

**В Е С Т Н И К
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2025

№ 97

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский
Томский государственный университет»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), И.А. Колесников (отв. секретарь по разделу «Математика»), А.Д. Сидоров (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, В.Г. Бутов, А.Ю. Веснин, А.Н. Ищенко, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, Е.Л. Лобода, Г.О. Рябова, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Е. А. Тимошенко, М.А. Шермет, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер.

EDITORIAL COUNCIL

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Ivan A. Kolesnikov (Executive Editor of the Mathematics Section), Aleksey D. Sidorov (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimatov, Aleksey M. Bubenichikov, Vladimir G. Butov, Igor M. Vasenin, Andrei Yu. Vesnin, Aleksandr N. Ishchenko, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Egor L. Loboda, Galina O. Ryabova, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Egor A. Timoshenko, Mikhail A. Sheremet, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесен в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферируется в MatSciNet.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36

Электронный адрес: <http://journals.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Touail Y. On generalized orthogonal partial metric spaces: α , β -admissible mappings and fixed point results	5
Смоленцев Н.К., Соколова А.Ю. Левоинвариантные кэлеровы и полупаракэлеровы структуры на некоторых шестимерных неразрешимых группах Ли	17
Халилов Э.Г., Сафарова В.О. Некоторые свойства одного класса векторных потенциалов с сингулярными ядрами	31

МЕХАНИКА

Алабужев А.А. Динамика цилиндрического пузырька с учетом движения линии контакта по неоднородной поверхности подложки	51
Еремينا Г.М., Смолин А.Ю., Мартышина И.П. Численное исследование механического поведения сегмента позвоночника с остеосаркомой при физиологических и акустических нагрузках	66
Жуков И.А., Крайнов А.Ю., Моисеева К.М., Ермолаев Е.В., Егошин В.А., Шугаев Ш.Н., Ахметгалиев Р.Ш. Моделирование процессов газообмена в пористом пространстве между поверхностью металлокерамических плат и огнеупорной оснасткой в условиях высокотемпературного спекания	83
Заболотский А.В., Дмитриев А.И. Влияние скорости деформации квазихрупких композиционных огнеупорных материалов на характер их разрушения	100
Иванычев Д.А. Решение краевых стационарно-динамических задач теории упругости для трансверсально-изотропного тела вращения	116
Моренко И.В., Федяев В.Л. Улавливание капель при охлаждении обратной воды в испарительных градирнях	130
Пивкин П.М., Бабаев А.С., Козлов В.Н., Семёнов А.Р., Назаренко Е.С., Надыкто А.Б. Численное моделирование распределения контактных напряжений в режущем клине при фрезеровании сплавов AISI 304 и Grade 5 твердосплавной конической концевой фрезой	143
Сенашов С.И., Савостьянова И.Л. Изгиб упруго-пластического бруса коробчатого сечения, армированного упругими волокнами	158
Сметанников О.Ю., Ильиных Г.В., Фасхутдинова Ю.Б. Модель термомеханического поведения фотополимеров с памятью формы в условиях терморелаксационного перехода	168

CONTENTS

MATHEMATICS

Touail Y. On generalized orthogonal partial metric spaces: α , β -admissible mappings and fixed point results	5
Smolentsev N.K., Sokolova A.Yu. Left-invariant Kähler and semi-para-Kähler structures on some six-dimensional unsolvable Lie groups	17
Khalilov E.H., Safarova V.O. Some properties of a class of vector potentials with a singular kernel	31

MECHANICS

Alabuzhev A.A. Dynamics of a cylindrical bubble with account for the contact line motion along a heterogeneous surface	51
Eremina G.M., Smolin A.Yu., Martyshina I.P. Numerical study of the mechanical behavior of a spinal segment with osteosarcoma under physiological and acoustic loading	66
Zhukov I.A., Krainov A.Yu., Moiseeva K.M., Ermolaev E.V., Egoshin V.A., Shugaepov S.N., Akhmetgaliev R.Sh. Modeling of gas exchange processes in the porous space between the surface of metal-ceramic boards and the refractory tooling under high-temperature sintering conditions	83
Zabolotskiy A.V., Dmitriev A.I. Effect of strain rate on the fracture behavior of quasi-brittle composite refractory materials	100
Ivanychev D.A. Solution of the boundary stationary-dynamic problems of the elasticity theory for a transversely isotropic body of revolution	116
Morenko I.V., Fedyaev V.L. Droplet capture during cooling of recirculated water in evaporative cooling towers	130
Pivkin P.M., Babaev A.S., Kozlov V.N., Semyonov A.R., Nazarenko E.S., Nadykto A.B. Numerical modeling of the contact stress distribution in a cutting wedge during the milling of AISI 304 and Grade 5 alloys with a carbide conical end mill	143
Senashov S.I., Savost'yanova I.L. Bending of the elastic-plastic box-shaped beam reinforced with elastic fibers	158
Smetannikov O.Yu., Il'inykh G.V., Faskhutdinova Yu.B. A model of the thermomechanical behavior of shape-memory photopolymers under thermorelaxation transition conditions	168

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Original article

UDK 515.1

MSC: 47H09, 47H10

doi: 10.17223/19988621/97/1

**On generalized orthogonal partial metric spaces:
 α , β -admissible mappings and fixed point results****Youssef Touail***University Sidi Mohamed Ben Abdellah, Fez, Morocco, youssef9touail@gmail.com*

Abstract. In this paper, we introduce the notion of α , β -admissible mappings as an extension of the so-called α -admissible mappings. After that, we propose for this class of mappings a new fixed point result in the setting of generalized orthogonal partial metric spaces. At the end of the results, to illustrate wide usability of our findings, we establish the existence and the uniqueness of solutions for a class of functional equations arising in dynamic programming.

Keywords: fixed point, α , β -admissible mapping, generalized orthogonal set, partial metric

For citation: Touail, Y. (2025) On generalized orthogonal partial metric spaces: α , β -admissible mappings and fixed point results. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 97. pp. 5–16. doi: 10.17223/19988621/97/1

Научная статья

**Об обобщенных ортогональных частично метрических
пространствах: α , β -допустимые отображения
и результаты о неподвижных точках****Юсеф Туайль***University Sidi Mohamed Ben Abdellah, Фес, Марокко, youssef9touail@gmail.com*

Аннотация. Вводится понятие α , β -допустимых отображений как расширение так называемых α -допустимых отображений. Предложен для этого класса отображений новый результат о неподвижной точке в задании обобщенных ортогональных частичных метрических пространств. Чтобы проиллюстрировать широкую применимость полученных выводов, устанавливаются существование и единственность решений для класса функциональных уравнений, возникающих в динамическом программировании.

Ключевые слова: неподвижная точка, α , β -допустимое отображение, обобщенное ортогональное множество, частичная метрика

Для цитирования: Туайль Ю. Об обобщенных ортогональных частично метрических пространствах: α , β -допустимые отображения и результаты о неподвижных точках // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 97. С. 5–16. doi: 10.17223/19988621/97/1

1. Introduction

The Banach contraction principle is a fundamental result in the fixed point theory, which has been extended in many directions. Not only contraction mappings but the concept of metric space is also extended in many ways in the literature. The notion of partial metric spaces was initiated in 1994 by Matthews [1] in connection with logic programming semantics. In specific applications of logic programming, it is required to have nonzero selfdistances. Moreover, via this kind of spaces, many papers have been appeared [2, 3].

Very recently, in 2020, the authors in [4] defined the notion of generalized orthogonal sets by extending orthogonal sets introduced in 2017 by Gordji et al. [5]; the reader can see also [6]. In addition, they proved in [4] some fixed point theorems for $\perp_{\psi F}$ -contractions on generalized orthogonal metric spaces which generalize both F -contractions and $\perp_{\psi F}$ -contractions on metric spaces defined respectively in [7, 8]. For additional details, please refer to [9–11].

One of the various extensions of the celebrated Banach contraction is the α -admissible which is introduced in 2012 by Samet et al. [12]. In this direction, the authors in [12] established some fixed point theorems for such class of mappings in the setting of complete metric spaces. In other words, they proved some fixed point results in a complete metric space X for the class of mappings T satisfying

$$\alpha(x, y) \geq 1 \Rightarrow \alpha(Tx, Ty) \geq 1, \quad (1.1)$$

where $\alpha : X \times X \rightarrow R^+$ is a function. As one can see in (1.1), the authors compared the function α with the constant 1. A very natural idea is to compare α with another function β . In this new proposed extension, (1.1) becomes

$$\alpha(x, y) \geq \beta(x, y) \Rightarrow \alpha(Tx, Ty) \geq \beta(Tx, Ty), \quad (1.2)$$

where $\alpha, \beta : X \times X \rightarrow R^+$ are two functions. Motivated by this fact (i.e., (1.2)) and due to the importance of α -admissible justified by the number of the papers has been published in this direction (see for instance [13–15] and references cited therein), in this paper we introduce the notion of α, β -admissible mappings. Then, a large class of mappings satisfying the fixed point property is added to the literature. It is worth mentioning that the case of partial metric spaces can be regarded as a special type of generalized partial metric spaces, so our results are valid in metric spaces and partial metric spaces as well.

Finally, using α, β -admissible mappings, the proven fixed point theorem are applied to investigate the existence and uniqueness of solutions for a class of functional equations that arise in the context of dynamic programming. Compared with other results, we point out that the study of the above integral equation is done under new weak conditions.

2. Preliminary

In this section, we recite some basic notions and results needed in the rest of the paper. In 1994, Matthews [1] introduced the notion of partial metric spaces as an extension of metric spaces as follows:

Definition 2.1. ([1]) A partial metric on a nonempty set X is a function $p : X \times X \rightarrow R^+$ such that for all $x, y, z \in X$:

- (1) $p(x, x) = p(x, y) = p(y, y)$ if and only if $x = y$;
- (2) $p(x, x) \leq p(x, y)$;
- (3) $p(x, y) = p(y, x)$;
- (4) $p(x, z) + p(y, y) \leq p(x, y) + p(y, z)$.

The pair (X, p) is called a partial metric space.

Definition 2.2. ([1]) Let (X, p) be a partial metric space. Then

- (i) A sequence $\{x_n\}$ in X converges to a point $x \in X$ if and only if $\lim_{n \rightarrow \infty} p(x, x_n) = p(x, x)$.
- (ii) A sequence $\{x_n\} \subset X$ is Cauchy if $\lim_{m, n \rightarrow \infty} p(x_m, x_n)$ exists and is finite.
- (iii) X is complete if every Cauchy sequence $\{x_n\} \subset X$ converges to a point $x \in X$, that is, $\lim_{m, n \rightarrow \infty} p(x_m, x_n) = p(x, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(x, x_n)$.

In 2009, Romaguera [16] introduced the following notions as generalization of the above concepts.

Definition 2.3. ([16]) Let (X, p) be a partial metric space.

- (i) A sequence $\{x_n\}$ in (X, p) is called 0-Cauchy if $\lim_{m, n \rightarrow \infty} p(x_m, x_n) = 0$.
- (ii) The space (X, p) is called 0-complete if every 0-Cauchy sequence in X converges to a point $x \in X$ such that $p(x, x) = 0$.

Note that if (X, p) is complete, then it is 0-complete. The author in [13] has given an example which proves that the converse assertion does not hold.

On the other hand, in 2012, Samet et al. [12] introduced the notion of α - ψ -contractive type mappings and established some fixed point theorems for these mappings in complete metric spaces.

Definition 2.4. (see [12]). Let (X, d) be a metric space, $T : X \rightarrow X$ and $\alpha : X \times X \rightarrow R^+$ be two given mappings. Then, T is called an α -admissible mapping if $\alpha(x, y) \geq 1 \Rightarrow \alpha(Tx, Ty) \geq 1$ for all $x, y \in X$.

Theorem 2.5. (Theorem 3.2 [12]). Let be a complete metric space and $T : X \rightarrow X$ be an α - ψ -contractive mapping, that is,

$$\alpha(x, y) d(Tx, Ty) \leq \psi(d(x, y)), \forall x, y \in X$$

where $\psi \in \Psi$. Assume that

- (i) T is α -admissible;

(ii) there exists $x_0 \in X$ such that $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$;

(iii) T is continuous.

Then, T has a fixed point.

Here, Ψ is the family of nondecreasing functions $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ such that

$\sum_1^\infty \psi^n(t) < \infty$ for all $t > 0$, with ψ^n is the n th iterate of ψ (see [15]).

Lemma 2.6. ([12]) For every function $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ the following holds:

if ψ is nondecreasing, then for each $t > 0$, $\lim_{\infty} \psi^n(t) = 0$ implies $\psi(t) < t$.

Very recently, the authors in [4] introduced a new class of sets which generalizes the notion of orthogonal sets defined by Gordji et al. [5].

Definition 2.7. ([4]) Let $X \neq \emptyset$ and let $\perp_g \subset X \times X$ be a binary relation such that \perp_g satisfies the following condition.

$$\exists x_0, \forall y \in X \setminus \{x_0\}, y \perp_g x_0 \text{ or } x_0 \perp_g y, \quad (2.1)$$

then it is called a generalized orthogonal set. We denote it by (X, \perp_g) .

The element x_0 is said to be a generalized orthogonal element.

Definition 2.8. ([4]) Let (X, \perp_g) be a generalized orthogonal set. Then, a sequence $\{x_n\} \subset X$ is called a generalized orthogonal sequence if for all $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n \neq x_{n+1} \Rightarrow x_n \perp_g x_{n+1} \text{ or } x_{n+1} \perp_g x_n.$$

Definition 2.9. ([4]) Let (X, \perp_g) be a generalized orthogonal space and $T : X \rightarrow X$ be a selfmapping. T is said to be generalized \perp_g preserving if for all $x, y \in X$,

$$x \perp_g y \Rightarrow Tx \perp_g Ty.$$

Now, inspired by [13] and [4], we introduce the following definitions.

Definition 2.10. The triple (X, p, \perp_g) is called generalized orthogonal partial metric space if (X, \perp_g) is a generalized orthogonal set together with (X, p) is a partial metric space.

Definition 2.11. Let (X, p, \perp_g) be a generalized orthogonal partial metric space. A sequence $\{x_n\} \subset X$ is said to be Cauchy generalized orthogonal sequence if it satisfies both:

(i) $\{x_n\}$ is an O-Cauchy sequence in (X, p) ,

(ii) $\{x_n\}$ is a generalized orthogonal sequence in (X, \perp_g) .

Definition 2.12. Let (X, p, \perp_g) be a generalized orthogonal partial metric space. X is said to be generalized orthogonal complete space if every Cauchy generalized orthogonal sequence $\{x_n\} \subset X$ is convergent.

Definition 2.13. Let (X, p, \perp_g) be a generalized orthogonal partial metric space. A mapping $T : X \rightarrow X$ is said to be generalized orthogonal continuous mapping, if for

every generalized orthogonal sequence $\{x_n\} \subset X$ satisfying $\lim_n p(x_n, u) = 0$ for some $u \in X$ we have $\lim_n p(Tx_n, Tu) = 0$.

3. Main results

In this section, we start with the following definitions.

Definition 3.1. Let (X, p, \perp_g) be a generalized orthogonal partial metric space and $T : X \rightarrow X$ be a mapping. T is said to be generalized orthogonal α, β - ψ contractive if there exist $\alpha, \beta : X^2 \rightarrow (0, \infty)$ such that for all $x, y \in X$

$$x \perp_g y \Rightarrow \alpha(x, y) p(Tx, Ty) \leq \beta(x, y) \psi(p(x, y)),$$

where $\psi \in \Psi$ and α, β are introduced in the next definition.

Definition 3.2. Let $T : X \rightarrow X$ be a mapping, T is said to be α, β -admissible. If for all $x, y \in X$ we have

$$\alpha(x, y) \geq \beta(x, y) \Rightarrow \alpha(Tx, Ty) \geq \beta(Tx, Ty). \quad (3.1)$$

Remark 3.3. In the above Definition, if we take $\beta(x, y) = 1$, the concept α, β -admissible becomes α -admissible.

Example. Let $X = (0, \infty)$ and $T : X \rightarrow X$ be a mapping such that $Tx = \sqrt{x}$ for all $x \in X$. Define $\alpha, \beta : X^2 \rightarrow R^+$ by

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} e^{x-y} & \text{if } x \geq y \\ y-x & \text{else} \end{cases}$$

and

$$\beta(x, y) = \begin{cases} x-y+1 & \text{if } x \geq y \\ \ln(y-x+1) & \text{else} \end{cases}$$

It is easy to see that T has a fixed point, but is not an α -admissible mapping: $\alpha(1, 2) \geq 1$, however $\alpha(T1, T2) = \sqrt{2} - 1 < 1$. On the other hand, T is an α, β -admissible mapping:

Let $x, y \in X$, so we have:

Case 1: If $x \geq y$, then $\alpha(Tx, Ty) = e^{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \geq \sqrt{x} - \sqrt{y} + 1 = \beta(Tx, Ty)$.

Case 2: If $x < y$, then $\alpha(Tx, Ty) = y - x \geq \ln(y - x + 1) = \beta(Tx, Ty)$.

Remark 3.4. The proposed class of α, β -admissible mappings contains a large class of mappings compared with the class of α -admissible mappings.

Now, we are able to discuss the main result.

Theorem 3.5. Let (X, p, \perp_g) be a complete generalized orthogonal partial metric space and $T : X \rightarrow X$ be a mapping satisfying

- (i) T is a generalized orthogonal α, β - ψ -contractive;
- (ii) T is α, β -admissible;
- (iii) for a generalized orthogonal element $x_0 \in X$ we have $\alpha(x_0, Tx_0) \geq \beta(x_0, Tx_0)$;

(iv) T is a generalized \perp_g -preserving;

(v) T is a generalized orthogonal continuous mapping.

Then T has a fixed point.

Proof. Let $x_0 \in X$ be the generalized orthogonal element satisfying (iii), so for all $x_0 \neq y \in X$

$$x_0 \perp_g y \text{ or } y \perp_g x_0. \quad (3.2)$$

We can construct a sequence $\{x_n\}$ defined by $x_{n+1} = Tx_n$ for all $n \in N \cup \{0\}$.

If there exists $n_0 \in N \cup \{0\}$ such that $x_{n_0} = x_{n_0+1}$, so x_{n_0} is the fixed point for T . Otherwise, we suppose that $x_n \neq x_{n+1}$ for all $n \in N \cup \{0\}$, from (3.2) we obtain that $x_0 \perp_g Tx_0$ or $Tx_0 \perp_g x_0$ and by the fact that T is a generalized \perp_g -preserving mapping we can conclude that $\{x_n\}$ is a generalized orthogonal sequence.

Now, since T is α, β -admissible, by (iii) we have

$$\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq \beta(x_n, x_{n+1}), \quad (3.3)$$

for all $n \in N \cup \{0\}$.

Applying (i), we obtain

$$\alpha(x_n, x_{n+1}) p(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq \beta(x_n, x_{n+1}) \psi(p(x_n, x_{n+1})) \quad (3.4)$$

for all $n \in N \cup \{0\}$.

We have $p(x_n, x_{n+1}) > 0$ for all $n \in N \cup \{0\}$, this fact with the monotony of ψ imply that

$$p(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq \psi^{n+1}(p(x_0, x_1)) \quad (3.5)$$

for all $n \in N \cup \{0\}$.

In this step, let $n, m \in N$ be such that $m \geq 2$, so we have

$$p(x_n, x_{n+m}) \leq \sum_{k=n}^{n+m-1} p(x_k, x_{k+1}) - \sum_{k=n+1}^{n+m-1} p(x_k, x_k), \quad (3.6)$$

which implies by (3.5) and the definition of the function ψ that $\{x_n\}$ is a Cauchy generalized orthogonal sequence. Since X is a complete generalized orthogonal partial space, there exists $u \in X$ such that $\lim_{n \rightarrow \infty} p(u, x_n) = p(u, u) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(x_m, x_n) = 0$. Now by (v), we have $\lim_{n \rightarrow \infty} p(Tu, Tx_n) = 0$, and hence

$$\begin{aligned} p(u, Tu) &\leq p(u, x_n) + p(x_n, x_{n+1}) + p(x_{n+1}, Tu) \\ &\leq p(u, x_n) + p(x_n, x_{n+1}) + p(Tx_n, Tu), \end{aligned} \quad (3.7)$$

for all $n \in N$. Letting $n \rightarrow \infty$, we get $p(u, Tu) = 0$ which implies that $u = Tu$. \square

In the above Theorem, if we take $p(x, x) = 0$ for all $x \in X$ (in other words, since every metric space is a partial metric space), we obtain the following result

Corollary 3.6. Let (X, d, \perp_g) be a complete generalized orthogonal metric space and $T : X \rightarrow X$ be a mapping satisfying

- (i) T is a generalized orthogonal α, β - ψ -contractive mapping;
- (ii) T is α, β -admissible;
- (iii) for a generalized orthogonal element $x_0 \in X$ we have

$$\alpha(x_0, Tx_0) \geq \beta(x_0, Tx_0);$$

- (iv) T is a generalized \perp_g -preserving;
- (v) T is a generalized orthogonal continuous mapping.

Then T has a fixed point.

If we replace the condition “generalized orthogonal α, β - ψ -contractive” by “ α, β - ψ -contractive,” we obtain the following result.

Corollary 3.7. Let (X, p) be a complete partial metric space and $T : X \rightarrow X$ be a mapping satisfying

- (i) T is α, β - ψ -contractive;
- (ii) T is α, β -admissible;
- (iii) for some $x_0 \in X$ we have

$$\alpha(x_0, Tx_0) \geq \beta(x_0, Tx_0);$$

- (iv) T is a continuous mapping.

Then T has a fixed point.

If we take $\beta=1$, we obtain the famous result

Corollary 3.8. (Theorem 2.2 [12]) Let (X, d) be a complete metric space and $T : X \rightarrow X$ be an α - ψ -contractive mapping satisfying the following conditions:

- (i) T is α -admissible;
- (ii) there exists $x_0 \in X$ such that $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$;
- (iii) T is continuous.

Then, T has a fixed point.

Example. Let $X = [0, \infty)$, we endow X with the partial metric $p(x, y) = \max\{x, y\}$. Define a mapping $T : X \rightarrow X$ by

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{if } x \in [0, 1] \cup (2, \infty) \\ x & \text{if } x \in (1, 2] \end{cases}$$

and two functions

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x, y \in [0, 1] \\ 0 & \text{if } x, y \in (1, 2] \\ \frac{2}{3} & \text{else,} \end{cases}$$

$$\beta(x, y) = \begin{cases} 3 & \text{if } x, y \in [0, 1] \\ 0 & \text{if } x, y \in (1, 2] \\ \max\{2x, 2y\} & \text{else.} \end{cases}$$

Since for all $x, y \in X$ such that $\alpha(x, y) \geq \beta(x, y)$ implies

$$\alpha(Tx, Ty) = \alpha(x, y) = 0 \geq 0 = \beta(x, y) = \beta(Tx, Ty).$$

So, T is an α, β -admissible mapping.

Now, we define a binary relation on $X \times X$ by

$$x \perp_g y \Leftrightarrow \neg \circ \neg \circ x < y$$

and hence (X, p, \perp_g) is a complete generalized orthogonal partial metric space and $\frac{3}{2}$ is a generalized orthogonal element satisfying

$$\alpha\left(\frac{3}{2}, T\frac{3}{2}\right) = \alpha\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = 0 \geq 0 = \beta\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \beta\left(\frac{3}{2}, T\frac{3}{2}\right).$$

Clearly, T is a generalized \perp_g -preserving and a generalized orthogonal continuous mapping.

