** (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Rouen Normandy University, Rouen, France; National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: serge.pergamenchtchikov@univ-rouen.fr

**Pchelintsev Evgeny A.** (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of Dept, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: evgen-pch@yandex.ru

**Contribution of the authors:** the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

*Поступила в редакцию 27.03.2025; принята к публикации 02.09.2025*

*Received 27.03.2025; accepted for publication 02.09.2025*

Original article

UDC 681.516

doi: 10.17223/19988605/72/9

**Shortages of perishables control for a stochastic inventory system  
in retail through dynamic pricing with an adjustable factor****Anna V.<sup>1</sup> Kitaeva, Yu Cao<sup>2</sup>**<sup>1, 2</sup> National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation<sup>1</sup> kit1157@yandex.ru<sup>2</sup> ch.cy@stud.tsu.ru

**Abstract.** This paper examines an inventory system of a perishable product facing compound Poisson demand with price-dependent intensity. The proposed model includes an adjustable factor that influences the intensity of demand and, consequently, the possibility of shortages. By employing diffusion approximation of the inventory level process, stochastic properties of the selling process are obtained, and the expected revenue is derived with a penalty for the shortages. Consideration of the shortages' period allows us to expand the scope of applicability the linear approximation of a dependence of demand intensity on price.

**Keywords:** dynamic pricing; price sensitive demand; compound Poisson demand; adjustable factor; diffusion approximation; shortages.

**For citation:** Kitaeva, A.V., Yu, Cao (2025) Shortages of perishables control for a stochastic inventory system in retail through dynamic pricing with an adjustable factor. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 72. pp. 92–100. doi: 10.17223/19988605/72/9

Научная статья

doi: 10.17223/19988605/72/9

**Контроль дефицита скоропортящихся товаров в розничной торговле  
посредством динамического ценообразования с регулирующим коэффициентом****Анна Владимировна Китаева<sup>1</sup>, Юй Цао<sup>2</sup>**<sup>1, 2</sup> Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия<sup>1</sup> kit1157@yandex.ru<sup>2</sup> ch.cy@stud.tsu.ru

**Аннотация.** Рассматривается система управления запасами скоропортящегося товара при спросе, описываемом составным пуассоновским процессом с интенсивностью, зависящей от цены. Предлагаемая модель включает в себя регулирующий фактор, влияющий на интенсивность спроса и, следовательно, на возможность возникновения нехватки товара. В рамках диффузионной аппроксимации уровня запасов исследуются стохастические свойства процесса продаж и находится средняя выручка с учетом штрафа за нехватку товара. Введение периода нехватки товара позволяет расширить область применимости линейной аппроксимации зависимости интенсивности спроса от цены.

**Ключевые слова:** динамическое ценообразование; чувствительный к цене спрос; составной пуассоновский спрос; регулирующий коэффициент; диффузионная аппроксимация; нехватка товара.

**Для цитирования:** Китаева А.В., Юй Цао. Контроль дефицита скоропортящихся товаров в розничной торговле посредством динамического ценообразования с регулирующим коэффициентом // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2025. № 72. С. 92–100. doi: 10.17223/19988605/72/9

## Introduction

Dynamic pricing has been extensively studied as a key strategy for managing perishable products, particularly within a finite selling horizon. Dynamic pricing, which involves continuously adjusting prices in response to time-dependent variables such as the remaining shelf life of the product and its inventory level, effectively addresses the challenge of perishability by aligning supply with temporally fluctuating demand. As emphasized in [1], such pricing strategies not only offer financial advantages to retailers but also lead to a substantial decline in waste, which is especially critical in the context of food products. A growing body of literature confirms that dynamic pricing mitigates the risk of unsold inventory and helps to avoid the inefficiencies associated with traditional static pricing approaches [2]. While extensive research has explored dynamic pricing mechanisms, the specific challenge of managing shortages has garnered focused attention in recent years, particularly those resulting in lost sales [3].

Recent studies have highlighted the value of dynamically adjusting prices not only to stimulate demand for aging inventory but also to control the sales rate in order to reduce the likelihood of stock outs during the selling period [4, 5]. In setting without replenishment opportunities, lost sales represent a critical concern, as unmet demand directly translates to revenue loss and diminished customer satisfaction. In [6], an integrated model of dynamic pricing and inventory control under a lost sales framework is proposed, highlighting that optimal pricing strategies must incorporate both the stochastic characteristics of demand and the perishability of goods. The importance of pricing strategies for addressing the risk of lost sales in perishable goods markets has been well recognized in recent studies [7, 8].

We proposed a basic stochastic dynamic price control model in [9], which allows us, triggering purchases, to sell all a perishable product at hand during its lifetime almost surely. In [10], a multiplicative adjustable factor was introduced into the basic model, which helps address the problem of fitting the demand rate to real-life situations and allows for customization of the sales process. In [11], we obtained optimal weight function approximation for large lot sizes that depends on a parameter and considered two close to optimal models of the dependence of demand intensity on price, controlling the shortages by changing the parameter. In this paper, we extend the model introduced in [10] by incorporating the moment of the shortages occurrence and the corresponding penalty in the expected revenue.

## 1. Problem statement

We commence by formulating the fundamental assumptions and mathematical framework. Suppose a supplier acquires an initial stock  $Q_0$  per unit price  $d$  at the beginning of the sales cycle  $T$ , where additional procurement is prohibited during this period. Market demand adheres to a compound Poisson process governed by intensity  $\lambda(c(t))$ , with  $c = c(t)$  representing the time-varying unit selling price. Individual customer purchases are treated as independent and identically distributed random variables, characterized by first-order moment  $a_1$  and second-order moment  $a_2$ .

For analytical tractability, we employ a diffusion approximation of the inventory level process  $Q(t)$ , which follows the stochastic differential equation

$$dQ(t) = -a_1\lambda(c(t))dt + \sqrt{a_2\lambda(c(t))}dw(t),$$

where  $w(\cdot)$  is the Wiener process.

We adopt the following pricing control:

$$a_1\lambda(c(t)) = \kappa \frac{Q(t)}{T-t}, \quad (1)$$

that is, the product's average sales rate and its instantaneous sales rate must be proportional; coefficient  $\kappa > 0$ . We will call control model (1) the linear one.

The idea of introducing adjustable factors into idealized dynamic pricing models in order to adapt to real market conditions as well as a lot of results in inventory control modelling belongs to Alexander Fedorovich Terpugov (1939-2009), former Head of the Department of Probability Theory and Mathematical Statistics at Tomsk State University, outstanding scientist and teacher.

It follows that the stock level process satisfies the following equation:

$$dQ(t) = -\kappa \frac{Q(t)}{T-t} dt + \sqrt{\kappa \frac{a_2}{a_1} \frac{Q(t)}{T-t}} dw(t). \quad (2)$$

Below we use (2) to get the properties of the stock level process. Then we propose a heuristic method for determining the moment when the shortages occur, introduce appropriate penalties, and obtain the expected revenue with the penalties.

## 2. The stochastic properties of the selling process

Within the framework of the approximation, the expectation of the stock level process

$$E\{Q(t)\} = \bar{Q}(t) = Q_0 (1-t/T)^\kappa. \quad (3)$$

Denote  $\bar{Q}^2(t) = E\{Q^2(t)\}$ . Applying Ito's formula and averaging, we get

$$\frac{d\bar{Q}^2}{dt} = -2\kappa \frac{\bar{Q}^2}{T-t} + \kappa \frac{a_2}{a_1} \frac{\bar{Q}}{T-t}$$

subject to  $\bar{Q}^2(0) = Q_0^2$ .

It follows that the variance of the stock level process

$$\text{Var}\{Q(t)\} = \frac{a_2}{a_1} Q_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\kappa \left(1 - \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\kappa\right).$$

The second initial moment of  $Q(\cdot)$

$$\bar{Q}^2 = \frac{a_2}{a_1} Q_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\kappa \left[1 - \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\kappa\right] + Q_0^2 \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{2\kappa}. \quad (4)$$

By applying Ito's formula and the Laplace transform, we obtain the probability density function of the inventory level

$$f(q, t) = \exp\left(\frac{-\beta Q_0 (1-t/T)^\kappa}{1 - (1-t/T)^\kappa}\right) \left[ \delta(q) + \beta \exp\left(\frac{-\beta Q_0}{1 - (1-t/T)^\kappa}\right) \times \frac{\sqrt{(1-t/T)^\kappa Q_0 / q}}{1 - (1-t/T)^\kappa} I_1\left(\frac{2\beta \sqrt{(1-t/T)^\kappa Q_0 q}}{1 - (1-t/T)^\kappa}\right) \right], \quad (5)$$

where  $\beta = 2a_1 / a_2$ ,  $I_1(\cdot)$  is the first order modified Bessel function of the first kind, and  $\delta(\cdot)$  represents the Dirac delta distribution.

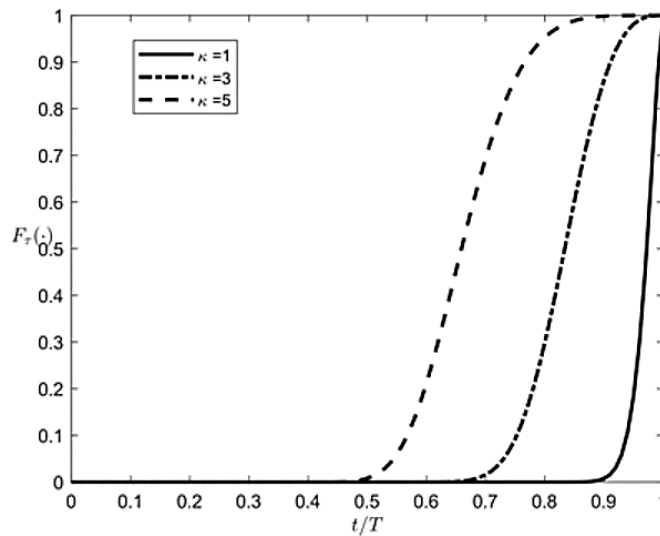


Fig. 1.  $F_\tau(\cdot)$  dependence on  $t/T$  for  $\kappa = 1, 3$ , and  $5$

From (5) it follows that the cumulative distribution function of the length of time  $\tau$  it takes to sell  $Q_0$

$$F_{\tau}(t) = \exp\left(-\beta Q_0 \frac{(1-t/T)^{\kappa}}{1-(1-t/T)^{\kappa}}\right).$$

Thus,  $F_{\tau}(T)=1$ , and the probability of the shortages increases when  $\kappa$  increases.

Figure 1 illustrates the behavior of  $F_{\tau}(t)$  for  $\beta Q_0 = 150$ ;  $\kappa = 1, 3$ , and  $5$ .

The expectation of the selling duration  $\tau$

$$E\{\tau\} = \int_0^T (1 - F_{\tau}(t)) dt = T \left( 1 - \int_0^1 \exp\left(-\beta Q_0 \frac{z^{\kappa}}{1-z^{\kappa}}\right) dz \right).$$

For  $\beta Q_0 \gg 1$ , we get

$$E\{\tau\} \approx T \left( 1 - \int_0^1 \exp(-\beta Q_0 z^{\kappa}) dz \right) = T \left( 1 - \frac{1}{\kappa (\beta Q_0)^{1/\kappa}} \int_0^{\infty} u^{(1-\kappa)/\kappa} e^{-u} du \right) = T \left( 1 - \frac{\Gamma((\kappa+1)/\kappa)}{(\beta Q_0)^{1/\kappa}} \right), \quad (6)$$

where  $\Gamma(\cdot)$  is the gamma function.

### 3. The expected revenue taking the shortages into account

We take (6) as the moment of the shortages occurrence  $T_1$ ,  $T_1 = T x_0$ , where  $x_0 = 1 - \frac{\Gamma((\kappa+1)/\kappa)}{(\beta Q_0)^{1/\kappa}}$ , and

$$E\{Q(T_1)\} = \bar{Q}(T_1) = \frac{\Gamma^{\kappa}((\kappa+1)/\kappa)}{\beta}. \text{ In the simulation, the moment of shortages occurs when the available}$$

stock is less than the quantity requested by the last consumer.

The simulation results for the duration of the selling period are presented in Figure 2 and are obtained through a thinning algorithm implementation of a non-homogeneous Poisson process simulation with 1,000 replications. Mean values are reported as the outcomes. The analysis employs parameter values in the range  $1 \leq \kappa \leq 5$  and exams two distributions of purchases: uniformly distributed over  $(0,10)$  and exponentially distributed with parameter 5. The theoretical prediction (black curve) is compared with the simulated results for uniform (red curve) and exponential (blue curve) purchases distributions.

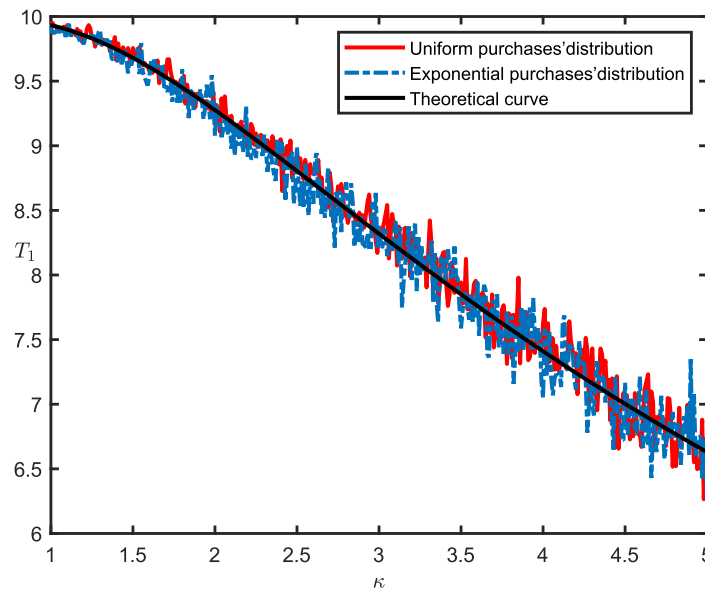


Fig. 2.  $T_1$  dependence on  $\kappa$ ;  $T = 10$ ,  $Q_0 = 500$ , purchases are Uniform  $(0,10)$  or Exp  $(5)$

Parameter  $\kappa$  has a significant impact on the shortages' duration. When  $\kappa > 2$ , the shortages period may exceed 10% of the total sales cycle length.

Let us consider linear approximation of the intensity-of-price dependence

$$\lambda(c) = \lambda_0 - \lambda_1 \frac{c(t) - c_0}{c_0}, \quad (7)$$

where  $c_0$  denotes the basic price level associated with initial demand intensity  $\lambda_0$ , while  $\lambda_1 > 0$  reflects the demand response to price deviations from its baseline. Linear price-demand relationships represent a standard modeling approach; see, for example, [12].

Combining (1) and (7) we get

$$c(t) = c_0 \left( 1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \frac{\kappa Q(t)}{a_1 \lambda_1 (T-t)} \right).$$

The average revenue per unit of time

$$E\{c(t)a_1\lambda(c)\} = c_0 \kappa E \left\{ \left( 1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \frac{\kappa}{a_1 \lambda_1} \frac{Q(t)}{T-t} \right) \frac{Q(t)}{T-t} \right\} = c_0 \left( 1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right) \kappa \frac{\bar{Q}}{T-t} - c_0 \frac{\kappa^2}{a_1 \lambda_1} \frac{\overline{Q^2}}{(T-t)^2}.$$

Finally, taking into account (3) and (4) we get

$$\begin{aligned} E\{c(t)a_1\lambda(c)\} &= c_0 \left( 1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right) \kappa \frac{Q_0}{T-t} \left( 1 - \frac{t}{T} \right)^\kappa - \\ &- \frac{c_0 \kappa^2 Q_0}{a_1 \lambda_1 (T-t)^2} \left( \frac{a_2}{a_1} \left( 1 - \frac{t}{T} \right)^\kappa \left( 1 - \left( 1 - \frac{t}{T} \right)^\kappa \right) + \left( 1 - \frac{t}{T} \right)^{2\kappa} Q_0 \right). \end{aligned}$$

Let us consider the expected revenue prior to shortages

$$\bar{S} = a_1 \int_0^{T_1} E\{c(t)\lambda(t)\} dt.$$

The three integrals below are straightforward to obtain:

$$\begin{aligned} \int_0^{T_1} \left( 1 - \frac{t}{T} \right)^\kappa \frac{dt}{T-t} &= \frac{1 - (1-x_0)^\kappa}{\kappa}; \\ \int_0^{T_1} \left( 1 - \frac{t}{T} \right)^\kappa \frac{dt}{(T-t)^2} &= \begin{cases} \frac{1 - (1-x_0)^{\kappa-1}}{T(\kappa-1)} & \text{for } \kappa \neq 1; \\ -\frac{\ln(1-x_0)}{T} & \text{for } \kappa = 1; \end{cases} \\ \int_0^{T_1} \left( 1 - \frac{t}{T} \right)^{2\kappa} \frac{dt}{(T-t)^2} &= \begin{cases} \frac{1 - (1-x_0)^{2\kappa-1}}{T(2\kappa-1)} & \text{for } \kappa \neq \frac{1}{2}; \\ -\frac{\ln(1-x_0)}{T} & \text{for } \kappa = \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

In particular, when  $\kappa = 1$ , the resulting model of retail price control (1) reduces to the form  $a_1\lambda(c(t)) = \frac{Q(t)}{T-t}$ , which is the same as the basic model in [9]. Unlike the approach in [9], where the expected revenue is derived by considering small deviations of the price from its stationary value, in this paper, adjustable coefficient  $\kappa$  is introduced, which enables us to consider the linear dependence of the demand intensity on the price. The expected revenue for  $\kappa = 1$  is as follows

$$\bar{S}_{\kappa=1} = c_0 Q_0 \left( 1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right) \left( 1 - \frac{1}{\beta Q_0} \right) + \frac{c_0 Q_0}{\lambda_1 T} \left( \frac{a_2}{a_1^2} \ln \left( \frac{1}{\beta Q_0} \right) + \left( \frac{a_2}{a_1^2} - \frac{Q_0}{a_1} \right) \left( 1 - \frac{1}{\beta Q_0} \right) \right), \quad (8)$$



while the main part of the expected revenue of basic model in [9]  $\bar{S}_{basic} = c_0 Q_0 \left( 1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \frac{1}{\beta Q_0} \right)$ .

The observed discrepancy can be attributed to two key aspects. First, here we introduce  $T_1$  as the time point at which the shortages occur. Notably, our framework accommodates the possibility of shortages even when  $\kappa = 1$ ; in this case,  $T_1 = T \left( 1 - \frac{1}{\beta Q_0} \right)$ . This contrasts with the approach adopted in [9], where the selling period is  $T$  and a consideration of the shortages is not incorporated. Secondly, in [9] we employ only a linear part of Taylor expansion of product  $c(t)\lambda(c(t))$ .

For  $\kappa > 1$  the expected revenue without taking into account the penalty for the shortages

$$\begin{aligned} \bar{S} = c_0 Q_0 \left( 1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right) & \left( 1 - (1 - x_0)^\kappa \right) - \\ & - \frac{c_0 Q_0 \kappa^2}{\lambda_1 T} \left( \frac{a_2}{a_1^2} \frac{1 - (1 - x_0)^{\kappa-1}}{(\kappa - 1)} - \left( \frac{a_2}{a_1^2} - \frac{Q_0}{a_1} \right) \frac{1 - (1 - x_0)^{2\kappa-1}}{(2\kappa - 1)} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

We adapt an assumption where unmet demand results in lost sales, and the demand intensity during stock out's period remains constant, defined by the intensity at moment  $T_1$

$$\lambda(c(T_1)) = \kappa \frac{\bar{Q}(T_1)}{a_1 (T - T_1)} = \kappa \frac{Q_0}{a_1 T} \left( \frac{\Gamma((\kappa + 1)/\kappa)}{(\beta Q_0)^{1/\kappa}} \right)^{\kappa-1} = \kappa \frac{Q_0}{a_1 T} (1 - x_0)^{\kappa-1};$$

analogously, the retail price during this period  $c(T_1) = c_0 \left( 1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \kappa \frac{Q_0}{a_1 \lambda_1 T} (1 - x_0)^{\kappa-1} \right)$ .

We define the average lost sales as follows

$$\bar{S}_s = -a_1 c(T_1) \lambda(c(T_1)) (T - T_1) = -c_0 Q_0 \kappa (1 - x_0)^\kappa \left( 1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \kappa \frac{Q_0}{a_1 \lambda_1 T} (1 - x_0)^{\kappa-1} \right).$$

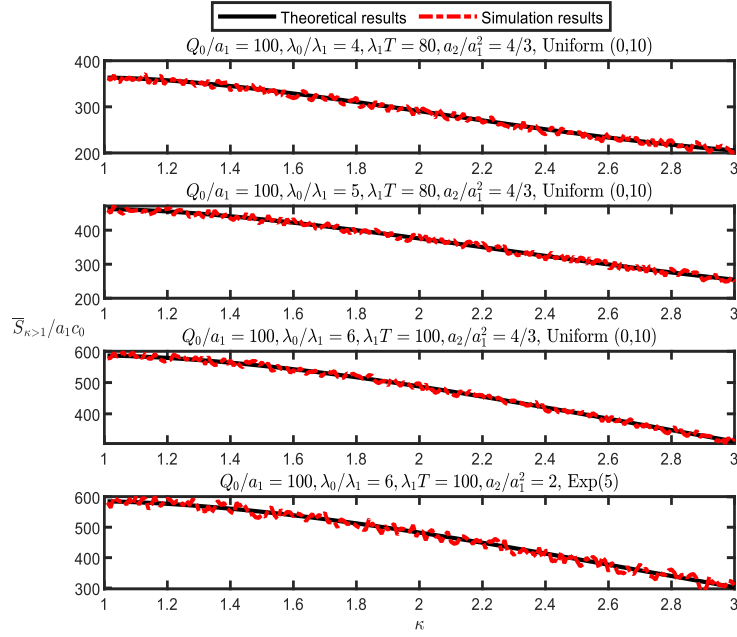
Thus, the expected revenue for  $\kappa > 1$

$$\begin{aligned} \bar{S}_{\kappa>1} = c_0 Q_0 \left( 1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right) & \left( 1 - (1 - x_0)^\kappa \right) - c_0 Q_0 \kappa (1 - x_0)^\kappa \left( 1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \kappa \frac{Q_0}{a_1 \lambda_1 T} (1 - x_0)^{\kappa-1} \right) - \\ & - \frac{c_0 Q_0 \kappa^2}{\lambda_1 T} \left( \frac{a_2}{a_1^2} \frac{1 - (1 - x_0)^{\kappa-1}}{(\kappa - 1)} - \left( \frac{a_2}{a_1^2} - \frac{Q_0}{a_1} \right) \frac{1 - (1 - x_0)^{2\kappa-1}}{(2\kappa - 1)} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

The expected revenue is monotonically decreasing with respect to  $\kappa$ , and weighted revenue  $\bar{S}_{\kappa>1} / a_1 c_0$  depends on four dimensionless system's characteristics  $Q_0 / a_1$ ,  $\lambda_0 / \lambda_1$ ,  $\lambda_1 T$ ,  $a_2 / a_1^2$ , except  $\kappa$ . Ratio  $Q_0 / a_1$  is connected with the number of purchases during the selling period, that is, the intensity of the demand;  $\lambda_0 / \lambda_1$  reflects the relative base intensity of the demand in relation to its price sensitivity;  $\lambda_1 T$  is the aggregate sensitivity of demand to price deviations within the selling period; and ratio  $a_2 / a_1^2$  characterizes the coefficient of variation of the purchases.

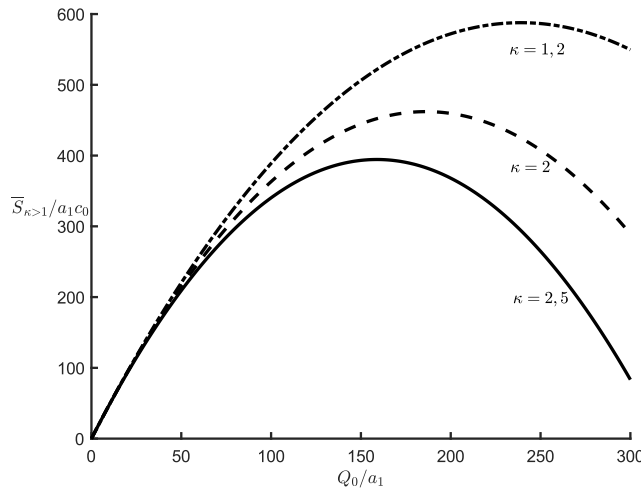
In Figure 3, the results of simulation of weighted revenues dependence on  $\kappa$  are presented for different sets of the system's characteristics for uniform and exponential distributions of purchases,  $T = 10$ . The black curves represent the theoretical results, and the red curves are the simulation results.

Analogously the models in [11], Figure 3 demonstrates that increasing  $\lambda_0 / \lambda_1$  and  $\lambda_1 T$  leads to a significant increase in the revenue, and ratio  $a_2 / a_1^2$  that governs purchases' variation exhibits negligible influence on the revenue, as evidenced by the final two subplots. The theoretical revenues closely align with the simulated ones.


 Fig. 3.  $\bar{S}_{\kappa>1} / a_1 c_0$  dependence on  $\kappa$ ,  $T = 10$ 

The expected revenue curve is negatively correlated with adjustable factor  $\kappa$  and exhibits the opposite behaviour compared with the two near-optimal models in [11], where the expected revenue is positively correlated with parameter  $C$ . The expected revenues' maximums are achieved when the adjustable parameters are equal to 1.

The revenue of the linear model is a concave function with respect to  $Q_0/a_1$ . Figure 4 depicts weighted revenue  $\bar{S}_{\kappa>1} / a_1 c_0$  dependence on  $Q_0/a_1$  for  $\kappa = 1, 2$ , and  $2.5$ ;  $\lambda_0/\lambda_1 = 4$ ,  $\lambda_1 T = 100$ ,  $a_2/a_1^2 = 4/3$ .