Finally, if we take $\psi(t) = \frac{2}{3}t$ for all $t \in R^+$, then T is a generalized orthogonal α, β - ψ -contractive. Indeed: let $x, y \in X$ such that $x \perp_g y$, and hence $x < y$, so we have the following cases:

Case 1: if $x, y \in [0, 1]$, then

$$\begin{aligned} \alpha(x, y) p(Tx, Ty) &= \max\{Tx, Ty\} \\ &= \max\{2x, 2y\} \\ &= 2y \\ &\leq 3 \times \frac{2}{3}y \\ &= \beta(x, y) \times \frac{2}{3} \max\{x, y\} \\ &= \beta(x, y) \psi(p(x, y)) \end{aligned}$$

Case 2: if $x \in [0, 1]$ and $y > 2$, so

$$\begin{aligned} \alpha(x, y) p(Tx, Ty) &= \frac{2}{3} \max\{Tx, Ty\} \\ &= \frac{2}{3} \max\{2x, 2y\} \\ &= \frac{4}{3}y \\ &\leq \frac{4}{3}y^2 \\ &= \beta(x, y) \times \frac{2}{3} \max\{x, y\} \\ &= \beta(x, y) \psi(p(x, y)). \end{aligned}$$

Case 3: if $x, y > 2$, then

$$\alpha(x, y) p(Tx, Ty) = \frac{2}{3} \max\{Tx, Ty\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{3} \max \{2x, 2y\} \\
 &= \frac{4}{3} y \\
 &\leq \frac{4}{3} y^2 \\
 &\leq 2y \frac{2}{3} y \\
 &= \beta(x, y) \times \frac{2}{3} \max \{x, y\} \\
 &= \beta(x, y) \psi(p(x, y)).
 \end{aligned}$$

Case 4: if $x, y \in (1, 2]$, then

$$\begin{aligned}
 \alpha(x, y) p(Tx, Ty) &= 0 \\
 &\leq \beta(x, y) \psi(p(x, y)).
 \end{aligned}$$

Remark 3.9. It is clear to see that Corollary 3.8 (Theorem 2.2 in [12]) does not ensure the existence of a fixed point since T is not an α -admissible mapping. Indeed:

$$\alpha\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right) \geq 1, \text{ however } \alpha\left(T\frac{3}{4}, T\frac{7}{8}\right) = \alpha\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right) = 0 < 1. \quad (3.8)$$

4. Application in Dynamic Programming

The theory of dynamic programming traces its origins to the study of multistage decision processes. Inspired by [17, 18], we study the existence and uniqueness of a solution of a class of functional equations arising in dynamic programming. For this purpose, suppose that X and Y are Banach spaces, $S \subset X$ is the state space, and $D \subset Y$ is the decision space. Let $\rho: S \times D \rightarrow S$, $g: S \times D \rightarrow \mathbb{R}^+$ and $G: S \times D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, where \mathbb{R} is the field of real numbers and \mathbb{R}^+ is the set of non-negative real numbers. $B(S)^+$ denotes the set of all continuous bounded and non-negative real-valued functions on S . For $h, k \in B(S)^+$, let

$$p(h, k) = \sup_{x \in S} \{|h(x) - k(x)|\} + \max\{\sup_{x \in S} |h(x)|, \sup_{x \in S} |k(x)|\}.$$

It is easy to see that $(B(S)^+, p, \perp_g: = \leq)$ is a complete generalized orthogonal partial metric space with $x_0 \equiv 0$.

Now, consider the following functional equation

$$f(x) = \sup \left\{ g(x, y) + G\left(x, y, f(\rho(x, y))\right) \right\}, \quad (4.1)$$

where g and G are bounded. We define $T: B(S)^+ \rightarrow B(S)^+$ by

$$Tf(x) = \sup \left\{ g(x, y) + G\left(x, y, f(\rho(x, y))\right) \right\}. \quad (4.2)$$

In the following, we prove the existence and uniqueness of the solution for functional (4.1). This is equivalent to proving the existence and uniqueness of the mapping T defined in (4.2).

Theorem 4.2. Suppose that there exist $\theta: B(S)^+ \times B(S)^+ \rightarrow \mathbb{R}$ and $\psi \in \Psi$ such that for all $h, k \in B(S)^+$ we have the following:

- (i) $\theta(x_0, Tx_0) \leq 0$,
- (ii) $\theta(h, k) \leq 0 \Rightarrow \theta(Th, Tk) \leq 0$,
- (iii) $h \perp_g k \Rightarrow$

$$\begin{cases} |G(x, y, h(\rho(x, y))) - G(x, y, k(\rho(x, y)))| + \max\{\sup_{x \in S} |Th(x)|, \sup_{x \in S} |Tk(x)|\} \leq \psi(p(h, k)), \\ G(x, y, h(\rho(x, y))) \leq G(x, y, k(\rho(x, y))), \end{cases}$$

for all $(x, y) \in S \times D$.

Then, T has a unique fixed point.

Proof. We will proceed by adhering to the following steps:

• Let ε be an arbitrary positive number, let $x \in S$ and $h, k \in B(S)^+$ with $h \perp_g k$; therefore there exist $y, z \in D$ such that

$$Th(x) < g(x, y) + G(x, y, h(\rho(x, y))) + \varepsilon, \quad (4.3)$$

$$Tk(x) < g(x, z) + G(x, z, k(\rho(x, z))) + \varepsilon. \quad (4.4)$$

At the same time, from the definition of T , we get

$$Th(x) \geq g(x, z) + G(x, z, h(\rho(x, z))), \quad (4.5)$$

$$Tk(x) \geq g(x, y) + G(x, y, k(\rho(x, y))). \quad (4.6)$$

It follows from (4.3) and (4.6) that

$$\begin{aligned} Th(x) - Tk(x) &< G(x, y, h(\rho(x, y))) - G(x, y, k(\rho(x, y))) + \varepsilon \\ &< |G(x, y, h(\rho(x, y))) - G(x, y, k(\rho(x, y)))| + \varepsilon. \end{aligned}$$

Thus by condition (iii), we obtain

$$Th(x) - Tk(x) < \psi(p(h, k)) - \max\{\sup_{x \in S} |Th(x)|, \sup_{x \in S} |Tk(x)|\} + \varepsilon.$$

Similarly, from (4.4) and (4.5), we have

$$Tk(x) - Th(x) < \psi(p(h, k)) - \max\{\sup_{x \in S} |Th(x)|, \sup_{x \in S} |Tk(x)|\} + \varepsilon.$$

Then

$$|Th(x) - Tk(x)| < \psi(p(h, k)) - \max\{\sup_{x \in S} |Th(x)|, \sup_{x \in S} |Tk(x)|\} + \varepsilon,$$

Equivalently

$$|Th(x) - Tk(x)| + \max\{\sup_{x \in S} |Th(x)|, \sup_{x \in S} |Tk(x)|\} < \psi(p(h, k)) + \varepsilon,$$

This implies that

$$p(Th, Tk) < \psi(p(h, k)) + \varepsilon.$$

Since ε is taken arbitrary, we obtain

$$p(Th, Tk) \leq \psi(p(h, k)). \quad (4.7)$$

Now, let

$$\alpha(h, k) = \begin{cases} 1 & \text{if } \theta(h, k) \leq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

and

$$\beta(h, k) = \begin{cases} 1 & \text{if } \theta(h, k) \leq 0, \\ 2 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then

$$\alpha(h, k)p(Th, Tk) \leq \beta(h, k)\psi(p(h, k)).$$

Therefore, T is generalized orthogonal α, β - ψ -contractive.

• If $\alpha(h, k) \geq \beta(h, k)$, then $\theta(h, k) \leq 0$. Then, from condition (ii), we obtain $\theta(Th, Tk) \leq 0$ which implies that $\alpha(Th, Tk) \geq \beta(Th, Tk)$. Hence, T is α, β -admissible.

• If $\theta(x_0, Tx_0) \leq 0$, then $\alpha(x_0, Tx_0) = 1 \geq 1 = \beta(x_0, Tx_0)$. Then condition (iii) from Theorem 3.5 holds.

- From condition (iii), we have $h \perp_g k$ leads to

$$G(x, y, h(\rho(x, y))) \leq G(x, y, k(\rho(x, y))),$$

and so by the definition of T we get $Th \perp_g Tk$. This means that the mapping T is generalized \perp_g -preserving.

It remains to prove that T is a generalized orthogonal continuous mapping.

- Let $\{h_n\}$ be a generalized orthogonal sequence of functions of X such that $\lim_n p(h_n, u) = 0$ for some $u \in B(S)^+$. Since $\perp_g = \leq$, we have

$$h_n \leq h_{n+1} \text{ or } h_{n+1} \leq h_n, \text{ then } h_n \leq u \text{ or } u \leq h_n.$$

Therefore, according to (4.7), we have

$$\begin{aligned} p(Th_n, Tu) &\leq \psi(p(h_n, u)) \\ &< p(h_n, u). \end{aligned}$$

Then $\lim_n p(Th_n, Tu) = 0$ and T is a generalized orthogonal continuous mapping.

Finally, all conditions of Theorem 3.5 hold and T has a unique fixed point. \square

Remark 4.3. In a future work, we will compare our results with the famous Caristi's fixed point theorem [19]. Moreover, we will study the existence of solutions for certain differential equations via the proven results.

References

1. Matthews S.G. (1994) Partial metric topology. *Annals of the New York Academy of Sciences*. 728. pp. 183–197. DOI: 10.1111/j.1749-6632.1994.tb44144.x.
2. Touail Y., Jaid A., El Moutawakil D. (2023) New contribution in fixed point theory via an auxiliary function with an application. *Ricerche di Matematica*. 72. pp. 181–191. DOI: 10.1007/s11587-021-00645-6.
3. Ćirić L., Samet B., Aydi H., Vetro C. (2011) Common fixed points of generalized contractions on partial metric spaces and an application. *Applied Mathematics and Computation*. 218(6). pp. 2398–2406. DOI: 10.1016/j.amc.2011.07.005.
4. Touail Y., El Moutawakil D. (2021) \perp_{ψ_F} -contractions and some fixed point results on generalized orthogonal sets. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Serie II*. 70. pp. 1459–1472. DOI: 10.1007/s12215-020-00569-4.
5. Eshaghi Gordji M., Rameani M., De La Sen M., Cho Y.J. (2017) On orthogonal sets and Banach fixed point theorem. *Fixed Point Theory*. 18(2). pp. 569–578. DOI: 10.24193/fpt-ro.2017.2.45.
6. Touail Y., El Moutawakil D. (2021) Fixed point theorems on orthogonal complete metric spaces with an application. *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*. 12(2). pp. 1801–1809. DOI: 10.22075/ijnaa.2021.23033.2464.
7. Wardowski D. (2012) Fixed points of a new type of contractive mappings in complete metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*. 94. DOI: 10.1186/1687-1812-2012-94.
8. Secelean N.A., Wardowski D. (2016) ψ_F -contractions: not necessarily nonexpansive Picard operators. *Results in Mathematics*. 70(3–4). pp. 415–431. DOI: 10.1007/s00025-016-0570-7.
9. Touail Y., Jaid A., El Moutawakil D. (2023) Fixed point theorems on orthogonal metric spaces via τ -distances. *St. Petersburg State Polytechnical University Journal: Physics and Mathematics*. 16(4). pp. 215–223. DOI: 10.18721/JPM.16417.
10. Touail Y., Jaid A., El Moutawakil D. (2023) A new common fixed point theorem on orthogonal metric spaces and an application. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskiye nauki – Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 27(4). pp. 737–744. DOI: 10.14498/vsgtu1998.

11. Touail Y. (2022) On multivalued \perp_{ψ_F} -contractions on generalized orthogonal sets with an application to integral inclusions. *Problemy Analiza – Issues of Analysis*. 11(3). pp. 109–124. DOI: 10.15393/j3.art.2022.12030.
12. Samet B., Vetro C., Vetro P. (2012) Fixed point theorems for α - ψ -contractive type mappings. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*. 75(4). pp. 2154–2165. DOI: 10.1016/j.na.2011.10.014.
13. Hussain N., Karapinar E., Salimi P., Akbar F. (2013) α -admissible mappings and related fixed point theorems. *Journal of Inequalities and Applications*. 2013:114. DOI: 10.1186/1029-242X-2013-114.
14. Karapinar E. (2014) α - ψ -Geraghty contraction type mappings and some related fixed point results. *Filomat*. 28(1). pp. 37–48. DOI: 10.2298/FIL1401037K.
15. La Rosa V., Vetro P. Common fixed points for α - ψ - ϕ -contractions in generalized metric spaces. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*. 19(1). 43–54 (2014). DOI: 10.15388/NA.2014.1.3.
16. Romaguera S. (2010) A Kirk type characterization of completeness for partial metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*. 2010: Article ID 493298, 6 pages. DOI: 10.1155/2010/493298.
17. Bellman R. (1957) *Dynamic Programming*. Princeton University Press. DOI: 10.2307/j.ctv1nxcw0f.
18. Bellman R., Lee E.S. (1978) Functional equations arising in dynamic programming. *Aequationes Mathematicae*. 17. pp. 1–18. DOI: 10.1007/BF01818535.
19. Caristi J. (1976) Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions. *Transactions of the American Mathematical Society*. 215. pp. 241–251.

Information about the author:

Touail Youssef (PhD of Department of Mathematics, Faculty of Sciences Dhar El Mahraz University Sidi Mohamed Ben Abdellah, Fez, Morocco). E-mail: youssef9touail@gmail.com

Сведения об авторе:

Туайль Юсеф – доктор философии, профессор кафедры математики, факультет им. Дар Эль Махраз, университет имени Сиди Мухаммада бен Абдаллаха (Фес, Марокко). E-mail: youssef9touail@gmail.com

The article was submitted 01.04.2023; accepted for publication 06.09.2025

Статья поступила в редакцию 01.04.2023; принята к публикации 06.09.2025

Научная статья

УДК 514.76

MSC: 53C15, 53C30, 53C25, 22E25

doi: 10.17223/19988621/97/2

Левоинвариантные кэлеровы и полупаракаэлеровы структуры на некоторых шестимерных неразрешимых группах Ли

Николай Константинович Смоленцев¹,
Анастасия Юрьевна Соколова²

^{1, 2} Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия

¹ smolennk@mail.ru

² socolova.nastya25@mail.ru

Аннотация. Рассматривается вопрос о существовании левоинвариантных кэлеровых и полупаракаэлеровых структур на шестимерных неразрешимых группах Ли, алгебры Ли которых являются полупрямыми произведениями. В соответствии с классификационными результатами существует четыре таких алгебры Ли. Показано, что одна из указанных четырех групп Ли допускает левоинвариантные кэлеровы метрики, а остальные три допускают левоинвариантные полупаракаэлеровы и полукэлеровы структуры.

Ключевые слова: шестимерные неразрешимые группы Ли, шестимерные неразрешимые алгебры Ли, левоинвариантные кэлеровы структуры, левоинвариантные полупаракаэлеровы структуры

Для цитирования: Смоленцев Н.К., Соколова А.Ю. Левоинвариантные кэлеровы и полупаракаэлеровы структуры на некоторых шестимерных неразрешимых группах Ли // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 97. С. 17–30. doi: 10.17223/19988621/97/2

Original article

Left-invariant Kähler and semi-para-Kähler structures on some six-dimensional unsolvable Lie groups

Nikolai K. Smolentsev¹, Anastasia Yu. Sokolova²

^{1, 2} Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation

¹ smolennk@mail.ru

² socolova.nastya25@mail.ru

Abstract. It is well known that semisimple Lie groups do not admit left-invariant symplectic structures, and if a four-dimensional Lie group admits a left-invariant symplectic structure, then it must be solvable. In the six-dimensional case, this is not the case; there exist six-dimensional symplectic unsolvable Lie algebras. An example of such a Lie algebra was given by Chu B.-Y. in 1974. Chu also showed that if the Lie algebra of a Lie group has

a Levi–Maltsev decomposition in the form of a direct product, then there are no symplectic structures on such a Lie group. Thus, the question remains about the existence of left-invariant symplectic structures only on such Lie groups for which the Levi–Maltsev decomposition of the corresponding Lie algebras is a semidirect product. It is known that there are four classes of such Lie algebras. This paper studies questions about the existence of various left-invariant geometric structures on four six-dimensional insoluble Lie groups whose Lie algebras are semidirect products. It is shown that left-invariant symplectic structures and even Kähler structures with Einstein pseudo-Riemannian metrics exist only on one of these Lie groups. This is a Lie group with a Lie algebra defined by nonzero Lie brackets: $[e_1, e_2] = e_2$, $[e_1, e_3] = e_3$, $[e_4, e_5] = 2e_5$, $[e_4, e_6] = -2e_6$, $[e_5, e_6] = e_4$, $[e_2, e_4] = e_2$, $[e_2, e_5] = e_3$, $[e_3, e_4] = -e_3$, $[e_3, e_6] = e_2$. Thus, a six-dimensional symplectic Lie algebra must be solvable except in one case. The remaining three Lie groups admit left-invariant semi-para-Kähler and semi-Kähler structures with integrable complex or paracomplex structures.

Keywords: six-dimensional unsolvable Lie groups, six-dimensional unsolvable Lie algebras, left-invariant Kähler structures, left-invariant semi-para-Kähler structures

For citation: Smolentsev, N.K., Sokolova, A.Yu. (2025) Left-invariant Kähler and semi-para-Kähler structures on some six-dimensional unsolvable Lie groups. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 97. pp. 17–30. doi: 10.17223/19988621/97/2

1. Введение

Левоинвариантные структуры на группе Ли определяются своими значениями на алгебре Ли. Поэтому при их исследовании обычно имеют дело со структурами на алгебре Ли группы Ли. В этом смысле мы будем говорить далее, например, о симплектической, или кэлеровой, алгебре Ли, имея в виду левоинвариантную симплектическую, или кэлерову, структуру на соответствующей группе Ли.

Хорошо известно, что разрешимые алгебры Ли могут допускать симплектические структуры [1, 2]. В работе В.-Y. Chu [3] показано, что четырехмерная симплектическая алгебра Ли обязана быть разрешимой. В шестимерном случае это не так, и Chu [3] привел пример шестимерной симплектической, но неразрешимой алгебры Ли. В этой же работе показано, что полупростые алгебры Ли не могут быть симплектическими. Если алгебра Ли \mathfrak{g} неразрешима, то она имеет разложение Леви–Мальцева $\mathfrak{g} = N \oplus S$ в виде прямой суммы радикала N и разрешимой подалгебры S . В работе [3] показано, если алгебра Ли \mathfrak{g} имеет разложение Леви–Мальцева в виде прямого произведения $\mathfrak{g} = N \times S$, тогда на ней не существует симплектических структур. Таким образом, остается вопрос о существовании симплектических структур только на неразрешимых шестимерных алгебрах Ли, для которых разложение Леви–Мальцева является полупрямым произведением $\mathfrak{g} = N \ltimes S$. Согласно классификации шестимерных неразрешимых алгебры Ли [4, 5], которые являются полупрямыми произведениями, существует четыре класса таких алгебр Ли.

Пусть (следуя обозначениям работы [4]) $A_{3,1}$, $A_{3,3}$, $A_{3,5}$ – трехмерные разрешимые алгебры Ли с базисом $\{e_1, e_2, e_3\}$ и со следующими ненулевыми скобками Ли: $A_{3,1}$ – коммутативная алгебра; $A_{3,3}$: $[e_1, e_2] = e_3$; $A_{3,5}$: $[e_1, e_2] = e_2$, $[e_1, e_3] = e_3$. Таким образом, $A_{3,1} = \mathbf{R}^3$, $A_{3,3}$ – это трехмерная алгебра Гейзенберга \mathfrak{h}_3 , $A_{3,5}$ – трехмерная разрешимая и не унимодулярная алгебра Ли. Пусть $so(3)$ – алгебра Ли группы ортогональных матриц и $sl(2, \mathbf{R})$ – алгебра Ли матриц порядка 2 с нулевым следом. На данных алгебрах Ли выберем обычный базис $\{e_4, e_5, e_6\}$. Как известно [4, 5],

существует четыре шестимерных неразрешимых алгебры Ли, которые являются полупрямыми произведениями. Они определяются следующими скобками Ли:

1. $A_{3,5} \ltimes sl(2, \mathbf{R})$: $[e_1, e_2] = e_2$, $[e_1, e_3] = e_3$, $[e_4, e_5] = 2e_5$, $[e_4, e_6] = -2e_6$, $[e_5, e_6] = e_4$, $[e_2, e_4] = e_2$, $[e_2, e_5] = e_3$, $[e_3, e_4] = -e_3$, $[e_3, e_6] = e_2$.

2. $A_{3,3} \ltimes sl(2, \mathbf{R})$: $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_4, e_5] = 2e_5$, $[e_4, e_6] = -2e_6$, $[e_5, e_6] = e_4$, $[e_4, e_1] = e_1$, $[e_5, e_2] = e_1$, $[e_6, e_1] = e_2$, $[e_4, e_2] = -e_2$.

3. $A_{3,1} \ltimes sl(2, \mathbf{R})$: $[e_4, e_5] = 2e_5$, $[e_4, e_6] = -2e_6$, $[e_5, e_6] = e_4$, $[e_4, e_1] = 2e_1$, $[e_5, e_2] = 2e_1$, $[e_6, e_1] = e_2$, $[e_4, e_3] = -2e_3$, $[e_5, e_3] = e_2$, $[e_6, e_2] = 2e_3$.

4. $A_{3,1} \ltimes so(3)$: $[e_4, e_5] = e_6$, $[e_4, e_6] = -e_5$, $[e_5, e_6] = e_4$, $[e_4, e_2] = e_3$, $[e_5, e_1] = -e_3$, $[e_6, e_1] = e_2$, $[e_4, e_3] = -e_2$, $[e_5, e_3] = e_1$, $[e_6, e_2] = -e_1$.

Пусть G_1 , G_2 , G_3 и G_4 – группы Ли, соответствующие алгебрам Ли указанного списка. Вопрос о левоинвариантных симплектических структурах на данных группах Ли (о симплектических структурах алгебрах Ли) рассмотрен в работе авторов [6]. Показано, что только одна из четырех алгебр Ли допускает симплектические структуры. Таким образом, результат Chu относительно шестимерных неразрешимых алгебр Ли может быть уточнен следующим образом: шестимерная симплектическая алгебра Ли обязана быть разрешимой за исключением одного случая $A_{3,5} \ltimes sl(2, \mathbf{R})$. Поэтому эта исключительная неразрешимая симплектическая алгебра Ли $A_{3,5} \ltimes sl(2, \mathbf{R})$ заслуживает более глубокого изучения.

Данная работа является продолжением работы [6]. Мы рассмотрим вопросы о существовании левоинвариантных кэлеровых, полукэлеровых и полупаракаэлеровых структур на указанных выше четырех шестимерных неразрешимых группах Ли. Будет показано, что только на одной из четырех групп Ли, а именно на G_1 , существуют кэлеровы структуры, и даже с эйнштейновыми псевдоримановыми метриками. На остальных трех группах Ли существуют левоинвариантные полупаракаэлеровы и полукэлеровы структуры с интегрируемыми комплексными или паракомплексными структурами.

2. Предварительные сведения

Напомним основные понятия, используемые в данной работе.

Почти комплексной структурой на $2n$ -мерном многообразии M называется поле J эндоморфизмов $J: TM \rightarrow TM$ такое, что $J^2 = -Id$. Почти комплексная структура J называется *интегрируемой*, если обращается в нуль тензор Нейенхайса, определенный равенством $N_J(X, Y) = [JX, JY] - [X, Y] - J[JX, Y] - J[X, JY]$, для любых векторных полей X, Y на M . В этом случае J определяет на M структуру комплексного многообразия.

Будем рассматривать левоинвариантные почти комплексные структуры на группе Ли G , которые задаются левоинвариантным полем эндоморфизмов $J: TG \rightarrow TG$ касательного расслоения TG . Поскольку такой тензор J определяется линейным оператором на алгебре Ли $\mathfrak{g} = T_e G$, то мы будем говорить, что J – это инвариантная почти комплексная структура на алгебре Ли \mathfrak{g} . В этом случае условие интегрируемости J формулируется на уровне алгебры Ли: $N_J(X, Y) = 0$ для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$. В этом случае будем говорить, что J – это комплексная структура на алгебре Ли \mathfrak{g} .

Левоинвариантная симплектическая структура ω на группе Ли G задается 2-формой максимального ранга на алгебре Ли \mathfrak{g} . Замкнутость формы ω эквивалентна

следующему условию на алгебре Ли: $\omega([X, Y], Z) - \omega([X, Z], Y) + \omega([Y, Z], X) = 0$, $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. В этом случае алгебру Ли \mathfrak{g} будем называть симплектической.

Левоинвариантная (псевдо)кэлэрова структура (ω, J, g) на группе Ли G образована тремя левоинвариантными тензорами: симплектической формой ω , комплексной структурой J , согласованной с формой ω : $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$ и (псевдо)римановой метрикой g , определенной формулой $g(X, Y) = \omega(X, JY)$. Поскольку ω, J и g определяются своими значениями на алгебре Ли, то будем говорить, что (ω, J, g) – (псевдо)кэлэрова структура на алгебре Ли \mathfrak{g} .

Почти паракомплексной структурой на $2n$ -мерном многообразии M называется поле P эндоморфизмов касательного расслоения TM таких, что $P^2 = Id$, причем ранги собственных распределений $T^\pm M = \ker(Id \mp P)$ равны. Почти паракомплексная структура P называется интегрируемой, если распределения $T^\pm M$ инволютивны. В этом случае P называется паракомплексной структурой. Тензор Нийенхейса N почти паракомплексной структуры J определяется равенством $N_P(X, Y) = [X, Y] + [PX, PY] - P[PX, Y] - P[X, PY]$, для любых векторных полей X, Y на M . Как и в комплексном случае, паракомплексная структура P интегрируема тогда и только тогда, когда $N_P(X, Y) = 0$. Обзор теории паракомплексных структур представлен в работе [7].