 Fig. 4.  $\bar{S}_{\kappa>1} / a_1 c_0$  dependence on  $Q_0 / a_1$ 

As  $\kappa > 1$  decreases, the duration of the shortages period also decreases, thereby mitigating associated penalties and enhancing the corresponding revenue.

### Conclusion

The dynamic price control model proposed in this paper can control shortages by adjusting the factor  $\kappa$ . We derived the stochastic properties of the selling process and obtained the expected revenue that considers the penalties for the shortages treating unsatisfied demand as lost sales.

The expected revenue in (10) depends on four dimensionless system characteristics:  $Q_0 / a_1$ ,  $\lambda_0 / \lambda_1$ ,  $\lambda_1 T$ ,  $a_2 / a_1^2$ . If the initial lot size satisfies natural condition  $\lambda_0 T a_1 = Q_0$ , then the number of the system characteristics are reduced to three, as ratio  $Q_0 / a_1$  can be represented in terms of  $\lambda_0 / \lambda_1$  and  $\lambda_1 T$ . These two values have a crucial influence on the revenue as Figure 3 demonstrates: an increase in  $\lambda_0 / \lambda_1$  and  $\lambda_1 T$  leads to a higher retail price and enhances the expected revenue.

Numerical analysis indicates that as the adjustable factor approaches 1 from above, the penalties incurred from stock out period reduced thereby enhancing revenue. The maximum revenue achieved when the adjustable factor is equal to 1, consistent with the two models in [11]. This result is quite natural, since the basic model ensures equality of instantaneous and average sales rates at any moment of the sales cycle, idealizing the situation. The papers related to the adjustable factors [10, 11, 13] aim to adapt the basic model to real life situations and to estimate the corresponding losses.

Our future research will focus on addressing more detailed numerical comparisons the proposed models under shortages and leftovers scenarios, in order to highlight their distinctive features and support their accurate application in practice.

## References

1. Scholz, M. & Kulko, R.D. (2022) Dynamic pricing of perishable food as a sustainable business model. *British Food Journal*. 124(5). pp. 1609–1621. DOI: 10.1108/BFJ-03-2021-0294
2. Chen, J., Tian, Z. & Hang, W. (2020) Optimal ordering and pricing policies in managing perishable products with quality deterioration. *International Journal of Production Research*. 59(3). pp. 4472–4494. DOI: 10.1080/00207543.2020.1766715
3. Li, R., Xiao, L. & Yao, D. (2023) Dynamic pricing and production control in a two-item make-to-stock system with flexible dual sourcing and lost sales. *Production and Operations Management*. 32(7). pp. 3119–3137. DOI: 10.1111/poms.14026
4. Zarouri, F., Khamseh, A.A. & Pasandideh, S.H.R. (2022) Dynamic pricing in a two-echelon stochastic supply chain for perishable products. *RAIRO-Operations Research*. 56(4). pp. 2425–2442. DOI: 10.1111/poms.14026
5. Modak, I., Bardhan, S. & Giri, B. C. (2024) Dynamic pricing and replenishment policy under price, time, and service level-dependent demand and preservation investment. *Journal of Management Analytics*. 11(2). pp. 276–301. DOI: 10.1080/23270012.2024.2306616
6. Feng, Q., Luo, S. & Shanthikumar, J.G. (2019) Integrating dynamic pricing with inventory decisions under lost sales. *Management Science*. 66(5). pp. 2232–2247. DOI: 10.1287/mnsc.2019.3299
7. Chen, K., Xiao, T., Wang, S. & Lei, D. (2020) Inventory strategies for perishable products with two-period shelf-life and lost sales. *International Journal of Production Research*. 59(3). pp. 1–20. DOI: 10.1080/00207543.2020.1777480
8. Zhou, H., Chen, K. & Wang, S. (2023) Two-period pricing and inventory decisions of perishable products with partial lost sales. *European Journal of Operational Research*. 310(9). pp. 611–626. DOI: 10.1016/j.ejor.2023.03.010
9. Kitaeva, A.V., Stepanova, N.V. & Zhukovskaya, A.O. (2019) Zero Ending Inventory Dynamic Pricing Model under Stochastic Demand, Fixed Lifetime Product, and Fixed Order Quantity. *IFAC-PapersOnLine*. 52(13). pp. 2482–2487. DOI: 10.1016/j.ifacol.2019.11.579
10. Kitaeva, A.V., Stepanova, N.V. & Zhukovskaya, A.O. (2020) Profit optimization for zero ending inventories dynamic pricing model under stochastic demand and fixed lifetime product. *IFAC-PapersOnLine*. 53(2). pp. 10505–10510. DOI: 10.1016/j.ifacol.2020.12.2796
11. Kitaeva, A.V. & Cao, Y. (2025) Shortages of perishables control for a stochastic inventory system in retail through dynamic pricing. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 71. pp. 82–92. DOI: 10.17223/19988605/71/8
12. Li, S., Zhang, J. & Tang, W. (2015) Joint dynamic pricing and inventory control policy for a stochastic inventory system with perishable products. *International Journal of Production Research*. 53(10). pp. 2937–2950. DOI: 10.1080/00207543.2014.961206
13. Kitaeva, A.V., Stepanova, N.V. & Zhukovskiy, O.I. (2022) Profit Optimization with a Power-Law Adjustable Coefficient for Zero Ending Inventories Dynamic Pricing Model, Stochastic Demand, and Fixed Lifetime Product. *IFAC-PapersOnLine*. 55(10). pp. 1793–1797. DOI: 10.1016/j.ifacol.2022.09.658

## Information about the authors:

**Kitaeva Anna V.** (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kit1157@yandex.ru

**Yu Cao** (Post-Graduate Student, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ch.cy@stud.tsu.ru

*Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.*

**Информация об авторах:**

**Китаева Анна Владимировна** – доктор физико-математических наук, профессор Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: kit1157@yandex.ru

**Юй Цао** – аспирант Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: ch.cy@stud.tsu.ru

**Вклад авторов:** все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

*Received 12.06.2025; accepted for publication 02.09.2025*

*Поступила в редакцию 12.06.2025; принята к публикации 02.09.2025*

Научная статья

УДК 519.246.5

doi: 10.17223/19988605/72/10

**Устранение мешающего параметра при обработке наблюдений за посещениями животными определенных точек или районов при анализе биоразнообразия****Гурами Шалвович Цициашвили<sup>1</sup>, Владимир Николаевич Бочарников<sup>2</sup>**<sup>1</sup> *Институт прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук, Владивосток, Россия*<sup>2</sup> *Тихоокеанский институт географии Дальневосточного отделения Российской академии наук, Владивосток, Россия*<sup>1</sup> *guram@iam.dvo.ru*<sup>2</sup> *vbocharnikov@mail.ru*

**Аннотация.** Строятся оценки биоразнообразия в экосистемах по наблюдениям за перемещениями различных видов животных с помощью фотоловушек, по следам животных и с помощью БПЛА. В основу оценки биоразнообразия положена мера Шеннона (энтропия). При обработке наблюдений за моментами подходов животных к фотоловушкам, пересечениями некоторых маршрутов и образованием следов возникает необходимость учета ошибок наблюдения, вызванных неточностью работы приборов или учета, метеорологическими и другими факторами. Это приводит к необходимости использования модели пуассоновского потока с «закрашиванием» некоторых точек, построения неравенства Чебышева для различных функций от наблюдения и устранения из наблюдений мешающих параметров, вызванных неточностями измерения. С помощью сочетания этих методов удастся оценить вероятность присутствия в экосистеме отдельных видов животных и функции энтропии по этим оценкам. Доказывается сходимость по вероятности построенных оценок при увеличении времени наблюдения (устремлении к бесконечности).

**Ключевые слова:** мешающий параметр; пуассоновский поток; закрашивание точек потока; неравенство Чебышева.

**Благодарности:** Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН № 075-00459-25-00.

**Для цитирования:** Цициашвили Г.Ш., Бочарников В.Н. Устранение мешающего параметра при обработке наблюдений за посещениями животными определенных точек или районов при анализе биоразнообразия // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2025. № 72. С. 101–106. doi: 10.17223/19988605/72/10

Original article

doi: 10.17223/19988605/72/10

**Elimination of an interfering parameter when processing observations of animal visits to certain points or areas in the analysis of biodiversity****Gurami Sh. Tsitsiashvili<sup>1</sup>, Vladimir N. Bocharnikov<sup>2</sup>**<sup>1</sup> *Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Vladivostok, Russian Federation*<sup>2</sup> *Pacific Institute of Geography, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Vladivostok, Russian Federation*<sup>1</sup> *guram@iam.dvo.ru*<sup>2</sup> *vbocharnikov@mail.ru*

**Abstract.** The paper focuses on constructing estimates of biodiversity in ecosystems based on observations of the movements of various species of animals using camera traps, animal tracks and using UAVs. The assessment of biodiversity is basing on the Shannon measure (entropy). When processing observations of the moments when animals approach camera traps, the intersections of some routes and the formation of tracks, it becomes necessary to take into account observation errors caused by inaccuracies in the operation of instruments or metering, meteorological and other factors. This leads to the need to use the Poisson flow model with "coloring over" some points, to construct Chebyshev's inequality for various functions from observations, and eliminate interfering parameters from observations caused

by measurement inaccuracies. Using a combination of these methods, it is possible to estimate the probability of the presence of individual animal species in the ecosystem and the entropy function according to these estimates. The convergence in probability of the constructed estimates is proving with increasing observation time (tending towards infinity).

**Keywords:** interfering parameter; Poisson flow; coloring of flow points; Chebyshev inequality.

**Acknowledgments:** The study was supported within the framework of the state assignment of the IPM Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences No. 075-00459-25-00.

**For citation:** Tsitsiashvili, G.Sh., Bocharnikov, V.N. (2025) Elimination of an interfering parameter when processing observations of animal visits to certain points or areas in the analysis of biodiversity. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 72. pp. 101–106. doi: 10.17223/19988605/72/10

## Введение

В научных исследованиях последнего времени большое внимание уделяется разработке новых методов обработки данных наблюдений за перемещениями животных, их фиксации в определенных местах [1]. Такие наблюдения за животными и следами их жизнедеятельности проводятся непосредственно людьми, например учеты следов животных по снегу, или дистанционно, фиксацией зверей с помощью фотоловушек (фотокапканов) [2, 3], в том числе и с использованием БПЛА [4, 5]. Выполненные математические расчеты позволяют рассчитывать вероятность ограничений и избирательность фиксации следов жизнедеятельности или самих животных при количественных оценках относительной численности зверей в пределах определенной территории. Представляется необходимым ввести алгоритм расчетов вероятности обнаружения следов и самих животных в рекомендации для пользования сотрудниками особо охраняемых природных территорий, в охотничьих хозяйствах и при проведении полевых исследований зоологами.

Принципиальной особенностью всех видов учетов диких животных является невозможность полной фиксации и точного определения всех существующих следов животных. Причины этого разнообразны, они зависят и могут быть вызваны погодными условиями, особенностью природных ландшафтов, не имеющих снежного покрова, ограниченностью четкой видимости при фиксации с воздуха, а также физической невозможностью людей организовать учеты всех следов жизнедеятельности и тем более самих животных на обширных российских пространствах в природе. К другой группе ошибок наблюдений можно отнести технические ошибки, вызванные несовершенством работы дистанционных средств. Так, ограниченный ресурс батарей, плохие погодные условия, ограниченный обзор фотоловушек [6] не позволяют зафиксировать все подходы животных к фотоловушкам. Общим следствием вышеперечисленного является то, что для математических расчетов мы должны принять условие, что наблюдения лишь с какой-то вероятностью могут фиксировать присутствие животных в определенных точках, там, где установлены приборы. Более точная оценка такой вероятности обычно затруднительна, следовательно, при расчетах данное обстоятельство следует рассматривать как мешающий параметр, который при обработке наблюдений следует каким-то образом устранить.

Такая постановка вопроса требует определения характеристик, которые после устранения мешающего параметра можно оценить. Оказывается, имеется целый перечень подобных характеристик, к числу которых в первую очередь можно отнести соотношение между наблюдениями в различные моменты времени, в различных точках наблюдения или участках территории. Например, для определения мешающих параметров удобно воспользоваться моделью пуассоновского потока точек, которые могут наблюдаться или не наблюдаться из-за ошибок наблюдения с некоторой неизвестной вероятностью. Наряду с этими характеристиками, определяющими пропорцию между разными наблюдениями, возникают характеристики типа корреляций между указанными наблюдениями и событиями в экологических системах. Наконец, очень важную роль играют характеристики разнообразия в экосистеме, которые также основываются на описанных неточных наблюдениях и требуют устранения мешающих параметров, характеризующих неточность наблюдений. Для работы с такими наблюдениями есте-

ственно воспользоваться теоремой о раскрашивании точек пуассоновского потока [7]. Наряду с этим имеется большая группа статей, посвященных устранению мешающих параметров в различных наблюдениях [8–12].

Все такие исследования в экологических задачах тесно связаны с одной очень важной биологической задачей оценки биоразнообразия в экосистемах. Этой задаче посвящено большое количество работ как статистических [13–16], так и биологических и экологических [17–19]. Здесь основным показателем биоразнообразия выступает мера Шеннона [13] (энтропия). В данной работе приводится серия прикладных экологических задач, при решении которых можно устранить мешающий параметр, сохранив основные характеристики экосистемы. Делается заключение о том, что необходимо таким образом проводить математическую обработку наблюдений, чтобы устранить этот мешающий параметр. Предлагается в качестве математического инструмента работы с неточными наблюдениями, характеризующими вероятность обнаружения следа или присутствия животных в определенных точках или в определенных областях территории, использовать модель пуассоновского потока точек на временной оси или в областях некоторой территории.

### Основные результаты

Скажем, что случайная функция  $A(T)$  при  $T \rightarrow \infty$  сходится по вероятности к числу  $a$ , если для  $\forall \varepsilon > 0 \exists T(\varepsilon): \forall T > T(\varepsilon)$  выполняется неравенство  $P(|A(T) - a| > \varepsilon) < \varepsilon$ . Пусть  $n(T)$  – количество точек пуассоновского потока интенсивности  $\lambda, 0 < \lambda < \infty$ , на отрезке  $[0, T]$ , тогда имеет место сходимость по вероятности:

$$n(T)T \xrightarrow{P} \lambda, T \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Это утверждение следует из очевидного неравенства

$$P(|n(T)T - \lambda| > \varepsilon) \leq Dn(T)T^2\varepsilon^2 = \lambda T\varepsilon^2 \rightarrow 0, T \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Перечислим свойства сходимости по вероятности, которыми будем пользоваться.

**A.** Если случайная функция  $A(T)$  при  $T \rightarrow \infty$  сходится по вероятности к числу  $a$ , то  $kA(T)$  при вещественном  $k \neq 0$  сходится по вероятности к  $ka$ ,

**B.** Если случайные функции  $A_i(T), i = 1, \dots, m$ , при  $T \rightarrow \infty$  сходятся по вероятности к числам  $a_i$ , то сумма  $\sum_{i=1}^m A_i(T)$  сходится по вероятности к сумме  $\sum_{i=1}^m a_i$ .

**C.** Если случайные функции  $A(T), B(T)$  при  $T \rightarrow \infty$  сходятся по вероятности к числам  $a, b$ , то произведение  $A(T)B(T)$  сходится по вероятности к  $ab$ . Если дополнительно потребовать  $b \neq 0$ , то  $A(T)/B(T)$  сходится по вероятности к  $a/b$ .

**D.** Если случайная функция  $A(T)$  при  $T \rightarrow \infty$  сходится по вероятности к числу  $a, 0 < a < 1$ , то  $\ln A(T)$  сходится по вероятности к  $\ln a$ .

Доказательства этих свойств основаны на использовании неравенства Чебышева подобно неравенству (2). Например, для доказательств свойств A, B, C, D при  $k \neq 0, 0 < \varepsilon < \min(a, b) \leq \max(a, b) < 1$  строятся неравенства

$$P(|kA(T) - ka| > \varepsilon) = P\left(|A(T) - a| > \frac{\varepsilon}{|k|}\right), \quad (3)$$

$$P(a - \varepsilon \leq A(T) \leq a + \varepsilon, b - \varepsilon \leq B(T) \leq b + \varepsilon) \leq P(a + b - 2\varepsilon \leq A(T) + B(T) \leq a + b + 2\varepsilon), \quad (4)$$

$$P(a - \varepsilon \leq A(T) \leq a + \varepsilon, b - \varepsilon \leq B(T) \leq b + \varepsilon) \leq P((a - \varepsilon)(b - \varepsilon) \leq A(T)B(T) \leq (a + \varepsilon)(b + \varepsilon)), \quad (5)$$

$$P(a - \varepsilon \leq A(T) \leq a + \varepsilon, b - \varepsilon \leq B(T) \leq b + \varepsilon) \leq P\left(\frac{a - \varepsilon}{b + \varepsilon} \leq \frac{A(T)}{B(T)} \leq \frac{a + \varepsilon}{b - \varepsilon}\right), \quad (6)$$

$$P(a - \varepsilon \leq A(T) \leq a + \varepsilon) = P(\ln(a - \varepsilon) \leq \ln A(T) \leq \ln(a + \varepsilon)) = \quad (7)$$

$$= P\left(\ln a + \ln\left(1 - \frac{\varepsilon}{a}\right) \leq \ln A(T) \leq \ln a + \ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{a}\right)\right).$$

Эти неравенства позволяют определить в каждом случае величину  $T(\varepsilon)$ , входящую в понятие сходимости по вероятности. Причем входящие в них слагаемые, или сомножители, или числители и знаменатели не предполагаются независимыми.

Пусть  $n_j(t)$  – количество точек пуассоновского потока интенсивности  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, J$ . Полагаем, что все эти  $J$  потоков независимы. Каждая точка потока  $j$  с вероятностью  $c_j$  фиксируется прибором  $j$ . Причем каждая точка потока  $j$  независимо от фиксации прибором относится к типу  $i = 1, \dots, I$  с вероятностью  $p_i$ ,  $0 < p_i < 1$ ,  $\sum_{i=1}^I p_i = 1$ . Здесь прибор типа  $j$  может быть фотоловушкой, или определять след животного на снегу, или фиксироваться каким-либо другим прибором. А типы точек потоков соответствуют видам животных, подходящих к приборам.

Пусть теперь  $n_{ji}$  – количество точек потока  $j$  фиксируемого прибором  $j$  и принадлежащего к типу  $i$ . Используя свойства  $A, B$ , получаем сходимость по вероятности

$$\frac{n_{ji}(T)}{T} \rightarrow c_j \Lambda_j p_i, \quad T \rightarrow \infty, \quad j = 1, \dots, J, \quad i = 1, \dots, I$$

и, значит, сходимости по вероятности

$$\sum_{j=1}^J \frac{n_{ji}(T)}{T} \rightarrow p_i \sum_{j=1}^J c_j \Lambda_j, \quad T \rightarrow \infty, \quad i = 1, \dots, I.$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^J \frac{n_{ji}(T)}{T} \rightarrow \sum_{i=1}^m p_i \sum_{j=1}^J c_j \Lambda_j = \sum_{j=1}^J c_j \Lambda_j, \quad T \rightarrow \infty.$$

Отсюда с помощью свойства  $C$  получаем сходимость по вероятности

$$\bar{p}_i = \frac{\sum_{j=1}^J n_{ji}(T)}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^J n_{ji}(T)} \rightarrow p_i, \quad T \rightarrow \infty, \quad i = 1, \dots, I. \quad (8)$$

Из этого, используя свойства  $A, B, C, D$ , получаем, что при  $T \rightarrow \infty$  оценка энтропии  $\bar{S}$  сходится по вероятности к энтропии  $S$ , т.е.

$$\bar{S} = -\sum_{i=1}^I \bar{p}_i \ln \bar{p}_i \xrightarrow{P} S = -\sum_{i=1}^I p_i \ln p_i.$$

### Заключение

Полученные в работе результаты основаны на оценке вероятностей  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , принадлежности наблюдений различным видам животных. Это является основой для построения оценки энтропии, характеризующей биоразнообразия экосистемы. Но сами эти вероятности также являются важными характеристиками экосистемы, и их можно использовать для различных биологических прогнозов. Все построенные оценки основаны на понятии сходимости по вероятности. Скорость этой сходимости можно оценивать с помощью неравенства Чебышева, точность которого определяется приведенными в работе неравенствами (3)–(6).

### Список источников

1. Музыка С.М., Сутугина И.М. Возможности изучения среды обитания животных на основе цифровой обработки данных дистанционного зондирования Земли в программном комплексе «Photomod» // Аграрное образование и наука. 2021. № 3. С. 5–16.



2. Петров Т.А., Максимова Д.А., Марченкова Т.В., Дарман Ю.А. Оценка состояния популяционных группировок копытных животных заповедника «Кедровая падь» на основании данных фотомониторинга // *Экосистемы*. 2022. № 30. С. 138–150.
3. Огурцов С.С., Волков В.П., Желтухин А.С. Обзор современных способов хранения, обработки и анализа данных с фотоловушек в зоологических исследованиях // *Nature Conservation Research. Заповедная наука*. 2017. № 2(1). С. 73–98.
4. Кашницкий А.В. Технология создания инструментов обработки и анализа данных больших распределенных спутниковых архивов // *Оптика атмосферы и океана*. 2016. № 29 (9). С. 772–777. doi: 10.15372/AOO20160908
5. Греков О.А. Организация и проведение авиаучета охотничьих животных с использованием беспилотных авиационных систем самолетного и вертолетного типов // *Информация и космос*. 2017. № 4. С. 111–119.
6. Ефремов В.А., Зуев В.А., Леус А.В., Мангазеев Д.И., Радыш А.С., Холодник И.В. Формирование регистраций животных на основе постобработки данных фотоловушек // *Экосистемы*. 2023. № 34. С. 51–58.
7. Кингман Дж. Пуассоновские процессы. М. : МЦНМО, 2007. 136 с.
8. Кокс Д., Хинкли Д. Теоретическая статистика. М. : Мир, 1978. 560 с.
9. Young G.A., Smith R.L. *Essentials of Statistical Inference*. Cambridge : Cambridge University Press, 2005. 236 p. (Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics; no. 16).
10. Bernardo J.M., Smith A.F.M. *Bayesian Theory*. London : John Wiley and Sons, 2000. xiv, 586 p. (Wiley series in probability and mathematical statistics).
11. Wackerly D., Mendenhall W., Scheaffer R.L. *Mathematical Statistics with Applications*. Pacific Grove, CA : Duxbury, 2014. xvi, 853 p.
12. Холево А.С. Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории. М. : МЦНМО, 2020. 296 с.
13. Shannon C.E. A mathematical theory of communication // *Bell System Technical Journal*. 1948. V. 27. P. 379–423.
14. Renyi A. On measures of entropy and information // *Proc. 4th Symp. Math. Statist. Probabil.* 1961. P. 547–561.
15. Magurran A.E. *Measuring Biological Diversity*. Oxford : Blackwell Publ., 2004. 260 p.
16. Бродский А.К. Биоразнообразие: учебник. М. : Академия, 2012. 207 с.
17. Яшина Т.В. Индикаторы оценки биоразнообразия на особо охраняемых природных территориях Алтае-Саянского экорегиона : руководство по использованию. Красноярск, 2011. 56 с.
18. Шитиков В.К., Розенберг Г.С. Рандомизация и бутстреп: статистический анализ в биологии и экологии с использованием. Тольятти : Кассандра, 2013. 314 с.
19. Денисенко С.Г. Информационная мера Шеннона и ее применение в оценках биоразнообразия (на примере морского зообентоса). Морские беспозвоночные Арктики, Антарктики и Субантарктики // *Исследования фауны морей*. 2006. Т. 56 (64). С. 35–46.

## References

1. Muzyka, S.M. & Sutugina, I.M. (2021) The possibilities of studying the animal habitat based on digital processing of Earth remote sensing data in a software package “Photomod.” *Agrarnoe obrazovanie i nauka*. 3. pp. 5–16.
2. Petrov, T.A., Maksimova, D.A., Marchenkova, T.V. & Darman Yu.A. (2022) Assessment of the state of population groups of ungulates of the Kedrovaya Pad reserve based on photomonitoring data. *Ekosistemy*. 30. pp. 138–150.
3. Ogurtsov, S.S., Volkov, V.P. & Zheltukhin, A.S. (2017) Review of modern methods of storing, processing and analyzing data from camera traps in zoological research. *Nature Conservation Research. Zapovednaya nauka*. 2(1). pp. 73–98.
4. Kashnitskiy, A.V. (2016) Tekhnologiya sozdaniya instrumentov obrabotki i analiza dannykh bol'shikh raspredelennykh sputnikovyykh arkhivov [Technology for creating tools for processing and analyzing data from large distributed satellite archives]. *Optika atmosfery i okeana*. 29(9). pp. 772–777. DOI: 10.15372/AOO20160908
5. Grekov, O.A. (2017) Organization and conduct of aerial surveys of hunting animals using unmanned aircraft systems of aircraft and helicopter types. *Informatsiya i kosmos*. 4. pp. 111–119.
6. Efremov, V.A., Zuev, V.A., Leus, A.V., Mangazeev, D.I., Radysh, A.S. & Kholodnyak, I.V. (2023) Formirovanieregistratsiy zhiivotnykh na osnove postobrabotki dannykh fotolovushek [Formation of animal registrations based on post-processing of camera trap data]. *Ekosistemy*. 34. pp. 51–58.
7. Kingman, J. (2007) *Puassonovskie protsessy* [Poisson processes]. Translated from English. Moscow: MTSNMO.
8. Cox, D. & Hinkley, D. (1978) *Teoreticheskaya statistika* [Theoretical Statistics]. Translated from English. Moscow: Mir.
9. Young, G.A. & Smith, R.L. (2005) *Essentials of Statistical Inference*. Cambridge: Cambridge University Press.
10. Bernardo, J.M. & Smith, A.F.M. (2000) *Bayesian Theory*. London: John Wiley and Sons.
11. Wackerly, D., Mendenhall, W. & Scheaffer, R.L. (2014) *Mathematical Statistics with Applications*. Pacific Grove, CA: Duxbury.
12. Kholevo, A.S. (2020) *Veroyatnostnye i statisticheskie aspekty kvantovoy teorii* [Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory]. Moscow: MTsNMO.
13. Shannon, C.E. (1948) A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal*. 27. pp. 379–423.
14. Renyi, A. (1961) On measures of entropy and information. *Proc. 4th Symp. Math. Statist. Probabil.* pp. 547–561.
15. Magurran, A.E. (2004) *Measuring Biological Diversity*. 2nd ed. Oxford: Blackwell.
16. Brodsky, A.K. (2012) *Bioraznoobrazie* [Biodiversity]. Moscow: Akademiya.
17. Yashina, T.V. (2011) *Indikatory otsenki bioraznoobraziya na osobo okhranyaemykh prirodnnykh territoriyakh Altae-Sayanskogo ekoregiona. Rukovodstvo po ispol'zovaniyu* [Indicators of biodiversity assessment in specially protected natural territories of the Altai-Sayan ecoregion. User's guide]. Krasnoyarsk: [s.n.].