Мы будем рассматривать левоинвариантные (почти) паракомплексные структуры на группе Ли G , которые задаются левоинвариантным полем эндоморфизмов $P: TG \rightarrow TG$ касательного расслоения TG . Поскольку такой тензор P определяется линейным оператором на алгебре Ли \mathfrak{g} , то мы будем говорить, что P – инвариантная почти паракомплексная структура на алгебре Ли \mathfrak{g} . В этом случае условие интегрируемости P также формулируется на уровне алгебры Ли: $N_P(X, Y) = 0$ для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$. Из условия интегрируемости P следует, что собственные подпространства \mathfrak{g}^+ и \mathfrak{g}^- оператора P на алгебре Ли \mathfrak{g} являются подалгебрами. Поэтому инвариантная почти паракомплексная структура на алгебре Ли \mathfrak{g} интегрируема тогда и только тогда, когда алгебра Ли \mathfrak{g} может быть представлена в виде прямой суммы двух подалгебр:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^+ \oplus \mathfrak{g}^-.$$

Паракэлэрова структура на алгебре Ли \mathfrak{g} – это тройка (ω, P, g) , состоящая из симплектической формы ω , паракомплексной структуры P , согласованной с формой ω : $\omega(PX, PY) = -\omega(X, Y)$, и (псевдо)римановой метрики g , определенной формулой $g(X, Y) = \omega(X, PY)$.

На последних трех алгебрах Ли представленного во введении списка нет замкнутых невырожденных 2-форм. Условие $d\omega = 0$ приводит к вырожденности формы ω . В то же время $d(\omega^3) = 3\omega \wedge \omega \wedge d\omega = 0$ для любой 2-формы ω на шестимерном многообразии. Промежуточным свойством будет следующее: $d(\omega^2) = 2\omega \wedge d\omega = 0$. Поэтому мы ослабим свойство замкнутости и потребуем, чтобы выполнялось свойство $\omega \wedge d\omega = 0$.

Последнее условие хорошо известно. В случае почти эрмитовых групп Ли размерности $2n$ свойство $d(\omega^{n-1}) = 0$ фундаментальной формы ω определяет класс полукэлэровых групп Ли по классификации Грея–Харвеллы [8], т.е. таких, что $\delta\omega = 0$.

В нашем случае псевдоэрмитовых метрик мы будем по аналогии называть такие многообразия полукэлэровыми.

Определение 1. Левоинвариантная почти эрмитова (почти параэрмитова) структура (G^{2n}, g, ω, J) на группе Ли, фундаментальная форма ω которой обладает свойством $d(\omega^{n-1}) = 0$, называется полукэлэровой (полупаракэлэровой).

На алгебрах Ли $A_{3,3} \ltimes sl(2, \mathbf{R})$, $A_{3,1} \ltimes sl(2, \mathbf{R})$ и $A_{3,1} \ltimes so(3)$ нет симплектических форм. Для невырожденной 2-формы ω ее внешний дифференциал $d\omega$ не равен нулю. При этом он может быть невырожденным как 3-форма. Понятие невырожденности (стабильности) для 3-формы Ω на шестимерном пространстве определено в работе Хитчина [9]. Для 3-формы Ω Хитчин построил линейный оператор K_Ω , квадрат которого пропорционален тождественному оператору Id . Напомним основные конструкции Хитчина.

Пусть V – шестимерное вещественное векторное пространство, и μ – форма объема на V . Пусть $\Omega \in \Lambda^3 V^*$ и $X \in V$, тогда $i_X \Omega \in \Lambda^2 V^*$ и $i_X \Omega \wedge \Omega \in \Lambda^5 V^*$. Естественное спаривание внешним произведением $V^* \otimes \Lambda^5 V^* \rightarrow \Lambda^6 V^* \cong \mathbf{R} \mu$ определяет изоморфизм $A: \Lambda^5 V^* \cong V$, и, используя это, Хитчин определил линейное преобразование $K_\Omega: V \rightarrow V$ следующей формулой:

$$K_\Omega(X) = A(i_X \Omega \wedge \Omega).$$

Другими словами, $i_{K_\Omega(X)} \mu = i_X \Omega \wedge \Omega$. Оператор K_Ω обладает свойствами: $\text{trace}(K_\Omega) = 0$ и $K_\Omega^2 = \lambda(\Omega)I$. Если $\lambda(\Omega) \neq 0$, то 3-форма Ω называется невырожденной. Если $\lambda(\Omega) < 0$, то получается структура J_Ω комплексного векторного пространства на пространстве V :

$$J_\Omega = \frac{1}{\sqrt{-\lambda(\Omega)}} K_\Omega,$$

а если $\lambda(\Omega) > 0$, то получаем паракомплексную структуру P_Ω , т.е., $P_\Omega^2 = Id$, $P_\Omega \neq 1$ по аналогичной формуле

$$P_\Omega = \frac{1}{\sqrt{\lambda(\Omega)}} K_\Omega.$$

Таким образом, если внешний дифференциал $d\omega$ невырожденный, то оператор $K_{d\omega}$ может определять либо почти комплексную, либо почти паракомплексную структуру на алгебре Ли \mathfrak{g} .

Пусть ∇ – связность Леви-Чивита, соответствующая (псевдо)римановой метрике g . Она определяется из обычной шестичленной формулы, которая для левоинвариантных векторных полей X, Y, Z на группе Ли принимает вид: $2g(\nabla_X Y, Z) = g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g(X, [Z, Y])$. Тензор кривизны определяется формулой $R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}$. Тензор Риччи $Ric(X, Y)$ определяется как свертка тензора кривизны по первому и четвертому (верхнему) индексам. Оператор Риччи определяется формулой $Ric(X, Y) = g(RIC(X), Y)$. Для вычислений геометрических характеристик использовалась система Maple.

3. Левоинвариантные структуры на неразрешимых группах Ли

В данном разделе мы рассмотрим левоинвариантные геометрические структуры на каждой из четырех шестимерных неразрешимых групп Ли, алгебры Ли которых являются полупрямыми произведениями. Напомним, что левоинвариантные геометрические структуры на группе Ли определяются своими значениями на алгебре Ли, поэтому при их исследовании обычно используется только алгебра Ли

группы Ли. В этом смысле мы будем говорить, например, о симплектической, или кэлеровой, алгебре Ли, имея в виду левоинвариантную симплектическую, или кэлерову, структуру на соответствующей группе Ли.

3.1. Левоинвариантные кэлеровы структуры на группе G_1 . Группа G_1 имеет алгебру Ли $A_{3,5} \ltimes sl(2, \mathbf{R})$. Данную алгебру Ли приводит Chu [3] в качестве примера, показывающего, что шестимерная симплектическая алгебра Ли не обязана быть разрешимой. Она состоит из матриц вида:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & a_6 & -a_4 \end{pmatrix}.$$

Общий вид симплектической 2-формы на данной алгебре Ли получен в работе [6]:

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_{12} & 0 & 0 & \omega_{12} & \omega_{13} & 0 \\ -\omega_{13} & 0 & 0 & -\omega_{13} & 0 & \omega_{12} \\ 0 & -\omega_{12} & \omega_{13} & 0 & \omega_{45} & \omega_{46} \\ 0 & -\omega_{13} & 0 & -\omega_{45} & 0 & \omega_{56} \\ 0 & 0 & -\omega_{12} & -\omega_{46} & -\omega_{56} & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

с условием невырожденности

$$\det(\omega) = \omega_{12}^4 \omega_{45}^2 - 4\omega_{12}^3 \omega_{13} \omega_{45} \omega_{56} + 2\omega_{12}^2 \omega_{13}^2 \omega_{45} \omega_{46} + 4\omega_{12}^2 \omega_{13}^2 \omega_{56}^2 - 4\omega_{12} \omega_{13}^3 \omega_{46} \omega_{56} + \omega_{13}^4 \omega_{46}^2 \neq 0.$$

Практически невозможно найти комплексную структуру в общем виде, согласованную с данной формой. Поэтому мы будем использовать частные случаи, когда симплектическая 2-форма имеет наиболее простой вид.

Случай 1. Указанному выше семейству принадлежит симплектическая структура

$$\omega_1 = e^1 \wedge e^2 + e^2 \wedge e^4 + e^3 \wedge e^6 - e^4 \wedge e^5, \quad (2)$$

приведенная в работе Chu [3].

Найдем комплексные структуры J , согласованные с формой (2). Для этого мы берем матрицу почти комплексной структуры $J = (\psi_{ij})$ и решаем ряд условий: $J^2 = -Id$, условие согласованности $\omega_1(JX, JY) = \omega_1(X, Y)$ и условие интегрируемости $N_J(X, Y) = [JX, JY] - [X, Y] - J[X, Y] - J[JX, Y] = 0$. Получается следующая система уравнений для нахождения согласованной комплексной структуры J :

$$\begin{cases} J_k^i J_j^k = -\delta_j^i, \\ J_i^k \omega_{kj} + \omega_{ik} J_j^k = 0, \\ J_i^l J_j^m C_{lm}^k - J_j^m C_{im}^l J_i^k - J_i^l C_{lj}^m J_m^k - C_{ij}^k = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где C_{ij}^k – структурные константы алгебры Ли.

Данная система алгебраических уравнений решается с использованием символьных вычислений Maple. Сначала решаем самое простое условие согласованности, затем – условие интегрируемости, и в заключение проверяется условие $J^2 = -Id$.

Для алгебры Ли $A_{3,5} \ltimes sl(2, \mathbf{R})$ получается шесть решений условий (3). Для каждого случая определяем ассоциированную псевдориманову метрику формулой $g_J(X, Y) = \omega_1(X, JY)$. В результате каждое решение представляет кэлерову структуру (ω_1, J, g_J) . Причем среди них есть одна кэлерова структура (ω_1, J_1, g_1) с эйнштейновой метрикой g_1 скалярной кривизны $S = 12$. Такая комплексная структура и метрический тензор представлены следующими матрицами:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Случай 2. Указанному выше семейству симплектических форм (1) также принадлежит следующая симплектическая структура:

$$\omega_2 = e^1 \wedge e^3 + e^2 \wedge e^5 - e^3 \wedge e^4 + e^4 \wedge e^6. \quad (5)$$

Вычисления показывают, что существует пять семейств комплексных структур J , согласованных с формой (5). Каждое решение представляет кэлерову структуру (ω_2, J, g_J) . Причем среди них есть одна кэлерова структура (ω_2, J_2, g_2) с эйнштейновой метрикой g_2 ненулевой скалярной кривизны $S = -12a$, зависящей от одного параметра. Такая комплексная структура и метрический тензор представлены следующими матрицами:

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a & 0 & \frac{1}{a} & \frac{a}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a} & -\frac{a}{4} \\ 0 & -\frac{a^3}{4} & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a^3}{4} & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a} & a & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & \frac{a}{4} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Параэрмитова структура. На алгебре Ли $A_{3,5} \ltimes sl(2, \mathbf{R})$ имеется (интегрируемая) паракомплексная структура P_0 , соответствующая полупрямому произведению подалгебр $\mathfrak{g} = A_{3,5} \ltimes sl(2, \mathbf{R})$. Она имеет диагональную матрицу $P_0 = \text{diag}\{1, 1, 1, -1, -1, -1\}$. Кроме того, на алгебре Ли $A_{3,5} \ltimes sl(2, \mathbf{R})$ имеется 2-форма $\Omega_0 = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^6$, также соответствующая разложению в полупрямое произведение (здесь e^1, \dots, e^6 – дуальный базис). Однако форма Ω_0 не является полукэлеровой. Поэтому на алгебре Ли $A_{3,5} \ltimes sl(2, \mathbf{R})$ определена параэрмитова структура (Ω_0, P_0, g_0) , где псевдориманова метрика g_0 определяется равенством $g_0(X, Y) = \Omega_0(X, P_0 Y)$. Эта метрика имеет тензор Риччи вида:

$$\text{Ric} = -e^1 \cdot e^1 - \frac{1}{2}e^5 \cdot e^5 - \frac{1}{2}e^6 \cdot e^6 - 2e^2 \cdot e^5 + 2e^3 \cdot e^6 - 2e^4 \cdot e^3 - 5e^5 \cdot e^6$$

и нулевую скалярную кривизну. Напомним, что $e^i \cdot e^j = \frac{1}{2}(e^i \otimes e^j + e^j \otimes e^i)$ – симметричное произведение.

Полученные результаты сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. *Группа Ли G_1 с алгеброй Ли $A_{3,3} \ltimes sl(2, \mathbf{R})$ допускает многопараметрическое семейство левоинвариантных симплектических структур (1). Группа G_1 допускает левоинвариантные кэлеровы структуры, в том числе и такие, которые имеют эйнштейновы метрики (4) и (6). Группа G_1 имеет также естественную левоинвариантную параэрмитову структуру нулевой скалярной кривизны.*

3.2. Левоинвариантные полупаракэлеровы структуры на группе G_2 . Группа G_2 имеет алгебру Ли $A_{3,3} \ltimes sl(2, \mathbf{R})$. На данной алгебре Ли нет левоинвариантных симплектических структур, из условия замкнутости $d\omega = 0$ следует вырожденность 2-формы ω . Это легко показать. Пусть $\omega = \omega_{ij}e^i \wedge e^j$ – произвольная 2-форма. Компоненты внешнего дифференциала имеют следующие выражения через структурные константы C_{ij}^k :

$$d\omega_{ijk} = -C_{ij}^s \omega_{sk} + C_{ik}^s \omega_{sj} - C_{jk}^s \omega_{si}.$$

Из условия $d\omega_{ijk} = 0$ имеем, в частности, $d\omega_{134} = -C_{13}^s \omega_{s4} + C_{14}^s \omega_{s3} - C_{34}^s \omega_{s1} = 0$. Из коммутационных соотношений $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_4, e_5] = 2e_5$, $[e_4, e_6] = -2e_6$, $[e_5, e_6] = e_4$, $[e_4, e_1] = e_1$, $[e_5, e_2] = e_1$, $[e_6, e_1] = e_2$, $[e_4, e_2] = -e_2$ получаем $C_{13}^s = 0$, $C_{34}^s = 0$ и $C_{14}^s = -1$. Поэтому имеем $d\omega_{134} = -\omega_{13} = 0$. Совершенно аналогично получаются следующие равенства: $\omega_{13} = 0$, $\omega_{23} = 0$, $\omega_{34} = 0$, $\omega_{35} = 0$, $\omega_{36} = 0$, из которых следует вырожденность формы ω .

Полупаракэлерова структура, соответствующая полупрямому произведению. На данной алгебре Ли имеется паракомплексная структура P_0 , соответствующая полупрямому произведению подалгебр: $\mathfrak{g} = A_{3,3} \ltimes sl(2, \mathbf{R})$. Она имеет диагональную матрицу $P_0 = \text{diag}\{1, 1, 1, -1, -1, -1\}$.

Кроме того, на алгебре Ли $A_{3,3} \ltimes sl(2, \mathbf{R})$ имеется естественная 2-форма $\Omega = ae^1 \wedge e^4 + be^2 \wedge e^5 + ce^3 \wedge e^6$, также соответствующая полупрямому произведению. Легко видеть, что она согласована с оператором P_0 и является полукэлеровой при условии $a = -b$. Выберем две наиболее простые полукэлеровы формы

$$\Omega_{01} = -e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^6 \text{ и } \Omega_{02} = e^1 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^6. \quad (7)$$

Таким образом, на алгебре Ли $A_{3,3} \ltimes sl(2, \mathbf{R})$ определены две полупаракэлеровы структуры $(\Omega_{0i}, P_0, g_{0i})$, $i = 1, 2$, псевдоримановы метрики которых $g_{0i}(X, Y) = \Omega_{0i}(X, P_0 Y)$ имеют нулевые скалярные кривизны и тензоры Риччи вида:

$$\begin{aligned} Ric_1 &= -4e^2 \cdot e^4 - 4e^4 \cdot e^4 - 8e^5 \cdot e^6, \\ Ric_2 &= 4e^2 \cdot e^4 - 4e^4 \cdot e^4 - 8e^5 \cdot e^6. \end{aligned}$$

Обе формы Ω_{0i} имеют вырожденные в смысле Хитчина внешние дифференциалы.

Общие полупаракэлеровы структуры. На алгебре Ли не существует замкнутых невырожденных 2-форм. Поэтому будем рассматривать полукэлеровы 2-формы, т.е. невырожденные формы ω , удовлетворяющие условию полукэлеровости $\omega \wedge d\omega = 0$.

Пусть $\omega = \omega_{ij}e^i \wedge e^j$ – произвольная 2-форма. Условие $\omega \wedge d\omega = 0$ выполняется при следующих значениях параметров:

$$\begin{aligned} \omega_{12}\omega_{35} - \omega_{13}\omega_{25} + \omega_{15}\omega_{23} &= 0, \quad \omega_{12}\omega_{34} - \omega_{13}\omega_{24} + \omega_{14}\omega_{23} = 0, \\ -\omega_{12}\omega_{36} + \omega_{13}\omega_{26} - \omega_{16}\omega_{23} &= 0, \\ \omega_{13}\omega_{46} - \omega_{14}\omega_{36} + \omega_{16}\omega_{34} + \omega_{23}\omega_{56} - \omega_{25}\omega_{36} + \omega_{26}\omega_{35} &= 0, \\ -\omega_{13}\omega_{56} + \omega_{15}\omega_{36} - \omega_{16}\omega_{35} - \omega_{23}\omega_{45} + \omega_{24}\omega_{35} - \omega_{25}\omega_{34} &= 0, \\ -\omega_{34}\omega_{56} + \omega_{35}\omega_{46} - \omega_{36}\omega_{45} &= 0. \end{aligned}$$

При условии невырожденности ω существует 7 решений этой системы. Во всех случаях 3-форма $d\omega$ является невырожденной в смысле Хитчина [9] и каждой 3-фор-

ме $d\omega$ соответствует оператор $P_{d\omega}$ (неинтегрируемой) почти паракомплексной структуры. Отметим, что выражения 2-форм ω и соответствующих операторов $P_{d\omega}$ являются весьма громоздкими. Поэтому рассмотрим только те полукэлэровы 2-формы с невырожденным $d\omega$, которые согласованы с паракомплексной структурой P_0 , т.е. такие, что $\omega(P_0X, P_0Y) = -\omega(X, Y)$. Тогда получается три полукэлэровых 2-формы:

$$\omega_1 = e^1 \wedge \left(\frac{\omega_{16}\omega_{34} - \omega_{25}\omega_{36} + \omega_{26}\omega_{35}}{\omega_{36}} e^4 + \frac{\omega_{16}\omega_{35} - \omega_{24}\omega_{35} + \omega_{25}\omega_{34}}{\omega_{36}} e^5 + \omega_{16}e^6 \right) + \\ + e^2 \wedge (\omega_{24}e^4 + \omega_{25}e^5 + \omega_{26}e^6) + e^3 \wedge (\omega_{34}e^4 + \omega_{35}e^5 + \omega_{36}e^6), \quad (8)$$

$$\omega_2 = e^1 \wedge \left(\omega_{14}e^4 + \omega_{15}e^5 + \frac{\omega_{24}\omega_{35} - \omega_{25}\omega_{34}}{\omega_{35}} e^6 \right) + e^2 \wedge (\omega_{24}e^4 + \omega_{25}e^5 - \\ - \frac{(\omega_{24}\omega_{35} - \omega_{25}\omega_{34})\omega_{34}}{\omega_{35}^2} e^6) + e^3 \wedge (\omega_{34}e^4 + \omega_{35}e^5), \quad (9)$$

$$\omega_3 = e^1 \wedge (\omega_{14}e^4 + \omega_{15}e^5) + e^2 \wedge (\omega_{24}e^4 + \omega_{26}e^6) + e^3 \wedge \omega_{34}e^4. \quad (10)$$

В каждом случае мы получаем полупаракалэрову структуру (ω, P_0, g_ω) с ассоциированной метрикой $g_\omega(X, Y) = \omega(X, P_0Y)$. В системе Maple легко вычисляются геометрические характеристики метрики g_ω . В частности, для последней формы ω_3 метрический тензор и скалярная кривизна имеют вид:

$$g_\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\omega_{14} & -\omega_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_{24} & 0 & -\omega_{26} \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_{34} & 0 & 0 \\ -\omega_{14} & -\omega_{24} & -\omega_{34} & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \frac{\omega_{34}}{\omega_{15}\omega_{26}}.$$

Как уже отмечалось, каждая из указанных выше 2-форм имеет невырожденный в смысле Хитчина внешний дифференциал $d\omega$ и, следовательно, оператор $P_{d\omega}$ почти паракомплексной структуры. Приведем выражение оператора $P_{d\omega}$, соответствующего 3-форме $d\omega_3$:

$$P_{d\omega}(e_1) = e_1 - \frac{2\omega_{14}}{\omega_{34}}e_3, \quad P_{d\omega}(e_2) = e_2 - \frac{2\omega_{24}}{\omega_{34}}e_3, \quad P_{d\omega}(e_3) = -e_3, \\ P_{d\omega}(e_4) = \frac{2\omega_{14}\omega_{24} + 18\omega_{15}\omega_{26}}{\omega_{34}^2}e_3 + e_4, \quad P_{d\omega}(e_5) = \frac{2\omega_{14}}{\omega_{34}}e_1 + \frac{6\omega_{15}}{\omega_{34}}e_2 - \frac{2\omega_{14}^2 + 6\omega_{15}\omega_{24}}{\omega_{34}^2}e_3 - e_5, \\ P_{d\omega}(e_6) = \frac{6\omega_{26}}{\omega_{34}}e_1 - \frac{2\omega_{24}}{\omega_{34}}e_2 + \frac{2\omega_{24}^2 - 6\omega_{14}\omega_{26}}{\omega_{34}^2}e_3 - e_6.$$

Полученные результаты сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2. *Группа G_2 с алгеброй Ли $A_{3,3} \ltimes sl(2, \mathbf{R})$ не допускает левоинвариантных симплектических структур. Группа G_2 имеет естественные левоинвариантные полупаракалэровы структуры $(\Omega_{0i}, P_0, g_{0i})$, $i = 1, 2$, отрицательной скалярной кривизны, где полукэлэровы 2-формы Ω_{0i} представлены формулами (7), $P_0 = \text{diag}\{1, 1, 1, -1, -1, -1\}$ и $g_{0i}(X, Y) = \Omega_{0i}(X, P_0Y)$. Группа G_2 допускает также многопараметрические семейства (8)–(10) левоинвариантных полукэлэровых 2-форм ω , согласованных с оператором паракомплексной структуры P_0 , и,*

следовательно, она допускает многопараметрические семейства полупаракэлеровых структур (ω, P_0, g_ω) с ассоциированными метриками $g_\omega(X, Y) = \omega(X, P_0 Y)$.

3.3. Левоинвариантные полупаракэлеровы структуры на группе G_3 . Группа G_3 имеет алгебру Ли $A_{3,1} \ltimes \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$. На данной алгебре Ли нет левоинвариантных симплектических структур, из условия замкнутости $d\omega = 0$ следует вырожденность 2-формы ω . Это показывается так же просто, как и в предыдущем разделе.

Полупаракэлерова структура, соответствующая полупрямому произведению. На данной алгебре Ли имеется паракомплексная структура P_0 , соответствующая полупрямому произведению подалгебр $A_{3,1}$ и $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$. Она имеет диагональную матрицу $P_0 = \text{diag}\{1, 1, 1, -1, -1, -1\}$.

Кроме того, алгебре Ли $A_{3,1} \ltimes \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ имеется естественная 2-форма $\Omega = ae^1 \wedge e^4 + be^2 \wedge e^5 + ce^3 \wedge e^6$, соответствующая полупрямому произведению. Легко видеть, что она согласована с оператором P_0 и является полукэлеровой при условии $a = -b$. Выберем две наиболее простые полукэлеровы формы

$$\Omega_{01} = -e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^6 \quad \text{и} \quad \Omega_{02} = e^1 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^6,$$

соответствующие разложению алгебры в полупрямое произведение. Легко видеть, что обе они являются полукэлеровыми и согласованы с оператором P_0 . Поэтому на алгебре Ли $A_{3,1} \ltimes \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ определены две полупаракэлеровых структуры $(\Omega_{0i}, P_0, g_{0i})$, $i = 1, 2$, псевдоримановы метрики которых $g_{0i}(X, Y) = \Omega_{0i}(X, P_0 Y)$ имеют нулевую скалярную кривизну и тензор Риччи вида:

$$Ric_i = -16e^4 \cdot e^4 - 16e^5 \cdot e^6.$$

Обе формы Ω_{0i} имеют вырожденные в смысле Хитчина внешние дифференциалы.