18. Shitikov, V.K. & Rosenberg, G.S. (2013) *Randomizatsiya i butstrep: statisticheskiy analiz v biologii i ekologii s ispol'zovaniem* [Randomization and bootstrap: Statistical analysis in biology and ecology using]. Tolyatti: Kassandra.
19. Denisenko, S.G. (2006) The Shannon information measure and its application in biodiversity assessments (using the example of marine zoobenthos). Marine invertebrates of the Arctic, Antarctic and Subantarctic. *Issledovaniya fauny morey*. 56(64). pp. 35–46.

**Информация об авторах:**

**Цициашвили Гурами Шалвович** – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук (Владивосток, Россия). E-mail: guram@iam.dvo.ru  
**Бочарников Владимир Николаевич** – доктор биологических наук, ведущий научный сотрудник Тихоокеанского института географии Дальневосточного отделения Российской академии наук (Владивосток, Россия). E-mail: vbocharnikov@mail.ru

**Вклад авторов:** Цициашвили Г.Ш. построил вероятностные модели и оценки их параметров. Бочарников В.Н. дал детальное описание работы фотоловушек при наблюдениях за животными, неразличимыми по снимкам, и сформулировал содержательную задачу обработки этих данных.

**Information about the authors:**

**Tsitsiashvili Gurami Sh.** (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Main Researcher of Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Vladivostok, Russian Federation) E-mail: guram@iam.dvo.ru  
**Bocharnikov Vladimir N.** (Doctor of Biological Sciences, Leading Researcher of Institute of Pacific Ocean Geography Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Vladivostok, Russian Federation). E-mail: vbocharnikov@mail.ru

**Contribution of the authors:** Tsitsiashvili G.Sh. built probabilistic models and estimates of their parameters. Bocharnikov V.N. gave a detailed description of the work of camera traps when observing animals indistinguishable from images and formulated a meaningful task of processing these data.

Поступила в редакцию 12.03.2025; принята к публикации 02.09.2025

Received 12.03.2025; accepted for publication 02.09.2025

Original article

UDC 004.032.26, 004.048

doi: 10.17223/19988605/72/11

## Evaluating the generalization ability of deep learning models for sound source localization

Ghiath M. Shahoud<sup>1</sup>, Evgeny D. Agafonov<sup>2</sup><sup>1, 2</sup> Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation<sup>2</sup> Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russian Federation<sup>1</sup> ghiathlovealaa@gmail.com<sup>2</sup> evgeny.agafonov@mail.ru

**Abstract.** In this paper, the generalization ability of deep learning models used to solve the sound source localization problem with a spatial resolution of  $10^\circ$  is evaluated when the configuration settings are changed. The generalization ability of the models was evaluated in a closed reverberant environment using an orthogonal microphone array. Two models were considered: SI-GCC-CNN, which is based on combining the features of sound intensity and generalized cross-correlation - phase transform as input data for convolutional neural networks, and SI-CNN, which is based on feeding the features of the sound intensity into the convolutional neural network. Simulation and modeling results show that the SI-GCC-CNN model is effective in its generalization ability and outperforms the SI-CNN model, achieving an improvement in localization accuracy by 22,1% when changing the size of the room, by 15,6% when changing the location of the microphone array and by 32% when changing the distance between the source and the center of the microphone array.

**Keywords:** generalization ability; deep learning models, sound source localization; reverberant environment; orthogonal microphone array; sound intensity; generalized cross-correlation – phase transform; convolutional neural networks.

**For citation:** Shahoud, G.M., Agafonov, E.D. (2025) Evaluating the generalization ability of deep learning models for sound source localization. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 72. pp. 107–113. doi: 10.17223/19988605/72/11

Научная статья

doi: 10.17223/19988605/72/11

## Оценка обобщающей способности моделей глубокого обучения для локализации источника звука

Джих Михаил Шаход<sup>1</sup>, Евгений Дмитриевич Агафонов<sup>2</sup><sup>1, 2</sup> Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия<sup>2</sup> Сибирский государственный университет науки и технологий им. акад. М.Ф. Решетнева, Красноярск, Россия<sup>1</sup> ghiathlovealaa@gmail.com<sup>2</sup> evgeny.agafonov@mail.ru

**Аннотация.** Оценивается обобщающая способность моделей глубокого обучения, используемых для решения задачи локализации источника звука с пространственным разрешением  $10^\circ$ , при изменении настроек конфигурации. Обобщающая способность моделей оценивалась в замкнутой реверберирующей среде с использованием ортогональной микрофонной решетки. Были рассмотрены две модели: SI-GCC-CNN, которая основана на объединении признаков интенсивности звука и обобщенной кросс-корреляции – фазового преобразования в качестве входных данных для сверточных нейронных сетей, и SI-CNN, которая основана на подаче признаков интенсивности звука в сверточную нейронную сеть. Результаты моделирования и имитации показывают, что модель SI-GCC-CNN эффективна по своей обобщающей способности и превосходит модель

SI-CNN, достигая улучшения точности локализации на 22,1% при изменении размера помещения, на 15,6% при изменении местоположения микрофонной решетки и на 32% при изменении расстояния между источником и центром микрофонной решетки.

**Ключевые слова:** обобщающая способность; модели глубокого обучения; локализация источника звука; ревербирующая среда; ортогональная микрофонная решетка; интенсивность звука; обобщенная кросс-корреляция – фазовое преобразование; сверточные нейронные сети.

**Для цитирования:** Шаход Д.М., Агафонов Е.Д. Оценка обобщающей способности моделей глубокого обучения для локализации источника звука // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2025. № 72. С. 107–113. doi: 10.17223/19988605/72/11

## Introduction

The problem of sound source localization (SSL) can be defined as estimating the direction of acoustic sources or objects that reflect acoustic signals, which can be applied in various complex environments. SSL is an active research topic in the field of acoustic signal processing using microphone arrays, it has many practical applications in the fields of engineering and technology, such as automatic camera tracking for teleconferencing, human-robot interaction, hearing aids, and remote speech recognition. SSL is also of paramount importance in geophysics and non-destructive testing of materials.

To acquire acoustic signals with further analysis of their characteristics, microphone arrays are used, which consist of a set of microphones located in space in a certain way to obtain spatial information about the acoustic source. The spatio-temporal information obtained from the microphone array can be used to estimate various source parameters (direction, distance).

Initially, the problem of SSL has been solved using traditional signal processing methods, such as time difference of arrival (TDOA) [1], delay-and-sum beamformer (DAS) [2], multiple signal classification (MUSIC) [3] and generalized cross-correlation - phase transform (GCC-PHAT) [4]. However, these methods have drawbacks due to the complexity of the acoustic characteristics of the environment, especially in the presence of noise and echoes [5]. In recent years, with the advent and development of deep learning (DL) methods and deep neural networks (DNNs) and their widespread use in the field of acoustic applications, a new vector for the development of SSL has been outlined.

The main advantage of SSL based on DL methods is the inclusion of information on acoustic characteristics in the learning process, while traditional methods are based only on spatial information [4]. As a result, data-driven methods such as DL could outperform traditional methods by dealing with large amounts of data, real or simulated. On the other hand, they are less able to generalize than traditional methods [5].

Designing DNNs for a specific application often requires exploring (and possibly combining) different architectures and tuning their hyperparameters. This has been the case with SSL in the last decade, and the evolution of DL-based SSL methods has followed the general evolution of DNNs towards more complex architectures or new efficient models. In other words, the DNN architectures used in SSL were often inherited from other applications (related or more distant fields) simply because they have been shown to work well with acoustic signals [6]. The literature relied on the same methodology, where different models were often combined (in parallel and/or sequentially), such as convolutional neural networks (CNN) [7], recurrent neural network (RNN) [8], convolutional recurrent neural network (CRNN) [9] and residual neural networks (ResNet) [10].

The effectiveness of DL-based SSL model is determined by its ability to generalize various aspects of the configuration (for example, the distance between the source and the microphone array, noise levels, reverberation time, etc.), i.e. the ability to correctly classify new test data with features that differ from those obtained during training and for different configuration settings. The ability of these models to generalize in noisy and reverberant environments using small-sized microphone arrays remains a challenging task.

The use of a sound intensity (SI) vector as input features for the DL-based SSL model was first proposed in [11], where superior performance has been demonstrated compared to traditional methods. SI as input features for CNN has proven its ability to work under noise and reverberation conditions when using small-sized microphone arrays [12], however, this deep model has not been tested for its ability to generalize when

changing some modeling conditions, such as room size and source distance. Although GCC-PHAT features do not give good localization results when working with small-sized microphone arrays, they have proven to be capable of generalization [13], because they depend on spatial information, while SI features depend on physical characteristics of sound (pressure and particle velocity).

In [14], a deep model with a spatial resolution of  $10^\circ$  was proposed to solving the SSL problem in a closed reverberant environment by integrating SI and GCC-PHAT features as input data for CNNs to utilize the advantages of these features.

In this paper, the ability of the proposed model in [14] to generalize when the configuration settings are changed will be tested.

## 1. Evaluation metric

In order to evaluate the effectiveness of the models, the localization accuracy is used as a performance measure, which is defined as:

$$PA(\%) = \frac{N_p}{N_s} \times 100, \quad (1)$$

where  $N_s$  represents the total number of source directions being evaluated and  $N_p$  is the number of source directions correctly recognized. The direction of the source is considered to be correctly recognized if the predicted direction is within the spatial resolution of the model, that is, the deviation of the predicted direction from the actual direction is within  $\pm\theta_0$  for spatial resolution  $\theta_0$  [13].

## 2. Evaluating the Model's Ability to Generalize

The generalization ability of both the proposed model in [14] and the SI-CNN model [12] is evaluated. In the model SI-CNN, an improved feature extraction scheme based on SI estimation was proposed by decoupling the correlation between sound pressure and particle velocity components in the whitening construction, and feeding these features into CNN, which in turn estimates the direction of the source.

The SI-CNN model was trained and validated under the same simulation conditions and on the same training and validation dataset [14]. The training sample size was 6000 samples for each of the two models, the validation dataset size was 1000 samples. The ability of trained models to generalize when changing the configuration settings (modeling conditions) that were assumed when training the models will be considered.

Three settings will be changed (room size, microphone array location and distance between the source and the center of the microphone array) and the trained models will be re-evaluated on a new dataset that is generated taking into account the change in modeling conditions.

### 2.1. Changing the room size (y-dimension)

20 different room sizes are considered while maintaining the same shape, where the y-dimension of the previously defined room varies from 4 m to 20 m and in 19 equal steps. The other two dimensions x and z change while maintaining constant ratios with the y-dimension. Here attention is drawn to the need to vary RT60 corresponding to each size, according to the Sabine formula [15], as RT60 increases with the increase in room size, and therefore small-sized rooms reverberate less than large-sized rooms. The room size ranges from (6,67, 4, 1,78) m to (33,33, 20, 8,89) m. To create a test dataset, 200 sentences are randomly taken from the TIMIT test database and 200 random directions are generated. For each room size, 10 test samples are generated, and a total of 200 test samples are generated. The performance of the pertained models is evaluated on test samples corresponding to each room size.

A graph of the localization accuracy of both the proposed model and the SI-CNN model when changing the size of the room is presented in Fig. 1.

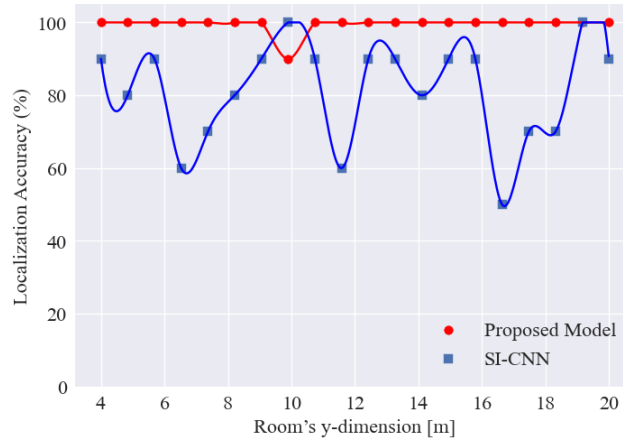


Fig. 1. Evaluating the ability of both the proposed model and SI-CNN model to generalize when changing the room size

From the simulation results presented in Fig. 1, it is clear that the proposed model proved to be effective in generalization when changing the size of the room and a localization accuracy with an average value of 99,5% was achieved, while the SI-CNN model achieved an average accuracy of 81,5%.

## 2.2. Changing the microphone array location (Center distance)

20 different locations of the center of the microphone array in the room are considered, with the location of the center varying from (7,5, 4,5, 1,5) m (the first location adopted in the modeling process) to (12,86, 6,86, 0,14) m and with 19 equal steps. To create a test dataset, 200 sentences are randomly taken from the TIMIT test database and 200 random directions are generated. For each center location, 10 test samples are generated, for a total of 200 test samples.

A graph of the models' localization accuracy when changing the microphone array location is shown in Fig. 2 (x-axis represents the distance between each center location of the microphone array and the first location).

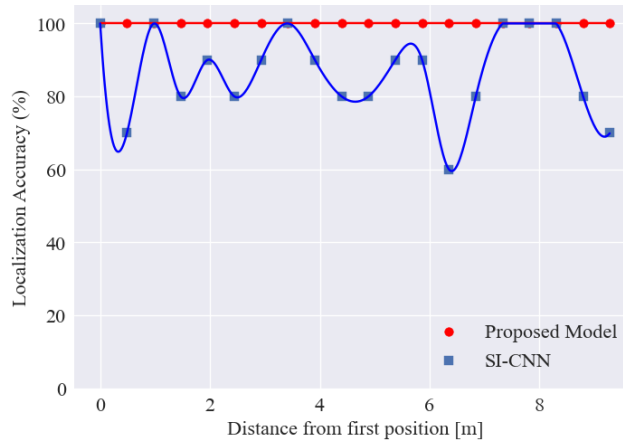


Fig. 2. Evaluating the ability of both the proposed model and SI-CNN model to generalize when changing the microphone array location

The proposed model achieved a localization accuracy of 100%, while the SI-CNN model achieved an average accuracy of 86,5%.

## 2.3. Changing the distance between the source and the center of the microphone array (Source distance)

20 different distances between the acoustic source and the center of the microphone array are considered, with the distance varying from 2,1 m to 4,4 m and in 19 equal steps. To create a test dataset, 200 sentences are

randomly taken from the TIMIT test database and 200 random directions are generated. For each distance, 10 test samples are generated, a total of 200 test samples are generated.

A graph of the models' localization accuracy when changing the distance between the source and the center of the microphone array is shown in Fig. 3. The proposed model achieved a localization accuracy of 99%, while the SI-CNN model achieved an average accuracy of 75%.

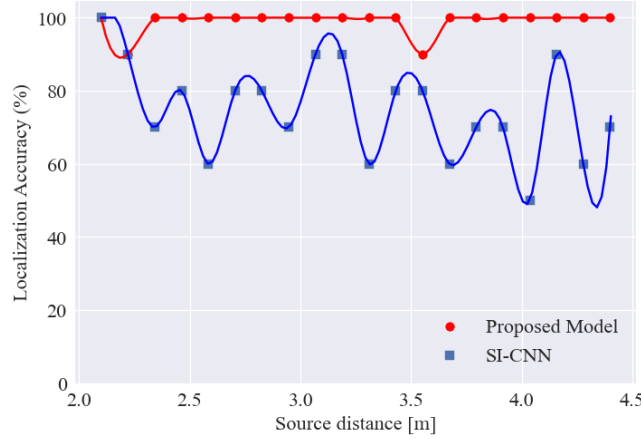


Fig. 3. Evaluating the ability of both the proposed model and SI-CNN model to generalize when changing the distance between the source and the center of the microphone array

Table shows the values of the localization accuracy metric for both the SI-CNN model and the proposed model with a spatial resolution of  $10^\circ$  when changing the room size, the location of the microphone array and the distance between the source and the center of the array. The average localization accuracy for each of the two models is calculated, and then the improvement rate in localization accuracy is calculated.

Localization accuracy of SI-CNN model and proposed model when changing the configuration settings

y-dimension (m)	SI-CNN (%)	Proposed (%)	Center distance (m)	SI-CNN (%)	Proposed (%)	Source distance (m)	SI-CNN (%)	Proposed (%)
4	90	100	0	100	100	2,1	100	100
4,84	80	100	0,49	70	100	2,22	90	90
5,68	90	100	0,98	100	100	2,34	70	100
6,53	60	100	1,47	80	100	2,46	80	100
7,37	70	100	1,95	90	100	2,58	60	100
8,21	80	100	2,44	80	100	2,71	80	100
9,05	90	100	2,93	90	100	2,83	80	100
9,89	100	90	3,42	100	100	2,95	70	100
10,74	90	100	3,91	90	100	3,07	90	100
11,58	60	100	4,4	80	100	3,19	90	100
12,42	90	100	4,89	80	100	3,31	60	100
13,26	90	100	5,37	90	100	3,43	80	100
14,11	80	100	5,86	90	100	3,55	80	90
14,95	90	100	6,35	60	100	3,67	60	100
15,79	90	100	6,84	80	100	3,79	70	100
16,63	50	100	7,33	100	100	3,92	70	100
17,47	70	100	7,82	100	100	4,04	50	100
18,32	70	100	8,31	100	100	4,16	90	100
19,16	100	100	8,8	80	100	4,28	60	100
20	90	100	9,28	70	100	4,4	70	100
Average	81,5	99,5	Average	86,5	100	Average	75	99

The simulation results shown in the table demonstrate that the proposed model is highly effective in its generalization ability and outperforms the SI-CNN model, achieving an improvement rate of 22,1% in localization accuracy when changing the room size, 15,6% when changing the location of the microphone array, and 32% when changing the distance between the source and the center of the microphone array.

## Conclusion

The generalizability of both the proposed model in [14] and the SI-CNN model based on the feeding of SI features into CNN was evaluated when changing the configuration settings. The simulation results demonstrated that the proposed model is highly effective and outperforms the SI-CNN model, and also achieves better performance in generalization ability when changing settings, especially the distance between the source and the center of the array. An improvement rate in localization accuracy was achieved by 22,1% when changing the size of the room, by 15,6% when changing the location of the microphone array and by 32% when changing the distance between the source and the center of the microphone array.

Finally, after the effectiveness of the proposed model in generalization has been proven, future work will be to extend the proposed model to be able to localize multiple sound sources. This can be achieved through integration between the proposed model and a model for separating multiple sound sources, where a method will be applied to separate the sound sources, and then the proposed model will be applied to each source to estimate its direction.

## References

1. Zhu, N. & Reza, T. (2019) A modified cross-correlation algorithm to achieve the time difference of arrival in sound source localization. *Measurement and Control*. 52(3-4). pp. 212–221. DOI: 10.1177/0020294019827977
2. Chiariotti, P., Martarelli, M. & Castellini, P. (2019) Acoustic beamforming for noise source localization – Reviews, methodology and applications. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 120. pp. 422–448.
3. Zhong, Y., Xiang, J., Chen, X., Jiang, Y. & Pang, J. (2018) Multiple Signal Classification-Based Impact Localization in Composite Structures Using Optimized Ensemble Empirical Mode Decomposition. *Applied Sciences*. 8(9). pp. 1447.
4. Desai, D. & Mehendale, N. (2022) A Review on Sound Source Localization Systems. *Archives of Computational Methods in Engineering*. 29(7). pp. 4631–4642. DOI: 0.1007/s11831-022-09747-2
5. Shahoud, G.M. & Agafonov, E.D. (2024) Analysis of Approaches and Methods to Acoustic Sources Localization. *Journal of Siberian Federal University. Engineering & Technologies*. 17(3). pp. 380–398.
6. Grumiaux, P.A., Kitić, S., Girin, L. & Guérin, A. (2022) A survey of sound source localization with deep learning methods. *Journal of the Acoustical Society of America*. 152(1). pp. 107–151.
7. Nguyen, T.N.T., Gan, W.S., Ranjan, R. & Jones, D.L. (2020) Robust source counting and DOA estimation using spatial pseudo-spectrum and convolutional neural network. *IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*. 28. pp. 2626–2637. DOI: 10.1109/TASLP.2020.3019646
8. Nguyen, T.N.T., Nguyen, N.K., Phan, H., Pham, L., Ooi, K., Jones, D.L. & Gan, W.S. (2021) A general network architecture for sound event localization and detection using transfer learning and recurrent neural network. *ICASSP 2021-2021 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*. pp. 935–939. DOI: 10.1109/ICASSP39728.2021.9414602
9. Adavanne, S., Politis, A., Nikunen, J. & Virtanen, T. (2018) Sound event localization and detection of overlapping sources using convolutional recurrent neural networks. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*. 13(1). pp. 34–48.
10. He, W., Motlicek, P. & Odohez, J.M. (2019) Adaptation of multiple sound source localization neural networks with weak supervision and domain-adversarial training. *ICASSP 2019-2019 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*. pp. 770–774.
11. Perotin, L., Serizel, R., Vincent, E. & Guérin, A. (2018) CRNN-based joint azimuth and elevation localization with the Ambisonics intensity vector. *2018 16th International Workshop on Acoustic Signal Enhancement (IWAENC)*. pp. 241–245. DOI: 10.1109/IWAENC.2018.8521403
12. Liu, N., Chen, H., Songgong, K. & Li, Y. (2021) Deep learning assisted sound source localization using two orthogonal first-order differential microphone arrays. *Journal of the Acoustical Society of America*. 149(2). pp. 1069–1084. DOI: 10.1121/10.0003445
13. Li, Q., Zhang, X. & Li, H. (2018) Online direction of arrival estimation based on deep learning. *2018 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*. pp. 2616–2620. DOI: 10.1109/ICASSP.2018.8461386
14. Shahoud, G.M. & Agafonov, E.D. (2024) A combined model for localizing acoustic sources using deep learning technology. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 68. pp. 100–111. DOI: 10.17223/19988605/68/11
15. Ciaburro, G. & Iannace, G. (2021) Acoustic characterization of rooms using reverberation time estimation based on supervised learning algorithm. *Applied Sciences*. 11(4). Art. 1661. DOI: 10.3390/app11041661

### Information about the authors:

**Shahoud Ghiath M.** (Post-Graduate Student, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation). E-mail: ghiathlovealaa@gmail.com



**Agafonov Evgeniy D.** (Doctor of Technical Sciences, Professor, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation).  
E-mail: eagafonov@sfu-kras.ru

*Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.*

***Информация об авторах:***

**Шаход Джах Михаил** – аспирант кафедры систем автоматики, автоматизированного управления и проектирования Института космических и информационных технологий Сибирского федерального университета (Красноярск, Россия).  
E-mail: ghiathlovealaa@gmail.com

**Агафонов Евгений Дмитриевич** – доктор технических наук, профессор кафедры систем автоматики, автоматизированного управления и проектирования Института космических и информационных технологий Сибирского федерального университета (Красноярск, Россия). E-mail: evgeny.agafonov@mail.ru

***Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.***

*Received 21.04.2025; accepted for publication 02.09.2025*

*Поступила в редакцию 21.04.2025; принята к публикации 02.09.2025*

## ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ДИАГНОСТИКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

### DESIGNING AND DIAGNOSTICS OF COMPUTER SYSTEMS

Научная статья

УДК 681.518.5 + 004.052.32

doi: 10.17223/19988605/72/12

#### Использование равновесного кода «1 из 4» при синтезе самопроверяемых схем встроенного контроля на основе логической коррекции сигналов

Дмитрий Викторович Ефанов

*Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия*

*Российский университет транспорта, Москва, Россия*

*Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан*

*TrES-4b@yandex.ru*

**Аннотация.** Предложен способ получения группы методов синтеза самопроверяемых дискретных устройств со схемами встроенного контроля, синтезируемыми на основе логической коррекции сигналов и равновесного кода «1 из 4». Схемы встроенного контроля строятся для групп, состоящих из четырех выходов объекта диагностирования. В отличие от известных методов подразумевается коррекция сигналов в схеме встроенного контроля от всех четырех выходов из выделенной группы выходов объекта диагностирования, что позволяет получить большое количество методов синтеза схемы встроенного контроля. Показано, как устанавливается зависимость между значениями, формируемыми на выходах блока вычисления функций коррекции, и значениями, формируемыми на выходах объекта диагностирования, учитывающая подачу проверяющих тестов на элементы преобразования и тестер в схеме встроенного контроля в процессе эксплуатации самопроверяемого устройства. Приводится пример установления такой зависимости, а также определены множества проверяющих тестов для схемы встроенного контроля. Показано, что для полной проверки схемы встроенного контроля требуется не более восьми рабочих комбинаций, генерируемых на выходах объекта диагностирования. Полученные в статье результаты могут использоваться при разработке самопроверяемых дискретных устройств на различной элементной базе.

**Ключевые слова:** самопроверяемые дискретные устройства; схема встроенного контроля; логическая коррекция сигналов; равновесный код «1 из 4»; контроль вычислений на выходах дискретных устройств.