Общие полупаракэлеровы структуры. На алгебре Ли не существует замкнутых невырожденных 2-форм. Пусть $\omega = \omega_{ij}e^i \wedge e^j$ — произвольная 2-форма. Условие полукэлеровости $\omega \wedge d\omega = 0$ выполняется при следующих значениях параметров:

$$\begin{aligned} 2\omega_{12}\omega_{35} - 2\omega_{13}\omega_{25} + 2\omega_{15}\omega_{23} &= 0, \quad \omega_{12}\omega_{34} - \omega_{13}\omega_{24} + \omega_{14}\omega_{23} = 0, \\ -2\omega_{12}\omega_{56} - 2\omega_{13}\omega_{45} + 2\omega_{14}\omega_{35} + 2\omega_{15}\omega_{26} - 2\omega_{15}\omega_{34} - 2\omega_{16}\omega_{25} &= 0, \\ 2\omega_{13}\omega_{46} - 2\omega_{14}\omega_{36} + 2\omega_{16}\omega_{34} + 2\omega_{23}\omega_{56} - 2\omega_{25}\omega_{36} + 2\omega_{26}\omega_{35} &= 0, \\ \omega_{12}\omega_{46} - \omega_{14}\omega_{26} + \omega_{16}\omega_{24} - \omega_{23}\omega_{45} + \omega_{24}\omega_{35} - \omega_{25}\omega_{34} &= 0, \\ -2\omega_{12}\omega_{36} + 2\omega_{13}\omega_{26} - 2\omega_{16}\omega_{23} &= 0. \end{aligned}$$

Существует 2 решения этой системы при условии невырожденности ω :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= e^1 \wedge (-\omega_{25}e^4 + \omega_{15}e^5 - \omega_{35}e^6) + e^2 \wedge (\omega_{24}e^4 + \omega_{25}e^5 + \omega_{26}e^6) + \\ &+ e^3 \wedge (\omega_{26}e^4 + \omega_{35}e^5 - \omega_{36}e^6) + e^4 \wedge (\omega_{45}e^5 + \omega_{46}e^6) + e^5 \wedge \omega_{56}e^6, \\ \omega_2 &= e^1 \wedge (\omega_{14}e^4 + \omega_{15}e^5 - \omega_{35}e^6) + e^2 \wedge (\omega_{24}e^4 - \omega_{14}e^5 + \omega_{34}e^6) + \\ &+ e^3 \wedge (\omega_{34}e^4 + \omega_{35}e^5) + e^4 \wedge (\omega_{45}e^5 + \omega_{46}e^6) + e^5 \wedge \omega_{56}e^6. \end{aligned}$$

Обе этих формы имеют вырожденный внешний дифференциал.

На алгебре Ли $A_{3,1} \ltimes \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ имеется интегрируемая паракомплексная структура $P_0 = \text{diag}\{1, 1, 1, -1, -1, -1\}$, соответствующая разложению алгебры Ли в полупрямое произведение. Потребуем выполнения свойства согласованности $\omega(P_0 X, P_0 Y) = -\omega(X, Y)$. Тогда указанные выше полукэлеровы 2-формы принимают вид:

$$\omega_1 = e^1 \wedge (-\omega_{25}e^4 + \omega_{15}e^5 - \omega_{35}e^6) + e^2 \wedge (\omega_{24}e^4 + \omega_{25}e^5 + \omega_{26}e^6) + e^3 \wedge (\omega_{26}e^4 + \omega_{35}e^5 - \omega_{36}e^6), \quad (11)$$

$$\omega_2 = e^1 \wedge (\omega_{14}e^4 + \omega_{15}e^5 - \omega_{35}e^6) + e^2 \wedge (\omega_{24}e^4 - \omega_{14}e^5 + \omega_{34}e^6) + e^3 \wedge (\omega_{34}e^4 + \omega_{35}e^5). \quad (12)$$

Определим ассоциированную метрику по формуле $g_{\omega_i}(X, Y) = \omega_i(X, P_0 Y)$, $i = 1, 2$.

Вычисления показывают, что каждая полупаракэлэрова структура $(\omega_i, P_0, g_{\omega_i})$ имеет нулевую скалярную кривизну.

Полученные результаты сформулируем в виде теоремы.

Теорема 3. *Группа G_3 с алгеброй Ли $A_{3,1} \ltimes sl(2, \mathbf{R})$ не допускает левоинвариантных симплектических структур. Группа G_3 имеет естественные левоинвариантные полупаракэлэровы структуры $(\Omega_{0i}, P_0, g_{0i})$, $i = 1, 2$, нулевой скалярной кривизны, где полукэлэровы 2-формы Ω_{0i} представлены формулами (7), $P_0 = \text{diag}\{1, 1, 1, -1, -1, -1\}$ и $g_{0i}(X, Y) = \Omega_{0i}(X, P_0 Y)$. Группа G_3 допускает также многопараметрические семейства (11)–(12) левоинвариантных полукэлэровых 2-форм ω , согласованных с оператором паракомплексной структуры P_0 и, следовательно, она допускает многопараметрические семейства левоинвариантных полупаракэлэровых структур (ω, P_0, g_ω) с ассоциированными метриками $g_\omega(X, Y) = \omega(X, P_0 Y)$ нулевой скалярной кривизны.*

3.4. Левоинвариантные полукэлэровы и полупаракэлэровы структуры на группе G_4 . Группе G_4 имеет алгебру Ли $A_{3,1} \ltimes so(3)$. На данной алгебре Ли имеется паракомплексная структура P_0 , соответствующая полупрямому произведению подалгебр $A_{3,1}$ и $so(3)$. Она имеет диагональную матрицу $P_0 = \text{diag}\{1, 1, 1, -1, -1, -1\}$. Кроме того, на алгебре Ли $A_{3,1} \ltimes so(3, \mathbf{R})$ имеется естественная 2-форма $\Omega = ae^1 \wedge e^4 + be^2 \wedge e^5 + ce^3 \wedge e^6$, соответствующая полупрямому произведению. Легко видеть, что она согласована с оператором P_0 и является полукэлэровой при любых ненулевых значениях параметров a, b, c .

Поэтому на алгебре Ли $A_{3,1} \ltimes so(3)$ определена полупаракэлэрова структура (Ω, P_0, g) , псевдориманова метрика которой $g(X, Y) = \Omega(X, P_0 Y)$ имеет тензор Риччи вида $Ric = \frac{a^2 - (b-c)^2}{bc} e^4 \cdot e^4 - \frac{b^2 + (a-c)^2}{ab} e^5 \cdot e^5 + \frac{c^2 - (a-b)^2}{ac} e^6 \cdot e^6$, и нулевую скалярную кривизну.

Общие полупаракэлэровы структуры. Пусть $\omega = \omega_{ij} e^i \wedge e^j$ – произвольная 2-форма. Вычисления показывают, что 3-форма $d\omega$ является вырожденной. Условие полукэлэровости $\omega \wedge d\omega = 0$ выполняется при следующих значениях параметров:

$$\begin{aligned} -\omega_{13}\omega_{56} + \omega_{15}\omega_{36} - \omega_{16}\omega_{35} + \omega_{23}\omega_{46} - \omega_{24}\omega_{36} + \omega_{26}\omega_{34} &= 0, \\ \omega_{12}\omega_{36} - \omega_{13}\omega_{26} + \omega_{16}\omega_{23} &= 0, \quad \omega_{12}\omega_{34} - \omega_{13}\omega_{24} + \omega_{14}\omega_{23} = 0, \\ \omega_{12}\omega_{56} - \omega_{15}\omega_{26} + \omega_{16}\omega_{25} - \omega_{23}\omega_{45} + \omega_{24}\omega_{35} - \omega_{25}\omega_{34} &= 0, \\ -\omega_{12}\omega_{46} + \omega_{13}\omega_{45} + \omega_{14}\omega_{26} - \omega_{14}\omega_{35} + \omega_{15}\omega_{34} - \omega_{16}\omega_{24} &= 0, \\ -\omega_{12}\omega_{35} + \omega_{13}\omega_{25} - \omega_{15}\omega_{23} &= 0. \end{aligned}$$

Существует 2 решения этой системы с невырожденными формами ω :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= e^1 \wedge (\omega_{14}e^4 + \omega_{24}e^5 + \omega_{34}e^6) + e^2 \wedge (\omega_{24}e^4 + \omega_{25}e^5 + \omega_{26}e^6) + \\ &+ e^3 \wedge (\omega_{34}e^4 + \omega_{26}e^5 + \omega_{36}e^6) + e^4 \wedge (\omega_{45}e^5 + \omega_{46}e^6) + e^5 \wedge \omega_{56}e^6, \\ \omega_2 &= e^1 \wedge (\omega_{14}e^4 + \omega_{15}e^5 + \omega_{34}e^6) + e^2 \wedge (\omega_{15}e^4 + \omega_{25}e^5 + \omega_{35}e^6) + \\ &+ e^3 \wedge (\omega_{34}e^4 + \omega_{35}e^5) + e^4 \wedge (\omega_{45}e^5 + \omega_{46}e^6) + e^5 \wedge \omega_{56}e^6. \end{aligned}$$

На алгебре Ли $A_{3,1} \ltimes so(3, \mathbf{R})$ имеется интегрируемая паракомплексная структура $P_0 = \text{diag}\{1, 1, 1, -1, -1, -1\}$, соответствующая разложению алгебры Ли в полупрямое произведение. Потребуем выполнения свойства согласованности $\omega(P_0 X, P_0 Y) = -\omega(X, Y)$. Тогда полукэлэровы 2-формы принимают вид:

$$\omega_1 = e^1 \wedge (\omega_{14}e^4 + \omega_{24}e^5 + \omega_{34}e^6) + e^2 \wedge (\omega_{24}e^4 + \omega_{25}e^5 + \omega_{26}e^6) + e^3 \wedge (\omega_{34}e^4 + \omega_{26}e^5 + \omega_{36}e^6), \quad (13)$$

$$\omega_2 = e^1 \wedge (\omega_{14}e^4 + \omega_{15}e^5 + \omega_{34}e^6) + e^2 \wedge (\omega_{15}e^4 + \omega_{25}e^5 + \omega_{35}e^6) + e^3 \wedge (\omega_{34}e^4 + \omega_{35}e^5). \quad (14)$$

Определим ассоциированную метрику $g_{\omega_i}(X, Y) = \omega_i(X, P_0 Y)$, $i = 1, 2$. Вычисления показывают, что каждая полупаракэлерова структура $(\omega_i, P_0 g_{\omega_i})$ имеет нулевую скалярную кривизну.

Полукэлеровы структуры. Данная алгебра Ли допускает интегрируемые комплексные структуры $J = (\psi_{ij})$, согласованные с паракэлеровой 2-формой

$$\Omega_{01} = -e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^6. \quad (15)$$

При выполнении условия согласованности, $\psi_{51} = -\psi_{42}$, $\psi_{61} = -\psi_{43}$, $\psi_{11} = -\psi_{44}$, $\psi_{21} = \psi_{45}$, $\psi_{31} = \psi_{46}$, $\psi_{62} = \psi_{53}$, $\psi_{12} = \psi_{54}$, $\psi_{22} = -\psi_{55}$, $\psi_{32} = -\psi_{56}$, $\psi_{13} = \psi_{64}$, $\psi_{23} = -\psi_{65}$, $\psi_{33} = -\psi_{66}$, $\psi_{24} = -\psi_{15}$, $\psi_{34} = -\psi_{16}$, $\psi_{35} = \psi_{26}$, решение двух других условий системы (3) дает 4 варианта, с точностью до знака ($\pm J$), значений параметров ψ_{ij} матрицы J :

$$1. \psi_{15} = 0, \psi_{16} = \frac{\psi_{45}^2 + \psi_{46}^2}{\psi_{41}\psi_{45}}, \psi_{25} = \frac{\psi_{45}^2}{\psi_{41}}, \psi_{26} = \frac{\psi_{45}\psi_{46}}{\psi_{41}}, \psi_{36} = \frac{\psi_{46}^2}{\psi_{41}}, \psi_{42} = 0, \psi_{43} = 0,$$

$$\psi_{44} = -\frac{\psi_{46}}{\psi_{45}}, \psi_{52} = 0, \psi_{53} = 0, \psi_{54} = 0, \psi_{55} = 0, \psi_{56} = -1, \psi_{64} = 0, \psi_{65} = 1, \psi_{66} = 0,$$

$$\psi_{14} = -\frac{\psi_{45}^2 + \psi_{46}^2}{\psi_{41}\psi_{45}};$$

$$2. \psi_{15} = \frac{(\psi_{45}\psi_{44} + \psi_{46})\psi_{14}}{\psi_{44}^2 + 1}, \psi_{16} = \frac{\psi_{15}(\psi_{46}\psi_{44} - \psi_{45})}{\psi_{45}\psi_{44} + \psi_{46}}, \psi_{25} = -\frac{\psi_{15}\psi_{45}^2}{\psi_{45}\psi_{44} + \psi_{46}},$$

$$\psi_{26} = -\frac{\psi_{15}\psi_{45}\psi_{46}}{\psi_{45}\psi_{44} + \psi_{46}}, \psi_{36} = -\frac{\psi_{15}\psi_{45}^2}{\psi_{45}\psi_{44} + \psi_{46}}, \psi_{41} = -\frac{\psi_{45}\psi_{44} + \psi_{46}}{\psi_{15}},$$

$$\psi_{42} = 0, \psi_{43} = 0, \psi_{52} = 0, \psi_{53} = 0, \psi_{54} = 0, \psi_{55} = 0, \psi_{56} = -1, \psi_{63} = 0,$$

$$\psi_{64} = 0, \psi_{65} = 1, \psi_{66} = 0;$$

$$3. \psi_{14} = -\frac{\psi_{16}^2\psi_{41}^2 + \psi_{46}^2}{\psi_{41}\psi_{46}}, \psi_{15} = \frac{\psi_{46}}{\psi_{41}}, \psi_{25} = 0, \psi_{26} = 0, \psi_{36} = \frac{\psi_{46}^2}{\psi_{41}}, \psi_{42} = 0, \psi_{43} = 0,$$

$$\psi_{44} = -\frac{\psi_{16}\psi_{41}}{\psi_{46}}, \psi_{45} = 0, \psi_{52} = 0, \psi_{53} = 0, \psi_{54} = 0, \psi_{55} = 0, \psi_{56} = 1, \psi_{63} = 0,$$

$$\psi_{64} = 0, \psi_{65} = -1, \psi_{66} = 0;$$

$$4. \psi_{14} = -\frac{\psi_{44}^2 + 1}{\psi_{41}}, \psi_{15} = 0, \psi_{16} = 0, \psi_{25} = 0, \psi_{26} = 0, \psi_{36} = 0, \psi_{42} = 0,$$

$$\psi_{43} = 0, \psi_{45} = 0, \psi_{46} = 0, \psi_{52} = 0, \psi_{53} = 0, \psi_{54} = 0, \psi_{55} = 0, \psi_{56} = -1, \psi_{63} = 0,$$

$$\psi_{64} = 0, \psi_{65} = 1, \psi_{66} = 0.$$

Каждая из указанных комплексных структур J определяет полукэлерову структуру (Ω_{01}, J, g_J) , где $g_J(X, Y) = \Omega_{01}(X, JY)$.

Приведем явные выражения четвертой по списку структуры:

$$J_4 = \begin{pmatrix} -\Psi_{44} & 0 & 0 & -\frac{\Psi_{44}^2 + 1}{\Psi_{41}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Psi_{41} & 0 & 0 & \Psi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_{J_4} = \begin{pmatrix} -\Psi_{41} & 0 & 0 & -\Psi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\Psi_{44} & 0 & 0 & \frac{\Psi_{44}^2 + 1}{\Psi_{41}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор Риччи:

$$Ric_4 = \begin{pmatrix} -\Psi_{41}^2 & 0 & 0 & -\Psi_{41}\Psi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Psi_{41}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\Psi_{41}}{2} & 0 \\ -\Psi_{41}\Psi_{44} & 0 & 0 & -\Psi_{44}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\Psi_{41}}{2} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{\Psi_{41}}{2} & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Скалярная кривизна $S = \Psi_{41}$.

Полученные результаты сформулируем в следующем виде.

Теорема 4. *Группа G_4 с алгеброй Ли $A_{3,1} \ltimes so(3)$ не допускает левоинвариантных симплектических структур. Группа G_4 имеет естественные левоинвариантные полупаракэлеровы структуры (Ω, P_0, g) , нулевой скалярной кривизны, где $\Omega = ae^1 \wedge e^4 + be^2 \wedge e^5 + ce^3 \wedge e^6$ и $P_0 = \text{diag}\{1, 1, 1, -1, -1, -1\}$. Группа Ли G_4 допускает также многопараметрические семейства (13), (14) левоинвариантных полукэлеровых 2-форм ω , согласованных с оператором паракомплексной структуры P_0 , и, следовательно, она допускает многопараметрические семейства левоинвариантных полупаракэлеровых структур (ω, P_0, g_ω) с ассоциированными метриками $g_\omega(X, Y) = \omega(X, P_0 Y)$ нулевой скалярной кривизны. Группа G_4 допускает многопараметрические семейства левоинвариантных комплексных структур, согласованных с полукэлеровой 2-формой (15), и, следовательно, она допускает многопараметрические семейства левоинвариантных полукэлеровых структур (Ω_{01}, J, g_J) с интегрируемыми комплексными структурами J и ассоциированными псевдоримановыми метриками $g_J(X, Y) = \Omega_{01}(X, JY)$.*

Список источников

1. Campoamor-Stursberg R. Symplectic forms on six-dimensional real solvable Lie algebras I // Algebra Colloquium. 2009. V. 16 (2). P. 253–266.
2. Goze M., Khakimdjanyov Y., Medina A. Symplectic or contact structures on Lie groups // Differential Geometry and its Applications. 2004. V. 21 (1). P. 41–54. doi: 10.1016/j.difgeo.2003.12.006
3. Chu B.-Y. Symplectic homogeneous spaces // Trans. of the Amer. Math. Soc. 1974. V. 197. P. 154–159.
4. Basarab-Horwath P., Lahno V., Zhdanov R. The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations // Acta Appl. Math. 2001. V. 69. P. 43–94.
5. Turkowski P. Low-dimensional real Lie algebras // J. Math. Phys. 1988. V. 29. P. 2139–2144.

6. Смоленцев Н.К., Соколова А.Ю. Паракэлеровы и параэрмитовы структуры на шестимерных неразрешимых алгебрах Ли // Известия Алтайского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 4 (132). С. 94–98. doi: 10.14258/izvasu(2023)4-15
7. Алексеевский Д.В., Медори К., Томассини А. Однородные паракэлеровы многообразия Эйнштейна // Успехи математических наук. 2009. Т. 64, вып. 1 (385). С. 3–50. doi: 10.1070/RM2009v064n01ABEH004591
8. Gray A., Harvella L.M. The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear Invariants // Ann. Math. Pura Appl. 1980. V. 123. P. 35–58. doi: 10.1007/BF01796539
9. Hitchin N.J. The geometry of three-forms in six dimensions // J. Diff. Geom. 2000. V. 55. P. 547–576. doi: 10.4310/jdg/1090341263

References

1. Campoamor-Stursberg R. (2009) Symplectic forms on six-dimensional real solvable Lie algebras I. *Algebra Colloquium*. 16(2). pp. 253–266.
2. Goze M., Khakimdjanyov Y., Medina A. (2004) Symplectic or contact structures on Lie groups. *Differential Geometry and its Applications*. 21(1). pp. 41–54. DOI: 10.1016/j.difgeo.2003.12.006.
3. Chu Bon-Yao (1974) Symplectic homogeneous spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*. 197. pp. 154–159.
4. Basarab-Horwath P., Lahno V., Zhdanov R. (2001) The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations. *Acta Applicandae Mathematicae*. 69. pp. 43–94.
5. Turkowski P. (1988) Low-dimensional real Lie algebras. *Journal of Mathematical Physics*. 29. pp. 2139–2144.
6. Smolentsev N.K., Sokolova A.Yu. (2023) Parakelerovy i paraermitovy struktury na shestimernykh nerazreshimykh algebrakh Li [Para-Kählerian and para-Hermitian structures on six-dimensional unsolvable Lie algebras]. *Izvestiya AltGU. Matematika i mekhanika*. 132(4). pp. 94–98. DOI: 10.14258/izvasu(2023)4-15.
7. Alekseevsky D.V., Medori C., Tomassini A. (2009) Homogeneous para-Kähler Einstein manifolds. *Russian Mathematical Surveys*. 64(1). pp. 1–43. DOI: 10.1070/RM2009v064n01ABEH004591.
8. Gray A., Harvella L.M. (1980) The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*. 123. pp. 35–58. DOI: 10.1007/BF01796539.
9. Hitchin N.J. (2000) The geometry of three-forms in six dimensions. *Journal of Differential Geometry*. 55. pp. 547–576. DOI: 10.4310/jdg/1090341263.

Сведения об авторах:

Смоленцев Николай Константинович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики Кемеровского государственного университета (Кемерово, Россия). E-mail: smolennk@mail.ru

Соколова Анастасия Юрьевна – ассистент кафедры фундаментальной математики Кемеровского государственного университета (Кемерово, Россия). E-mail: socolova.nastya25@mail.ru

Information about the authors:

Smolentsev Nikolay K. (Doctor of Phys.-Math. Sciences, Professor of Department of Fundamental Mathematics, Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation). E-mail: smolennk@mail.ru

Sokolova Anastasia Yu. (Assistant of Department of Fundamental Mathematics, Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation). E-mail: socolova.nastya25@mail.ru

The article was submitted 02.07.2024; accepted for publication 06.09.2025

Статья поступила в редакцию 02.07.2024; принята к публикации 06.09.2025

Научная статья

УДК 517.2, 519.64

MSC: 65R20; 31B10

doi: 10.17223/19988621/97/3

Некоторые свойства одного класса векторных потенциалов с сингулярными ядрами

Эльнур Гасан оглы Халилов¹, Вафа Осман кызы Сафарова²

^{1, 2} Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности,

Баку, Азербайджан

¹ elnurkhalil@mail.ru

² vefa-seferova-91@bk.ru

Аннотация. Построенный А.М. Ляпуновым контрпример показывает, что для потенциалов простого и двойного слоев с непрерывной плотностью производная, вообще говоря, не существует. Следовательно, операторы

$$(A\lambda)(x) = -2 \int_{\Omega} [n(x), [n(x), \text{rot}_x \{ \Phi_k(x, y) \lambda(y) n(y) \}]] d\Omega_y, \quad x \in \Omega,$$

и

$$(B\mu)(x) = 2 \int_{\Omega} [n(x), \text{grad}_x \{ \Phi_k(x, y) \mu(y) \}] d\Omega_y, \quad x \in \Omega,$$

не определены в пространстве непрерывных функций, где $\Omega \subset R^3$ – поверхность Ляпунова, $n(x)$ – внешняя единичная нормаль в точке $x \in \Omega$, а $\Phi_k(x, y)$ – фундаментальное решение уравнения Гельмгольца. В работе доказано, что если функции $\lambda(x)$ и $\mu(x)$ удовлетворяют условию Дини, то интегралы $(A\lambda)(x)$ и $(B\mu)(x)$ существуют в смысле главного значения Коши. Кроме того, показана справедливость оценки типа А. Зигмунда для интегралов $(A\lambda)(x)$ и $(B\mu)(x)$ и доказана ограниченность операторов A и B в обобщенных пространствах Гельдера.

Ключевые слова: электрическая граничная задача, магнитная граничная задача, векторные потенциалы, уравнение Гельмгольца, обобщенное пространство Гельдера

Для цитирования: Халилов Э.Г., Сафарова В.О. Некоторые свойства одного класса векторных потенциалов с сингулярными ядрами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 97. С. 31–50. doi: 10.17223/19988621/97/3

Some properties of a class of vector potentials with a singular kernel

Elnur H. Khalilov¹, Vafa O. Safarova²

^{1, 2} Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan

¹ elnurkhalil@mail.ru

² vefa-seferova-91@bk.ru

Abstract. The counterexample constructed by A.M. Lyapunov shows that for potentials of a simple and double layer with continuous density, the derivative, generally speaking, does not exist. Therefore, the operators

$$(A\lambda)(x) = -2 \int_{\Omega} \left[n(x), \left[n(x), \text{rot}_x \{ \Phi_k(x, y) \lambda(y) n(y) \} \right] \right] d\Omega_y, \quad x \in \Omega,$$

and

$$(B\mu)(x) = 2 \int_{\Omega} \left[n(x), \text{grad}_x \{ \Phi_k(x, y) \mu(y) \} \right] d\Omega_y, \quad x \in \Omega,$$

are not defined in the space of continuous functions, where $\Omega \subset R^3$ is the Lyapunov surface, $n(x)$ is the external unit normal at point $x \in \Omega$, and $\Phi_k(x, y)$ is the fundamental solution of the Helmholtz equation. The paper proves that if functions $\lambda(x)$ and $\mu(x)$ satisfy the Dini condition, then integrals $(A\lambda)(x)$ and $(B\mu)(x)$ exist in the sense of the Cauchy principal value. In addition, the validity of the A. Zygmund type estimate for the integrals $(A\lambda)(x)$ and $(B\mu)(x)$ is shown, and the boundedness of operators A and B in generalized Hölder spaces is proved.