**Для цитирования:** Ефанов Д.В. Использование равновесного кода «1 из 4» при синтезе самопроверяемых схем встроенного контроля на основе логической коррекции сигналов // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2025. № 72. С. 114–133. doi: 10.17223/19988605/72/12

Original article

doi: 10.17223/19988605/72/12

#### Using the “1-out-of-4” constant-weight code in the synthesis of self-checking concurrent error-detection circuit based on Boolean signal correction

Dmitry V. Efanov

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, Russian Federation*

*Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation*

Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan  
TrES-4b@yandex.ru

**Abstract.** In this paper proposed a method for obtaining a group of methods for synthesizing self-checking discrete devices with concurrent error-detection (CED circuit) synthesized based on Boolean signal correction and a «1-out-of-4» constant-weight code. The CED circuits are made for groups that consist of four outputs from the diagnostic object. As opposed known methods, it implies correction of signals in the CED circuit from all four outputs from a selected group of diagnostic object outputs, which allows obtaining a mass of methods for synthesizing a CED circuit. Also, author showing how the relationship is established between the values formed at the correction computing check unit outputs and the values formed at the outputs of the diagnostic object, considering the supply of detection test set to the gates and the checker in the CED circuit during operation of the self-checking device. An example of establishing such a dependence is given, and detection test set for the CED circuit are defined. It is shown that no more than eight working combinations generated at the outputs of the diagnostic object are required for a full check the CED circuit. These results demonstrate the effectiveness of the proposed solutions. The results obtained in the paper can be used in developing self-checking discrete devices on various element bases.

**Keywords:** self-checking discrete devices; concurrent error-detection circuit; Boolean signal correction; «1-out-of-4» constant-weight code; computing check at the discrete device's outputs.

**For citation:** Efanov, D.V. (2025) Using the «1-out-of-4» constant-weight code in the synthesis of self-checking concurrent error-detection circuit based on Boolean signal correction. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 72. pp. 114–133. doi: 10.17223/19988605/72/12

## Введение

Одной из ключевых задач при синтезе дискретных устройств, входящих в структуры систем критического применения, является своевременное обнаружение неисправностей и ошибок в вычислениях [1–5]. Недостаточно синтезировать устройство, действующее в соответствии с требуемым алгоритмом. Важно наделить его свойством фиксации корректности собственной работы, чтобы избежать распространения неверных данных в системе и тем самым нарушения обеспечиваемого технологического процесса. Все остальные задачи, например формирование отказоустойчивых и самовосстанавливаемых структур для устройств, решаются, как правило, с учетом возможности обнаружения ошибок, вызываемых неисправностями.

Для обеспечения обнаружения неисправностей в дискретных устройствах используются различные подходы, в том числе распространено использование самопроверяемых схем встроенного контроля (СВК) [6–8]. СВК решает задачу обнаружения неисправностей косвенно по оценке корректности вычислений на рабочих выходах исходного устройства (объекта диагностирования) или в специально выведенных для этого контрольных точках [9]. В качестве диагностических признаков для СВК могут использоваться принадлежность вычисляемых булевых функций к особым или «близким» к ним классам булевых функций [10, 11] или же принадлежность формируемых кодовых слов заранее выбранным двоичным блоковым равномерным кодам [12, 13]; оба диагностических признака можно комбинировать [14, 15].

Известны две основные структуры организации СВК. Первая (классическая и широко используемая на практике) подразумевает отождествление выходов объекта диагностирования с информационными символами, которые в СВК дополняются контрольными символами так, чтобы формируемое в ней кодовое слово принадлежало заранее выбранному избыточному коду [9]. Контроль принадлежности формируемых кодовых слов выбранному коду осуществляется с использованием тестера [16, 17]. Вторая структура (альтернативная) подразумевает использование логической коррекции сигналов (ЛКС) с выходов объекта диагностирования в СВК [18]. Ее применение позволяет преобразовать любой вектор, формируемый на выходах исходного дискретного устройства, в кодовое слово заданного кода [19, 20], либо же функции, реализуемые объектом диагностирования, в функции специального вида [10]. Альтернативная структура организации СВК на основе ЛКС позволяет гораздо проще обеспечивать решение наиболее сложной задачи, возникающей в ходе проектирования самопроверяемого устройства, – наделения структуры СВК свойством самопроверяемости. Примеры и эксперименты

с тестовыми схемами показывают, что ее использование позволяет решать задачу обеспечения самопроверяемости даже тогда, когда этого невозможно добиться с использованием классической структуры и широко известных методов, например дублирования или контроля вычислений по классическим кодам с суммированием [21].

Настоящая статья раскрывает особенности получения целой группы методов организации СВК на основе ЛКС с применением равновесного кода «1 из 4», дающих возможность простого синтеза самопроверяемых устройств и дополняющих известные способы использования данного кода в аналогичных задачах.

## 1. Структура организации схемы встроенного контроля на основе логической коррекции сигналов

В [22] предложена, а затем описана в большом количестве работ, включая монографию [18], структура организации СВК для комбинационных составляющих (комбинационных схем) дискретных устройств, основанная на логической коррекции сигналов (ЛКС). Она представлена на рис. 1.

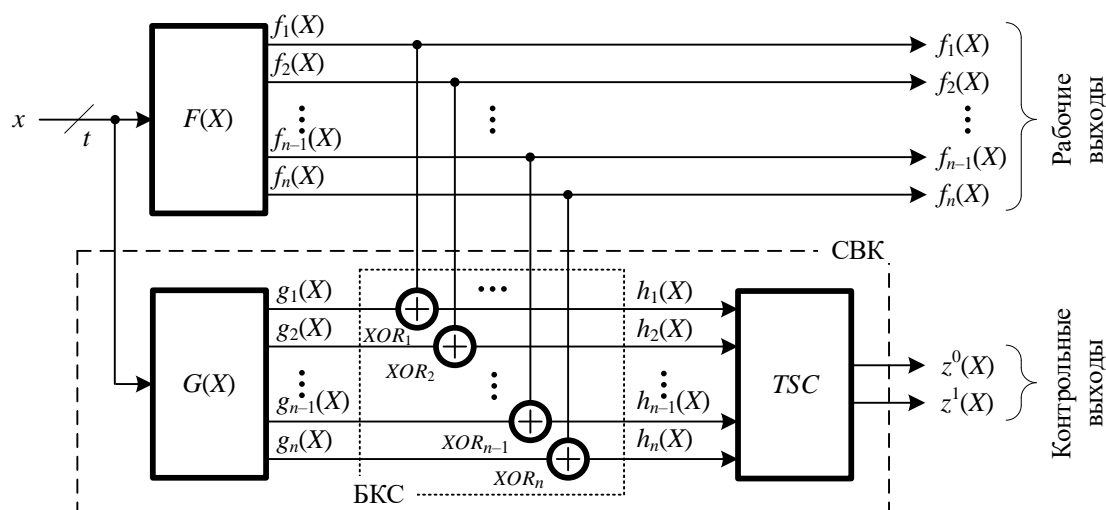


Рис. 1. Структура организации СВК на основе ЛКС

Fig. 1. The structure of the organization of the CED system based on the Boolean signal correction

В описываемой структуре объектом диагностирования является блок  $F(X)$ . На входы данного блока поступают комбинации  $\langle x_t \ x_{t-1} \dots x_2 \ x_1 \rangle = \langle X \rangle$ , а на выходах формируются значения булевых функций  $f_i(X)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Объект диагностирования снабжен СВК, состоящей из трех функциональных блоков. Блок  $G(X)$  является блоком вычисления значений функций коррекции сигналов и формирует значения булевых функций  $g_i(X)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , предназначенных для коррекции сигналов от объекта диагностирования. Одноименные выходы блоков  $F(X)$  и  $G(X)$  подключены к входам двухвходовых элементов коррекции сигналов, которые реализуют функцию сложения по модулю 2 ( $XOR$ ). Двухвходовые элементы преобразования объединены в блок коррекции сигналов (БКС). На выходах БКС, таким образом, при подаче на входы какой-либо комбинации  $\langle X \rangle$  формируются следующие сигналы:

$$h_i(X) = f_i(X) \oplus g_i(X), i = \overline{1, n}. \quad (1)$$

По сути, преобразование (1) позволяет вектор  $\langle f_n(X) f_{n-1}(X) \dots f_2(X) f_1(X) \rangle = \langle F \rangle$ , формируемый на выходах блока  $F(X)$ , трансформировать в вектор  $\langle h_n(X) h_{n-1}(X) \dots h_2(X) h_1(X) \rangle = \langle H \rangle$ , наделяемый особыми свойствами, например принадлежности заданному двоичному равномерному коду. Принадлежность этого вектора выбранному коду проверяется с помощью тестера  $TSC$  (totally self-checking checker), выходы  $z^0(X)$  и  $z^1(X)$  которого являются и контрольными выходами СВК. На выходах тестера фиксируется парафазный сигнал  $\langle 01 \rangle$  или  $\langle 10 \rangle$ . Если в объекте диагностирования или элементах СВК будет присутствовать неисправность или появится ошибка в вычислениях, вызванная внешними

дестабилизирующими факторами, то на выходах  $z^0(X)$  и  $z^1(X)$  будет установлен непарафазный сигнал  $\langle 00 \rangle$  или  $\langle 11 \rangle$ .

Для обеспечения самопроверяемости всей системы, представленной на рис. 1, требуется соблюдение некоторых условий:

1. Во-первых, структуры блоков  $F(X)$  и  $G(X)$  должны быть проверяемыми [23].

2. Во-вторых, на входах каждого из элементов преобразования в БКС должен формироваться проверяющий тест, содержащий все четыре комбинации  $\{00, 01, 10, 11\}$  при их канонической реализации [24].

Здесь отметим, что при неканонической реализации с учетом свойств функции «сложение по модулю 2» ( $XOR$ ) число тестовых комбинаций уменьшается: тестовыми будут являться комбинации либо из подмножества  $\{00, 01, 11\}$ , либо из  $\{00, 01, 10\}$ , либо из  $\{00, 10, 11\}$ , либо из  $\{01, 10, 11\}$ . Однако далее рассматривается именно каноническая реализация функции «сложение по модулю 2», поскольку все остальные случаи с позиции тестирования окажутся частными, а результаты, полученные в настоящей статье, с легкостью смогут быть распространены и на случай применения других реализаций элементов «сложение по модулю 2».

3. В-третьих, на входах тестера выбранного кода при эксплуатации устройства также должен формироваться проверяющий тест, определяемый выбранным кодом и способом реализации тестера [16].

Задача обеспечения проверяемости блоков  $F(X)$  и  $G(X)$  связана с их контролепригодной реализацией таким образом, чтобы любая неисправность из установленной модели неисправностей для каждого из этих устройств проявлялась на их выходах в виде искажений сигналов хотя бы на одной входной комбинации  $\langle x_t x_{t-1} \dots x_2 x_1 \rangle$ . Задачи же формирования проверяющих тестов для элементов БКС и тестера должны решаться в процессе проектирования СВК по разрабатываемому методу.

Рассмотрим далее использование равновесного кода «1 из 4» (1/4-кода) для решения задачи организации полностью самопроверяемой СВК на основе ЛКС.

## 2. Использование равновесного кода «1 из 4» при организации схемы встроенного контроля на основе логической коррекции сигналов

1/4-код является одним из простейших неразделимых кодов, которые обладают рядом особенностей, эффективно применяющихся при синтезе самопроверяемых структур. Множество кодовых слов 1/4-кода включает в себя следующие булевы векторы:  $\{0001, 0010, 0100, 1000\}$ . Отсюда становится ясно, что данным кодом не обнаруживается всего 12 ошибок в кодовых словах из возможных 240, и все эти ошибки являются двукратными разнонаправленными (симметричными) [25]. Наиболее простой полностью самопроверяемый тестер для 1/4-кода представлен на рис. 2 [16].

На его входы поступают кодовые векторы  $\langle h_4(X) h_3(X) h_2(X) h_1(X) \rangle$ , а на выходах  $\langle z^0(X) z^1(X) \rangle$  фиксируется парафазный сигнал, если вектор представляет собой кодовое слово 1/4-кода, и фиксируется непарафазный сигнал в том случае, если на входы поступил вектор, не принадлежащий 1/4-коду, или же возникли неисправности самого тестера. Для полной проверки тестера 1/4-кода достаточно на его входы подать единожды каждое из его кодовых слов.

На рис. 3 изображена структура организации СВК на основе ЛКС с применением 1/4-кода. Она строится для группы из четырех выходов объекта диагностирования.

Поскольку при организации СВК используется 1/4-код, то можно учесть тот факт, что для получения его кодового слова достаточно преобразовать три из четырех символов в кодовом слове  $\langle f_4(X) f_3(X) f_2(X) f_1(X) \rangle$ . Это обстоятельство позволяет несколько упростить структуру организации СВК (рис. 4). В упрощенной структуре используется три элемента преобразования, что влияет и на структурную избыточность СВК, и на выполняемые на этапе ее проектирования процедуры для обеспечения самопроверяемости.

Отметим важный факт. Во всех исследованиях применения 1/4-кода до настоящей работы рассматривался только такой вариант организации СВК на основе ЛКС, который подразумевает минимизацию числа элементов преобразования. В любых случаях их достаточно три, а в частных – два и даже один (см., напр: [19]).

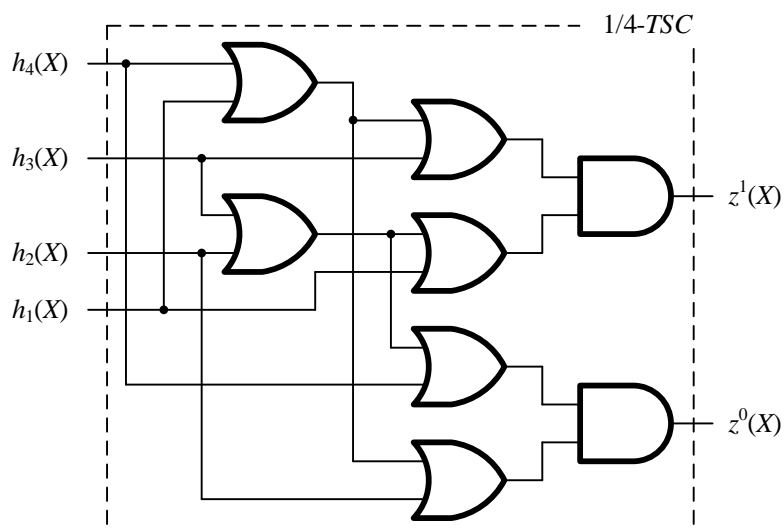


Рис. 2. Тестер 1/4-кода  
Fig. 2. 1/4-code checker

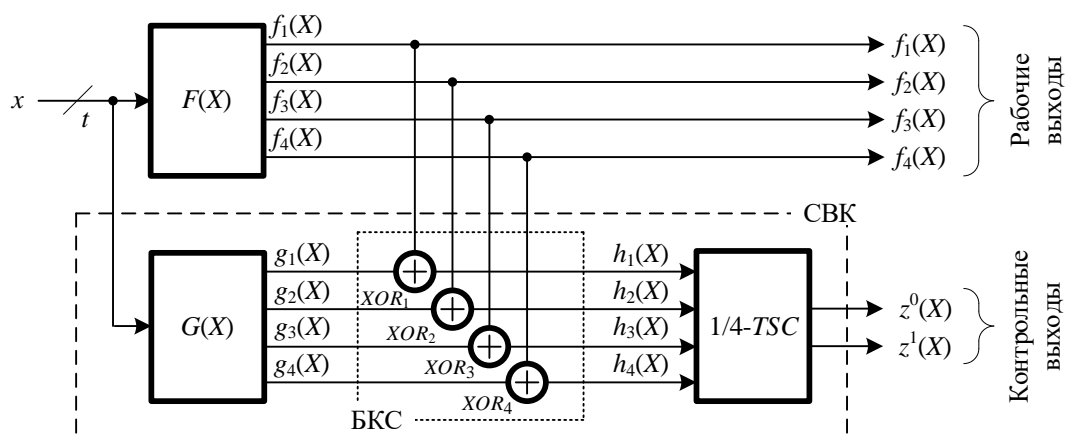


Рис. 3. Структура организации СВК на основе ЛКС с применением 1/4-кода  
Fig. 3. The structure of the organization of the CED system based on the Boolean signal correction with 1/4-code

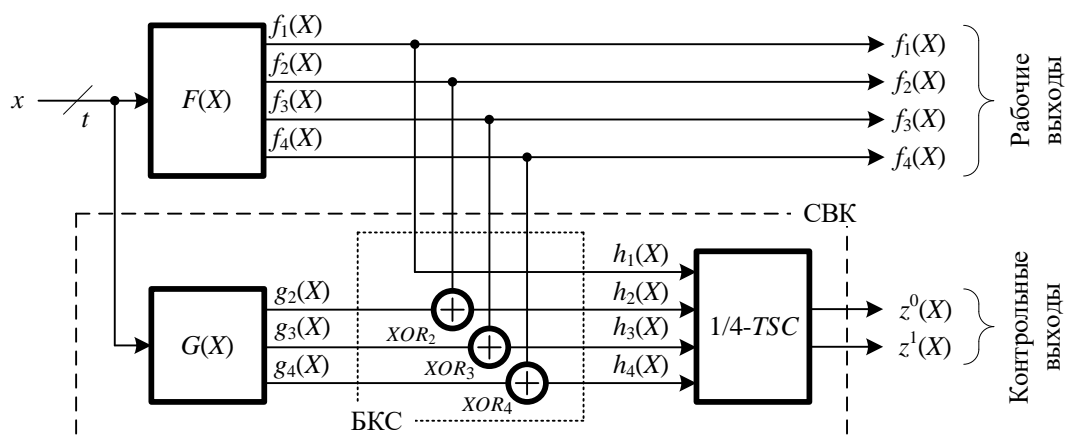


Рис. 4. Упрощенная структура организации СВК на основе ЛКС с применением 1/4-кода  
Fig. 4. Simplified structure of the organization of the CED system based on the Boolean signal correction with 1/4-code

Первой работой, в которой описано использование ЛКС совместно с неразделимыми кодами, по всей видимости, является статья [22]. В ней приведены особенности использования любых равновесных кодов для организации СВК на основе ЛКС. На примере контроля шестивыходного устройства

показано, что использование классической структуры с дополнением сигналов от объекта диагностирования контрольными сигналами не всегда дает возможность синтеза полностью самопроверяемых структур, и показано эффективное использование в этих целях ЛКС и равновесного кода «1 из 6». В этой же статье представлен способ синтеза СВК на основе ЛКС с применением 1/4-кода, в основе которого лежит следующая зависимость между значениями функций коррекции сигналов и функций, описывающих выходы объекта диагностирования:

$$\begin{cases} g_4(X) = 0; \\ g_3(X) = f_4(X) f_3(X); \\ g_2(X) = (f_4(X) \vee f_3(X)) f_2(X); \\ g_1(X) = (f_4(X) \vee f_3(X) \vee f_2(X)) f_1(X) \vee \overline{f_4(X) \vee f_3(X) \vee f_2(X) \vee f_1(X)}. \end{cases} \quad (2)$$

Следует обратить внимание на то, что нумерация выходов в настоящей работе отличается от нумерации выходов, принятой в [19, 22], и сделана слева направо, как это и принято при нумерации разрядов в кодовых векторах. Поэтому в системе функций (2) нумерация функций изменена по сравнению с источником. Для полного соответствия изложенной работе [19, 22] нужно выполнить замену индексов функций:  $4 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 4$ .

Пользуясь (2), получим сигналы, формируемые на линиях СВК, синтезированной на основе ЛКС с применением 1/4-кода, с условием формирования полного множества четырехбитных кодовых векторов на выходах объекта диагностирования (табл. 1).

Из табл. 1 следует, что на выходах БКС формируется полное множество кодовых слов 1/4-кода. Однако читатель может обратить внимание на последние три столбца таблицы, где приведены тестовые комбинации элементов преобразования: для элементов  $XOR_3$  и  $XOR_2$  невозможно сформировать комбинации  $\langle 01 \rangle$  и  $\langle 10 \rangle$ . Другими словами, использование (2) не позволяет синтезировать полностью самопроверяемые СВК на основе ЛКС. Обратите внимание на табл. 2 из [19]. Из сравнения столбцов  $f_i$  и  $g_i$  становится ясным, что для рассмотренного авторами примера (как, впрочем, и для любого примера) не обеспечивается самопроверяемость всех элементов преобразования.

Таблица 1

Сигналы на линиях СВК, полученные при использовании системы функций (2)

Выходы $F(X)$				Выходы $G(X)$				Выходы БКС				Тестовые комбинации элементов преобразования		
$f_4(X)$	$f_3(X)$	$f_2(X)$	$f_1(X)$	$g_4(X)$	$g_3(X)$	$g_2(X)$	$g_1(X)$	$h_4(X)$	$h_3(X)$	$h_2(X)$	$h_1(X)$	$\langle f_3(X) g_3(X) \rangle$	$\langle f_2(X) g_2(X) \rangle$	$\langle f_1(X) g_1(X) \rangle$
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	00	00	01
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	00	00	10
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	00	10	00
0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	00	10	11
0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	10	00	00
0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	10	00	11
0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	10	11	00
0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	10	11	11
1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	00	00	00
1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	00	00	11
1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	00	11	00
1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	00	11	11
1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	11	00	00
1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	11	00	11
1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	11	11	00
1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	11	11	11

В [21, 26] считается, что сигналы на выходах БКС изначально не определены, а задача синтеза СВК решается подбором доопределяемых значений функций на выходах БКС так, чтобы были обеспечены условия тестируемости элементов преобразования. Кроме того, в [21] сформулирована и доказана теорема, определяющая условия тестируемости элементов преобразования и тестера при организации СВК на основе равновесных кодов «1 из  $n$ », где  $n \geq 3$  – число выходов в контролируемой группе.

Явным недостатком метода [19, 22], проявляющимся при попытках автоматизации расчетов, является необходимость подбора значений на выходах БКС по некоторому правилу для обеспечения тестируемости элементов преобразования и тестера 1/4-кода. Поэтому в [27] описана группа методов, базирующихся на установлении зависимости между значениями функций, описывающих выходы блока вычисления функций коррекции в СВК, и функций, реализуемых на выходах объекта диагностирования. Эта зависимость, в отличие от (2), учитывает необходимость формирования проверяющего теста для каждого элемента преобразования. Авторами предложен и научно обоснован подход, позволяющий сформировать 72 варианта синтеза СВК на основе ЛКС с применением 1/4-кода с использованием зависимости между значениями функций, описывающих выходы блока вычисления функций коррекции сигналов, и функций, реализуемых на выходах объекта диагностирования. Один из таких вариантов рассмотрен подробнее:

$$\begin{cases} g_4(X) = 0; \\ g_3(X) = \overline{f_4(X)} \overline{f_3(X)} f_2(X) \vee f_3(X) (f_4(X) \vee f_1(X)); \\ g_2(X) = \overline{f_4} \overline{f_3} \overline{f_2} f_1 \vee f_2(X) (f_4(X) \vee \overline{f_3(X)} \vee \overline{f_1(X)}); \\ g_1(X) = \overline{f_4} \overline{f_3} \overline{f_2} \overline{f_1} \vee f_1(X) (f_4(X) \vee f_3(X) \vee f_2(X)). \end{cases} \quad (3)$$

Также доказано, что для обеспечения полной самопроверяемости СВК необходимо формирование на выходах объекта диагностирования не менее семи конкретных векторов. Это требуется для обеспечения полной проверки элементов БКС и тестера в структуре СВК.

Еще в одной статье [28] приводится метод синтеза СВК на основе ЛКС с применением 1/4-кода, который подразумевает изначально неопределенность в значениях функций на выходах БКС на входных комбинациях. Он связан с пошаговым доопределением значений функций на каждой входной комбинации с учетом введения неопределенностей для некоторых значений доопределяемых функций, последующей минимизации функций коррекции, проверкой формирования полного множества проверяющих комбинаций и, при необходимости, выполнением иного доопределения значений функций на выходах БКС для обеспечения формирования полного теста соответствующего элемента преобразования. Здесь процедуры доопределения оказываются частично автоматизированными за счет установления зависимости между значениями функций, формируемых на выходах БКС. Тем не менее присутствуют частично определенные булевы функции, что требует дополнительного анализа для однозначного доопределения их значений на полном множестве входных комбинаций.

Исследования автора настоящей статьи показывают, что существует еще один подход к формированию целой группы методов синтеза СВК, основанных на установлении зависимости между функциями, описывающими выходы блока вычисления функций коррекции в СВК, и функциями, реализуемыми на выходах объекта диагностирования. И здесь используется уже СВК с преобразованием сигналов с четырех выходов объекта диагностирования (см. рис. 3). Использование описываемых далее результатов существенно расширяет число способов синтеза самопроверяемых СВК на основе ЛКС с применением 1/4-кода, а полученные автором результаты восполняют пробел в теории синтеза СВК на основе ЛКС, связанный с недостатками известных методов для решения аналогичной задачи.

### 3. Использование 1/4-кода при организации схемы встроенного контроля на основе логической коррекции сигналов с преобразованием всех сигналов от объекта диагностирования

Рассмотрим все возможные двоичные векторы, которые могут быть сформированы на выходах объекта диагностирования. Они приведены в табл. 2. Также в табл. 2 представлены тестовые комбинации,



формирующиеся на входах элементов преобразования в виде двухбитного вектора, где первый символ соответствует значению функции  $f_i(X)$ , а второй – значению функции  $g_i(X)$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Знаком «~» показаны значения, которые на данном этапе не определены, поскольку связаны с тем, в какой именно вектор будет осуществлено преобразование исходного вектора  $\langle F \rangle$ .

Таблица 2

**Векторы, формируемые на выходах объекта диагностирования,  
и тестовые комбинации элементов преобразования**

$f_4(X)$	$f_3(X)$	$f_2(X)$	$f_1(X)$	$XOR_4$	$XOR_3$	$XOR_2$	$XOR_1$
0	0	0	0	0~	0~	0~	0~
0	0	0	1	0~	0~	0~	1~
0	0	1	0	0~	0~	1~	0~
0	0	1	1	0~	0~	1~	1~
0	1	0	0	0~	1~	0~	0~
0	1	0	1	0~	1~	0~	1~
0	1	1	0	0~	1~	1~	0~
0	1	1	1	0~	1~	1~	1~
1	0	0	0	1~	0~	0~	0~
1	0	0	1	1~	0~	0~	1~
1	0	1	0	1~	0~	1~	0~
1	0	1	1	1~	0~	1~	1~
1	1	0	0	1~	1~	0~	0~
1	1	0	1	1~	1~	0~	1~
1	1	1	0	1~	1~	1~	0~
1	1	1	1	1~	1~	1~	1~

Каждый вектор  $\langle F \rangle$  может быть преобразован в кодовые слова  $\langle H \rangle$ , принадлежащие 1/4-коду четырьмя способами: в векторы  $\langle 0001 \rangle$  –  $\alpha$ ,  $\langle 0010 \rangle$  –  $\beta$ ,  $\langle 0100 \rangle$  –  $\gamma$  и  $\langle 1000 \rangle$  –  $\delta$ . Преобразования осуществляются при подаче на входы объекта диагностирования векторов  $\langle X \rangle$ . При этом на каждом входном векторе  $\langle X \rangle$  может сформироваться только один из векторов  $\langle H \rangle$ . Припишем каждому вектору  $\langle F \rangle$  индекс  $i$ , соответствующий десятичному эквиваленту вектора двоичного числа, записываемому в нем. Условимся обозначать буквами  $a_i^j$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, 15\}$ ,  $j \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ , каждый из вариантов преобразования  $i$ -го вектора, формируемого на выходах объекта диагностирования, в  $j$ -е кодовое слово 1/4-кода.

Можно преобразовать каждый  $i$ -й вектор, формируемый на выходах объекта диагностирования, в  $j$ -е кодовое слово 1/4-кода четырьмя способами. Всего преобразуемых векторов 16. Тогда существует  $4^{16} = 4\,294\,967\,296$  вариантов преобразований. Однако не все они будут устраивать условиям обеспечения тестируемости элементов СВК. В табл. 3 приведены для каждого элемента преобразования все тестовые комбинации, а также для каждого вектора, формируемого на выходах объекта диагностирования, указано, какие варианты преобразования дают ту или иную тестовую комбинацию. Тогда из табл. 3 непосредственно можно выделить условия, выполнение которых обеспечит тестируемость каждого из элементов преобразования.

Для каждого элемента преобразования должны быть выполнены условия формирования хотя бы единожды каждой тестовой комбинации.

Для  $XOR_4$ ,  $XOR_3$ ,  $XOR_2$ ,  $XOR_1$  это означает выполнение хотя бы единожды следующих условий соответственно:

$$\begin{cases} \forall k, l \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, k \neq l: (a_k^\alpha \vee a_k^\beta \vee a_k^\gamma) a_l^\delta = 1, \\ \forall k, l \in \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}, k \neq l: (a_k^\alpha \vee a_k^\beta \vee a_k^\gamma) a_l^\delta = 1. \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \forall k, l \in \{0, 1, 2, 3, 8, 9, 10, 11\}, k \neq l: (a_k^\alpha \vee a_k^\beta \vee a_k^\delta) a_l^\gamma = 1, \\ \forall k, l \in \{4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15\}, k \neq l: (a_k^\alpha \vee a_k^\beta \vee a_k^\delta) a_l^\gamma = 1. \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \forall k, l \in \{0, 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13\}, k \neq l: (a_k^\alpha \vee a_k^\gamma \vee a_k^\delta) a_l^\beta = 1, \\ \forall k, l \in \{2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15\}, k \neq l: (a_k^\alpha \vee a_k^\gamma \vee a_k^\delta) a_l^\beta = 1. \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \forall k, l \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}, k \neq l: (a_k^\beta \vee a_k^\gamma \vee a_k^\delta) a_l^\alpha = 1, \\ \forall k, l \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}, k \neq l: (a_k^\beta \vee a_k^\gamma \vee a_k^\delta) a_l^\alpha = 1. \end{cases} \quad (7)$$

Таблица 3

Условия формирования тестовых комбинаций для элементов преобразования

<F>	XOR <sub>4</sub>				XOR <sub>3</sub>				XOR <sub>2</sub>				XOR <sub>1</sub>			
	00	01	10	11	00	01	10	11	00	01	10	11	00	01	10	11
0000	$\alpha, \beta, \gamma$	$\delta$	—	—	$\alpha, \beta, \delta$	$\gamma$	—	—	$\alpha, \gamma, \delta$	$\beta$	—	—	$\beta, \gamma, \delta$	$\alpha$	—	—
0001	$\alpha, \beta, \gamma$	$\delta$	—	—	$\alpha, \beta, \delta$	$\gamma$	—	—	$\alpha, \gamma, \delta$	$\beta$	—	—	—	—	$\alpha$	$\beta, \gamma, \delta$
0010	$\alpha, \beta, \gamma$	$\delta$	—	—	$\alpha, \beta, \delta$	$\gamma$	—	—	—	—	$\beta$	$\alpha, \gamma, \delta$	$\beta, \gamma, \delta$	$\alpha$	—	—
0011	$\alpha, \beta, \gamma$	$\delta$	—	—	$\alpha, \beta, \delta$	$\gamma$	—	—	—	—	$\beta$	$\alpha, \gamma, \delta$	—	—	$\alpha$	$\beta, \gamma, \delta$
0100	$\alpha, \beta, \gamma$	$\delta$	—	—	—	—	$\gamma$	$\alpha, \beta, \delta$	$\alpha, \gamma, \delta$	$\beta$	—	—	$\beta, \gamma, \delta$	$\alpha$	—	—
0101	$\alpha, \beta, \gamma$	$\delta$	—	—	—	—	$\gamma$	$\alpha, \beta, \delta$	$\alpha, \gamma, \delta$	$\beta$	—	—	—	—	$\alpha$	$\beta, \gamma, \delta$
0110	$\alpha, \beta, \gamma$	$\delta$	—	—	—	—	$\gamma$	$\alpha, \beta, \delta$	—	—	$\beta$	$\alpha, \gamma, \delta$	$\beta, \gamma, \delta$	$\alpha$	—	—
0111	$\alpha, \beta, \gamma$	$\delta$	—	—	—	—	$\gamma$	$\alpha, \beta, \delta$	—	—	$\beta$	$\alpha, \gamma, \delta$	—	—	$\alpha$	$\beta, \gamma, \delta$
1000	—	—	$\delta$	$\alpha, \beta, \gamma$	$\alpha, \beta, \delta$	$\gamma$	—	—	$\alpha, \gamma, \delta$	$\beta$	—	—	$\beta, \gamma, \delta$	$\alpha$	—	—
1001	—	—	$\delta$	$\alpha, \beta, \gamma$	$\alpha, \beta, \delta$	$\gamma$	—	—	$\alpha, \gamma, \delta$	$\beta$	—	—	—	—	$\alpha$	$\beta, \gamma, \delta$
1010	—	—	$\delta$	$\alpha, \beta, \gamma$	$\alpha, \beta, \delta$	$\gamma$	—	—	—	—	$\beta$	$\alpha, \gamma, \delta$	$\beta, \gamma, \delta$	$\alpha$	—	—
1011	—	—	$\delta$	$\alpha, \beta, \gamma$	$\alpha, \beta, \delta$	$\gamma$	—	—	—	—	$\beta$	$\alpha, \gamma, \delta$	—	—	$\alpha$	$\beta, \gamma, \delta$
1100	—	—	$\delta$	$\alpha, \beta, \gamma$	—	—	$\gamma$	$\alpha, \beta, \delta$	$\alpha, \gamma, \delta$	$\beta$	—	—	$\beta, \gamma, \delta$	$\alpha$	—	—
1101	—	—	$\delta$	$\alpha, \beta, \gamma$	—	—	$\gamma$	$\alpha, \beta, \delta$	$\alpha, \gamma, \delta$	$\beta$	—	—	—	—	$\alpha$	$\beta, \gamma, \delta$
1110	—	—	$\delta$	$\alpha, \beta, \gamma$	—	—	$\gamma$	$\alpha, \beta, \delta$	—	—	$\beta$	$\alpha, \gamma, \delta$	$\beta, \gamma, \delta$	$\alpha$	—	—
1111	—	—	$\delta$	$\alpha, \beta, \gamma$	—	—	$\gamma$	$\alpha, \beta, \delta$	—	—	$\beta$	$\alpha, \gamma, \delta$	—	—	$\alpha$	$\beta, \gamma, \delta$

Следуя за условиями (4)–(7) и анализируя табл. 3, сделаем такие выводы:

а) можно преобразование  $\langle F \rangle \rightarrow \langle H \rangle$  выполнить с учетом обеспечения формирования проверяющего теста для элемента XOR<sub>4</sub> таким образом, чтобы формировалось подмножество кодовых слов 1/4-кода {0001, 1000}, либо {0010, 1000}, либо {0100, 1000};

б) можно преобразование  $\langle F \rangle \rightarrow \langle H \rangle$  выполнить с учетом обеспечения формирования проверяющего теста для элемента XOR<sub>3</sub> таким образом, чтобы формировалось подмножество кодовых слов 1/4-кода {0001, 0100}, либо {0010, 0100}, либо {1000, 0100};

в) можно преобразование  $\langle F \rangle \rightarrow \langle H \rangle$  выполнить с учетом обеспечения формирования проверяющего теста для элемента XOR<sub>2</sub> таким образом, чтобы формировалось подмножество кодовых слов 1/4-кода {0001, 0010}, либо {0100, 0010}, либо {1000, 0010};

г) можно преобразование  $\langle F \rangle \rightarrow \langle H \rangle$  выполнить с учетом обеспечения формирования проверяющего теста для элемента XOR<sub>1</sub> таким образом, чтобы формировалось подмножество кодовых слов 1/4-кода {0010, 0001}, либо {0100, 0001}, либо {1000, 0001}.

Отсюда явно следует

**Утверждение 1.** При обеспечении формирования проверяющих тестов для всех элементов преобразования гарантированно формируется и проверяющий тест для тестера 1/4-кода.

Получим далее один из способов преобразования.

Предварительно зафиксируем условие единственности выполнения преобразований:

$$\forall i: a_i^\alpha a_i^\beta = a_i^\alpha a_i^\gamma = a_i^\alpha a_i^\delta = a_i^\beta a_i^\gamma = a_i^\beta a_i^\delta = a_i^\gamma a_i^\delta = 0. \quad (8)$$

Из данных табл. 3 и условий (4)–(7) становится понятно, что существует большое число способов установления зависимостей между значениями функций коррекции сигналов и функций, реализуемых на выходах объекта диагностирования. Получим для примера один из них. Для этого потребуется однозначно заполнить табл. 3 с учетом обеспечения формирования проверяющих тестов для элементов преобразования.

Сформируем таблицу покрытий (табл. 4). При заполнении будем учитывать, что в каждом столбце при выборе способа преобразования должен оказаться хотя бы один знак покрытия «×». Исходя из этого, получим предварительное заполнение таблицы покрытий с учетом данного условия. Будем следовать по шагам:

1. Рассмотрим получение тестовых комбинаций  $\langle 01 \rangle$  и  $\langle 10 \rangle$  для элемента  $XOR_4$ , поскольку они получаются при единственном способе преобразования:  $\langle F \rangle \rightarrow \langle 1000 \rangle$ . На комбинациях с десятичными эквивалентами  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  и  $\{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$  требуется единожды выполнить такое преобразование. Заполним табл. 4 знаками покрытия для строк с десятичными эквивалентами 7 и 8, а в скобках укажем способ преобразования.

2. Так как способ преобразования в строке согласно условию (8) единственный, то можно определить, какие комбинации дает такое заполнение для других элементов преобразования. Выполним это и укажем аналогично знаками покрытия и в скобках способом преобразования в соответствующих столбцах для каждого элемента преобразования. Для каждого из элементов преобразования  $XOR_3$ ,  $XOR_2$ ,  $XOR_1$  формируется по две комбинации  $\langle 00 \rangle$  и  $\langle 11 \rangle$ .

3. Для элемента  $XOR_3$  две тестовые комбинации уже сформированы. Требуется сформировать комбинации  $\langle 01 \rangle$  и  $\langle 10 \rangle$ . Это реализуется в единственном случае преобразования:  $\langle F \rangle \rightarrow \langle 0100 \rangle$ . На комбинациях с десятичными эквивалентами  $\{0, 1, 2, 3, 8, 9, 10, 11\}$  и  $\{4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15\}$  требуется единожды выполнить такое преобразование. Заполним табл. 4 знаками покрытия для строк с десятичными эквивалентами 3 и 12, а в скобках укажем способ преобразования. Такой способ заполнения неслучаен: именно на противоположных половинах таблицы оказываются подмножества  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  и  $\{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ , для которых формируются комбинации  $\langle 00 \rangle$  и  $\langle 11 \rangle$  элемента  $XOR_4$ .

4. Аналогично п. 2 укажем для элементов преобразования, получаемые при заполнении строк с номерами 3 и 4 вариантом  $\gamma$  тестовые комбинации. После указанного заполнения для элементов  $XOR_4$  и  $XOR_3$  сформированы все тестовые комбинации, а для элементов  $XOR_2$  и  $XOR_1$  остаются комбинации  $\langle 01 \rangle$  и  $\langle 10 \rangle$ .

Таблица 4

Таблица покрытий после первого этапа заполнения

$\langle F \rangle$	$XOR_4$				$XOR_3$				$XOR_2$				$XOR_1$			
	00	01	10	11	00	01	10	11	00	01	10	11	00	01	10	11
0000	× (α)				× (α)				× (α)					× (α)		
0001	× (β)				× (β)					× (β)						× (β)
0010																
0011	× (γ)					× (γ)						× (γ)				× (γ)
0100																
0101																
0110																
0111		× (δ)						× (δ)				× (δ)				× (δ)
1000			× (δ)		× (δ)				× (δ)				× (δ)			
1001																
1010																
1011																
1100				× (γ)			× (γ)		× (γ)				× (γ)			
1101																
1110				× (β)				× (β)			× (β)		× (β)			
1111				× (α)				× (α)				× (α)			× (α)	

5. Для элемента  $XOR_2$  две тестовые комбинации уже сформированы. Требуется сформировать комбинации  $\langle 01 \rangle$  и  $\langle 10 \rangle$ . Это реализуется в единственном случае преобразования:  $\langle F \rangle \rightarrow \langle 0010 \rangle$ . На комбинациях с десятичными эквивалентами  $\{0, 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13\}$  и  $\{2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15\}$  требуется единожды выполнить такое преобразование. Заполним табл. 4 знаками покрытия для строк с десятичными эквивалентами 2 и 14, а в скобках укажем способ преобразования.

6. Заполним для всех элементов преобразования столбцы, соответствующие формируемым тестовым комбинациям, способом преобразования  $\beta$ .

7. Для элемента  $XOR_1$  две тестовые комбинации уже сформированы. Требуется сформировать комбинации  $\langle 01 \rangle$  и  $\langle 10 \rangle$ . Это реализуется в единственном случае преобразования:  $\langle F \rangle \rightarrow \langle 0001 \rangle$ . Сформируем их на строках с номерами 1 и 15.

Преобразования  $\langle F \rangle \rightarrow \langle H \rangle$  однозначно установлены для восьми векторов, формируемых на выходах объекта диагностирования, составляющих множество  $\{0000, 0001, 0011, 0111, 1000, 1100, 1110, 1111\}$ . Такое доопределение обеспечивает условия тестируемости элементов преобразования и тестера в СВК. Однако требуется заполнить таблицу покрытий и на оставшихся строках, поскольку необходимо обеспечить формирование кодовых слов 1/4-кода.

**Утверждение 2.** Для обеспечения тестируемости элементов преобразования и тестера в СВК достаточно на выходах объекта диагностирования обеспечить формирование восьми рабочих кодовых векторов из множества  $\{0000, 0001, 0011, 0111, 1000, 1100, 1110, 1111\}$ .

Вторым условием заполнения таблицы покрытий является то, что в каждой строке должен оказаться только один знак покрытия. При этом оставшиеся преобразования могут быть произвольными –  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . Это уже при имеющемся способе преобразования восьми векторов дает  $4^8 = 65\,536$  способов установления функциональной зависимости.

Продолжим заполнение таблицы покрытий с учетом формирования не единожды тестовых комбинаций  $\langle 01 \rangle$  и  $\langle 10 \rangle$  для каждого элемента преобразования:

1. Строки с десятичными эквивалентами 2 и 13 заполним способом  $\delta$ . Для элемента  $XOR_4$  будут сформированы тестовые комбинации  $\langle 01 \rangle$  и  $\langle 10 \rangle$  по два раза.

2. Строки с десятичными эквивалентами 4 и 11 заполним способом  $\gamma$ . Для элемента  $XOR_3$  будут сформированы тестовые комбинации  $\langle 01 \rangle$  и  $\langle 10 \rangle$  по два раза.

3. Строки с десятичными эквивалентами 5 и 10 заполним способом  $\beta$ . Для элемента  $XOR_2$  будут сформированы тестовые комбинации  $\langle 01 \rangle$  и  $\langle 10 \rangle$  по два раза.

4. Строки с десятичными эквивалентами 6 и 9 заполним способом  $\alpha$ . Для элемента  $XOR_1$  будут сформированы тестовые комбинации  $\langle 01 \rangle$  и  $\langle 10 \rangle$  по два раза.

Итоговое заполнение таблицы покрытий представлено в таблице 5.

Таблица 5

Таблица покрытий после второго этапа заполнения

$\langle F \rangle$	$XOR_4$				$XOR_3$				$XOR_2$				$XOR_1$			
	00	01	10	11	00	01	10	11	00	01	10	11	00	01	10	11
0000	$\times (\alpha)$				$\times (\alpha)$				$\times (\alpha)$					$\times (\alpha)$		
0001	$\times (\beta)$				$\times (\beta)$					$\times (\beta)$						$\times (\beta)$
0010		$\times (\delta)$			$\times (\delta)$							$\times (\delta)$	$\times (\delta)$			
0011	$\times (\gamma)$					$\times (\gamma)$						$\times (\gamma)$				$\times (\gamma)$
0100	$\times (\gamma)$						$\times (\gamma)$		$\times (\gamma)$				$\times (\gamma)$			
0101	$\times (\beta)$							$\times (\beta)$		$\times (\beta)$						$\times (\beta)$
0110	$\times (\alpha)$							$\times (\alpha)$				$\times (\alpha)$		$\times (\alpha)$		
0111		$\times (\delta)$						$\times (\delta)$				$\times (\delta)$				$\times (\delta)$
1000			$\times (\delta)$		$\times (\delta)$				$\times (\delta)$				$\times (\delta)$			
1001				$\times (\alpha)$	$\times (\alpha)$				$\times (\alpha)$						$\times (\alpha)$	
1010				$\times (\beta)$	$\times (\beta)$						$\times (\beta)$		$\times (\beta)$			
1011				$\times (\gamma)$		$\times (\gamma)$						$\times (\gamma)$				$\times (\gamma)$
1100				$\times (\gamma)$			$\times (\gamma)$		$\times (\gamma)$				$\times (\gamma)$			
1101			$\times (\delta)$					$\times (\delta)$	$\times (\delta)$							$\times (\delta)$
1110				$\times (\beta)$				$\times (\beta)$			$\times (\beta)$		$\times (\beta)$			
1111				$\times (\alpha)$				$\times (\alpha)$				$\times (\alpha)$			$\times (\alpha)$	

Из табл. 5 следует, что для каждого элемента преобразования тестовые комбинации  $\langle 00 \rangle$  и  $\langle 11 \rangle$  формируются на шести векторах, а комбинации  $\langle 01 \rangle$  и  $\langle 10 \rangle$  – на двух. При эксплуатации самопро-

веряемого устройства потребуется обеспечивать появление всего восьми векторов на выходах объекта диагностирования. Более того, каждое из кодовых слов 1/4-кода при таком заполнении таблицы покрытий формируется при использовании четырех векторов. Но, исходя из утверждения 1, достаточно выполнить условия по формированию тестовых комбинаций элементов преобразования, что обеспечит и формирование проверяющего теста для тестера в СВК. Это наилучшее заполнение с позиции равномерности формирования тестовых комбинаций тестера 1/4-кода и элементов преобразования.

Проверяющие тесты для элементов преобразования и тестера определяются из следующих выражений:

$$T_{XOR_4} = (0000 \vee 0001 \vee 0011 \vee 0100 \vee 0101 \vee 0110)(0010 \vee 0111) \& (1000 \vee 1101)(1001 \vee 1010 \vee 1011 \vee 1100 \vee 1110 \vee 1111); \quad (9)$$

$$T_{XOR_3} = (0000 \vee 0001 \vee 0010 \vee 1000 \vee 1001 \vee 1010)(0011 \vee 1011) \& (0100 \vee 1100)(0101 \vee 0110 \vee 0111 \vee 1101 \vee 1110 \vee 1111); \quad (10)$$

$$T_{XOR_2} = (0000 \vee 0100 \vee 1000 \vee 1001 \vee 1100 \vee 1101)(0001 \vee 0101) \& (1010 \vee 1110)(0010 \vee 0011 \vee 0110 \vee 0111 \vee 1011 \vee 1111); \quad (11)$$

$$T_{XOR_1} = (0010 \vee 0100 \vee 1000 \vee 1010 \vee 1100 \vee 1110)(0000 \vee 0110) \& (1001 \vee 1111)(0001 \vee 0011 \vee 0101 \vee 0111 \vee 1011 \vee 1101); \quad (12)$$

$$T_{1/4-TSC} = (0000 \vee 0110 \vee 1001 \vee 1111)(0001 \vee 0101 \vee 1010 \vee 1110) \& (0011 \vee 0100 \vee 1011 \vee 1100)(0010 \vee 0111 \vee 1000 \vee 1101). \quad (13)$$

Проверяющий тест для СВК будет определяться по формуле

$$T_{CBK} = T_{1/4-TSC} T_{XOR_4} T_{XOR_3} T_{XOR_2} T_{XOR_1}. \quad (14)$$

Минимальная длина проверяющего теста для СВК составляет 8. Это генерация, например, комбинаций из множества, зафиксированного в утверждении 2.

Получим далее саму зависимость между значениями функций, описывающими выходы объекта диагностирования, и функций коррекции сигналов. Для этого сформируем табл. 6. В таблице получены и значения функций коррекции сигналов, исходя из следующего соображения:

$$h_i(X) = f_i(X) \oplus g_i(X) \Rightarrow g_i(X) = f_i(X) \oplus h_i(X). \quad (15)$$

Путем минимизации методом Карно получим функции, описывающие выходы БКС:

$$\begin{cases} g_4(X) = f_4(X) f_3(X) \overline{f_1(X)} \vee f_4(X) \overline{f_3(X)} \overline{f_1(X)} \vee f_3(X) f_2(X) f_1(X) \vee \overline{f_3(X)} \overline{f_2(X)} \overline{f_1(X)}; \\ g_3(X) = f_3(X) f_1(X) \vee f_3(X) f_2(X) \vee f_2(X) f_1(X); \\ g_2(X) = \overline{f_4(X)} f_1(X) \vee \overline{f_4(X)} f_2(X) \vee f_2(X) f_1(X); \\ g_1(X) = \overline{f_4(X)} \overline{f_3(X)} f_2(X) \vee \overline{f_4(X)} f_3(X) f_2(X) \vee f_3(X) \overline{f_2(X)} f_1(X) \vee \overline{f_3(X)} f_2(X) f_1(X). \end{cases} \quad (16)$$

Элементарные преобразования позволяют несколько упростить выражения в (16), хотя это не столь существенно, поскольку итоговая сложность реализации функций коррекции сигналов будет зависеть в том числе и от сложности самих функций, формируемых на выходах объекта диагностирования:

$$\begin{cases} g_4(X) = f_4(X) (f_3(X) \oplus f_1(X)) \vee f_2(X) \overline{f_3(X) \oplus f_1(X)}; \\ g_3(X) = f_3(X) \# f_2(X) \# f_1(X); \\ g_2(X) = \overline{f_4(X)} \# f_2(X) \# f_1(X); \\ g_1(X) = \overline{f_4(X)} f_3(X) \oplus f_2(X) \vee f_1(X) (f_3(X) \oplus f_2(X)). \end{cases} \quad (17)$$

Значения сигналов на выходах самопроверяемого устройства

Выходы $F(X)$				Выходы БКС				Выходы $G(X)$			
$f_4(X)$	$f_3(X)$	$f_2(X)$	$f_1(X)$	$h_4(X)$	$h_3(X)$	$h_2(X)$	$h_1(X)$	$g_4(X)$	$g_3(X)$	$g_2(X)$	$g_1(X)$
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0

Использование системы (16) или (17) позволяет синтезировать блок вычисления функций коррекции сигналов  $G(X)$ . При этом функции коррекции сигналов будут наделены свойством, которое обеспечивает тестируемость всех компонентов СВК.

#### 4. Пример синтеза схемы встроенного контроля на основе предложенного метода и некоторые результаты экспериментов по оценке структурной избыточности самопроверяемых дискретных устройств

Приведем пример использования системы (16) или (17) (они устанавливают одну и ту же зависимость) для синтеза СВК для произвольного комбинационного устройства, заданного табл. 7. Процедура синтеза, таким образом, крайне проста и не требует никакого построчного анализа работы устройства  $F(X)$ . В таблице указаны сигналы на выходах самопроверяемого устройства. Как следует из ее анализа, на все элементы преобразования и тестер поступают проверяющие тесты.