Keywords: electrical boundary value problem, magnetic boundary value problem, vector potentials, Helmholtz equation, generalized Hölder space

For citation: Khalilov, E.H., Safarova, V.O. (2025) Some properties of a class of vector potentials with a singular kernel. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 97. pp. 31–50. doi: 10.17223/19988621/97/3

Введение

Известно (см.: [1. С. 153–154]), что внутренние и внешняя электрические граничные задачи, а также внутренние и внешняя магнитные граничные задачи приводятся к системе интегральных уравнений, зависящих от векторных потенциалов

$$(A\lambda)(x) = -2 \int_{\Omega} \left[n(x), \left[n(x), \text{rot}_x \{ \Phi_k(x, y) \lambda(y) n(y) \} \right] \right] d\Omega_y, \quad (1)$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega,$$

и

$$(B\mu)(x) = 2 \int_{\Omega} \left[n(x), \text{grad}_x \{ \Phi_k(x, y) \mu(y) \} \right] d\Omega_y, \quad (2)$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega,$$

где $\Omega \subset R^3$ – поверхность Ляпунова с показателем $0 < \alpha \leq 1$, $n(x) = (n_1(x), n_2(x), n_3(x))$ – внешняя единичная нормаль в точке $x \in \Omega$,

$$\Phi_k(x, y) = \frac{\exp(ik|x-y|)}{4\pi|x-y|}, \quad x, y \in R^3, \quad x \neq y,$$

фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, k – волновое число, причем $\text{Im } k \geq 0$, запись $[a, b]$ означает векторное произведение векторов a и b , а $\lambda(x)$ и $\mu(x)$ – непрерывные функции на поверхности Ω .

Построенный А.М. Ляпуновым контрпример (см.: [2. С. 89–90]) показывает, что для потенциалов простого и двойного слоев с непрерывной плотностью производная, вообще говоря, не существует. Следовательно, операторы A и B не определены в пространстве $C(\Omega)$ всех непрерывных функций на поверхности Ω с нормой $\|f\|_\infty = \max_{x \in \Omega} |f(x)|$. Однако в работе [3] изучены некоторые свойства производной логарифмического потенциала двойного слоя, в работе [4] – некоторые свойства производной акустического потенциала простого слоя, в работе [5] – некоторые свойства нормальной производной акустического потенциала двойного слоя, а в работе [6] исследованы некоторые свойства одного класса векторных потенциалов со слабой особенностью. Следует указать, что в работе [1. С. 154] показано, что если Ω – замкнутая и дважды непрерывно дифференцируемая поверхность в R^3 , то операторы A и B ограничено действуют в пространстве Гельдера. В предлагаемой же работе доказывается справедливость оценки типа А. Зигмунда для интегралов (1) и (2) и изучаются некоторые свойства операторов A и B в обобщенных пространствах Гельдера.

Основные результаты

Введем модуль непрерывности функции $f \in C(\Omega)$:

$$\omega(f, \delta) = \delta \sup_{\tau \geq \delta} \frac{\bar{\omega}(f, \tau)}{\tau}, \quad \delta > 0,$$

где

$$\bar{\omega}(f, \tau) = \max_{\substack{|x-y| \leq \tau, \\ x, y \in \Omega}} |f(x) - f(y)|.$$

Известно, что функция $\omega(f, \delta)$ обладает следующими свойствами: $\omega(f, \delta)$ неотрицательна, полуаддитивна, не убывает, функция $\omega(f, \delta)/\delta$ не возрастает, $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f, \delta) = 0$ и $\omega(f, C\delta) \leq (1+C)\omega(f, \delta)$, где $C = \text{const} > 0$.

Теорема 1. Пусть Ω – поверхность Ляпунова с показателем $0 < \alpha \leq 1$ и

$$\int_0^{\text{diam } \Omega} \frac{\omega(\lambda, t)}{t} dt < +\infty.$$

Тогда интеграл (1) существует в смысле главного значения Коши, причем

$$\sup_{x \in \Omega} |(A\lambda)(x)| \leq M^1 \left(\|\lambda\|_{\infty} + \int_0^{\text{diam } \Omega} \frac{\omega(\lambda, t)}{t} dt \right).$$

Доказательство. Так как

$$\begin{aligned} \text{rot}_x \{ \Phi_k(x, y) \lambda(y) n(y) \} &= \lambda(y) \left(\frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial x_2} n_3(y) - \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial x_3} n_2(y) \right) e_1 + \\ &+ \lambda(y) \left(\frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial x_3} n_1(y) - \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial x_1} n_3(y) \right) e_2 + \\ &+ \lambda(y) \left(\frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial x_1} n_2(y) - \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial x_2} n_1(y) \right) e_3, \end{aligned}$$

нетрудно вычислить, что

$$\left[n(x), \left[n(x), \text{rot}_x \{ \Phi_k(x, y) \lambda(y) n(y) \} \right] \right] = V_1(x, y) e_1 + V_2(x, y) e_2 + V_3(x, y) e_3,$$

где $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$,

$$\begin{aligned} V_1(x, y) &= n_1(x) n_2(x) \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial x_3} n_1(y) \lambda(y) - n_1(x) n_2(x) \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial x_1} n_3(y) \lambda(y) - \\ &- (n_2(x))^2 \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial x_2} n_3(y) \lambda(y) + (n_2(x))^2 \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial x_3} n_2(y) \lambda(y) - \\ &- (n_3(x))^2 \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial x_2} n_3(y) \lambda(y) + (n_3(x))^2 \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial x_3} n_2(y) \lambda(y) + \\ &+ n_1(x) n_3(x) \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial x_1} n_2(y) \lambda(y) - n_1(x) n_3(x) \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial x_2} n_1(y) \lambda(y), \\ V_2(x, y) &= n_2(x) n_3(x) \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial x_1} n_2(y) \lambda(y) - n_2(x) n_3(x) \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial x_2} n_1(y) \lambda(y) - \\ &- (n_3(x))^2 \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial x_3} n_1(y) \lambda(y) + (n_3(x))^2 \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial x_1} n_3(y) \lambda(y) - \\ &- (n_1(x))^2 \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial x_3} n_1(y) \lambda(y) + (n_1(x))^2 \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial x_1} n_3(y) \lambda(y) + \\ &+ n_1(x) n_2(x) \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial x_2} n_3(y) \lambda(y) - n_1(x) n_2(x) \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial x_3} n_2(y) \lambda(y) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} V_3(x, y) &= n_1(x) n_3(x) \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial x_2} n_3(y) \lambda(y) - n_1(x) n_3(x) \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial x_3} n_2(y) \lambda(y) - \\ &- (n_1(x))^2 \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial x_1} n_2(y) \lambda(y) + (n_1(x))^2 \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial x_2} n_1(y) \lambda(y) - \end{aligned}$$

¹ Здесь и далее через M будем обозначать положительные постоянные, разные в различных неравенствах.

$$- (n_2(x))^2 \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial x_1} n_2(y) \lambda(y) + (n_2(x))^2 \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial x_2} n_1(y) \lambda(y) + \\ + n_2(x) n_3(x) \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial x_3} n_1(y) \lambda(y) - n_2(x) n_3(x) \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial x_1} n_3(y) \lambda(y).$$

Как видно, все слагаемые в последнем равенстве имеют одинаковую кратность особенности. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что при условии теоремы, например, интеграл

$$W_0(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial x_2} n_1(y) \lambda(y) d\Omega_y$$

существует в смысле главного значения Коши, причем

$$\sup_{x \in \Omega} |W_0(x)| \leq M \left(\|\lambda\|_{\infty} + \int_0^{\text{diam } \Omega} \frac{\omega(\lambda, t)}{t} dt \right).$$

Обозначим через $d > 0$ радиус стандартной сферы для Ω (см.: [7. С. 400]), и пусть $\Omega_\varepsilon(x) = \{y \in \Omega : |x - y| < \varepsilon\}$, где $x \in \Omega$ и $\varepsilon > 0$. Известно, что для каждого $x \in \Omega$ множество $\Omega_d(x)$ однозначно проектируется на множество $\Pi_d(x)$, лежащее в касательной плоскости $\Gamma(x)$ к Ω в точке x . На куске $\Omega_d(x)$ выберем локальную прямоугольную систему координат (u, v, w) с началом в точке x , где ось w направим вдоль нормали $n(x)$, а оси u и v лежат в касательной плоскости $\Gamma(x)$. Тогда в этих координатах окрестность $\Omega_d(x)$ можно задать уравнением $w = \psi(u, v)$, $(u, v) \in \Pi_d(x)$, причем

$$\psi \in H_{1,\alpha}(\Pi_d(x)) \text{ и } \psi(0,0) = 0, \quad \frac{\partial \psi(0,0)}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \psi(0,0)}{\partial v} = 0. \quad (3)$$

Здесь через $H_{1,\alpha}(\Pi_d(x))$ обозначено линейное пространство всех непрерывно дифференцируемых на $\Pi_d(x)$ функций ψ , $\text{grad} \psi$ которых удовлетворяет условию Гельдера с показателем $0 < \alpha \leq 1$, т.е.

$$|\text{grad} \psi(u_1, v_1) - \text{grad} \psi(u_2, v_2)| \leq M_\psi \left(\sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2} \right)^\alpha, \\ \forall (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \Pi_d(x),$$

где M_ψ – положительная постоянная, зависящая от ψ , а не от (u_1, v_1) и (u_2, v_2) .

Пусть $\Gamma_d(x)$ – часть касательной плоскости $\Gamma(x)$ в точке $x \in \Omega$, заключенная внутри сферы радиуса d с центром в точке x . Кроме того, пусть $\tilde{y} \in \Gamma(x)$ есть проекция точки $y \in \Omega$. Тогда

$$|x - \tilde{y}| \leq |x - y| \leq C_1 |x - \tilde{y}|, \quad \text{mes} \Omega_d(x) \leq C_2 \text{mes} \Gamma_d(x),$$

где C_1 и C_2 – положительные постоянные, зависящие лишь от Ω (если Ω – сфера, то $C_1 = \sqrt{2}$ и $C_2 = 2$).

Нетрудно вычислить, что

$$W_0(x) = W_{0,1}(x) + W_{0,2}(x) + W_{0,3}(x) + W_{0,4}(x), \quad (4)$$

где

$$W_{0,1}(x) = \int_{\Omega} \frac{(ik|x-y|\exp(ik|x-y|) - (\exp(ik|x-y|) - 1))(x_2 - y_2)}{4\pi|x-y|^3} n_1(y) \lambda(y) d\Omega_y,$$

$$W_{0,2}(x) = \int_{\Omega \setminus \Omega_d(x)} \frac{y_2 - x_2}{4\pi|x-y|^3} n_1(y) \lambda(y) d\Omega_y,$$

$$W_{0,3}(x) = \int_{\Omega_d(x)} \frac{y_2 - x_2}{4\pi|x-y|^3} (n_1(y) \lambda(y) - n_1(x) \lambda(x)) d\Omega_y$$

и

$$W_{0,4}(x) = n_1(x) \lambda(x) \int_{\Omega_d(x)} \frac{y_2 - x_2}{4\pi|x-y|^3} d\Omega_y.$$

Так как

$$\left| \frac{(ik|x-y|\exp(ik|x-y|) - (\exp(ik|x-y|) - 1))(x_2 - y_2)}{4\pi|x-y|^3} \right| \leq \frac{M}{|x-y|}, \quad (5)$$

то интеграл $W_{0,1}(x)$ сходится как несобственный и

$$|W_{0,1}(x)| \leq M \|\lambda\|_{\infty}, \quad \forall x \in \Omega.$$

А интеграл $W_{0,2}(x)$ существует как собственный, и поэтому

$$|W_{0,2}(x)| \leq M \|\lambda\|_{\infty}, \quad \forall x \in \Omega.$$

Кроме того, учитывая неравенство

$$|n(x) - n(y)| \leq M |x - y|^{\alpha}, \quad \forall x, y \in \Omega, \quad (6)$$

и переходя к двойному интегралу (см.: [8. С. 276]), имеем

$$\begin{aligned} |W_{0,3}(x)| &= \left| \int_{\Omega_d(x)} \frac{y_2 - x_2}{4\pi|x-y|^3} ((n_1(y) - n_1(x)) \lambda(y) + (\lambda(y) - \lambda(x)) n_1(x)) d\Omega_y \right| \leq \\ &\leq M \left(\|\lambda\|_{\infty} + \int_0^{diam \Omega} \frac{\omega(\lambda, t)}{t} dt \right) < +\infty, \\ &\forall x \in \Omega. \end{aligned}$$

Осталось доказать, что интеграл $W_{0,4}(x)$ существует в смысле главного значения

Коши. Пусть $d_0 = d / (2C_1)$. Очевидно, что $O_{d_0}(x) = \{(u, v, 0) \mid \sqrt{u^2 + v^2} < d_0\} \subset \Pi_d(x)$.

Тогда по формуле сведения поверхностного интеграла к повторному, получаем

$$\int_{\Omega_d(x)} \frac{y_2 - x_2}{|x-y|^3} d\Omega_y = \int_{\Pi_d(x) \setminus O_{d_0}(x)} \frac{v}{(\sqrt{u^2 + v^2 + \psi^2(u, v)})^3} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi(u, v)}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi(u, v)}{\partial v}\right)^2} du dv +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{o_{d_0}(x)} \frac{v}{\left(\sqrt{u^2 + v^2 + \psi^2(u, v)}\right)^3} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi(u, v)}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi(u, v)}{\partial v}\right)^2} - 1 \right) dudv + \\
 & + \int_{o_{d_0}(x)} \frac{v}{\left(\sqrt{u^2 + v^2}\right)^3} dudv + \int_{o_{d_0}(x)} v \left(\frac{1}{\left(\sqrt{u^2 + v^2 + \psi^2(u, v)}\right)^3} - \frac{1}{\left(\sqrt{u^2 + v^2}\right)^3} \right) dudv.
 \end{aligned}$$

Как видно, первый слагаемый интеграл в последнем равенстве существует как собственный. Кроме того, учитывая неравенства (см.: [7. С. 402])

$$\left| \frac{\partial \psi(u, v)}{\partial u} \right| \leq \left(\sqrt{u^2 + v^2} \right)^\alpha, \quad \left| \frac{\partial \psi(u, v)}{\partial v} \right| \leq \left(\sqrt{u^2 + v^2} \right)^\alpha, \quad (7)$$

находим

$$\left| \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi(u, v)}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi(u, v)}{\partial v}\right)^2} - 1 \right| \leq \left(u^2 + v^2 \right)^\alpha. \quad (8)$$

Тогда получаем следующую оценку для второго слагаемого интеграла:

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{o_{d_0}(x)} \frac{v}{\left(\sqrt{u^2 + v^2 + \psi^2(u, v)}\right)^3} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi(u, v)}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi(u, v)}{\partial v}\right)^2} - 1 \right) dudv \right| \leq \\
 & \leq M \int_{o_{d_0}(x)} \frac{1}{\left(\sqrt{u^2 + v^2}\right)^{2-2\alpha}} dudv \leq M.
 \end{aligned}$$

Перейдя к полярной системе координат

$$\begin{cases} u = r \cos \varphi, \\ v = r \sin \varphi, \end{cases} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (9)$$

получаем, что третий слагаемый интеграл равен нулю:

$$\int_{o_{d_0}(x)} \frac{v}{\left(\sqrt{u^2 + v^2}\right)^3} dudv = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{o_{d_0}(x) \setminus o_\varepsilon(x)} \frac{v}{\left(\sqrt{u^2 + v^2}\right)^3} dudv = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_\varepsilon^{d_0} \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi dr = 0. \quad (10)$$

Так как существует такая точка $(\theta_1 u, \theta_2 v)$, что

$$\psi(u, v) - \psi(0, 0) = \frac{\partial \psi(\theta_1 u, \theta_2 v)}{\partial u} u + \frac{\partial \psi(\theta_1 u, \theta_2 v)}{\partial v} v,$$

где $0 < \theta_1 < 1$ и $0 < \theta_2 < 1$, то, учитывая (3) и (7), находим, что

$$|\psi(u, v)| = |\psi(u, v) - \psi(0, 0)| \leq M \left(\sqrt{u^2 + v^2} \right)^{1+\alpha}.$$

Поэтому

$$\left| \frac{1}{\left(\sqrt{u^2 + v^2 + \psi^2(u, v)}\right)^3} - \frac{1}{\left(\sqrt{u^2 + v^2}\right)^3} \right| \leq M \frac{1}{\left(\sqrt{u^2 + v^2}\right)^{3-2\alpha}}, \quad \forall (u, v) \in \Pi_d(x') \setminus (0, 0). \quad (11)$$

Тогда, перейдя к повторному интегралу, для последнего слагаемого интеграла получаем следующую оценку:

$$\left| \int_{O_{a_0}(x)} v \left(\frac{1}{\left(\sqrt{u^2 + v^2 + \psi^2(u, v)} \right)^3} - \frac{1}{\left(\sqrt{u^2 + v^2} \right)^3} \right) dudv \right| \leq M.$$

В результате получаем, что интеграл $W_{0,4}(x)$ существует в смысле главного значения Коши и

$$|W_{0,4}(x)| \leq M \|\lambda\|_{\infty}, \quad \forall x \in \Omega.$$

В итоге, учитывая полученные оценки для выражений $W_{0,1}(x)$, $W_{0,2}(x)$, $W_{0,3}(x)$ и $W_{0,4}(x)$ в равенстве (4), получаем доказательство теоремы.

Теорема 2. Пусть Ω – поверхность Ляпунова с показателем $0 < \alpha \leq 1$ и

$$\int_0^{\text{diam} \Omega} \frac{\omega(\lambda, t)}{t} dt < +\infty.$$

Тогда для любых точек $x', x'' \in \Omega$ справедлива оценка

$$|(A\lambda)(x') - (A\lambda)(x'')| \leq M_{\lambda} \left(h^{\alpha} |\ln h| + \int_0^h \frac{\omega(\lambda, t)}{t} dt + h \int_h^{\text{diam} \Omega} \frac{\omega(\lambda, t)}{t^2} dt \right),$$

где $h = |x' - x''|$, а M_{λ} – положительная постоянная, зависящая лишь от Ω , k и λ .

Доказательство. Как видно, достаточно показать справедливость теоремы, например, для выражения

$$W(x) = n_1(x) n_3(x) W_0(x) = n_1(x) n_3(x) \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial x_2} n_1(y) \lambda(y) d\Omega_y.$$

Возьмем любые точки $x', x'' \in \Omega$ такие, чтобы $h = |x' - x''| < d/4$. Так как

$$W(x') - W(x'') = (n_1(x') - n_1(x'')) n_3(x') W_0(x') + (n_3(x') - n_3(x'')) n_1(x'') W_0(x') + n_1(x'') n_3(x'') (W_0(x') - W_0(x'')),$$

то, учитывая разложение (4) и неравенство (6), получаем, что

$$|W(x') - W(x'')| \leq M h^{\alpha} + |W_0(x') - W_0(x'')| \leq M h^{\alpha} + |W_{0,1}(x') - W_{0,1}(x'')| + |W_{0,2}(x') - W_{0,2}(x'')| + |W_{0,3}(x') - W_{0,3}(x'')| + |W_{0,4}(x') - W_{0,4}(x'')|. \quad (12)$$

Из неравенства (5) очевидно, что выражение $W_{0,1}(x)$ является слабо сингулярным интегралом. Тогда, поступая точно так же, как и в работе [6], можно показать, что

$$|W_{0,1}(x') - W_{0,1}(x'')| \leq M \left(\|\lambda\|_{\infty} h^{\alpha} |\ln h| + \int_0^h \omega(\lambda, t) dt + h \int_h^{\text{diam} \Omega} \frac{\omega(\lambda, t)}{t} dt \right). \quad (13)$$

Так как функция $W_{0,2}(x)$ является непрерывно дифференцируемой на поверхности $\Omega \setminus \Omega_d(x)$, то

$$|W_{0,2}(x') - W_{0,2}(x'')| \leq M \|\lambda\|_{\infty} h. \quad (14)$$

Представим выражение $W_{0,3}(x)$ в виде: $W_{0,3}(x) = W_{0,3}^{(1)}(x) + W_{0,3}^{(2)}(x)$, где

$$W_{0,3}^{(1)}(x) = \int_{\Omega_d(x)} \frac{(y_2 - x_2)(n_1(y) - n_1(x))}{4\pi|x - y|^3} \lambda(y) d\Omega_y,$$

$$W_{0,3}^{(2)}(x) = n_1(x) \int_{\Omega_d(x)} \frac{y_2 - x_2}{4\pi|x - y|^3} (\lambda(y) - \lambda(x)) d\Omega_y.$$

Принимая во внимание неравенство (6), получаем, что выражение $W_{0,3}^{(1)}(x)$ является слабо сингулярным интегралом. Поэтому, поступая точно так же, как и в работе [6], можно показать, что

$$\left| W_{0,3}^{(1)}(x') - W_{0,3}^{(1)}(x'') \right| \leq M \left(\|\lambda\|_{\infty} h^{\alpha} |\ln h| + \int_0^h \frac{\omega(\lambda, t)}{t^{1-\alpha}} dt + h \int_h^d \frac{\omega(\lambda, t)}{t^{2-\alpha}} dt \right). \quad (15)$$

Очевидно, что

$$W_{0,3}^{(2)}(x') - W_{0,3}^{(2)}(x'') = \frac{1}{4\pi} (W_{0,3}^{(2,1)}(x', x'') + n_1(x'') W_{0,3}^{(2,2)}(x', x'')),$$

где

$$W_{0,3}^{(2,1)}(x', x'') = (n_1(x') - n_1(x'')) \int_{\Omega_d(x')} \frac{y_2 - x_2'}{|x' - y|^3} (\lambda(y) - \lambda(x')) d\Omega_y,$$

$$W_{0,3}^{(2,2)}(x', x'') = \int_{\Omega_d(x')} \frac{y_2 - x_2'}{|x' - y|^3} (\lambda(y) - \lambda(x')) d\Omega_y - \int_{\Omega_d(x'')} \frac{y_2 - x_2''}{|x'' - y|^3} (\lambda(y) - \lambda(x'')) d\Omega_y.$$

Учитывая неравенство (6) и формулу сведения поверхностного интеграла к двойному, получим

$$\left| W_{0,3}^{(2,1)}(x', x'') \right| \leq M |x' - x''|^{\alpha} \int_{\Omega_d(x')} \frac{\omega(\lambda, |y - x'|)}{|x' - y|^2} d\Omega_y \leq M h^{\alpha} \int_0^d \frac{\omega(\lambda, t)}{t} dt.$$

Теперь оценим выражение $W_{0,3}^{(2,2)}(x', x'')$. Очевидно, что

$$W_{0,3}^{(2,2)}(x', x'') = \sum_{m=1}^7 w_m(x', x''),$$

где

$$w_1(x', x'') = \int_{\Omega_{h/2}(x')} \frac{y_2 - x_2'}{|x' - y|^3} (\lambda(y) - \lambda(x')) d\Omega_y,$$

$$w_2(x', x'') = - \int_{\Omega_{h/2}(x'')} \frac{y_2 - x_2''}{|x'' - y|^3} (\lambda(y) - \lambda(x'')) d\Omega_y,$$

$$w_3(x', x'') = - \int_{\Omega_{h/2}(x')} \frac{y_2 - x_2''}{|x'' - y|^3} (\lambda(y) - \lambda(x'')) d\Omega_y,$$

$$w_4(x', x'') = \int_{\Omega_{h/2}(x'')} \frac{y_2 - x_2'}{|x' - y|^3} (\lambda(y) - \lambda(x')) d\Omega_y,$$

$$w_5(x', x'') = \int_{\Omega_d(x') \setminus (\Omega_{h/2}(x') \cup \Omega_{h/2}(x''))} \left(\frac{1}{|x' - y|^3} - \frac{1}{|x'' - y|^3} \right) (y_2 - x_2') (\lambda(y) - \lambda(x')) d\Omega_y,$$

$$w_6(x', x'') = \int_{\Omega_d(x') \setminus (\Omega_{h/2}(x') \cup \Omega_{h/2}(x''))} \frac{(x_2'' - x_2')(\lambda(y) - \lambda(x'))}{|x'' - y|^3} d\Omega_y,$$

$$w_7(x', x'') = (\lambda(x'') - \lambda(x')) \int_{\Omega_d(x') \setminus (\Omega_{h/2}(x') \cup \Omega_{h/2}(x''))} \frac{y_2 - x_2''}{|x'' - y|^3} d\Omega_y.$$

Применяя формулу сведения поверхностного интеграла к двойному, имеем

$$|w_1(x', x'')| \leq M \int_0^h \frac{\omega(\lambda, t)}{t} dt, \quad |w_2(x', x'')| \leq M \int_0^h \frac{\omega(\lambda, t)}{t} dt.$$

Кроме того, принимая во внимание неравенство

$$h/2 \leq |y - x''| \leq 3h/2, \quad y \in \Omega_{h/2}(x'),$$

получаем, что

$$|w_3(x', x'')| \leq M \frac{\omega(\lambda, 3h/2)}{(h/2)^2} \text{mes} \Omega_{h/2}(x') \leq M \omega(\lambda, h).$$

Аналогичным образом, учитывая неравенство

$$h/2 \leq |y - x'| \leq 3h/2, \quad y \in \Omega_{h/2}(x''),$$

получим

$$|w_4(x', x'')| \leq M \omega(\lambda, h).$$

Так как для любых точек $y \in \Omega_d(x') \setminus (\Omega_{h/2}(x') \cup \Omega_{h/2}(x''))$

$$|x' - y| \leq 3|x'' - y|, \quad |x'' - y| \leq 3|x' - y|,$$

то, применяя формулу сведения поверхностного интеграла к двойному, находим

$$|w_5(x', x'')| \leq M h \int_h^d \frac{\omega(\lambda, t)}{t^2} dt, \quad |w_6(x', x'')| \leq M h \int_h^d \frac{\omega(\lambda, t)}{t^2} dt.$$

Для оценки выражения $w_7(x', x'')$ на куске $\Omega_d(x')$ выберем локальную прямоугольную систему координат (u, v, w) с началом в точке x' , где ось w направим вдоль нормали $n(x')$, а оси u и v будут лежать на касательной плоскости $\Gamma(x')$. При этом координатами точки x' будут $(0, 0, 0)$, а координаты точки x'' обозначим через $(u'', v'', \psi(u'', v''))$. Пусть

$$h_0 = \sqrt{(u'')^2 + (v'')^2}, \quad O_\varepsilon(x') = \{(u, v) \in \Gamma(x') \mid u^2 + v^2 < \varepsilon^2\},$$

$$O_\varepsilon(x'') = \{(u, v) \in \Gamma(x') \mid (u - u'')^2 + (v - v'')^2 < \varepsilon^2\},$$

а через $\Pi_{h/2}(x', x'')$ обозначим проекцию множества $\Omega_{h/2}(x') \cup \Omega_{h/2}(x'')$ на касательную плоскость $\Gamma(x')$. Тогда из формулы сведения поверхностного интеграла к двойному имеем

$$w_7(x', x'') = (\lambda(x'') - \lambda(x')) \int_{\Pi_d(x') \setminus \Pi_{h/2}(x', x'')} \frac{\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi(u, v)}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi(u, v)}{\partial v} \right)^2} - 1 \right)}{\left(\sqrt{u^2 + v^2 + \psi^2(u, v)} \right)^3} v du dv +$$

$$\begin{aligned}
 & + (\lambda(x'') - \lambda(x')) \int_{\Pi_d(x') \setminus \Pi_{h/2}(x', x'')} \left(\frac{1}{(\sqrt{u^2 + v^2} + \Psi^2(u, v))^3} - \frac{1}{(\sqrt{u^2 + v^2})^3} \right) v dudv + \\
 & + (\lambda(x'') - \lambda(x')) \int_{\Pi_d(x') \setminus \Pi_{h/2}(x', x'')} \frac{v}{(\sqrt{u^2 + v^2})^3} dudv.
 \end{aligned}$$

Слагаемые в правой части последнего равенства обозначим через $w_7^{(1)}(x', x'')$, $w_7^{(2)}(x', x'')$ и $w_7^{(3)}(x', x'')$ соответственно.

Учитывая (8) и (11), находим

$$|w_7^{(1)}(x', x'')| \leq M \omega(\lambda, h), \quad |w_7^{(2)}(x', x'')| \leq M \omega(\lambda, h).$$

Так как

$$\int_{O_{d_0}(x') \setminus O_{2h}(x')} \frac{v}{(\sqrt{u^2 + v^2})^3} dudv = \int_0^{2\pi} \int_{2h}^{d_0} \frac{\sin \varphi}{r} dr d\varphi = 0,$$

то

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Pi_d(x') \setminus \Pi_{h/2}(x', x'')} \frac{v}{(\sqrt{u^2 + v^2})^3} dudv = \\
 & = \int_{\Pi_d(x') \setminus O_{d_0}(x')} \frac{v}{(\sqrt{u^2 + v^2})^3} dudv + \int_{O_{2h}(x') \setminus \Pi_{h/2}(x', x'')} \frac{v}{(\sqrt{u^2 + v^2})^3} dudv.
 \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$|w_7^{(3)}(x', x'')| \leq M \left(\omega(\lambda, h) + \omega(\lambda, h) \int_{h/C_1}^{2h} \frac{1}{t} dt \right) \leq M \omega(\lambda, h),$$

а значит,

$$|w_7(x', x'')| \leq M \omega(\lambda, h).$$

Суммируя полученные оценки для выражений $w_m(x', x'')$, $m = \overline{1, 7}$, находим

$$|W_{0,3}^{(2,2)}(x', x'')| = M \left(\omega(\lambda, h) + \int_0^h \frac{\omega(\lambda, t)}{t} dt + h \int_h^d \frac{\omega(\lambda, t)}{t^2} dt \right).$$

Далее, принимая во внимание полученную оценку для $W_{0,3}^{(2,1)}(x', x'')$, получаем, что

$$|W_{0,3}^{(2)}(x') - W_{0,3}^{(2)}(x'')| \leq M \left(\omega(\lambda, h) + h^\alpha \int_0^d \frac{\omega(\lambda, t)}{t} dt + \int_0^h \frac{\omega(\lambda, t)}{t} dt + h \int_h^d \frac{\omega(\lambda, t)}{t^2} dt \right).$$

В результате, учитывая оценку (15), получим

$$|W_{0,3}(x') - W_{0,3}(x'')| \leq M \left(\|\lambda\|_\infty h^\alpha |\ln h| + \omega(\lambda, h) + \int_0^h \frac{\omega(\lambda, t)}{t} dt + h \int_h^d \frac{\omega(\lambda, t)}{t^2} dt \right). \quad (16)$$

Представим выражение $W_{0,4}(x') - W_{0,4}(x'')$ в виде:

$$W_{0,4}(x') - W_{0,4}(x'') = (n_1(x') - n_1(x'')) \lambda(x') \int_{\Omega_d(x')} \frac{y_2 - x'_2}{4\pi |x' - y|^3} d\Omega_y +$$

$$+ (\lambda(x') - \lambda(x'')) n_1(x'') \int_{\Omega_d(x')} \frac{y_2 - x'_2}{4\pi |x' - y|^3} d\Omega_y + \\ + \frac{n_1(x'') \lambda(x'')}{4\pi} \left(\int_{\Omega_d(x')} \frac{y_2 - x'_2}{|x' - y|^3} d\Omega_y - \int_{\Omega_d(x'')} \frac{y_2 - x''_2}{|x'' - y|^3} d\Omega_y \right).$$

Слагаемые в правой части последнего равенства обозначим через $W_{0,4}^{(1)}(x', x'')$, $W_{0,4}^{(2)}(x', x'')$ и $W_{0,4}^{(3)}(x', x'')$ соответственно.

Так как интеграл

$$\int_{\Omega_d(x)} \frac{y_2 - x_2}{|x - y|^3} d\Omega_y$$

сходится в смысле главного значения Коши, то, принимая во внимание (6), имеем

$$|W_{0,4}^{(1)}(x', x'')| \leq M \|\lambda\|_{\infty} h^{\alpha}, \quad |W_{0,4}^{(2)}(x', x'')| \leq M \omega(\lambda, h).$$

Для оценки выражения $W_{0,4}^{(3)}(x', x'')$ на куске $\Omega_d(x')$ выберем локальную прямоугольную систему координат (u, v, w) с началом в точке x' . Тогда, перейдя к двойному интегралу, выражение $W_{0,4}^{(3)}(x', x'')$ можно представить в виде:

$$W_{0,4}^{(3)}(x', x'') = W_{0,4}^{(3,1)}(x', x'') + W_{0,4}^{(3,2)}(x', x''),$$

где

$$W_{0,4}^{(3,1)}(x', x'') = \frac{n_1(x'') \lambda(x'')}{4\pi} \left(\int_{\Pi_d(x') \setminus O_{d_0}(x')} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi(u, v)}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi(u, v)}{\partial v}\right)^2}}{\left(\sqrt{u^2 + v^2 + \psi^2(u, v)}\right)^3} v du dv - \right. \\ \left. - \int_{\Pi_d(x'') \setminus O_{d_0}(x'')} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi(u, v)}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi(u, v)}{\partial v}\right)^2}}{\left(\sqrt{(u - u'')^2 + (v - v'')^2 + (\psi(u, v) - \psi(u'', v''))^2}\right)^3} (v - v'') du dv \right), \\ W_{0,4}^{(3,2)}(x', x'') = \frac{n_1(x'') \lambda(x'')}{4\pi} \left(\int_{O_{d_0}(x')} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi(u, v)}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi(u, v)}{\partial v}\right)^2}}{\left(\sqrt{u^2 + v^2 + \psi^2(u, v)}\right)^3} v du dv - \right. \\ \left. - \int_{O_{d_0}(x'')} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi(u, v)}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi(u, v)}{\partial v}\right)^2}}{\left(\sqrt{(u - u'')^2 + (v - v'')^2 + (\psi(u, v) - \psi(u'', v''))^2}\right)^3} (v - v'') du dv \right).$$

Как видно, функция

$$\rho(\zeta, \eta) = \int_{\Pi_d(\gamma) \setminus O_{d_0}(\gamma)} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \Psi(u, v)}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi(u, v)}{\partial v}\right)^2}}{\left(\sqrt{(u - \zeta)^2 + (v - \eta)^2 + (\Psi(u, v) - \Psi(\zeta, \eta))^2}\right)^3} (v - \eta) du dv$$

является собственным интегралом, где $\gamma = (\zeta, \eta, \Psi(\zeta, \eta))$. Тогда

$$|W_{0,4}^{(3,1)}(x', x'')| = |\rho(0, 0) - \rho(u'', v'')| \leq M \|\lambda\|_\infty \sqrt{(u'')^2 + (v'')^2} = M \|\lambda\|_\infty h_0.$$

Проведем замену переменных $u = t + u''$ и $v = s + v''$ на втором слагаемом интеграле в выражении $W_{0,4}^{(3,2)}(x', x'')$. Тогда, пользуясь формулой замены переменных в двойном интеграле и заменив параметр t на u , а параметр s на v , получим

$$W_{0,4}^{(3,2)}(x', x'') = \frac{n_1(x'')\lambda(x'')}{4\pi} \left(\int_{O_{d_0}(x')} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \Psi(u, v)}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi(u, v)}{\partial v}\right)^2}}{\left(\sqrt{u^2 + v^2 + \Psi^2(u, v)}\right)^3} v du dv - \right. \\ \left. - \int_{O_{d_0}(x')} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \Psi(u + u'', v + v'')}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi(u + u'', v + v'')}{\partial v}\right)^2}}{\left(\sqrt{u^2 + v^2 + (\Psi(u + u'', v + v'') - \Psi(u'', v''))^2}\right)^3} v du dv \right).$$

Кроме того, перейдя к полярной системе координат (9), нетрудно показать, что

$$\int_{O_{d_0}(x')} \frac{v}{\left(\sqrt{u^2 + v^2 + \left(\frac{\partial \Psi(u'', v'')}{\partial u}u + \frac{\partial \Psi(u'', v'')}{\partial v}v\right)^2}\right)^3} du dv = 0.$$

Поэтому, учитывая равенство (10), находим

$$W_{0,4}^{(3,2)}(x', x'') = \frac{n_1(x'')\lambda(x'')}{4\pi} (v_1(x', x'') + v_2(x', x'') + v_3(x', x'')),$$

где

$$v_1(x', x'') = \int_{O_{d_0}(x')} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \Psi(u, v)}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi(u, v)}{\partial v}\right)^2} - 1}{\left(\sqrt{u^2 + v^2 + \Psi^2(u, v)}\right)^3} v du dv - \\ - \int_{O_{d_0}(x')} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \Psi(u, v)}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi(u, v)}{\partial v}\right)^2} - 1}{\left(\sqrt{u^2 + v^2 + (\Psi(u + u'', v + v'') - \Psi(u'', v''))^2}\right)^3} v du dv,$$

$$\begin{aligned}
 v_2(x', x'') &= \int_{O_{d_0}(x')} \left(\frac{1}{\left(\sqrt{u^2 + v^2} + \psi^2(u, v) \right)^3} - \frac{1}{\left(\sqrt{u^2 + v^2} \right)^3} \right) v du dv - \\
 &\quad - \int_{O_{d_0}(x')} \left(\frac{1}{\left(\sqrt{u^2 + v^2} + \left(\psi(u + u'', v + v'') - \psi(u'', v'') \right)^2 \right)^3} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\left(\sqrt{u^2 + v^2} + \left(\frac{\partial \psi(u'', v'')}{\partial u} u + \frac{\partial \psi(u'', v'')}{\partial v} v \right)^2 \right)^3} \right) v du dv, \\
 v_3(x', x'') &= \int_{O_{d_0}(x')} \left(\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi(u, v)}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi(u, v)}{\partial v} \right)^2}}{\left(\sqrt{u^2 + v^2} + \left(\psi(u + u'', v + v'') - \psi(u'', v'') \right)^2 \right)^3} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi(u + u'', v + v'')}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi(u + u'', v + v'')}{\partial v} \right)^2}}{\left(\sqrt{u^2 + v^2} + \left(\psi(u + u'', v + v'') - \psi(u'', v'') \right)^2 \right)^3} \right) v du dv.
 \end{aligned}$$

Из неравенства (8) очевидно, что

$$\int_{O_{d_0}(x')} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi(u, v)}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi(u, v)}{\partial v} \right)^2} - 1}{\left(\sqrt{u^2 + v^2} + \left(\psi(u + \xi, v + \eta) - \psi(\xi, \eta) \right)^2 \right)^3} v du dv$$

является слабо сингулярным интегралом. Поэтому, поступая точно так же, как и в работе [6], можно показать, что

$$|v_1(x', x'')| \leq M(h_0)^\alpha |\ln h_0|.$$

Кроме того, известно, что существуют такие числа $\theta_3, \theta_4 \in (0, 1)$, что

$$\psi(u + u'', v + v'') - \psi(u'', v'') = \frac{\partial \psi(\theta_3 u + u'', \theta_4 v + v'')}{\partial u} u + \frac{\partial \psi(\theta_3 u + u'', \theta_4 v + v'')}{\partial v} v.$$

Тогда, принимая во внимание условие $\psi \in H_{1,\alpha}(\Pi_d(x))$, можно показать, что

$$\left| \left(\frac{1}{\left(\sqrt{u^2 + v^2} + (\psi(u + \xi, v + \eta) - \psi(\xi, \eta))^2 \right)^3} - \frac{1}{\left(\sqrt{u^2 + v^2} + \left(\frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial u} u + \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial v} v \right)^2 \right)^3} \right) \right| \leq M \frac{1}{\left(\sqrt{u^2 + v^2} \right)^{3-\alpha}}, \quad (17)$$

т.е. интеграл

$$\int_{O_{h_0}(x')} \left(\frac{1}{\left(\sqrt{u^2 + v^2} + (\psi(u + \xi, v + \eta) - \psi(\xi, \eta))^2 \right)^3} - \frac{1}{\left(\sqrt{u^2 + v^2} + \left(\frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial u} u + \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial v} v \right)^2 \right)^3} \right) v du dv$$

является слабо сингулярным интегралом. Поэтому можно показать, что

$$|v_2(x', x'')| \leq M (h_0)^\alpha |\ln h_0|.$$

Перейдя к полярной системе координат (9), нетрудно увидеть, что

$$\int_{O_{h_0}(x')} \frac{v}{\left(\sqrt{u^2 + v^2} + \left(\frac{\partial \psi(u'', v'')}{\partial u} u + \frac{\partial \psi(u'', v'')}{\partial v} v \right)^2 \right)^3} du dv = 0.$$

Тогда выражение $v_3(x', x'')$ можно представить в виде:

$$v_3(x', x'') = v_{3,1}(x', x'') + v_{3,2}(x', x'') + v_{3,3}(x', x'') + v_{3,4}(x', x''),$$

где

$$v_{3,1}(x', x'') = \int_{O_{h_0}(x') \setminus O_{h_0}(x'')} \left(\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi(u, v)}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi(u, v)}{\partial v} \right)^2}}{\left(\sqrt{u^2 + v^2} + (\psi(u + u'', v + v'') - \psi(u'', v''))^2 \right)^3} - \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi(u + u'', v + v'')}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi(u + u'', v + v'')}{\partial v} \right)^2}}{\left(\sqrt{u^2 + v^2} + (\psi(u + u'', v + v'') - \psi(u'', v''))^2 \right)^3} \right) v du dv,$$

$$\begin{aligned}
 v_{3,2}(x', x'') &= \int_{O_{h_0}(x')} \left[\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi(u'', v'')}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi(u'', v'')}{\partial v} \right)^2}}{\left(\sqrt{u^2 + v^2 + (\psi(u + u'', v + v'') - \psi(u'', v''))^2} \right)^3} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi(u + u'', v + v'')}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi(u + u'', v + v'')}{\partial v} \right)^2}}{\left(\sqrt{u^2 + v^2 + (\psi(u + u'', v + v'') - \psi(u'', v''))^2} \right)^3} \right] v du dv, \\
 v_{3,3}(x', x'') &= \int_{O_{h_0}(x')} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi(u, v)}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi(u, v)}{\partial v} \right)^2} - 1}{\left(\sqrt{u^2 + v^2 + (\psi(u + u'', v + v'') - \psi(u'', v''))^2} \right)^3} v du dv, \\
 v_{3,4}(x', x'') &= \int_{O_{h_0}(x')} \left[\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi(u'', v'')}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi(u'', v'')}{\partial v} \right)^2} - 1}{\left(\sqrt{u^2 + v^2 + \left(\frac{\partial \psi(u'', v'')}{\partial u} u + \frac{\partial \psi(u'', v'')}{\partial v} v \right)^2} \right)^3} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi(u'', v'')}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi(u'', v'')}{\partial v} \right)^2} - 1}{\left(\sqrt{u^2 + v^2 + (\psi(u + u'', v + v'') - \psi(u'', v''))^2} \right)^3} \right] v du dv.
 \end{aligned}$$

Принимая во внимание условие $\psi \in H_{1,\alpha}(\Pi_d(x))$, можно показать, что

$$\begin{aligned}
 &\left| \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi(u, v)}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi(u, v)}{\partial v} \right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi(u + u'', v + v'')}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi(u + u'', v + v'')}{\partial v} \right)^2} \right| \leq M(h_0)^\alpha \\
 &\text{и} \\
 &\left| \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi(u'', v'')}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi(u'', v'')}{\partial v} \right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi(u + u'', v + v'')}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi(u + u'', v + v'')}{\partial v} \right)^2} \right| \leq \\
 &\leq M \left(\sqrt{u^2 + v^2} \right)^\alpha.
 \end{aligned}$$

Тогда имеем

$$|v_{3,1}(x', x'')| \leq M(h_0)^\alpha \int_{O_{d_0}(x') \setminus O_{h_0}(x')} \frac{1}{u^2 + v^2} du dv \leq M(h_0)^\alpha |\ln h_0|$$

$$\text{и} \quad |v_{3,2}(x', x'')| \leq M \int_{O_0(x')} \frac{1}{(\sqrt{u^2 + v^2})^{2-\alpha}} dudv \leq M (h_0)^\alpha.$$

Кроме того, учитывая неравенства (8) и (17), получим

$$|v_{3,3}(x', x'')| \leq M (h_0)^\alpha, \quad |v_{3,1}(x', x'')| \leq M (h_0)^{2\alpha},$$

а значит,

$$|v_3(x', x'')| \leq M (h_0)^\alpha |\ln h_0|.$$

Суммируя полученные оценки для выражений $v_1(x', x'')$, $v_2(x', x'')$ и $v_3(x', x'')$, получаем, что

$$|W_{0,4}^{(3,2)}(x', x'')| \leq M \|\lambda\|_\infty (h_0)^\alpha |\ln h_0|.$$

Кроме того, суммируя полученные оценки для $W_{0,4}^{(3,1)}(x', x'')$ и $W_{0,4}^{(3,2)}(x', x'')$ и учитывая, что $h_0 \leq h$, имеем

$$|W_{0,4}^{(3)}(x', x'')| \leq M \|\lambda\|_\infty h^\alpha |\ln h|.$$

В итоге, суммируя полученные оценки для выражений $W_{0,4}^{(1)}(x', x'')$, $W_{0,4}^{(2)}(x', x'')$ и $W_{0,4}^{(3)}(x', x'')$, находим

$$|W_{0,4}(x', x'')| \leq M (\|\lambda\|_\infty h^\alpha |\ln h| + \omega(\lambda, h)). \quad (18)$$

Так как

$$\int_0^h \frac{\omega(\lambda, t)}{t} dt \geq \frac{\omega(\lambda, h)}{h} \int_0^h dt = \omega(\lambda, h),$$

то, принимая во внимание оценки (13), (14), (16) и (18) в неравенстве (12), получаем доказательство теоремы.

Рассмотрим функцию

$$g(h) = h^\alpha |\ln h| + \int_0^h \frac{\omega(\lambda, t)}{t} dt + h \int_h^{diam \Omega} \frac{\omega(\lambda, t)}{t^2} dt.$$

Нетрудно показать, что $\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = 0$, функция $g(h)$ не убывает, а функция $g(h)/h$ не возрастает. Тогда, применяя теорему 2, получаем справедливость следующей теоремы.

Теорема 3. Пусть Ω – поверхность Ляпунова с показателем $0 < \alpha \leq 1$ и

$$\int_0^{diam \Omega} \frac{\omega(\lambda, t)}{t} dt < +\infty.$$

Тогда

$$\omega(A\lambda, h) \leq M_\lambda \left(h^\alpha |\ln h| + \int_0^h \frac{\omega(\lambda, t)}{t} dt + h \int_h^{diam \Omega} \frac{\omega(\lambda, t)}{t^2} dt \right),$$

где M_λ – положительная постоянная, зависящая лишь от Ω , k и λ .

Введем следующие классы функций, определенные на $(0, diam \Omega]$:

$$\chi = \left\{ \varphi : \varphi \uparrow, \lim_{\delta \rightarrow 0} \kappa(\delta) = 0, \varphi(\delta)/\delta \downarrow \right\}, \quad J_0(\Omega) = \left\{ \varphi \in \chi : \int_0^{diam \Omega} \frac{\varphi(t)}{t} dt < +\infty \right\}.$$

Рассмотрим функцию

$$Z(h, \varphi) = h^\alpha |\ln h| + \int_0^h \frac{\varphi(t)}{t} dt + h \int_h^{\text{diam} \Omega} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt.$$

Там, где это не вызовет недоразумения, иногда будем писать $Z(h)$, $Z(\varphi)$ вместо $Z(h, \varphi)$. Очевидно, что $\lim_{h \rightarrow 0} Z(h) = 0$, функция $Z(h)$ не убывает, а функция $Z(h)/h$ не возрастает.

Пусть $\varphi \in \chi$. Через $H(\varphi)$ обозначим линейное пространство всех непрерывных на поверхности Ω функций λ , удовлетворяющих условию

$$|\lambda(x) - \lambda(y)| \leq C_\lambda \varphi(|x - y|), \quad x, y \in \Omega,$$

где C_λ – положительная постоянная, зависящая от Ω и λ , а не от точек x и y . Очевидно, что, в частности, если $\varphi(t) = t^\beta$, то пространство $H(\varphi)$ является пространством Гельдера $H_\beta(\Omega)$ с показателем $\beta \in (0, 1]$.