Объект диагностирования описывается следующими функциями (они получены при отдельной минимизации по методу Карно):

$$\begin{cases} f_4(X) = \overline{x_3} \overline{x_2} \overline{x_1} \vee \overline{x_4} \overline{x_3} \overline{x_2} \vee \overline{x_4} \overline{x_3} \overline{x_1} \vee \overline{x_4} \overline{x_3} \overline{x_2} \overline{x_1}; \\ f_3(X) = \overline{x_4} \overline{x_3} \overline{x_2} \overline{x_1} \vee \overline{x_4} \overline{x_2} \overline{x_1} \vee \overline{x_3} \overline{x_2} \overline{x_1} \vee \overline{x_3} \overline{x_2} \overline{x_1}; \\ f_2(X) = \overline{x_4} \overline{x_2} \overline{x_1} \vee \overline{x_4} \overline{x_3} \overline{x_1} \vee \overline{x_4} \overline{x_3} \overline{x_1} \vee \overline{x_3} \overline{x_2} \overline{x_1}; \\ f_1(X) = \overline{x_4} \overline{x_2} \overline{x_1} \vee \overline{x_4} \overline{x_2} \overline{x_1} \vee \overline{x_3} \overline{x_2} \overline{x_1} \vee \overline{x_3} \overline{x_2} \overline{x_1}. \end{cases}$$

Минимизация функций коррекции сигналов дает следующий результат:

$$\begin{cases} g_4(X) = \overline{x_4} \overline{x_3} \overline{x_2} \vee \overline{x_4} \overline{x_3} \overline{x_1} \vee \overline{x_4} \overline{x_2} \overline{x_1} \vee \overline{x_3} \overline{x_2} \overline{x_1} \vee \overline{x_4} \overline{x_3} \overline{x_2} \overline{x_1}; \\ g_3(X) = \overline{x_3} \overline{x_2} \overline{x_1} \vee \overline{x_4} \overline{x_3} \overline{x_1} \vee \overline{x_3} \overline{x_2} \overline{x_1}; \\ g_2(X) = \overline{x_4} \overline{x_2} \overline{x_1} \vee \overline{x_4} \overline{x_3} \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \overline{x_1}; \\ g_1(X) = \overline{x_4} \overline{x_2} \overline{x_1} \vee \overline{x_4} \overline{x_2} \overline{x_1} \vee \overline{x_4} \overline{x_2} \overline{x_1} \vee \overline{x_4} \overline{x_3} \overline{x_2}. \end{cases}$$

Оценим в метрике числа входов внутренних логических элементов сложность технической реализации самопроверяемого устройства (может быть использована и другая метрика, например в числе транзисторов, занимаемых устройством на кристалле, или в числе литер в дизъюнктивной нормальной

форме каждой функции из полученных выражений, однако эти показатели имеют корреляцию с числом входов элементов) [16]. Учтем, что показатель сложности реализации элемента преобразования  $L_{XOR} = 6$  (вх.) [16], а тестера (см. рис. 2) –  $L_{1/4-TSC} = 16$  (вх.). Сложность объекта диагностирования оценивается величиной  $L_{F(X)} = 66$  (вх.). Сложность блока вычисления функций коррекции  $L_{G(X)} = 60$  (вх.). Итого сложность самопроверяемого устройства оценивается величиной  $L_{CED} = 66 + 60 + 4 \cdot 6 + 16 = 166$  (вх.).

Таблица 7

Сигналы на выходах самопроверяемого устройства и тестовые комбинации элементов преобразования

Входы <X>				Выходы $F(X)$				Выходы $G(X)$				Выходы БКС				Тестовые комбинации элементов преобразования			
$x_4$	$x_3$	$x_2$	$x_1$	$f_4(X)$	$f_3(X)$	$f_2(X)$	$f_1(X)$	$g_4(X)$	$g_3(X)$	$g_2(X)$	$g_1(X)$	$h_4(X)$	$h_3(X)$	$h_2(X)$	$h_1(X)$	$XOR_4$	$XOR_3$	$XOR_2$	$XOR_1$
0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	11	10	00	00
0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	01	00	11	00
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	00	00	01	11
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	00	00	00	01
0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	10	00	00	00
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	11	11	11	10
0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	11	11	11	10
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	00	00	00	01
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	10	00	00	00
1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	00	01	11	11
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	00	00	00	01
1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	11	11	10	00
1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	01	00	11	00
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	00	11	01	11
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	01	11	11	11
1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	00	10	00	00

Если сравнивать со стандартным методом дублирования, то получаем следующую величину:  $L_D = 2 \cdot 66 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 12 = 176$  (вх.). Здесь учтено, что требуются три инвертора с показателями сложности реализации  $L_{NOT} = 1$  (вх.) и 3 модуля сжатия парафазных сигналов с показателями сложности реализации  $L_{TRC} = 12$  (вх.) [16].

По показателю сложности реализации самопроверяемое устройство, построенное по предложенному методу, имеет выигрыш перед устройством, синтезированным с СВК по методу дублирования: показатель сложности реализации для нового метода составил 96,5% от показателя сложности реализации устройства с СВК на основе дублирования. Для устройств  $F(X)$  с различной конфигурацией элементов и большим числом выходов выигрыш может оказаться гораздо существеннее. Например, в табл. 8 приведены некоторые результаты экспериментов по оценке показателя структурной избыточности самопроверяемых устройств, реализованных по предложенному в статье методу (см. систему функций (17)), для тестовых комбинационных схем из набора MCNC Benchmarks [29].

Для каждой из 25 представленных в табл. 8 тестовых схем  $F(X)$  была синтезирована СВК на основе ЛКС с применением системы функций (17). Выходы  $F(X)$  разбивались последовательно в их описании в тестовой схеме, представленной в формате \*.pla (аналог таблицы истинности), на группы по четыре выхода в каждой; оставшиеся при разбиении выходы выделялись в неполную группу «свободных» выходов. Для групп из четырех выходов строилась СВК на основе ЛКС с применением 1/4-кода, а «свободные» выходы контролировались на основе метода дублирования [9, 16, 18]. Контрольные выходы отдельных подсхем контроля сжимались с использованием двухвходовых модулей сжатия парафазных сигналов  $TRC$  (two-rail checkers) [30] для получения единственного контрольного выхода.

Тестовые схемы и файлы-описания элементов СВК обрабатывались с помощью известного интерпретатора SIS и библиотеки функциональных элементов stdcell2\_2.genlib [31]. Это позволило определить показатели сложности структурной реализации устройств ( $L$  – площади, занимаемой устройством на

кристалле) в условных единицах библиотеки функциональных элементов stdcell2\_2.genlib. Типовые элементы СВК (см. рис. 3) имеют показатели сложности реализации  $L_{1/4-TSC} = 256$  (усл. ед.) и  $L_{XOR} = 192$  (усл. ед.).

Таблица 8

**Результаты по оценке показателей структурной избыточности самопроверяемых устройств  
на основе предлагаемого метода**

Тестовая схема	Число входов	Число выходов	Число полных групп	Число «свободных» выходов	Формула тестера	Значения показателя площади, $L$ (усл. ед.)						$\mu$ , %
						$F(X)$	$G(X)$	Тестеры	БКС	На основе ЛКС	На основе дублирования	
sqrt8	8	4	1	0	1/4-TSC	1 160	1 232	256	160	2 808	2 960	94,865
sao2	10	4	1	0	1/4-TSC	3 056	2 568	256	160	6 040	6 752	89,455
dist	8	5	1	1	1/4-TSC+TRC	9 976	6 448	448	160	17 032	20 800	81,885
newcwp	4	5	1	1	1/4-TSC+TRC	440	584	448	160	1 632	1 728	94,444
root	8	5	1	1	1/4-TSC+TRC	6 152	2 752	448	160	9 512	13 152	72,324
max512	9	6	1	2	1/4-TSC+2×TRC	15 016	7 224	640	160	23 040	31 088	74,112
dc1	4	7	1	3	1/4-TSC+3×TRC	808	632	832	160	2 432	2 880	84,444
dekoder	4	7	1	3	1/4-TSC+3×TRC	1 128	488	832	160	2 608	3 520	74,091
wim	4	7	1	3	1/4-TSC+3×TRC	1 104	496	832	160	2 592	3 472	74,654
newapla2	6	7	1	3	1/4-TSC+3×TRC	600	480	832	120	2 032	2 464	82,468
dc2	8	7	1	3	1/4-TSC+3×TRC	2 616	2 440	832	160	6 048	6 496	93,103
newbyte	5	8	2	0	2×1/4-TSC+TRC	592	384	704	560	2 240	2 656	84,337
mlp4	8	8	2	0	2×1/4-TSC+TRC	7 504	7 520	704	640	16 368	16 480	99,32
f51m	8	8	2	0	2×1/4-TSC+TRC	5 176	5 528	704	640	12 048	11 824	101,894
inc	7	9	2	1	2×1/4-TSC+2×TRC	3 160	1 712	896	640	6 408	8 000	80,1
dk27	9	9	2	1	2×1/4-TSC+2×TRC	1 592	768	896	640	3 896	4 864	80,099
newcpla2	7	10	2	2	2×1/4-TSC+3×TRC	1 896	1 392	1 088	640	5 016	5 680	88,31
sqr6	6	12	3	0	3×1/4-TSC+2×TRC	2 896	2 672	1 152	1 400	8 120	8 096	100,296
m1	6	12	3	0	3×1/4-TSC+2×TRC	2 208	1 096	1 152	1 440	5 896	6 720	87,738
p82	5	14	3	2	3×1/4-TSC+4×TRC	2 432	1 712	1 536	1 400	7 080	7 584	93,354
m2	8	16	4	0	4×1/4-TSC+3×TRC	7 408	4 288	1 600	2 560	15 856	17 952	88,324
m3	8	16	4	0	4×1/4-TSC+3×TRC	8 768	5 536	1 600	2 560	18 464	20 672	89,319
m4	8	16	4	0	4×1/4-TSC+3×TRC	17 216	8 344	1 600	2 560	29 720	37 568	79,11
tms	8	16	4	0	4×1/4-TSC+3×TRC	6 144	3 928	1 600	2 520	14 192	15 424	92,012
max128	7	24	6	0	6×1/4-TSC+5×TRC	13 384	4 528	2 496	4 320	24 728	31 568	78,332
Среднее значение												86,336

Для каждой тестовой схемы был вычислен относительный показатель структурной избыточности самопроверяемого устройства – доля площади, занимаемой устройством с СВК на основе ЛКС и 1/4-кода на кристалле, от площади, занимаемой устройством с СВК на основе дублирования (показатель  $\mu$ , %). В среднем для 25 представленных схем он составил 86,336%. Для 17 схем показатель  $\mu < 90\%$ , среди которых 6 схем имеют показатель  $\mu < 80\%$ . Все это говорит о «хороших» показателях структурной избыточности самопроверяемых устройств, синтезируемых по разработанному методу.

### Заключение

До сих пор было известно 72 способа установления зависимости между значениями функций, формируемых на выходах блоков  $G(X)$  и  $F(X)$ , в СВК на основе ЛКС для группы из четырех выходов при контроле вычислений по 1/4-коду [27]. При этом в БКС использовалось наименьшее достаточное количество элементов преобразования – три из четырех. Результаты исследований, приведенные в настоящей статье, позволяют расширить число способов синтеза СВК на основе ЛКС с применением 1/4-кода и открыть более 4,2 млрд способов установления зависимостей между значениями функций, формируемых на выходах блоков  $G(X)$  и  $F(X)$ , при использовании в БКС четырех элементов преобразования. Естественно, вручную получить их все не только трудоемко, но и нецелесообразно. В статье



показан принцип, позволяющий установить зависимости между значениями функций, формируемых на выходах блоков  $G(X)$  и  $F(X)$ , с учетом обеспечения формирования проверяющих тестов всех компонентов СВК. Данный принцип открывает группу методов синтеза СВК на основе ЛКС с применением равновесного 1/4-кода.

В представленном в статье способе установления зависимости минимальная длина проверяющего теста равна восьми комбинациям из шестнадцати возможных. Таким образом, в процессе эксплуатации самопроверяемого устройства потребуется формировать на выходах объекта диагностирования половину возможных четырехбитных векторов для каждой контролируемой группы для обеспечения полной проверки СВК. Это, в свою очередь, накладывает ограничения на число входов объекта диагностирования – оно должно быть  $t \geq 3$ . Причем даже сам случай  $t = 3$  даст возможность генерации проверяющего теста для СВК только в крайне редких случаях. На практике число входов должно быть  $t \geq 4$ . И чем больше входов будет у устройства, тем более просто будет сформировать проверяющий тест для СВК. Конечно, здесь требуют рассмотрения и отдельные частные случаи для устройств: например, таких устройств, на входы которых поступает неполное множество наборов входных аргументов.

Отметим также, что для различных структур объектов диагностирования использование преобразования максимального числа сигналов в БКС будет давать различные по показателям сложности СВК. Здесь нельзя однозначно сказать, будет ли эффективным применение преобразований всех сигналов или только трех из четырех [27]. В каждом конкретном случае потребуется моделирование работы устройства до разработки его самопроверяемой реализации. Преобразование четырех сигналов в БКС может дать и более простые реализации, чем преобразование только трех из них, в том числе может позволить решить задачу обеспечения самопроверяемости в том случае, если этого невозможно добиться использованием преобразования только трех сигналов из четырех.

Дальнейшие исследования применения самого принципа установления зависимостей между значениями функций, формируемых на выходах блоков  $G(X)$  и  $F(X)$ , при организации СВК на основе ЛКС и 1/4-кода могут быть сосредоточены на поиске таких способов, в которых некоторые функции коррекции сигналов окажутся одинаковыми, что уменьшит показатели сложности реализации блока  $G(X)$ . Кроме того, интересными могут оказаться такие способы, которые дают равномерное (или близкое к таковому) распределение числа формируемых комбинаций на входах элементов преобразования и тестера для упрощения процедуры их тестирования в процессе эксплуатации самопроверяемого устройства. Интересными являются и исследования, связанные с обобщениями предложенного в статье принципа и использования его для других равновесных кодов, например кода «1 из 5», и сравнения с известными результатами использования данного кода для синтеза СВК на основе ЛКС [32]. В том числе могут быть учтены результаты работы [33], в которой путем коррекции всех сигналов в группе из шести выходов объекта диагностирования на основе ЛКС осуществляется контроль вычислений с применением взвешенных кодов с суммированием в кольце вычетов по модулю  $M = 4$ . Здесь уже рассмотрено применение разделимых блочных кодов при синтезе СВК на основе ЛКС. К слову, число способов синтеза СВК при использовании разделимых кодов также велико, что позволяет синтезировать различные по своим характеристикам самопроверяемые устройства [34].

В заключение отметим, что для построения полностью самопроверяемого устройства потребуется также покрыть ошибки, вызываемые неисправностями из рассматриваемой модели, на выходах объекта диагностирования с помощью 1/4-кода. Это требует исключения всех двукратных симметричных ошибок, возникающих в векторе  $\langle f_4(X) f_3(X) f_2(X) f_1(X) \rangle$ . Принципам выделения групп выходов, исключаяющих такого рода ошибки, а также преобразованию исходных структур комбинационных устройств в контролепригодные структуры с учетом данного свойства посвящены статьи [35, 36], развивающие идеи работ [37–40].

Использование представленного в статье принципа установления зависимостей между значениями функций, формируемых на выходах блоков  $G(X)$  и  $F(X)$ , при организации СВК на основе ЛКС и 1/4-кода перспективно при построении самопроверяемых дискретных устройств на различной, в том числе программируемой, элементной базе.

## Список источников

1. Kharchenko V., Kondratenko Yu., Kacprzyk J. Green IT Engineering: Concepts, Models, Complex Systems Architectures. Springer, 2017. 305 p. doi: 10.1007/978-3-319-44162-7 (Springer Book series “Studies in Systems, Decision and Control”; v. 74).
2. Mikoni S. Top Level Diagnostic Models of Complex Objects // Lecture Notes in Networks and Systems. 2022. V. 442. P. 238–249. doi: 10.1007/978-3-030-98832-6\_21
3. Gharibi W., Hahanov V., Chumachenko S., Litvinova E., Hahanov I., Hahanova I. Vector-Logic Computing for Faults-As-Address Deductive Simulation // IAES International Journal of Robotics and Automation (IJRA). 2023. V. 12 (3). P. 274–288. doi: 10.11591/ijra.v12i3.pp274-288
4. Hahanov V., Litvinova E., Davitadze Z., Chumachenko S., Devadze Z., Abdullaev V.H. Truth Table Based Intelligent Computing // 2024 31st International Conference on Mixed Design of Integrated Circuits and System (MIXDES), 27–28 June 2024. Gdansk, 2024. P. 199–204. doi: 10.23919/MIXDES62605.2024.10614035
5. Ubar R., Raik J., Jenihhin M., Jutman A. Structural Decision Diagrams in Digital Test: Theory and Applications. Birkhäuser, 2024, XIII + 595 p. doi: 10.1007/978-3-031-44734-1 (Computer Science Foundations and Applied Logic).
6. Nicolaidis M., Zorian Y. On-Line Testing for VLSI – A Compendium of Approaches // Journal of Electronic Testing: Theory and Applications. 1998. V. 12. P. 7–20. doi: 10.1023/A:1008244815697
7. Mitra S., McCluskey E.J. Which Concurrent Error Detection Scheme to Choose? // Proc. of International Test Conference. 2000. USA. Atlantic City, NJ. 03–05 October 2000. P. 985–994. doi: 10.1109/TEST.2000.894311
8. Sahana A.R., Chiraag V., Suresh G., Thejaswini P., Nandi S. Application of Error Detection and Correction Techniques to Self-Checking VLSI Systems: An Overview // Proc. of 2023 IEEE Guwahati Subsection Conference (GCON). Guwahati. 2023. doi: 10.1109/GCON58516.2023.10183449
9. Согомонян Е.С., Слабаков Е.В. Самопроверяемые устройства и отказоустойчивые системы. М. : Радио и связь, 1989. 208 с.
10. Dmitriev A., Saposhnikov V., Saposhnikov V., Goessel M. New Self-Dual Circuits for Error Detection and Testing // VLSI Design. 2000. V. 11, is. 1. P. 1–21. doi: 10.1155/2000/84720
11. Ефанов Д.В. Особенности реализации самопроверяемых структур на основе метода инвертирования данных и линейных кодов // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2023. № 65. С. 126–138. doi: 10.17223/19988605/65/13
12. Das D., Toubia N.A. Synthesis of Circuits with Low-Cost Concurrent Error Detection Based on Bose-Lin Codes // Journal of Electronic Testing: Theory and Applications. 1999. V. 15, is. 1-2. P. 145–155. doi: 10.1023/A:1008344603814
13. Tshagharyan G., Harutyunyan G., Shoukourian S., Zorian Y. Experimental Study on Hamming and Hsiao Codes in the Context of Embedded Applications // Proc. of 15th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2017). Novi Sad, Serbia. Sept. 29–Oct. 2. 2017. P. 25–28. doi: 10.1109/EWDTS.2017.8110065
14. Ефанов Д.В., Погодина Т.С. Исследование свойств самодвойственных комбинационных устройств с контролем вычислений на основе кодов Хэмминга // Информатика и автоматизация. 2023. Т. 22, № 2. С. 349–392. doi: 10.15622/ia.22.2.5
15. Ефанов Д.В. Особенности использования кодов Хэмминга при синтезе самопроверяемых цифровых устройств на основе метода инвертирования данных // Известия высших учебных заведений. Электроника. 2024. Т. 29, № 3. С. 379–392. doi: 10.24151/1561-5405-2024-29-3-379-392
16. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В. Самопроверяемые дискретные устройства. СПб. : Энергоатомиздат, 1992. 224 с.
17. Piestrak S.J. Design of Self-Testing Checkers for Unidirectional Error Detecting Codes. Wrocław : Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 1995. 111 s.
18. Gössel M., Ocheretny V., Sogomonyan E., Marienfeld D. New Methods of Concurrent Checking. Ed. 1. Dordrecht : Springer Science + Business Media B.V., 2008. 184 p.
19. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Дмитриев А.В., Морозов А.В., Гессель М. Организация функционального контроля комбинационных схем методом логического дополнения // Электронное моделирование. 2002. Т. 24, № 6. С. 52–66.
20. Das D.K., Roy S.S., Dmitriev A., Morozov A., Gössel M. Constraint Don't Cares for Optimizing Designs for Concurrent Checking by 1-out-of-3 Codes // Proc. of the 10th International Workshops on Boolean Problems. Freiburg. Germany. September, 2012. P. 33–40.
21. Гессель М., Морозов А.В., Сапожников В.В., Сапожников Вл.В. Контроль комбинационных схем методом логического дополнения // Автоматика и телемеханика. 2005. № 8. С. 161–172.
22. Goessel M., Saposhnikov V., Saposhnikov V., Dmitriev A. A New Method for Concurrent Checking by Use of a 1-out-of-4 Code // Proc. of the 6th IEEE International On-line Testing Workshop, 3–5 July 2000. Palma de Mallorca, Spain. P. 147–152.
23. Пархоменко П.П., Согомонян Е.С. Основы технической диагностики (оптимизация алгоритмов диагностирования, аппаратные средства). М. : Энергоатомиздат, 1981. 320 с.
24. Аксёнова Г.П. Необходимые и достаточные условия построения полностью проверяемых схем свертки по модулю 2 // Автоматика и телемеханика. 1979. № 9. С. 126–135.
25. Ефанов Д.В. Некоторые особенности обнаружения ошибок равномерными неразделимыми кодами // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2019. Т. 62, № 7. С. 621–631. doi: 10.17586/0021-3454-2019-62-7-621-631
26. Saposhnikov V.V., Saposhnikov V.I., Morozov A., Goessel M., Osadchy G. Design of totally self-checking combinational circuits by use of complementary circuits // Proc. of 2th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2004). Crimea, Ukraine. Sept. 15–17, 2004. P. 83–87.

27. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Ефанов Д.В., Пивоваров Д.В. Метод логического дополнения на основе равновесного кода «1 из 4» для построения полностью самопроверяемых структур систем функционального контроля // Электронное моделирование. 2017. Т. 39, № 2. С. 15–34.
28. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Ефанов Д.В., Пивоваров Д.В. Организация контроля комбинационных схем на основе метода логического дополнения до равновесного кода «1 из 4» // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2018. Т. 61, № 12. С. 1025–1035. doi: 10.17586/0021-3454-2018-61-12-1025-1035
29. Collection of Digital Design Benchmarks. URL: <https://ddd.fit.cvut.cz/www/prj/Benchmarks/> (accessed: 07.11.2024).
30. Carter W.C., Duke K.A., Schneider P.R. Self-Checking Error Checker for Two-Rail Coded Data // United States Patent Office. Filed July 25. 1968; ser. no. 747533; patented Jan. 26, 1971. New York. 10 p.
31. Sentovich E.M., Singh K.J., Moon C., Savoj H., Brayton R.K., Sangiovanni-Vincentelli A. Sequential Circuit Design Using Synthesis and Optimization // Proc. IEEE International Conference on Computer Design: VLSI in Computers & Processors. 11–14 Oct. 1992. Cambridge, MA, USA. P. 328–333. doi: 10.1109/ICCD.1992.276282
32. Пивоваров Д.В. Организация систем функционального контроля комбинационных логических схем на основе метода логического дополнения по равновесному коду «1 из 5» // Автоматика на транспорте. 2017. Т. 3, № 4. С. 605–624.
33. Ефанов Д.В., Елина Е.И. Синтез самопроверяемых цифровых устройств на основе логической коррекции сигналов с применением взвешенных кодов Боуза-Лина // Проблемы управления. 2024. № 4. С. 26–43. doi: 10.25728/pu.2024.4.3
34. Efanov D.V., Yelina Y.I. Investigation of Ways of Synthesizing Concurrent Error-Detection Circuits Based on Boolean Signal Correction Using Uniform Separable Codes // Russian Microelectronics. 2024. V. 53 (5). P. 471–482. doi: 10.1134/S1063739724600456
35. Efanov D.V., Sapozhnikov V.V., Sapozhnikov V.I. Organization of a Fully Self-Checking Structure of a Combinational Device Based on Searching for Groups of Symmetrically Independent Outputs // Automatic Control and Computer Sciences. 2020. V. 54, is. 4. P. 279–290. doi: 10.3103/S0146411620040045
36. Ефанов Д.В. Синтез самопроверяемых вычислительных устройств на основе полной системы особых групп выходов объекта диагностирования // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2023. Т. 66, № 5. С. 355–372. doi: 10.17586/0021-3454-2023-66-5-355-372
37. Sogomonyan E.S., Gössel M. Design of Self-Testing and On-Line Fault Detection Combinational Circuits with Weakly Independent Outputs, Journal of Electronic Testing: Theory and Applications. 1993. V. 4, is. 4. P. 267–281. doi: 10.1007/BF00971975
38. Matrosova A.Yu., Ostanin S.A. Self-Checking Synchronous Sequential Circuit Design for Unidirectional Error // Proc. of the IEEE European Test Workshop (ETW'98), 27–29 May 1998, Sitges, Barcelona, Spain.
39. Saposhnikov V.V., Morosov A., Saposhnikov V.I., Gössel M. A New Design Method for Self-Checking Unidirectional Combinational Circuits // Journal of Electronic Testing: Theory and Applications. 1998. V. 12, is. 1-2. P. 41–53. doi: 10.1023/A:1008257118423
40. Morosow A., Saposhnikov V.V., Saposhnikov V.I., Goessel M. Self-Checking Combinational Circuits with Unidirectionally Independent Outputs // VLSI Design. 1998. V. 5, is. 4. P. 333–345. doi: 10.1155/1998/20389

## References

1. Kharchenko, V., Kondratenko, Yu. & Kacprzyk, J. (2017) *Green IT Engineering: Concepts, Models, Complex Systems Architectures*. Springer. DOI: 10.1007/978-3-319-44162-7
2. Mikoni, S. (2022) Top Level Diagnostic Models of Complex Objects. *Lecture Notes in Networks and Systems*. 442. pp. 238–249. DOI: 10.1007/978-3-030-98832-6\_21
3. Gharibi, W., Hahanov, V., Chumachenko, S., Litvinova, E., Hahanov, I. & Hahanova, I. (2023) Vector-Logic Computing for Faults-As-Address Deductive Simulation. *IAES International Journal of Robotics and Automation (IJRA)*. 12(3). pp. 274–288. DOI: 10.11591/ijra.v12i3.pp274-288
4. Hahanov, V., Litvinova, E., Davitadze, Z., Chumachenko, S., Devadze, Z. & Abdullaev, V.H. (2024) Truth Table Based Intelligent Computing. *31st International Conference on Mixed Design of Integrated Circuits and System (MIXDES)*. June 27–28, 2024. Gdansk, Poland. DOI: 10.23919/MIXDES62605.2024.10614035
5. Ubar, R., Raik, J., Jenihhin, M. & Jutman, A. (2024) *Structural Decision Diagrams in Digital Test: Theory and Applications*, Birkhäuser: Springer. DOI: 10.1007/978-3-031-44734-1
6. Nicolaidis, M. & Zorian, Y. (1998) On-Line Testing for VLSI – A Compendium of Approaches. *Journal of Electronic Testing: Theory and Applications*. 12. pp. 7–20. DOI: 10.1023/A:1008244815697
7. Mitra, S. & McCluskey, E.J. (2000) Which Concurrent Error Detection Scheme to Choose? *Proc. of International Test Conference*. USA, Atlantic City, NJ, October 3–5, 2000. pp. 985–994. DOI: 10.1109/TEST.2000.894311
8. Sahana, A.R., Chiraag, V., Suresh, G., Thejaswini, P. & Nandi, S. (2023) Application of Error Detection and Correction Techniques to Self-Checking VLSI Systems: An Overview. *Proceedings of 2023 IEEE Guwahati Subsection Conference (GCON)*. Guwahati. DOI: 10.1109/GCON58516.2023.10183449
9. Sogomonyan, E.S. & Slabakov, E.V. (1989) *Samoproveryaemye ustroystva i otkazoustoychivyye sistemy* [The Self-Checking Devices and Fault-Tolerant Systems]. Moscow: Radio i svyaz'.
10. Dmitriev, A., Saposhnikov, V., Saposhnikov, V. & Goessel, M. (2000) New Self-Dual Circuits for Error Detection and Testing. *VLSI Design*. 11(1). pp. 1–21. DOI: 10.1155/2000/84720

11. Efanov, D.V. (2023) The Self-Checking Structures Implementation Features Based on the Inverting Data and Linear Block Code Method. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 65. pp. 126–138. DOI: 10.17223/19988605/65/13
12. Das, D. & Touba, N.A. (1999) Synthesis of Circuits with Low-Cost Concurrent Error Detection Based on Bose-Lin Codes. *Journal of Electronic Testing: Theory and Applications*. 15(1-2). pp. 145–155. DOI: 10.1023/A:1008344603814
13. Tshagharyan, G., Harutyunyan, G., Shoukourian, S. & Zorian, Y. (2017) Experimental Study on Hamming and Hsiao Codes in the Context of Embedded Applications. *Proceedings of 15th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2017)*. Novi Sad, Serbia. September 29 – October 2, 2017. pp. 25–28. DOI: 10.1109/EWDTS.2017.8110065
14. Efanov, D.V. & Pogodina, T.S. (2023) Issledovanie svoystv samodvoystvennykh kombinatsionnykh ustroystv s kontrolem vychisleniy na osnove kodov Khemminga [Properties Investigation of Self-Dual Combinational Devices with Calculation Control Based on Hamming Codes]. *Informatika i avtomatizatsiya*. 22(2). pp. 349–392. DOI: 10.15622/ia.22.2.5
15. Efanov, D.V. (2024) Osobennosti ispol'zovaniya kodov Khemminga pri sinteze samoproveryaemykh tsifrovyykh ustroystv na osnove metoda invertirovaniya dannykh [Special Aspects of Hamming Codes Use in the Self-Checking Digital Devices Synthesis Based on the Data Inversion Method]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Elektronika*. 29(3). pp. 379–392. DOI: 10.24151/1561-5405-2024-29-3-379-392
16. Sapozhnikov, V.V. & Sapozhnikov, V.I. (1992) *Samoproveryaemye diskretnye ustroystva* [Self-Checking Digital Devices]. St. Petersburg: Energoatomizdat.
17. Piestrak, S.J. (1995) *Design of Self-Testing Checkers for Unidirectional Error Detecting Codes*. Wrocław: Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej.
18. Gössel, M., Ocheretny, V., Sogomonyan, E. & Marienfeld, D. (2008) *New Methods of Concurrent Checking*. Dordrecht: Springer.
19. Sapozhnikov, V.V., Sapozhnikov, V.I., Dmitriev, A.V., Morozov, A.V. & Goessel, M. (2002) Organizatsiya funktsional'nogo kontrolya kombinatsionnykh skhem metodom logicheskogo dopolneniya [Organization of Functional Control of Combinational Circuits by the Method of Boolean Complement]. *Elektronnoe modelirovanie*. 24(6). pp. 52–66.
20. Das, D.K., Roy S.S., Dmitriev, A., Morozov, A. & Gössel, M. (2012) Constraint Don't Cares for Optimizing Designs for Concurrent Checking by 1-out-of-3 Codes. *Proceedings of the 10th International Workshops on Boolean Problems*. Freiberg, Germany. September. pp. 33–40.
21. Goessel, M., Morozov, A.V., Sapozhnikov, V.V. & Sapozhnikov, V.I. (2005) Checking Combinational Circuits by the Method of Logic Complement. *Automation and Remote Control*. 8. pp. 161–172.
22. Goessel, M., Saposhnikov, V.I., Saposhnikov, V. & Dmitriev, A. (2000) A New Method for Concurrent Checking by Use of a 1-out-of-4 Code. *Proceedings of the 6th IEEE International On-line Testing Workshop*. July 3–5, 2000. Palma de Mallorca, Spain. pp. 147–152.
23. Parkhomenko, P.P. & Sogomonyan, E.S. (1981) *Osnovy tekhnicheskoy diagnostiki (optimizatsiya algoritmov diagnostirovaniya, apparaturnye sredstva)* [Fundamentals of technical diagnostics (optimization of diagnostic algorithms, hardware)]. Moscow: Energoatomizdat.
24. Aksenova, G.P. (1979) Necessary and Sufficient Conditions for Design of Completely Checkable Modulo 2 Convolution Circuits. *Automation and Remote Control*. 9. pp. 126–135.
25. Efanov, D.V. (2019) Some Features of Error Detection by Uniform Indivisible Codes. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Priborostroenie – Journal of Instrument Engineering*. 62(7). pp. 621–631. DOI: 10.17586/0021-3454-2019-62-7-621-631
26. Saposhnikov, V.V., Saposhnikov, V.I., Morozov, A., Goessel, M. & Osadchy, G. (2004) Design of totally self-checking combinational circuits by use of complementary circuits. *Proceedings of 2th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2004)*. Crimea, Ukraine. September 15–17. pp. 83–87.
27. Sapozhnikov, V.V., Sapozhnikov, V.I., Efanov, D.V. & Pivovarov, D.V. (2017) Boolean Complement Method Based on Constant-Weight Code "1-out-of-4" for Formation of Totally Self-Checking Concurrent Error Detection Systems. *Elektronnoe modelirovanie*. 39(2). pp. 15–34.
28. Sapozhnikov, V.V., Sapozhnikov, V.I., Efanov, D.V. & Pivovarov, D.V. (2018) Organization of Control of Combinational Circuits Based on the Method of Logical Complement to Equilibrium 1-out-of-4 Code. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Priborostroenie – Journal of Instrument Engineering*. vol. 61. is. 12. pp. 1025–1035. DOI: 10.17586/0021-3454-2018-61-12-1025-1035
29. *Collection of Digital Design Benchmarks*. [Online] Available from: <https://ddd.fit.cvut.cz/www/prj/Benchmarks/> (Accessed: 7th November 2024).
30. Carter, W.C., Duke, K.A., & Schneider, P.R. (1971) *Self-Checking Error Checker for Two-Rail Coded Data*. United States Patent Office, filed July 25, 1968, ser. No. 747533. Patented Jan. 26. New York.
31. Sentovich, E.M., Singh, K.J., Moon, C., Savoj, H., Brayton, R.K. & Sangiovanni-Vincentelli, A. (1992) Sequential Circuit Design Using Synthesis and Optimization. *Proceedings IEEE International Conference on Computer Design: VLSI in Computers & Processors*. October 11–14, 1992. Cambridge, MA, USA. pp. 328–333. DOI: 10.1109/ICCD.1992.276282
32. Pivovarov, D.V. (2017) Organization of Concurrent Error-Detection Systems of Combinational Logical Circuits on the Basis of Boolean Complement Method with "1-out-of-5" Constant-Weight Code. *Avtomatika na transporte – Transport Automation Research*. 3(4). pp. 605–624.
33. Efanov, D.V. & Yelina, Y.I. (2024) Design of Self-Checking Digital Devices with Boolean Signals Correction Using Weight-Based Bose-Lin Codes. *Problemy upravleniya*. 4. pp. 26–43. DOI: 10.25728/pu.2024.4.3

34. Efanov, D.V. & Yelina, Y.I. (2024) Investigation of Ways of Synthesizing Concurrent Error-Detection Circuits Based on Boolean Signal Correction Using Uniform Separable Codes. *Russian Microelectronics*. 53(5). pp. 471–482. DOI: 10.1134/S1063739724600456
35. Efanov, D.V., Sapozhnikov, V.V. & Sapozhnikov, V.I. (2020) Organization of a Fully Self-Checking Structure of a Combinational Device Based on Searching for Groups of Symmetrically Independent Outputs. *Automatic Control and Computer Sciences*. 54(4). pp. 279–290. DOI: 10.3103/S0146411620040045
36. Efanov, D.V. (2023) Synthesis of Self-Checking Computing Devices Based on a Complete System of Special Groups of the Diagnostic Object Outputs. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Priborostroenie – Journal of Instrument Engineering*. 66(5). pp. 355–372. DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-5-355-372
37. Sogomonyan, E.S. & Gössel, M. (1993) Design of Self-Testing and On-Line Fault Detection Combinational Circuits with Weakly Independent Outputs. *Journal of Electronic Testing: Theory and Applications*. 4(4). pp. 267–281. DOI: 10.1007/BF00971975
38. Matrosova, A.Yu. & Ostanin, S.A. (1998) Self-Checking Synchronous Sequential Circuit Design for Unidirectional Error. *Proceedings of the IEEE European Test Workshop (ETW'98)*. May 27–29, 1998. Sitges, Barcelona, Spain.
39. Saposhnikov, V.V., Morosov, A., Saposhnikov, V.I. & Gössel, M. (1998) A New Design Method for Self-Checking Unidirectional Combinational Circuits. *Journal of Electronic Testing: Theory and Applications*. 12(1-2). pp. 41–53. DOI: 10.1023/A:1008257118423
40. Morosow, A, Saposhnikov, V.V., Saposhnikov, V.I. & Goessel, M. (1998) Self-Checking Combinational Circuits with Unidirectionally Independent Outputs. *VLSI Design*. 5(4). pp. 333–345. DOI: 10.1155/1998/20389

**Информация об авторе:**

**Ефанов Дмитрий Викторович** – доктор технических наук, профессор, действительный член Международной Академии транспорта, член Института инженеров электротехники и электроники (IEEE); профессор Высшей школы транспорта Института машиностроения, материалов и транспорта, профессор Высшей школы управления кибер-физическими системами Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (Санкт-Петербург, Россия); профессор кафедры автоматизации, телемеханики и связи на железнодорожном транспорте Российского университета транспорта (Москва, Россия); профессор кафедры автоматизации и телемеханики Ташкентского государственного транспортного университета (Ташкент, Узбекистан). E-mail: TrES-4b@yandex.ru

**Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.**

**Information about the author:**

**Efanov Dmitry V.** (Doctor of Technical Sciences, Professor, Full-member of the International Transport Academy, IEEE member, Professor of Transport Higher School of Mechanical Engineering, Material and Transport Institute and Professor at Peter the Great Saint Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation; Professor of Automation, Remote Control and Communication on Railway Transport Department, Russian University of Transport Moscow, Russian Federation; Professor of Automation and Remote Control Department of Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: TrES-4b@yandex.ru

**The author declares no conflicts of interests.**

*Поступила в редакцию 15.03.2025; принята к публикации 02.09.2025*

*Received 15.03.2025; accepted for publication 02.09.2025*

Научная статья

УДК 519.7

doi: 10.17223/19988605/72/13

**О возможностях замены произвольных тестовых пар, обнаруживающих робастно тестируемые неисправности задержек пути, на тестовые пары, соседние по входной переменной пути****Анжела Юрьевна Матросова<sup>1</sup>, Вячеслав Зиновьевич Тычинский<sup>2</sup>**<sup>1, 2</sup> Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия<sup>1</sup> mau11@yandex.ru<sup>2</sup> tvz.041@yandex.ru

**Аннотация.** Обнаружение робастно тестируемых неисправностей задержек путей является важным этапом тестирования интегральных схем высокой производительности. Ранее было показано, что использование тестовых пар булевых векторов, соседних по входной переменной пути, позволяет существенно сокращать потребление мощности при тестировании таких неисправностей. Тестовые пары строятся на основе использования булевой разности пути. В данной работе выясняются возможности замены произвольных тестовых пар, обнаруживающих робастно тестируемые неисправности задержек пути, тестовыми парами, состоящими из булевых векторов, соседних по входной переменной пути. Такая замена ориентирована на снижение потребляемой мощности при тестировании по сравнению с последовательностями, построенными из тестовых пар, состоящих из векторов с произвольным расстоянием по Хеммингу.

**Ключевые слова:** комбинационные схемы; эквивалентная нормальная форма (ЭНФ); робастно тестируемые неисправности задержек пути; булева разность пути.

**Для цитирования:** Матросова А.Ю., Тычинский В.З. О возможностях замены произвольных тестовых пар, обнаруживающих робастно тестируемые неисправности задержек пути, на тестовые пары, соседние по входной переменной пути // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2025. № 72. С. 134–143. doi: 10.17223/19988605/72/13

Original article

doi: 10.17223/19988605/72/13

**About changing arbitrary test pairs detecting robust testable PDFs for ones consisting of neighbor Boolean vectors****Anzhela Yu. Matrosova<sup>1</sup>, Vyacheslav Z. Tychinskiy<sup>2</sup>**<sup>1, 2</sup> National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation<sup>1</sup> mau11@yandex.ru<sup>2</sup> tvz.041@yandex.ru

**Abstract.** Detection of robust testable path delay faults is an important step in testing of high-performance integrated circuits. It has been previously shown that using test pairs of Boolean vectors adjacent in the input path variable allows a significant reduction of power consumption when testing such faults. These test pairs are derived from path Boolean difference/ In this paper, we investigate a possibility of replacing of arbitrary test pairs that detect robust testable path delay faults with test pairs consisting of Boolean vectors adjacent in the input path variable. Such replacement can be useful when forming test sequences from arbitrary test pairs aimed at reducing power consumption.

**Keywords:** combinational circuits; Equivalent Normal Forms (ENFs); robust testable Path Delay Faults (PDFs); path Boolean difference.

**For citation:** Matrosova, A.Yu., Tychinskiy, V.Z. (2025) About changing arbitrary test pairs detecting robust testable PDFs for ones consisting of neighbor Boolean vectors. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 72. pp. 134–143. doi: 10.17223/19988605/72/13

## Введение

Известно, что в логических схемах высокой производительности, характеризующихся высокими скоростями функционирования и наноразмерами транзисторов, возникают непредусмотренные сопротивления, емкости, индуктивности, которые не удастся рассчитать заранее. Они приводят к замедлению работы схемы по сравнению с расчетными значениями, что весьма нежелательно.

Одной из наиболее распространенных математических моделей, используемых для выявления задержек в процессе функционирования логических схем, является модель неисправности задержек пути (Path Delay Fault (PDF) модель) [1]. В рамках этой модели предполагается, что задержки отдельных элементов пути и отдельных линий связей между элементами пути достаточно малы и не влияют на расчетную скорость функционирования схемы. В то же время задержка пути в целом может превышать время между синхросигналами и исказить поведение схемы. Такие задержки необходимо обнаруживать и, если возможно, устранять или маскировать.

Обычно тестовые последовательности для выбранного подмножества путей строятся с использованием одной тестовой пары для каждого из путей и выбранного типа перепадов сигналов вдоль рассматриваемого пути [1, 2]. Расстояние по Хеммингу между наборами пары может быть произвольным. (Договоримся в дальнейшем двоичные наборы и булевы векторы считать синонимами.)

Известно, что тестирование задержек в схемах высокой производительности связано со значительным потреблением мощности и может привести к разрушению схемы, несмотря на возможность корректно работать в предписанном ей режиме функционирования. В связи со сказанным необходимо тестировать схемы, ориентируясь на сокращение потребляемой при тестировании мощности [3–8]. В данной работе выясняются возможности замены произвольных тестовых пар, обнаруживающих робастно тестируемые неисправности задержек пути, тестовыми парами, состоящими из булевых векторов, соседних по входной переменной пути. Такая замена ориентирована на снижение потребляемой мощности при тестировании по сравнению с последовательностями, построенными из тестовых пар, состоящих из векторов с произвольным расстоянием по Хеммингу.

**Основные определения.** Введем ряд необходимых понятий, связанных с тестированием неисправностей задержек путей в комбинационной схеме (комбинационной составляющей последовательностной схемы).

Путем схемы называют последовательность элементов схемы, в которой выход предыдущего элемента является входом последующего, причем один из входов первого элемента пути является входом схемы, а выход последнего элемента пути является выходом схемы.

Задержки пути обнаруживаются тестовыми парами  $(v_1, v_2)$  из двух булевых векторов следующим образом. Пусть в момент времени  $t_1$  на вход комбинационной схемы подается входной вектор  $v_1$ . При поступлении следующего синхрои импульса в момент времени  $t_2$  на вход схемы подается вектор  $v_2$  тестовой пары. В момент  $t_3$  с приходом очередного синхрои импульса наблюдается значение переменной на выходе, сопоставляемом этому пути. Если наблюдаемое значение не совпадает с ожидаемым значением, делается вывод, что в схеме имеют место непредусмотренные задержки сигналов. Задержки могут проявляться необязательно на исследуемом пути.

Будем иметь в виду, что задержки противоположных перепадов сигналов вдоль рассматриваемого пути могут различаться, поэтому для каждого типа перепадов в общем случае необходимо отыскивать собственную пару  $(v_1, v_2)$  входных булевых векторов, на которой задержка проявляется.

Перепадам значений сигнала вдоль пути присвоены разные названия. Перепад сигналов, при котором на выходе схемы, сопоставляемом пути, значение сигнала меняется с 1 на 0 в англоязычной литературе принято называть falling transition, а с 0 на 1 – rising transition. В дальнейшем будем использовать эти названия для различения перепадов сигналов пути.

Неисправность задержки пути является робастно тестируемой, если существует тестовая пара, на которой задержка рассматриваемого пути обнаруживается независимо от задержек других путей схемы.

Неисправность задержки пути называют не робастно тестируемой, если она может обнаруживаться тестовой парой только при отсутствии задержек других путей. Это значит, что проявление

неисправности на тестовой паре для не робастно тестируемой неисправности может не означать, что неисправность имеет место именно на пути, для которого тестовая пара построена. Что касается робастно тестируемой неисправности, то ее обнаружение позволяет определить путь, на котором неисправность проявляется. Такую неисправность можно затем маскировать или попытаться перепроектировать с целью исключения задержки и восстановления расчетного быстродействия.

Как известно, тестирование неисправностей задержек путей на практике выполняется методом сканирования, при котором вектор  $v_2$  тестовой пары получается из вектора  $v_1$  либо сдвигом  $v_1$ , либо  $v_2$  порождается реакцией комбинационной схемы на вектор  $v_1$ . Отметим, что векторы  $v_1$ , как правило, являются тестовыми наборами для константных неисправностей комбинационной схемы (комбинационной составляющей схемы с памятью). При таком подходе тестовые пары для робастно тестируемых неисправностей далеко не всегда удастся сформировать. Поэтому наряду с традиционным методом сканирования развиваются альтернативные методы тестирования неисправностей задержек пути, в рамках которых тестовые пары вычисляются точно. Это Random Access Scan (RAS) метод, который позволяет существенно сократить время тестирования, потребление мощности и множество тестовых наборов [9, 10]. При реализации этого метода может использоваться как традиционный подход к получению тестовых пар на основе анализа структуры логической схемы с использованием многозначных алфавитов [2], так и на основе вычисления булевой разности пути [11, 12]. При традиционном подходе поиска тестовых пар [9, 10] в общем случае получаются пары с расстоянием по Хеммингу между булевыми векторами пары, большим единицы. Договоримся в дальнейшем слова «наборы» и «векторы» считать синонимами.

В работе проводится исследование возможностей замены тестовой пары с произвольным расстоянием по Хеммингу между векторами, ее составляющими, на векторы, соседние по входной переменной пути. Такая замена ориентирована на снижение потребляемой мощности при тестировании. С этой целью рассматриваются свойства произвольных тестовых пар, обнаруживающих робастно тестируемые неисправности задержек путей, сформулированные в работе [1] с использованием ЭНФ-схемы, а также свойства булевой разности пути, из которой извлекаются тестовые пары соседних булевых векторов.

## 1. Свойства тестовых наборов для обнаружения неисправностей литер ЭНФ

В работе [13] показано, что каждый булев вектор, обращающий булеву разность рассматриваемого пути в единицу, является либо  $a$ -тестовым, либо  $b$ -тестовым набором для этого пути и соответствующей ему литеры ЭНФ. А именно, если входной набор схемы обращает булеву разность рассматриваемого пути в 1, а схему в 0, то это  $b$ -тестовый набор, обнаруживающий  $b_p$ -неисправность литеры ЭНФ. В присутствии  $b_p$ -неисправности схема принимает единичное значение на  $b$ -тестовом наборе. Если входной набор обращает схему в 1 и булеву разность рассматриваемого пути в 1, то это  $a$ -тестовый набор, обнаруживающий  $a_p$ -неисправность литеры ЭНФ. В присутствии  $a_p$ -неисправности схема принимает нулевое значение на  $a$ -тестовом наборе. Будем иметь в виду, что  $b_p$ -неисправность заключается в замене всех литер ЭНФ, сопоставляемых рассматриваемому пути, константой 1,  $a_p$ -неисправность заключается в замене всех литер ЭНФ, сопоставляемых рассматриваемому пути, константой 0. Такие замены мы имеем возможность выполнить, имея ЭНФ схемы.

Обозначим выбранный путь символом  $\alpha$  в комбинационной схеме  $C$ , а соответствующую ему литеру  $x_{i\alpha}$ .

Отметим, что изменение значения переменной  $x_i$  в  $b$ - и  $a$ -тестовом наборах приводит к обращению ЭНФ схемы в 0 и 1 только за счет изменения значения литеры  $x_{i\alpha}$ . Это необходимо учитывать при построении тестовых наборов по ЭНФ, а именно:  $b(a)$ -тестовый набор порождается конъюнкциями ЭНФ, не содержащими более одной литеры, помеченной входной переменной пути  $\alpha$ .

Для понимания возможности построения тестовых пар с использованием булевой разности  $D_\alpha$  представим процедуру ее построения и отметим свойства  $D_\alpha$ .



## 2. Булева разность пути и ее связь с $b$ , $a$ –тестовыми наборами

Булева разность пути представляется либо в виде ДНФ-, либо ROBDD-графа [11, 12], либо в виде соответствующей схемы (ее единичных наборов [12]). Рассмотрим алгоритм получения булевой разности.

### 2.1. Получение булевой разности

Представим путь  $\alpha$  для одновыходной комбинационной схемы  $C$ , последовательностью следующих символов:  $x_i, u_1, u_2, \dots, u_{r-1}, u_r$ . Здесь  $x_1, \dots, x_n$  – символы входных переменных схемы,  $r$  – длина пути  $\alpha$ ,  $x_i$  – переменная, отмечающая начало пути (вход схемы  $C$ ). Переменные  $u_1, u_2, \dots, u_{r-1}, u_r$  отмечают выходы элементов пути. Переменная  $u_r$  отмечает выход схемы  $C$ . Схема  $C$  может быть комбинационной частью последовательностной схемы.

Пусть переменные  $u_i, u_{i-1}$  отмечают выходы соседних элементов пути  $\alpha$ . Рассмотрим подсхему  $C_{u_i}$  схемы  $C$ . Выход этой подсхемы отмечается переменной  $u_i$ , а входы – переменными  $x_1, \dots, x_n, u_{i-1}$ . Здесь переменная  $u_{i-1}$  является входной переменной подсхемы  $C_{u_i}$  наряду с переменными  $x_1, \dots, x_n$  и одновременно входной переменной элемента с выходом, отмеченным переменной  $u_i$ .

Обозначим  $D_{u_i} / D_{u_{i-1}}$  булеву разность, вычисляемую для функции, реализуемой подсхемой  $C_{u_i}$  по переменной  $u_{i-1}$ . Выражение для булевой разности  $D_{u_i} / D_{u_{i-1}}$  имеет вид:  $D_{u_i} / D_{u_{i-1}} = f_{u_i}^{u_{i-1}=0} \oplus f_{u_i}^{u_{i-1}=1}$ , где  $f_{u_i}$  представляет функцию подсхемы  $C_{u_i}$ , зависящую от переменных  $x_1, \dots, x_n, u_{i-1}$ .

Булева разность для пути  $\alpha$  принимает следующий вид:

$$D_\alpha = (D_{u_r} / D_{u_{r-1}}) \wedge (D_{u_{r-1}} / D_{u_{r-2}}) \wedge \dots \wedge (D_{u_2} / D_{u_1}) \wedge (D_{u_1} / D_{x_i}).$$

В работе [7] доказано, что булев вектор  $\gamma$ , обращающий булеву разность  $D_\alpha$  в единицу, а схему  $C$  в ноль, является  $b$ -тестовым набором для  $b_p$ -неисправности ЭНФ. Там же доказано, что булев вектор  $\gamma$ , обращающий булеву разность  $D_\alpha$  в единицу и схему  $C$  также в единицу, является  $a$ -тестовым набором для  $a_p$ -неисправности ЭНФ.

При образовании тестовой пары булев вектор  $\gamma$  является вектором  $v_2$ , а соседний по входной переменной  $x_i$  булев вектор является вектором  $v_1$  для falling и rising transitions. Рассмотрим пример вычисления булевой разности на основе операций над ДНФ

В комбинационной схеме  $C$  (рис. 1) выделен путь  $\alpha$ , включающий элементы с номерами 3, 4, 6, 8, 9.