Известно (см.: [9. С. 60]), что пространство $H(\varphi)$ является банаховым пространством с нормой

$$\|\lambda\|_{H(\varphi)} = \sup_{x \in \Omega} |\lambda(x)| + \sup_{\substack{x, y \in \Omega, \\ x \neq y}} \frac{|\lambda(x) - \lambda(y)|}{\varphi(|x - y|)}.$$

Теорема 4. Пусть Ω – поверхность Ляпунова с показателем $0 < \alpha \leq 1$ и $\varphi \in J_0(\Omega)$. Тогда оператор A ограниченно действует из $H(\varphi)$ в $H(Z(\varphi))$, причем

$$\|A\|_{H(Z(\varphi))} \leq M \|\lambda\|_{H(\varphi)}.$$

Нетрудно вычислить, что

$$(G\mu)(x) = 2 \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial x_3} n_2(x) - \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial x_2} n_3(x) \right) e_1 + \left(\frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial x_1} n_3(x) - \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial x_3} n_1(x) \right) e_2 + \left(\frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial x_2} n_1(x) - \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial x_1} n_2(x) \right) e_3 \right) d\Omega_y.$$

Тогда, поступая точно так же, как и в доказательствах теорем 1 и 4, можно доказать справедливость следующих теорем.

Теорема 5. Пусть Ω – поверхность Ляпунова с показателем $0 < \alpha \leq 1$ и

$$\int_0^{\text{diam} \Omega} \frac{\omega(\mu, t)}{t} dt < +\infty.$$

Тогда интеграл (2) существует в смысле главного значения Коши, причем

$$\sup_{x \in \Omega} |(B\mu)(x)| \leq M \left(\|\mu\|_{\infty} + \int_0^{\text{diam} \Omega} \frac{\omega(\mu, t)}{t} dt \right).$$

Теорема 6. Пусть Ω – поверхность Ляпунова с показателем $0 < \alpha \leq 1$ и $\varphi \in J_0(\Omega)$. Тогда оператор B ограниченно действует из $H(\varphi)$ в $H(Z(\varphi))$, причем

$$\|B\|_{H(Z(\varphi))} \leq M \|\mu\|_{H(\varphi)}.$$

Как видно, в частности из теорем 4 и 6, получаем ограниченность операторов A и B в пространствах Гельдера.

Список источников

1. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 311 с.
2. Гюнтер Н.М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М.: Гос. изд. тех.-теорет. лит., 1953. 415 с.
3. Халилов Э.Г., Бахшалиева М.Н. О производной логарифмического потенциала двойного слоя // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 62. С. 38–54. doi: 10.17223/19988621/62/4
4. Халилов Э.Г. О свойствах оператора, порожденного производной акустического потенциала простого слоя // Сибирский журнал чистой и прикладной математики. 2017. Т. 17, № 1. С. 78–90.
5. Халилов Э.Г. Некоторые свойства оператора, порожденного производной акустического потенциала двойного слоя // Сибирский математический журнал. 2014. Т. 55, № 3. С. 564–573.
6. Safarova V.O. Some properties of one class of vector potentials with weak singularities // Baku Mathematical Journal. 2025. V. 4, № 1. P. 37–47. URL: <https://www.bakumathj.org/archive/Vol4No1/j.bmj.064.pdf>
7. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 527 с.
8. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1969. Т. 3. 656 с.
9. Гусейнов А.И., Мухтаров Х.Ш. Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1980. 416 с.

References

1. Colton D.L., Kress R. (1983) *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. John Wiley & Sons.
2. Günter N.M. (1967) *Potential Theory and Its Application to Basic Problems of Mathematical Physics*. New York: Frederick Ungar Publishing.
3. Khalilov E.H., Bakhshaliyeva M.N. (2019) O proizvodnoy logarifmicheskogo potentsiala dvoynogo sloya [On the derivative of the double-layer logarithmic potential]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 62. pp. 38–54. DOI: 10.17223/19988621/62/4.
4. Khalilov E.H. (2018) Properties of the operator generated by the derivative of the acoustic single layer potential. *Journal of Mathematical Sciences*. 231(2). pp. 168–180. DOI: 10.1007/s10958-018-3813-1.
5. Khalilov E.H. (2014) Some properties of the operators generated by a derivative of the acoustic double layer potential. *Siberian Mathematical Journal*. 55(3). pp. 564–573. DOI: 10.1134/S0037446614030173.
6. Safarova V.O. (2025) Some properties of one class of vector potentials with weak singularities. *Baku Mathematical Journal*. 4(1). pp. 37–47. DOI: 10.32010/j.bmj.2025.04.
7. Vladimirov V.S. (1971) *Equations of Mathematical Physics*. New York: Marcel Dekker.
8. Fichtenholz G.M. (1969) *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [Course of differential and integral calculus]. Vol. 3. Moscow: Nauka.
9. Guseinov A.I., Mukhtarov Kh.Sh. (1980) *Vvedeniye v teoriyu nelineynykh singulyarnykh integral'nykh uravneniy* [Introduction to the theory of nonlinear singular integral equations]. Moscow: Nauka.

Сведения об авторах:

Халилов Эльнур Гасан оглы – доктор математических наук, профессор кафедры общей и прикладной математики Азербайджанского государственного университета нефти и промышленности (Баку, Азербайджан). E-mail: elnurkhalil@mail.ru

Сафарова Вафа Осман кызы – преподаватель кафедры общей и прикладной математики Азербайджанского государственного университета нефти и промышленности (Баку, Азербайджан). E-mail: vefa-seferova-91@bk.ru

Information about the authors:

Khalilov Elnur H. (Doctor of Mathematical Sciences, Professor of the General and Applied Mathematics Department of Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan). E-mail: elnurkhalil@mail.ru

Safarova Vafa O. (Lecturer of the General and Applied Mathematics Department of Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan). E-mail: vefa-seferova-91@bk.ru

Статья поступила в редакцию 08.02.2025; принята к публикации 06.09.2025

The article was submitted 08.02.2025; accepted for publication 06.09.2025

МЕХАНИКА

MECHANICS

Научная статья

УДК 532.5.031, 532.5.032

doi: 10.17223/19988621/97/4

**Динамика цилиндрического пузырька
с учетом движения линии контакта
по неоднородной поверхности подложки**

Алексей Анатольевич Алабужев

Институт механики сплошных сред Уральского отделения

Российской академии наук, Пермь, Россия

Пермский государственный национальный исследовательский университет,

Пермь, Россия

alabuzhev@mail.ru

Аннотация. Предлагается модель учета неоднородности поверхности подложки при движении по ней линии контакта трех сред на примере собственных и вынужденных колебаний газового пузырька в несжимаемой жидкости конечного объема с внешней свободной поверхностью, расположенного между двумя пространственно-неоднородными параллельными подложками. Показано, что частота радиальных колебаний пузырька определяется давлением газа и радиусом внешней поверхности жидкости. Неоднородность изменяет эффективный параметр смачивания и приводит к возбуждению азимутальных мод в однородном пульсационном поле давления.

Ключевые слова: газовый пузырек, собственные колебания, вынужденные колебания, движение линии контакта, неоднородная поверхность

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-00379).

Для цитирования: Алабужев А.А. Динамика цилиндрического пузырька с учетом движения линии контакта по неоднородной поверхности подложки // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 97. С. 51–65. doi: 10.17223/19988621/97/4

Dynamics of a cylindrical bubble with account for the contact line motion along a heterogeneous surface

Aleksey A. Alabuzhev

*Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch
of the Russian Academy of Sciences, Perm, Russian Federation
Perm State University, Perm, Russian Federation
alabuzhev@mail.ru*

Abstract. The free and forced oscillations of a cylindrical gas bubble clamped between two rigid parallel plates and surrounded by a finite volume of incompressible liquid with a free surface in a homogeneous pulsating pressure field are considered. A model is proposed for describing the substrate surface heterogeneity through the wetting parameter (the Hocking parameter), which is defined as the proportionality coefficient between the contact line velocity and the contact angle deviation. Since only small-amplitude oscillations are considered, the surface heterogeneity is significant only in the vicinity of the contact line. Therefore, it is treated as a function of a single variable. Azimuthal oscillations arise due to the contact line motion along the heterogeneous surface. It is shown that the frequency of the radial oscillations of the bubble is governed by the gas pressure and the radius of the liquid's outer surface. The specific type of surface inhomogeneity modifies the Hocking parameter by reducing its value, although the qualitative dependence of the frequencies and damping decrements on this parameter remains unchanged. The frequency of the volume oscillations depends on the gas pressure inside the bubble, which may coincide with the frequency of the bubble's shape oscillations. At the intersection points, damping decrements exhibit local extrema. It is shown that external excitation induces only axisymmetric oscillations; however, surface inhomogeneity also gives rise to azimuthal modes, whose spectrum is determined by the nature of the inhomogeneity.

Keywords: gas bubble, free oscillations, forced oscillations, contact line dynamics, heterogeneous surface

Acknowledgments: This work was financial supported by the Russian Science Foundation (project No. 24-21-00379).

For citation: Alabuzhev A.A. (2025) Dynamics of a cylindrical bubble with account for the contact line motion along a heterogeneous surface. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 97. pp. 51–65. doi: 10.17223/19988621/97/4

Введение

В задачах, посвященных управлению движением капель или пузырьков, существенную роль играют движение линии контакта трех сред и изменение краевого угла [1–3]. Это важная область движения многофазных сред, которые встречаются в природе и промышленных приложениях. К ним относятся движение линии контакта двухслойной системы по твердой стенке [4] или при растекании жидкости по твердой поверхности [5, 6], движение ручейков (ривулетов) [7, 8], капель и

пузырьков по твердой подложке [9, 10], удар капли о твердую поверхность (или твердого тела о поверхность жидкости) и последующее разбрызгивание [11–13], нанесение пленочных покрытий [14], приложения микрофлюидики [15], пузырьковое кипение [16] и пр. В таких системах течение либо частично, либо полностью обуславливается движением линии контакта, что приводит к различным режимам течения жидкости [9, 10, 17, 18]. Богатая физика, управляющая статикой и динамикой контактных линий, однако, является предметом давних дебатов, которые обусловлены в том числе проблемами, создаваемыми сингулярностью поверхностного натяжения. На практике часто возникают сложности, такие как термокапиллярные явления, наличие поверхностно-активных веществ, фазовые переходы, сложная геометрия и эффекты неоднородностей подложки. Если в предложенном ряде моделей для описания движения линии контакта трех сред [1–3, 19] для поступательного движения контактной линии и статического краевого угла определенное согласие достигнуто, то для возвратно-поступательного или быстро осциллирующего движения и динамического контактного угла полное описание далеко от завершения. Линейная зависимость скорости движения контактной линии от отклонения краевого угла была предложена в [4] на основе экспериментальных данных [17]. Коэффициент пропорциональности Λ^* является эффективным параметром (разнообразные сложные процессы, происходящие в непосредственной близости от линии контакта, из рассмотрения исключаются) и характеризует степень взаимодействия контактной линии с твердой поверхностью. Это эффективное граничное условие (условие Хокинга, или модель Хокинга–Девиса [7]) для отклонения поверхности раздела вдоль твердой поверхности от равновесного положения ζ^* и отклонению краевого угла $\mathbf{k} \cdot \nabla \zeta^*$ (вектор нормали к твердой поверхности \mathbf{k}) можно представить, например, в виде:

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial t} = \Lambda^* \mathbf{k} \cdot \nabla \zeta^*. \quad (1)$$

При произвольном значении параметра Λ^* оно описывает затухание свободных колебаний, которое обусловлено взаимодействием движущейся линии контакта с поверхностью твердой подложки. Граничное условие (1) описывает предельные бездиссипативные состояния системы: неподвижную линию контакта $\partial \zeta^* / \partial t = 0$ [20] и постоянное значение краевого угла $\mathbf{k} \cdot \nabla \zeta^* = 0$ [21].

Модель Хокинга–Девиса (1) и ее различные модификации применялись в большом количестве работ (см., напр.: [4, 7, 22–26]), в большинстве которых Λ^* – действительный постоянный параметр. В работе [27] предложена модель электросмачивания в переменном электрическом поле. Если же параметр Λ^* – комплексное число, то движение контактной линии не обязательно происходит в одной фазе с краевым углом [28]. Параметр Λ^* в [29] рассматривался как действительная функция координат для описания неоднородности поверхности подложки, по которой двигалась контактная линия.

Метод измерения коэффициента подвижности (обратного параметра Хокинга) для полусферической капли на подложке при анализе экспериментальных результатов был предложен в [30–33], включая сравнение с теоретическими результатами [9, 10], которые учитывали гистерезис краевого угла [34]. Было показано, что условие Хокинга с учетом гистерезиса краевого угла [34] является наиболее

подходящим подходом для нескольких поверхностей с различными свойствами смачивания. Авторы [32, 33] подчеркивают, что коэффициент подвижности действительно является параметром, подобным материалу, и экспериментально измерили несколько значений параметра подвижности для различных материалов подложки. Таким образом, несмотря на значительный прогресс в использовании условия Хокинга, до сих пор невозможно получить аналитическую формулу для описания параметра Хокинга, который является феноменологическим параметром. Кроме того, как в теории, так и в эксперименте поверхность подложки считается однородной с точки зрения шероховатости и структуры материала, и исследование проводится только для капли жидкости на подложке.

В данной работе впервые рассматривается поведение цилиндрического пузырька, зажатого между двумя параллельными пластинами с одинаковыми неоднородными поверхностями, под действием вибраций. Случай однородных поверхностей рассматривался в работах [26, 35].

Постановка задачи

Постановка задачи схожа с подобными задачами [26, 29, 35]. Несжимаемая жидкость (плотность ρ_l^* и вязкость ν_l^*) и невесомый газ заполняют сосуд цилиндрической формы высотой h^* и радиусом R_v^* (ис. 1). Контактная линия внешней недеформируемой поверхности жидкости – торец (крышка или дно) сосуда – движется свободно. В равновесном состоянии объем жидкости имеет форму круглого цилиндра радиусом R_0^* и внешняя поверхность жидкости недеформируемая. Размеры сосуда велики так, что боковая стенка сосуда достаточно далека от жидкости ($R_0^* \ll R_v^*$).

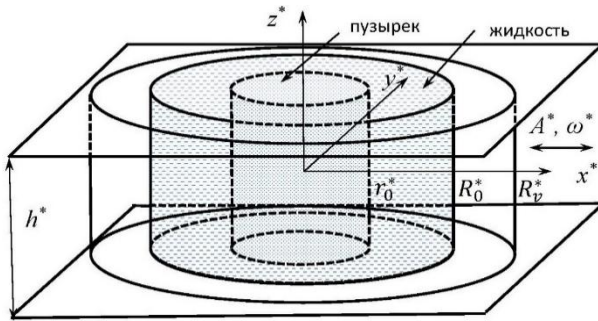


Рис. 1. Геометрия задачи

Fig. 1. Problem geometry

Влияние гравитации не учитывается, т.е. полученные результаты будут справедливы либо для условия невесомости, либо для малого числа Бонда (Этвеша): $Bo = g^* r_0^{*2} \rho_l^* \sigma^{*-1} \ll 1$. Последнее условие ограничивает размеры пузырька. Например, для пузырька воздуха в воде при земных условиях $r_0^* \ll 3 \cdot 10^{-3}$ м, что вполне укладывается в приведенные выше оценки для несжимаемой невязкой жидкости.

В жидкость помещен газовый пузырек, который в равновесном состоянии имеет форму круглого цилиндра радиусом r_0^* и высотой h^* с давлением газа P_0^* и

показателем политропного процесса n_p . На деформируемой боковой поверхности пузырька (поверхность раздела газ–жидкость) учитывается сила поверхностного натяжения с коэффициентом поверхностного натяжения σ^* . Движение линии контакта трех сред (газ в пузырьке – жидкость – торец сосуда) определяется условием Хокинга (1). Диссипативное движение линии контакта позволяет рассматривать течение невязкой жидкости как потенциальное при наличии деформируемой поверхности раздела, согласно теореме Кельвина о циркуляции [36].

Равновесный прямой краевой угол представляет собой оправданное приближение, т.к. это позволяет не только упростить решение задачи, но и сохранить все возможные эффекты, наблюдаемые для реального пузырька. Отметим, что в работе [37] проводилось сравнение поведения капли, представляющей собой фигуру вращения (т.е. равновесный краевой угол отличен от прямого), с цилиндрической каплей. Например, было показано, что наибольшие значения частот собственных колебаний достигаются при прямом краевом угле, т.е. отличия только количественные.

На систему действует однородное пульсационное поле давления с характерной амплитудой A^* и частотой ω^* . Будем рассматривать малоамплитудные колебания, т.е. $A^* \ll r_0^*$. Диапазон частот пульсаций ограничен приближениями несжимаемости (максимальные значения частот) $\omega^* r_0^* \ll c^*$ (c^* – скорость звука) и невязкости (минимальные частоты) жидкости [36]: толщина вязкого пограничного слоя $l^* = \sqrt{\nu_l^* / \omega^*} \ll r_0^*$. Для пузырька воздуха $r_0^* = 10^{-2}$ м в воде ($c_l^* = 1,5 \cdot 10^3$ м/с, $\nu_l^* \approx 10^{-6}$ м²/с, $\sigma^* = 7 \cdot 10^{-2}$ Н/м) диапазон частот $0,1 \ll \omega^* \ll 10^5$ рад/с. Для капиллярных волн $\omega^* = \omega \sqrt{\sigma^* / (\rho_l^* r_0^{*3})}$ на поверхности раздела, безразмерная частота $\omega = 1$ соответствует размерной частоте $\omega^* = 8,5$ рад/с, диапазон безразмерных частот $10^{-2} \ll \omega \ll 10^4$. Для пузырька радиуса $r_0^* = 10^{-3}$ м: $\omega = 1 - \omega^* = 2,7 \cdot 10^2$ рад/с, безразмерное равновесное давление газа $P_0 = 2n_p P_g^* r_0^* / \sigma^* = 2,9 \cdot 10^4$ при $P_g^* = 10^5$ Па и $n = 1$. При $r_0^* = 10^{-3}$ м: $\omega = 1$ соответствует $\omega^* = 2,7 \cdot 10^2$ Гц и $P_0 = 2,9 \cdot 10^3 - P_g^* = 10^5$ Па. С увеличением частоты толщина вязкого пограничного слоя уменьшается. Следовательно, приближение идеальной окружающей жидкости выполняются в диапазоне частот пульсаций $\omega^* = 1 \div 10^3$ Гц для пузырька размером 0,1–1 см.

В цилиндрической системе координат (r^*, α^*, z^*) , поверхность пузырька описывается уравнением $F^* = r^* - r_0^* - \zeta^*(\alpha^*, z^*, t^*) = 0$, где $\zeta^*(\alpha^*, z^*, t^*)$ – динамическое отклонение деформируемой поверхности раздела. Запишем линеаризованные уравнения и граничные условия в безразмерном виде (размерность радиальной координаты $[r^*] = r_0^*$, осевой координаты $[z^*] = h^*$, отклонения поверхности $[\zeta^*] = A^*$, времени $[t^*] = \sqrt{\rho_l^* r_0^{*3} / \sigma^*}$, скорости $v^* = A^* \sqrt{\sigma^* / (\rho_l^* r_0^{*3})}$, давления $p^* = A^* \sigma^* / r_0^{*2}$, $\varepsilon = A^* / r_0^*$, $b = r_0^* / h^*$, $R = R_0^* / r_0^*$, $\lambda = \Lambda^* / \sqrt{\rho_l^* r_0^* / \sigma^*}$, $\omega = \omega^* \sqrt{\rho_l^* r_0^{*3} / \sigma^*}$, $P_0 = 2n_p P_g^* r_0^* / \sigma^*$):

$$p_l = -\left(\frac{\partial \varphi_e}{\partial t} - \omega^2 e^{i\omega t}\right), \Delta \varphi_l = 0, p_g = -P_0 \langle \zeta \rangle, \langle \zeta \rangle = (2\pi)^{-1} \int_S \zeta dS, \quad (2)$$

$$r = 1: p_l - p_g = \zeta + b^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}, \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_e}{\partial r}, \quad (3)$$

$$z = \pm \frac{1}{2}: \frac{\partial \varphi_e}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

$$r = 1, z = \pm \frac{1}{2}: \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \mp \lambda(\alpha) b \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \quad (5)$$

$$r = R_0: \varphi_l = 0, \quad (6)$$

где p_l и φ_l – давление и потенциал скорости жидкости, p_g – давление газа в пузырьке, $S = S(z)$ – площадь поверхности раздела, $\lambda(\alpha)$ – параметр смачивания, характеризующий неоднородность поверхностей твердых пластин. Предельный случай высокого давления, $P_0 \rightarrow \infty$, преобразует задачу (2)–(6) в задачу о колебаниях несжимаемого пузырька в жидкости, т.е. в задачу о колебаниях капли жидкости [25, 29]. В противоположном предельном случае малого давления, $P_0 \rightarrow 0$, можно ожидать, что пузырек схлопнется. В данной работе не рассматривается случай кавитации и предполагается, что всегда $P_0 > 0$.

Собственные колебания

Рассмотрим сначала собственные колебания пузырька. Исследуем влияние частного случая неоднородности поверхности пластин, описываемой функцией $\lambda(r, \alpha) = \lambda_0 |\sin(kr)| = \lambda_0 |\sin(kr \cos(\alpha))|$, где k – волновое число неоднородности поверхности. Данная функция в главном порядке разложения по малому параметру ε (т.е. вблизи линии контакта) примет вид: $\lambda(\alpha) = \lambda_0 |\sin(k \cos(\alpha))|$. Это позволит изучить основные эффекты, вызванные неоднородностью, и продемонстрировать метод решения задач подобного вида.

Краевая задача (2)–(6) решается методом разделения переменных, решения представляются в виде рядов Фурье. Разложение ведется по базисным функциям оператора Лапласа (2) в цилиндрической системе координат. Внешняя сила в интеграле Коши–Лагранжа (2) не зависит от полярного угла α , поэтому разложение этого слагаемого должно содержать только осесимметричную моду – пульсирующее однородное поле давления возбуждает только такие колебания. Неотрицательная функция $\lambda(\alpha)$ (5) раскладывается в два независимых друг от друга ряда Фурье по гармоникам $\cos(2m\alpha)$ и $\cos((2m+1)\alpha)$, где m – целое азимутальное волновое число. Следовательно, разложение $\lambda(\alpha) \partial \zeta / \partial z$ (5) будет содержать члены ряда с $\cos(2m\alpha)$. Другими словами, только четные азимутальные моды содержатся в спектре вынужденных колебаний из-за наличия неоднородности поверхности подложки. В итоге сила взаимодействия между линией контакта и подложки и, следовательно, скорость будут варьировать в различных точках неоднородной

поверхности подложки. Собственные колебания для случая однородных поверхностей были исследованы в работах [26, 35].

Решения краевой задачи (2)–(6) представим в следующем виде:

$$\varphi_l(r, \alpha, z, t) = \operatorname{Re} \left(i\Omega \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (a_{mn} A_{mn}(r) + b_{mn} B_{mn}(r)) \cos(2n\pi z) e^{2im\alpha} e^{i\Omega t} \right), \quad (7)$$

$$\zeta(\alpha, z, t) = \operatorname{Re} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_{mn} \cos(2n\pi z) + d_m D_m(z) \right) e^{2im\alpha} e^{i\Omega t} \right), \quad (8)$$

$$A_{00}(r) = \ln(R_0) - \ln(r), \quad B_{00}(r) = 0, \quad A_{m0}(r) = r^{2m}, \quad B_{m0}(r) = \frac{1}{r^{2m}},$$

$$A_{mn}(r) = I_{2m}(2\pi n b r), \quad B_{mn}(r) = K_{2m}(2\pi n b r), \quad D_0(z) = \cos\left(\frac{z}{b}\right),$$

$$D_m(z) = \operatorname{ch} \left(\frac{\sqrt{4m^2 - 1}}{b} z \right),$$

где a_{mn} , b_{mn} , c_{mn} и d_m – неизвестные амплитуды, Ω – частота собственных колебаний, I_m и K_m – модифицированные функции Бесселя.