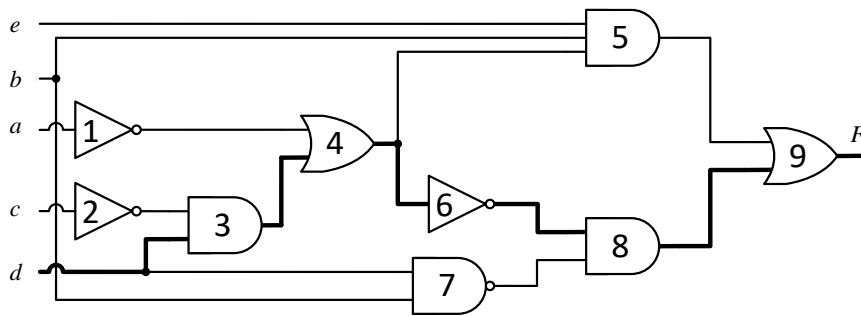


Рис. 1. Комбинационная схема с выделенным путем  $\alpha$   
Fig. 1. Combination scheme with a dedicated path  $\alpha$

Начало пути отмечается переменной  $d$ . Таким образом,  $\alpha = d, u_3, u_4, u_6, u_8, u_9$ .

$$D_{u_9} / D_{u_8} = (u_5 \vee (u_8 = 0)) \oplus (u_5 \vee (u_8 = 1)) = \bar{u}_5 = \bar{b} \vee \bar{e} \vee ac \vee ad,$$

$$D_{u_8} / D_{u_6} = ((u_6 = 0) \wedge u_7) \oplus ((u_6 = 1) \wedge u_7) = u_7 = \bar{b} \vee \bar{d},$$

$$\begin{aligned}
 D_{u_6} / D_{u_4} &= (u_4 = 0) \oplus (u_4 = 1) = 1, \\
 D_{u_4} / D_{u_3} &= (u_1 \vee (u_3 = 0)) \oplus (u_1 \vee (u_3 = 1)) = \bar{u}_1 = a, \\
 D_{u_3} / d &= (u_2 \wedge (d = 0)) \oplus (u_2 \wedge (d = 1)) = u_2 = \bar{c}, \\
 D_\alpha &= (\bar{b} \vee \bar{e} \vee ac \vee ad) \wedge (\bar{b} \vee \bar{d}) \wedge 1 \wedge a \wedge \bar{c} = a\bar{c}\bar{b} \vee a\bar{c}\bar{d}.
 \end{aligned}$$

Итак,  $D_\alpha$  представляет все тестовые наборы  $v_2$  для rising и falling transitions, которые не отделены друг от друга. Полезно их разделить.

## 2.2. Выделение $b$ , $a$ -тестовых наборов и основанных на них триплетов

Если путь  $\alpha$  содержит четное число инверсных вентилях, то для rising transition получаем выражение  $D_{rise} = D_\alpha \wedge x_i$ , для falling transition –  $D_{fall} = D_\alpha \wedge \bar{x}_i$ . В противном случае  $D_{rise} = D_\alpha \wedge \bar{x}_i$  и  $D_{fall} = D_\alpha \wedge x_i$ .

Обозначим символами  $D'_{rise}$  и  $D'_{fall}$  выражения, полученные из  $D_{rise}$  и  $D_{fall}$  удалением литеры  $x_i$  (независимо от знака инверсии).

Обозначим символом  $D_{rob}$  выражение, представляющее пары соседних по переменной  $x_i$  наборов:  $D_{rob} = D'_{rise} \wedge D'_{fall}$ . Множество  $D_{rob}$  может быть пустым.

Заметим, что выражение  $D_{rob}$  не содержит переменной  $x_i$ , т.е. булев вектор в пространстве переменных  $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$  задает пару в пространстве  $n$  переменных. Один из векторов пары получается приписыванием переменной  $x_i$  значения 0, а другой – значения 1. На векторах этой пары достигаются инверсные значения выхода схемы. Оба вектора пары обращают булеву разность в единицу. Один из них является  $a$ -тестовым набором, а другой –  $b$ -тестовым набором ЭНФ схемы  $C$ . Такие пары порождают триплеты тестовых наборов  $aba$  и  $bab$ , позволяющие обнаруживать робастно тестируемые неисправности задержек пути тремя наборами вместо четырех. Имеется возможность обнаруживать сначала либо rising transition, либо falling transition.

Сравним свойства тестовых пар для робастно тестируемых неисправностей задержек пути: пар с произвольным расстоянием по Хеммингу между тестовыми наборами и пар, состоящих из соседних по входной переменной наборов.

## 3. Свойства тестовых пар для обнаружения робастно тестируемой неисправности задержки пути

### 3.1. Обнаружение falling transition

Перечисленные ниже свойства тестовых пар представлены в работе [1].

1. В случае falling transition,  $b$ -тестовый набор (набор  $v_2$  тестовой пары) для  $b_p$ -неисправности обращает выходную переменную схемы, сопоставляемую рассматриваемому пути (ЭНФ исправной схемы), в 0.

2. Набор  $v_1$  тестовой пары, отличающийся инверсным значением входной переменной  $x_i$ , а значениями других переменных, обращает выходную переменную схемы, сопоставляемую рассматриваемому пути (ЭНФ исправной схемы), в 1.

3. Минимально покрывающий интервал векторов тестовой пары для робастно тестируемой неисправности задержки пути должен быть ортогонален конъюнкциям множества  $\mathbf{K}$ . Здесь  $\mathbf{K}$  – конъюнкции ЭНФ, не содержащие литеры  $x_{i\alpha}$ .

4. При построении  $b$ -тестового набора  $v_2$  выполняется условие: с поступлением этого набора происходит смена значения сигналов только одного пути  $\alpha$  (falling transition): иначе тестовая пара не обнаруживает робастно тестируемую неисправность задержки пути  $\alpha$ . Это обеспечивается тем, что порождающие данный набор конъюнкции ЭНФ не содержат более одной литеры, помеченной входной переменной пути  $\alpha$ .

Если минимально покрывающий интервал пары  $(v_1, v_2)$  при выполнении предыдущих условий не ортогонален конъюнкциям множества  $\mathbf{K}$ , то исследуемый путь является не робастно тестируемым, иначе – робастно тестируемым.

Из пары  $(v_1, v_2)$  не соседних булевых векторов, обнаруживающих робастно тестируемую неисправность пути (falling transition), получим пару соседних векторов по входной переменной этого пути, причем одним из векторов новой пары является  $v_2$ .

**Теорема 1.** Тестовая пара, состоящая из булевых векторов с расстоянием по Хеммингу, превосходящим единицу, и обнаруживающая робастно тестируемую неисправность задержки исследуемого пути (falling transition), порождает пару соседних по входной переменной булевых векторов, обнаруживающих эту неисправность.

**Доказательство.** Минимально покрывающий интервал соседних векторов по входной переменной рассматриваемого пути, где  $v_2$  –  $b$ -тестовый набор, в силу своего уменьшения по сравнению с интервалом, порожденным парой не соседних векторов, обнаруживающей робастно тестируемую неисправность, сохраняет ортогональность конъюнкциям множества  $\mathbf{K}$ . В то же время на соседних по входной переменной  $x_i$  векторах пары  $(v_1, v_2)$ , извлеченных из этого интервала, имеем: на наборе  $v_1$  обеспечивается противоположное набору  $v_2$  значение на выходе схемы. Набор  $v_2$  обращает исправную схему в 0, а неисправную схему в 1. За счет того, что  $v_2$  есть  $b$ -тестовый набор, обращающий булеву разность в 0, а исходная тестовая пара обнаруживает робастно тестируемую неисправность пути  $\alpha$ , тестовый набор  $v_2$  этой пары ( $b$ -тестового набора) обнаруживает неисправность пути  $\alpha$  и только его. Дело в том, что  $b$ -тестовый набор порождается конъюнкциями ЭНФ, не содержащими нескольких литер, помеченных входной переменной пути и с тем же знаком инверсии, что  $x_{i\alpha}$ . Теорема доказана.

**Следствие 1.** Пару не соседних по входной переменной булевых наборов, обнаруживающих робастно тестируемую неисправность задержки пути (falling transition), можно заменить парой соседних (по отношению к вектору  $v_2$  исходной пары) по входной переменной  $x_i$  булевых векторов, обнаруживающих эту неисправность при меньшей потребляемой мощности.

### 3.2. Обнаружение rising transition

1. Набор  $v_2$  является  $a$ -тестовым набором для  $a_p$ -неисправности и обращает выходную переменную схемы, сопоставляемую рассматриваемому пути, в 1.

2. Набор  $v_1$ , отличающийся инверсным значением входной переменной  $x_i$ , а возможно, и значениями других переменных, обращает выходную переменную схемы, сопоставляемую рассматриваемому пути, в 0.

3. Минимально покрывающий интервал тестовой пары для робастно тестируемой неисправности задержки пути ортогонален конъюнкциям множества  $\mathbf{K}$ .

4. Поскольку  $v_2$  является тестовым набором для  $a_p$ -неисправности, то он обращает в единицу хотя бы одну непустую конъюнкцию ЭНФ с литерой  $x_{i\alpha}$ , являясь ортогональным всем конъюнкциям множества  $\mathbf{K}$  [1].

5. При построении  $a$ -тестового набора  $v_2$  выполняется условие: с поступлением этого набора происходит смена значения сигналов только одного пути  $\alpha$  (rising transition), поскольку иначе тестовая пара не обнаруживает робастно тестируемую неисправность задержки пути  $\alpha$ . Это значит, что в качестве порождающих тестовый набор конъюнкций ЭНФ выбираются те, которые не содержат более одной литеры, помеченной входной переменной пути  $\alpha$  и с тем же знаком инверсии.

Из пары  $(v_1, v_2)$  не соседних булевых векторов, обнаруживающих робастно тестируемую неисправность пути (rising transition), получим пару соседних векторов по входной переменной этого пути, причем одним из векторов новой пары является  $v_2$ .

**Теорема 2.** Тестовая пара, состоящая из булевых векторов с расстоянием по Хеммингу, превосходящим единицу, и обнаруживающая робастно тестируемую неисправность задержки исследуемого пути (rising transition), порождает пару соседних по входной переменной булевых векторов, обнаруживающих эту неисправность.

**Доказательство.** Минимально покрывающий интервал соседних векторов  $(v_1, v_2)$  по входной переменной рассматриваемого пути, где  $v_2$  –  $a$ -тестовый набор, в силу своего уменьшения по сравнению с интервалом, порожденным парой не соседних векторов, обнаруживающей робастно тестируемую неисправность, сохраняет ортогональность конъюнкциям множества  $K$ . В то же время на соседних по входной переменной  $x_i$  наборах пары  $(v_1, v_2)$ , извлеченных из этого интервала, за счет того, что  $v_2$  есть  $a$ -тестовый набор, обращающий булеву разность пути  $\alpha$  в 1, имеем: на наборе  $v_1$  обеспечивается противоположное набору  $v_2$  значение на выходе схемы. Набор  $v_2$  обращает исправную схему в 1, а неисправную схему в 0. Поскольку исходная тестовая пара обнаруживает робастно тестируемую неисправность пути  $\alpha$ , то тестовый набор  $v_2$  этой пары ( $a$ -тестового набора) обнаруживает неисправность пути  $\alpha$  и только его. Это обеспечивается тем, что  $a$ -тестовый набор порождается конъюнкциями ЭНФ, не содержащими нескольких литер, помеченных входной переменной пути и с тем же знаком инверсии, что  $x_{i\alpha}$ . Теорема доказана.

**Следствие 2.** Пару не соседних по входной переменной булевых векторов, обнаруживающих робастно тестируемую неисправность задержки пути (rising transition), можно заменить парой соседних (по отношению к вектору  $v_2$  исходной пары) по входной переменной  $x_i$  булевых векторов, обнаруживающих эту неисправность при меньшей потребляемой мощности.

**Следствие 3.** На основании теорем 1 и 2 пару не соседних по входной переменной булевых векторов, обнаруживающих робастно тестируемую неисправность задержки пути для falling и rising transition, можно заменить двумя парами соседних по входной переменной  $x_i$  векторов: одна пара строится с использованием вектора  $v_2$ , другая – с использованием вектора  $v_1$  исходной пары. Полученные пары обнаруживают неисправности противоположных перепадов значений сигналов пути  $\alpha$  в условиях возможного снижения потребляемой мощности.

Следует иметь в виду, что ЭНФ является чрезвычайно громоздкой формулой. Представление ее в виде размеченного И / ИЛИ дерева хотя и позволяет строить тестовые пары для более сложных комбинационных схем, тем не менее сложность размеченных деревьев экспоненциально возрастает в схемах с большим числом ветвлений. Из сказанного следует, что избавление от использования ЭНФ в любом из ее представлений при поиске тестовых пар очень важно.

Сведение получения тестовых пар для обнаружения неисправностей задержек пути к вычислению булевой разности пути позволяет избавиться от использования ЭНФ. Получаемые при этом тестовые пары характеризуются минимальным потреблением мощности.

#### 4. Свойства пар соседних наборов, порождаемых $D_\alpha$ при условии пустого множества $D_{rob}$

Выражение  $D_{rob}$  при любом из перечисленных способов его представления позволяет найти множество всех соседних тестовых пар, обнаруживающих робастно тестируемые задержки противоположных перепадов сигналов для рассматриваемого пути. Однако это множество тестовых пар может оказаться пустым. Выясним, что происходит в этой ситуации с обнаружением неисправностей задержек пути.

В такой ситуации булева разность также представляет в общем случае множество  $a$ -тестовых наборов и множество  $b$ -тестовых наборов для рассматриваемого пути, однако их соседние по входной переменной наборы не являются соответственно  $b$ -тестовыми и  $a$ -тестовыми наборами. Отметим, что на соседнем по входной переменной наборе по отношению к набору, обращающему булеву разность в единицу, булева разность в рассматриваемой ситуации принимает значение 0.

**Теорема 3.** Тестовые пары, состоящие из булевых векторов, соседних по входной переменной пути, причем один набор является  $b$ -тестовым, а второй не является  $a$ -тестовым, не обнаруживают робастно тестируемую неисправность задержки рассматриваемого пути (falling transition).

**Доказательство.** Поскольку второй набор не является  $a$ -тестовым, то он либо не ортогонален множеству  $K$ , либо для него не существует в ЭНФ порождающей конъюнкции, то есть конъюнкции, которая не содержит более одной литеры, помеченной входной переменной пути  $\alpha$  с тем же знаком инверсии.

В первом случае минимально покрывающий интервал для векторов рассматриваемой пары не ортогонален множеству **К**. Во втором случае  $a$ -тестовый набор невозможно сформировать. Следовательно, такая тестовая пара не обнаруживает робастно тестируемую неисправность задержки этого пути (falling transition). Теорема доказана.

**Теорема 4.** Тестовые пары, состоящие из булевых векторов, соседних по входной переменной пути, причем один набор является  $a$ -тестовым, а второй не является  $b$ -тестовым, обнаруживают робастно тестируемую неисправность задержки рассматриваемого пути (rising transition).

**Доказательство.** Поскольку второй набор не является  $b$ -тестовым, то это значит, что не существует порождающей его конъюнкции ЭНФ, которая бы не содержала более одной литеры, помеченной входной переменной пути  $\alpha$  и с тем же знаком инверсии. На соседнем по входной переменной пути наборе  $v_1$  схема принимает значение 0. Минимально покрывающий интервал для пары  $(v_1, v_2)$  ортогонален множеству **К**. Поскольку в этой ситуации существование  $a$ -тестового набора гарантирует изменение входного сигнала только по пути  $\alpha$ , то тестовая пара  $(v_1, v_2)$  обнаруживает робастно тестируемую неисправность рассматриваемого пути (rising transition). Теорема доказана.

## 5. Обсуждение экспериментальных результатов

С использованием булевой разности пути комбинационной схемы были построены тестовые пары для путей схем из набора бенчмарков ISCAS'89. Для каждого выхода каждой схемы было выбрано не менее 10 самых длинных путей. Общая информация о бенчмарках, использованных при тестировании, представлена в табл. 1.

Таблица 1

Информация об использованных бенчмарках

№ п/п	Бенчмарк	Число входов	Число выходов	Число вентилях	Выбрано путей
1	s298	17	20	119	146
2	s344	24	26	160	159
3	s400	24	27	162	258
4	s444	24	27	181	237
5	s641	54	42	379	309
6	s820	23	24	289	232
7	s953	45	52	395	338
8	s1196	32	32	529	334
9	s1488	14	25	653	312
10	s1494	14	25	647	336

Таблица 2

Различные ситуации, порождающие тестовые пары

№ п/п	Выбрано путей	Пути без $a$ -тестов	Пути без $b$ -тестов	Пути без $D_{rob}$	Ложные пути	Робастно тестируемые пути	Доля робастно тестируемых путей
1	146	13	7	1	24	101	69,18%
2	159	22	16	0	2	119	74,84%
3	258	7	9	10	4	228	88,37%
4	237	44	23	1	21	148	62,45%
5	309	42	68	0	56	143	46,28%
6	232	0	0	2	0	230	99,14%
7	338	0	0	2	0	336	99,41%
8	334	24	22	5	119	164	49,10%
9	312	6	3	11	1	291	93,27%
10	336	3	4	16	0	313	93,15%

В табл. 2 приведена более детальная информация по путям, для которых не существуют тестовые пары такие, что один из векторов является  $a$ -тестовым набором, а другой –  $b$ -тестовым набором, т.е. множество  $D_{rob}$  пусто:

- пути без  $a$ -тестовых наборов, для которых существуют  $b$ -тестовые наборы;
- пути без  $b$ -тестовых наборов, для которых существуют  $a$ -тестовые наборы;
- пути с  $a$ - и  $b$ -тестовыми наборами, для которых при этом множество единичных наборов  $D_{rob}$  пусто;
- ложные пути, для которых  $D_a$  пусто.

### Заключение

Установлено, что использование булевой разности пути при построении тестовых пар для робастно тестируемых неисправностей задержек пути позволяет обнаруживать те же робастно тестируемые неисправности, которые обнаруживаются методом анализа ЭНФ схемы [1] или методом анализа структуры схемы с использованием многозначных алфавитов [2]. Показано, что тестовая пара не соседних булевых векторов всегда может быть заменена парой или двумя парами соседних по входной переменной пути векторов, порожденных булевой разностью рассматриваемого пути. Этот факт позволяет заменять тестовые последовательности, состоящие из пар не соседних булевых векторов, парами соседних векторов с меньшей потребляемой мощностью и, следовательно, снижать потребляемую мощность тестовой последовательности в целом.

### Список источников

1. Липский В.Б., Матросова А.Ю. Свойства пар тестовых наборов, обнаруживающих неисправности задержек путей в логических схемах VLSI высокой производительности // Автоматика и телемеханика. 2015. № 4. С. 135–148.
2. Bushnell M.L. Essentials of Electronic Testing for Digital, Memory, And Mixed-Signal VLSI Circuits. Hingham, MA : Kluwer Academic Publishers, 2000. 432 p.
3. Lindgren P., Kerttu M., Thornton M., Drechsler R. Low power optimization technique for BDD mapped circuits // Proc. of the ASP-DAC. 2001. P. 615–621.
4. Shelar R.S., Sapatnekar S.S. An efficient algorithm for low power pass transistor logic synthesis // Proc. of the ASP-DAC. 2002. P. 87–92.
5. Gekas G., Nikolos D., Kalligeros E., Kavousianos X. Power aware test-data compression for scan-based testing // 2005 12th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems, Gammarth, Tunisia. 2005. P. 1–4.
6. Tudu J.T., Larsson E., Singh V., Agrawal V.D. On Minimization of Peak Power for Scan Circuit during Test // Test Symposium 2009 14th IEEE European. 2009. P. 25–30.
7. Kotasek Z., Skarvada J., Strnadel J. Reduction of Power Dissipation Through Parallel Optimization of Test Vector and Scan Register Sequences // IEEE International Symposium on Design and Diagnostics of Electronic Circuits and Systems. 2010. P. 364–369. doi: 10.1109/DDECS.2010.5491750
8. Sinduja V., Raghav S., Anita J.P. Efficient don't-care filling method to achieve reduction in test power // 2015 International Conference on Advances in Computing, Communications and Informatics (ICACCI). 2015. P. 478–482.
9. Hu Y., Fu X., Fan X., Fujiwara H. Localized Random Access Scan: Towards Low Area and Routing Overhead // Proc. of the 2008 Asia and South Pacific Design Automation Conference. IEEE Computer Society Press, 2008. P. 565–570.
10. Adiga R., Arpit G., Singh V., Satuja K.K., Fujivara H., Singh A.D. On Minimization of Test Application Time for RAS // Proc. 23 International Conference on VLSI design. IEEE, 2010. P. 393–398.
11. Matrosova A.Yu., Andreeva V.V., Nikolaeva E.A. Finding Test Pairs for PDFs in Logic Circuits Based on Using Operations on ROBDDs // Russian Physics Journal. 2018. V. 61 (5). P. 994–999.
12. Matrosova A.Yu., Andreeva V.V., Tychinskiy V.Z., Goshin G.G. Applying ROBDDs for delay testing of logical circuits // Russian Physics Journal. 2019. V. 62 (5). P. 86–94.
13. Матросова А.Ю., Тычинский В.З. Андреева В.В. Булева разность и обнаружение неисправностей задержек пути // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2024. № 66, С. 108–119. doi: 10.17223/19988605/66/11

### References

1. Lipsky, V.B. & Matrosova, A.Yu. (2015) Properties of pairs of test vectors detecting path delay faults in high performance VLSI logical circuits. *Automation and Remote Control*. 4. pp. 135–148.
2. Bushnell, M.L. (2000) *Essentials of Electronic Testing for Digital, Memory, And Mixed-Signal VLSI Circuits*. Hingham, MA, USA: Kluwer Academic Publishers.
3. Lindgren, P., Kerttu, M., Thornton, M. & Drechsler R. (2001) Low power optimization technique for BDD mapped circuits. *Proc. of the ASP-DAC*. pp. 615–621.

4. Shelar, R.S. & Sapatnekar, S.S. (2002) An efficient algorithm for low power pass transistor logic synthesis. *Proc. of the ASP-DAC*. pp. 87–92.
5. Gekas, G., Nikolos, D., Kalligeros, E. & Kavousianos, X. (2005) Power aware test-data compression for scan-based testing. *2005 12th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems*. Gammarth, Tunisia. pp. 1–4.
6. Tudu, J.T., Larsson, E., Singh, V. & Agrawal, V.D. (2009) On Minimization of Peak Power for Scan Circuit during Test. *Test Symposium 2009. 14th IEEE European*. pp. 25–30.
7. Kotasek, Z., Skarvada, J. & Strnadel, J. (2010) Reduction of Power Dissipation Through Parallel Optimization of Test Vector and Scan Register Sequences. *IEEE International Symposium on Design and Diagnostics of Electronic Circuits and Systems*. pp. 364–369. DOI: 10.1109/DDECS.2010.5491750
8. Sinduja, V., Raghav, S. & Anita, J.P. (2015) Efficient don't-care filling method to achieve reduction in test power. *2015 International Conference on Advances in Computing, Communications and Informatics (ICACCI)*. pp. 478–482.
9. Hu, Y., Fu, Fan, X. & Fujiwara, H. (2008) Localized random access scan: towards low area and routing overhead. *Proceedings of the 2008 Asia and South Pacific Design Automation Conference*. IEEE Computer Society Press. pp. 565–570.
10. Adiga, R., Arpit, G., Singh, V., Satuja, K.K., Fujivara H. & Singh A.D. (2010) On minimization of test application time for RAS. *Proceedings 23 International Conference on VLSI design*. IEEE. pp. 393–398.
11. Matrosova, A.Yu., Andreeva, V.V. & Nikolaeva, E.A. (2018) Finding Test Pairs for PDFs in Logic Circuits Based on Using Operations on ROBDDs. *Russian Physics Journal*. 61(5). pp. 994–999.
12. Matrosova, A.Yu., Andreeva, V.V., Tychinskiy, V.Z. & Goshin, G.G. (2019) Applying ROBDDs for delay testing of logical circuits. *Russian Physics Journal*. 62(5). pp. 86–94.
13. Matrosova, A.Yu., Tychinskiy, V.Z. & Andreeva, V.V. (2024) Boolean difference and path delay faults detection. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 66. pp. 108–119. DOI: 10.17223/19988605/66/11

**Информация об авторах:**

**Матросова Анжела Юрьевна** – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры компьютерной безопасности Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: mau11@yandex.ru

**Тychинский Вячеслав Зиновьевич** – аспирант, ассистент кафедры компьютерной безопасности Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: tvz.041@yandex.ru

**Вклад авторов:** все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Information about the authors:**

**Matrosova Anzhela Yu.** (Doctor of Technical Sciences, Professor, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: mau11@yandex.ru

**Tychinskiy Vyacheslav Z.** (Post-Graduate Student, Assistant, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tvz.041@yandex.ru

**Contribution of the authors:** the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 10.05.2025; принята к публикации 02.09.2025

Received 10.05.2025; accepted for publication 02.09.2025

**Научный журнал**

**ВЕСТНИК  
ТОМСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА**

**УПРАВЛЕНИЕ,  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА  
И ИНФОРМАТИКА**

**TOMSK STATE UNIVERSITY  
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE**

**2025. № 72**

Редактор Е.Г. Шумская  
Оригинал-макет Е.Г. Шумской  
Редакторы-переводчики: Г.М. Кошкин; В.Н. Горенинцева  
Дизайн обложки Л.Д. Кривцовой

Подписано к печати 19.09.2025 г. Формат 60x84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>.  
Гарнитура Times. Усл. печ. л. 16,7.  
Тираж 250 экз. Заказ № 6452. Цена свободная.

Дата выхода в свет 25.09.2025 г.

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании  
Издательства Томского государственного университета  
634050, г. Томск, Ленина, 36  
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75  
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: [rio.tsu@mail.ru](mailto:rio.tsu@mail.ru)

**Адрес издателя и редакции**  
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, Томский государственный университет.  
E-mail: [vestnik@mail.tsu.ru](mailto:vestnik@mail.tsu.ru)