После подстановки рядов (7)–(8) в (2)–(6) получим спектрально-амплитудную задачу, собственными числами которой являются комплексные Ω :

$$i\Omega \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_{mn} + \delta_{nl} d_l D_l \left(\frac{1}{2} \right) \right) = F_{mn} \left(\delta_{n0} \frac{d_0}{b} \sin \left(\frac{1}{2b} \right) - \delta_{nl} \frac{\sqrt{4l^2 - 1}}{b} \operatorname{sh} \left(\frac{\sqrt{4l^2 - 1}}{2b} \right) \right), \quad (9)$$

$$a_{00} = -(c_{00} + d_0 C_{00}), \quad b_{m0} = -a_{m0} R_0^{2m}, \quad b_{mn} = -a_{mn} \frac{A_{mn}(R_0)}{B_{mn}(R_0)}, \quad a_{m0} = \frac{c_{m0} + d_m C_{m0}}{m(1 + R_0^{2m})},$$

$$a_{mn} = \frac{(c_{mn} + d_m C_{mn}) B_{mn}(R_0)}{A'_{mn}(1) B_{mn}(R_0) - B'_{mn}(1) A_{mn}(R_0)}, \quad c_{00} = \left(\frac{P_0}{\ln(R_0)} - \Omega^2 \right) \frac{d_0 C_{00}}{\Omega^2 - \Omega_{00}^2},$$

$$\Omega_{m0}^2 = 2m(4m^2 - 1), \quad c_{mn} = \frac{\Omega^2 d_m C_{mn}}{\Omega_{mn}^2 - \Omega^2}, \quad \Omega_{00}^2 = \frac{P_0 - 1}{\ln(R_0)},$$

$$\Omega_{mn}^2 = (4m^2 - 1 + (2\pi n b)^2) \frac{A'_{mn}(1) B_{mn}(R_0) - B'_{mn}(1) A_{mn}(R_0)}{B_{mn}(1) A_{mn}(R_0) - A_{mn}(1) B_{mn}(R_0)},$$

$$F_{mn} = \frac{1}{\|\cos(2m\alpha)\|^2} \int_0^{2\pi} \Lambda(\alpha) \cos(2n\alpha) \cos(2m\alpha) d\alpha,$$

$$C_{mk} = \frac{1}{\|\cos(2\pi k z)\|^2} \int_{-1/2}^{1/2} D_m(z) \cos(2\pi k z) dz.$$

Объемные колебания цилиндрического газового пузырька возможны только при условии $1 < R_0 < \infty$ (см. $\Omega_{00}^{(2)}$) в отличие от колебаний сферического пузырька (или полусферического пузырька на подложке [10, 23]) в бесконечной жидкости. Для существования объемных колебаний нужно задать граничное условие (6) для потенциала скорости на некоторой цилиндрической поверхности. В задаче об

электрическом поле заряженного бесконечного цилиндра задается потенциал на эквипотенциальной поверхности вне цилиндра. Если электрический потенциал вдали от цилиндра равен нулю, то он будет постоянным во всем внешнем пространстве. Необходимо также указать дополнительное условие вдали от пузырька при изучении вынужденных колебаний газового пузырька на подложке для определения однородной части поля давления [23]. Этим условием было определение давления на свободной поверхности, т.е. задана толщина слоя жидкости на подложке, в отличие исследования собственных колебаний такого пузырька в бесконечной жидкости. Кроме того, задание свободной внешней поверхности удобно с точки зрения проведения эксперимента [23].

При конечных значениях параметра λ и давлении газа $P_0 \approx 1$ частота объемных колебаний определяется как $\Omega_{00} = i\lambda(P_0 - 1)\ln^{-1}(R_0)$, т.е. слишком низкое давление газа в пузырьке приводит к монотонной неустойчивости пузырька, а не к коллапсу (асимметричному схлопыванию пузырька) [23]. Это соотношение определяет порог устойчивости по отношению к быстрому адиабатическому сжатию при $P_0 < 2n_p$.

Существуют колебательный (периодический) (рис. 2a, b) и монотонный (аперiodический, ненулевой является только мнимая часть корней уравнений (9)) режимы (рис. 2, c). Влияние неоднородности приводит к смещению всех зависимостей вправо, в сторону больших значений λ_0 . Это связано с тем, что $0 \leq |\sin(k \cos(\alpha))| \leq 1$, т.е. всегда есть точки, в которых контактная линия зафиксирована, что сдвигает кривую декремента затухания (см. рис. 2, b) в сторону больших частот. При малых волновых числах k значения функции $|\sin(k \cos(\alpha))| < 1$, что также соответствует малоподвижной линии контакта и, следовательно, повышенным значениям частот. Азимутальные моды уже подробно исследовались в работах [25, 29] при изучении колебаний несжимаемой капли, поэтому основное внимание уделяется объемным колебаниям.

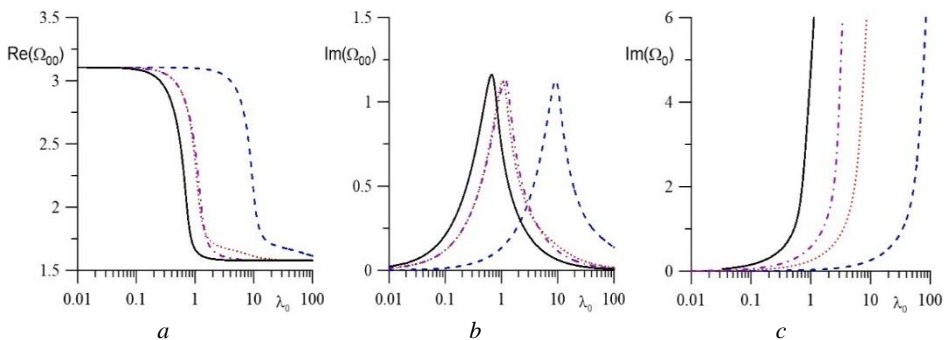


Рис. 2. Зависимость $\text{Re}(\Omega)$ (a) и $\text{Im}(\Omega)$ (b, c) объемной моды от λ_0 для разных значений k при $b = 1$, $R_0 = 5$, $P_0 = 5$; $\lambda(\alpha) = \lambda_0$ – сплошная линия, $k = 0.1$ – штриховая, $k = 1$ – пунктирная, $k = 10$ – штрих-пунктирная

Fig. 2. Dependence of (a) $\text{Re}(\Omega)$ and (b, c) $\text{Im}(\Omega)$ of the volume mode on the Hocking parameter λ_0 for various k at $b = 1$, $R_0 = 5$, $P_0 = 5$; $\lambda(\alpha) = \lambda_0$ (solid line), $k = 0.1$ (dashed line), $k = 1$ (dotted line), $k = 10$ (dash-dotted line)

Частота радиальных колебаний зависит от давления P_0 в отличие от других гармоник (рис. 3; подробный анализ для однородных пластин см.: [26, 35]). Возможны случаи, когда частота монотонно увеличивается с ростом параметра λ_0 (см. рис. 3, *a*). Частота $\text{Re}(\Omega_{00})$ растет с увеличением давления газа P_0 (см. рис. 3, *a*), т.е. частота объемных колебаний может быть равна частоте какой-либо гармоники (см. рис. 3, *b*). Для однородных пластин такое равенство возможно только с гармониками осесимметричной моды [26, 35]. При движении линии контакта по неоднородной поверхности пластины возбуждаются азимутальные моды. Это приводит равенству частоты объемных колебаний частоте одной из таких азимутальных мод (см. рис. 3, *b*). Кривые декрементов затухания не совпадают друг с другом (см. рис. 3, *c*). В точке пересечения, несмотря на равенство частот, радиальные колебания и колебания формы остаются различными режимами с разными декрементами затухания. В точке пересечения наблюдается локальный экстремум декремента затухания.

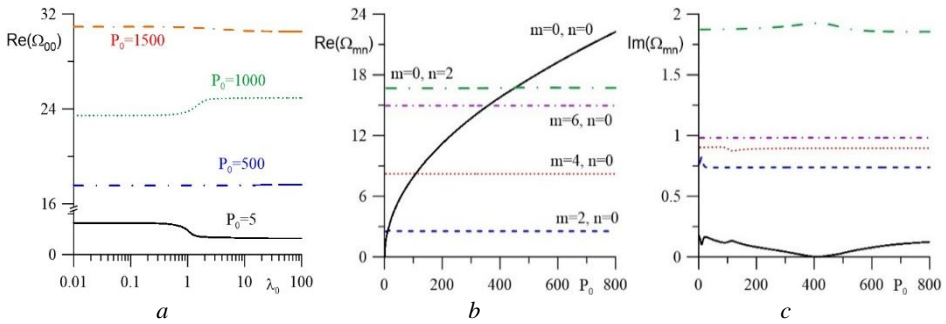


Рис. 3. Зависимость $\text{Re}(\Omega)$ (*a*, *b*) и $\text{Im}(\Omega)$ (*c*) первых гармоник от λ_0 и P_0 при $b = 1$, $R_0 = 5$, $k = 1$, $\lambda_0 = 10$ (*b*, *c*), m – азимутальное число, n – волновое число

Fig. 3. Dependence of the (*a*, *b*) frequency $\text{Re}(\Omega)$ and (*c*) damping ratio $\text{Im}(\Omega)$ of the first few harmonics on the Hocking parameter λ_0 and gas pressure P_0 at $b = 1$, $R_0 = 5$, $k = 1$; $\lambda_0 = 10$ (*b*, *c*); m is the azimuthal number and n is the wavenumber

Частоты гармоник собственных колебаний пузырька растут с увеличением значений b , например, частоты капли с постоянным краевым углом $\Omega_{mn}^{(0)2} \sim b^3$ при $b \gg 1$. Начиная с некоторых значений b основные частоты осесимметричной и азимутальных мод могут обращаться в нуль на некотором интервале значений λ_0 . Ширина этого интервала растет с увеличением b . Декремент затухания на этом интервале имеет три значения, а границы интервала соответствуют точкам ветвления. Таким образом, на этом интервале значений λ_0 существует только монотонный режим затухания, который связан с большим значением декремента затухания. Рассматриваемая неоднородность сдвигает границы интервала зануления частоты объемных колебаний. В работе [35] было показано, что для однородных пластин с различающимися параметрами Хокинга этот интервал может исчезать.

Вынужденные колебания

Осесимметричные вынужденные колебания возбуждаются в осциллирующем поле давления [26, 35]. В [29] было показано, что неоднородная поверхность приводит к появлению азимутальных колебаний, спектр которых определяется этой

неоднородностью. Данные моды определяются слагаемыми в ряде Фурье и, как упоминалось выше, для функции $\lambda(\alpha) = \lambda_0 |\sin(k \cos(\alpha))|$ будут сохраняться только четные слагаемые ряда. Решение задачи вынужденных колебаний аналогично (7), (8). Комплексные амплитуды приводят к появлению капиллярных волн, бегущих по поверхности раздела (боковой поверхности пузырька) [22–23, 38]. Невесомый газ в пузырьке не оказывает на эти волны никакого влияния [8]. Наличие затухания связано с условием движения на линии контакта и не зависит от вязкости [23, 29, 38].

Введем обозначения для амплитуд колебаний $\zeta_s = \max(|\zeta|_{z=1/2})$, $\zeta_0 = \max(|\zeta|_{z=0})$ и значения краевого угла γ_s . Наиболее заметны резонансные пики на частотах осесимметричной моды (рис. 4, а, 5, а): первый пик соответствует объемным колебаниям, второй – первой четной гармонике колебаний формы осесимметричной моды и т.д. Остальные пики соответствуют частотам азимутальных мод, возбуждение которых следует отнести за счет неоднородности поверхности. Они особенно ярко проявляются при достаточно большой подвижности контактной линии (см. рис. 4, а, 5, а). С дальнейшим увеличением параметра Хокинга λ_0 и, следовательно, уменьшением взаимодействия линии контакта с подложкой дополнительные резонансные пики становятся менее заметными (рис. 5). Аналогично и для малых λ_0 , которые соответствуют малоподвижной линии контакта: неоднородность в этом случае оказывает слабое влияние и дополнительных резонансных пиков нет.

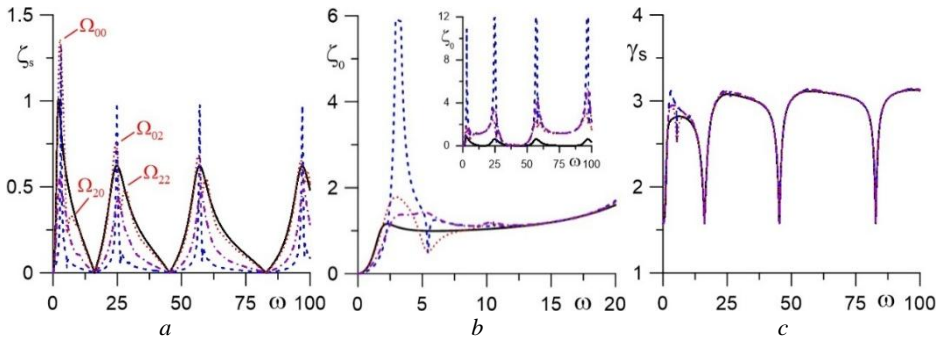


Рис. 4. Амплитуды ζ_s (а), ζ_0 (б) и γ_s (с) как функции ω при $b = 1$, $R_0 = 5$, $P_0 = 5$, $\lambda_0 = 1$; $\lambda(\alpha) = \lambda_0$ – сплошная линия, $k = 0.1$ – штриховая, $k = 1$ – пунктирная, $k = 10$ – штрих-пунктирная

Fig. 4. (a) Amplitude on the solid surface ζ_s , (b) amplitude in the middle of the layer ζ_0 , and (c) contact angle γ_s as the functions of frequency ω at $b = 1$, $R_0 = 5$, $P_0 = 5$, $\lambda_0 = 1$; $\lambda(\alpha) = \lambda_0$ (solid line), $k = 0.1$ (dashed line), $k = 1$ (dotted line), and $k = 10$ (dash-dotted line)

Неоднородность поверхности приводит к изменению эффективного параметра Хокинга, как было показано в предыдущем разделе. Это приводит к сдвигу резонансных частот (рис. 4, б) аналогично изменению параметра Хокинга (см. рис. 5). Отметим, что даже при относительно больших значениях $\lambda_0 = 10$ (т.е. линия контакта слабо взаимодействует с поверхностью подложки), краевой угол меняется (см. рис. 5, с). Амплитуда колебаний боковой поверхности в середине слоя максимальна при малых и больших значениях эффективного параметра λ , т.е. когда диссипация энергии мала.

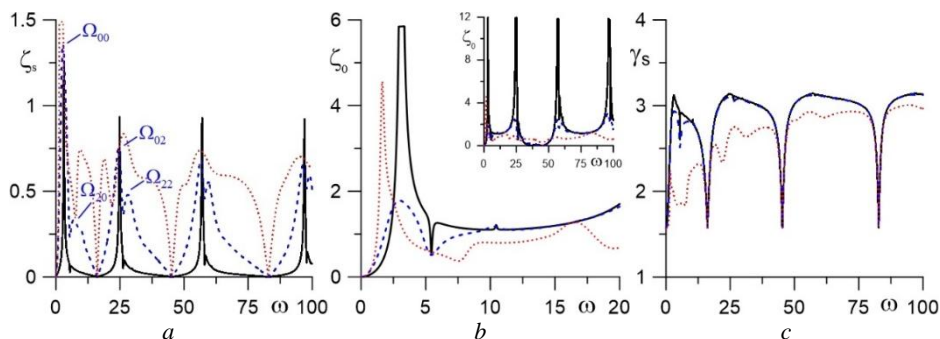


Рис. 5. Амплитуды ζ_s (a), ζ_0 (b) и γ_s (c) как функции ω при $b = 1$, $R_0 = 5$, $P_0 = 5$, $k = 1$;

$\lambda_0 = 0.1$ – сплошная линия, $\lambda_0 = 1$ – штриховая, $\lambda_0 = 10$ – пунктирная

Fig. 5. (a) Amplitude ζ_s , (b) amplitude ζ_0 , and (c) contact angle γ_s as the functions of frequency ω at $b = 1$, $R_0 = 5$, $P_0 = 5$, $k = 1$; $\lambda_0 = 0.1$ (solid line), $\lambda_0 = 1$ (dashed line), and $\lambda_0 = 10$ (dotted line)

Заключение

Волновое число неоднородности k изменяет эффективное взаимодействие контактной линии с поверхностью пластины, т.е. параметр Хокинга. Затухание свободных колебаний происходит из-за диссипации энергии, которая определяется эффективным параметром Хокинга. Обнуление частоты объемных колебаний существует для данной неоднородности в отличие от двух различающихся однородных пластин.

Установлено, что неоднородность поверхности пластины приводит к возбуждению азимутальных мод при пульсациях давления. Это справедливо для любых функций неоднородности $\Lambda(\alpha)$. Пульсации давления возбуждают только объемные колебания пузырька. Движение контактной линии приводит к возбуждению четных гармоник колебаний формы пузырька. Влияние неоднородности мало при малых значениях параметра Хокинга: линия контакта малоподвижна и свойства поверхности слабо влияют на ее движение. В случае больших значений этого параметра движущаяся контактная линия слабо взаимодействует с подложкой и неоднородность поверхности также не влияет. Если сила взаимодействия движущейся линии контакта с подложкой достаточно велика (при конечных значениях параметра смачивания), то неоднородность поверхности существенно влияет на движение контактной линии.

Полученные результаты можно использовать, например, для измерения интегрального параметра взаимодействия как параметра Хокинга примерно таким же образом [30–33] и при определении неоднородности поверхности.

Предложена теоретическая модель для описания движения линии контакта по неоднородности поверхности пластины. Исследовалось применение этой модели для изучения колебаний зажатого газового пузырька в однородном пульсационном поле давления. Показано, что из-за неоднородности в спектре вынужденных колебаний появляются азимутальные моды.

Список источников

1. де Жен П.Ж. Смачивание: статика и динамика // Успехи физических наук. 1987. Т. 151, вып. 4. С. 619–681. doi: 0.3367/UFNr.0151.198704c.0619

2. *de Gennes G., Brochard-Wyart F., Quere D.* Capillarity and Wetting Phenomena: Drops, Bubbles, Pearls, Waves. New York: Springer, 2004. 292 p. doi: 10.1007/978-0-387-21656-0
3. *Zhang L., Thiessen D.B.* Capillary-wave scattering from an infinitesimal barrier and dissipation at dynamic contact lines // *J. Fluid Mech.* 2013. V. 719. P. 295–313. doi: 10.1017/jfm.2013.5
4. *Hocking L.M.* The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary // *J. Fluid Mech.* 1987. V. 179. P. 253–266. doi: 10.1017/S0022112087001514
5. *Пономарева М.А., Якутенок В.А.* Моделирование растекания капли вязкой жидкости в плоской постановке при больших числах Бонда // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2007. № 1. С. 79–83.
6. *Пономарева М.А., Шрагер Г.Р., Якутенок В.А.* Использование уравнения Дюпре–Юнга для решения задачи о растекании жидкости при ограниченном смачивании // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2008. № 1 (2). С. 90–96.
7. *Davis S.H.* Moving contact lines and rivulet instabilities. Part 1. The static rivulet // *J. Fluid Mech.* 1980. V. 98. P. 225–242. doi: 10.1017/S0022112080000110
8. *Актершев С.П., Алексеенко С.В., Цвелодуб О.Ю.* Теоретическое моделирование гидродинамики и теплопереноса в волновых пленках жидкости при сложных условиях течения (обзор) // *Теплофизика и аэромеханика.* 2022. № 1. С. 1–36. doi: 10.1134/S0869864322010012 (English version).
9. *Fayzrakhmanova I.S., Straube A.V.* Stick-slip dynamics of an oscillated sessile drop // *Phys. Fluids.* 2009. V. 21. Art. 072104. doi: 10.1063/1.3174446
10. *Fayzrakhmanova I.S., Straube A.V., Shklyayev S.* Bubble dynamics atop an oscillating substrate: Interplay of compressibility and contact angle hysteresis // *Phys. Fluids.* 2011. V. 23. Art. 102105. doi: 10.1063/1.3650280
11. *Korobkin A.A., Pukhnachov V.V.* Initial Stage of Water Impact // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1988. V. 20. P. 159–185. doi: 10.1146/annurev.fl.20.010188.001111
12. *Yarin A.L.* Drop impact dynamics: Splashing, Spreading, Receding, Bouncing... // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2006. V. 39. P. 159–192. doi: 10.1146/annurev.fluid.38.050304.092144
13. *Hicks P.D., Ermanyuk E.V., Gavrilov N.V., Purvis R.* Air trapping at impact of a rigid sphere onto a liquid // *J. Fluid Mech.* 2012. V. 695. P. 310–320. doi: 10.1017/jfm.2012.20
14. *Kumar S.* Liquid Transfer in Printing Processes: Liquid Bridges with Moving Contact Lines // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2015. V. 47. P. 67–94. doi: 10.1146/annurev-fluid-010814-014620
15. *Anna S.L.* Droplets and bubbles in microfluidic devices // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2016. V. 48. P. 285–309. doi: 10.1146/annurev-fluid-122414-034425
16. *Bureš L., Sato Y.* On the modelling of the transition between contact-line and microlayer evaporation regimes in nucleate boiling // *J. Fluid Mech.* 2021. V. 916. A53. doi: 10.1017/jfm.2021.204
17. *Dussan V.E.B.* On the spreading of liquids on solid surfaces: static and dynamic contact lines // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 1979. V. 11. P. 371–400. doi: 10.1146/annurev.fl.11.010179.002103
18. *Ding H., Gilani M.N.H., Spelt P.D.M.* Sliding, pinch-off and detachment of a droplet on a wall in shear flow // *J. Fluid Mech.* 2010. V. 644. P. 217–244. doi: 10.1615/10.1017/S0022112009992217
19. *Воинов О.В.* Гидродинамика смачивания // *Известия АН СССР. Механика жидкости и газа.* 1976. № 5. С. 76–84. doi: 10.1007/BF01012963 (English version)
20. *Alabuzhev A.A.* Oscillations and parametric instability of a cylindrical drop of a low-viscous liquid // *Inter. J. Fluid Mech. Res.* 2019. V. 46, is. 5. P. 441–457. doi: 10.1615/InterJFluidMechRes.2019025743
21. *Алабужев А.А., Пьянкова М.А.* Параметрическая неустойчивость одиночной капли и ансамбля капель при круговых вибрациях // *Вестник Пермского университета. Физика.* 2022. № 3. С. 56–65. doi: 10.17072/1994-3598-2022-3-56-65
22. *Ting C.-L., Perlin M.* Boundary conditions in the vicinity of the contact line at a vertically oscillating upright plate: an experimental investigation // *J. Fluid Mech.* 1995. V. 295. P. 263–300. doi: 10.1017/S0022112095001960

23. Shklyaev S., Straube A.V. Linear oscillations of a hemispherical bubble on a solid substrate // *Phys. Fluids*. 2008. V. 20. Art. 052102. doi: 10.1063/1.2918728
24. Alabuzhev A.A., Kolupaev V.S. The effect of substrate surface on the dynamics of sessile drop under axisymmetric vibrations // *Interfac. Phenom. Heat Transfer*. 2021. V. 9, is. 1. P. 75–85. doi: 10.1615/INTERFACPHENOMHEATTRANSFER.2021035378
25. Алабужев А.А., Любимов Д.В. Влияние динамики контактной линии на собственные колебания цилиндрической капли // *Прикладная механика и техническая физика*. 2007. Т. 48, № 5. С. 78–86. doi: 10.1007/s10808-007-0088-6
26. Алабужев А.А. Поведение цилиндрического пузырька под действием вибраций // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2014. Т. 7, № 2. С. 151–161. doi: 10.7242/1999-6691/2014.7.2.16
27. Алабужев А.А., Кашина М.А. Влияние различия свойств поверхностей на осесимметричные колебания сжатой капли в переменном электрическом поле // *Известия вузов. Радиофизика*. 2018. Т. 61, № 8-9. С. 662–676. doi: 10.1007/s11141-019-09919-4 (English version).
28. Miles J.W. The capillary boundary layer for standing waves // *J. Fluid Mech*. 1991. V. 222. P. 197–205. doi: 10.1017/S0022112091001052
29. Pyankova M.A., Alabuzhev A.A. Influence of the properties of the plate surface on the oscillations of the cramped drop // *Phys. Fluids*. 2022. V. 34. Art. 092015. doi: 10.1063/5.0101011
30. Xia Y., Steen P.H. Moving contact-line mobility measured // *J. Fluid Mech*. 2018. V. 841. P. 767–783. doi: 10.1017/jfm.2018.105
31. Xia Y., Steen P.H. Dissipation of oscillatory contact lines using resonant mode scanning // *NPJ Microgravity*. 2020. V. 6 (3). doi: 10.1038/s41526-019-0093-0
32. Ludwicki J.M., Kern V.R., McCraney J. et al. Is contact-line mobility a material parameter? // *NPJ Microgravity*. 2022. V. 8 (6). doi: 10.1038/s41526-022-00190-y
33. McCraney J., Ludwicki J., Bostwick J., Daniel S., Steen P. Coalescence-induced droplet spreading: Experiments aboard the International Space Station // *Phys Fluids*. 2022. V. 34. Art. 122110. doi: 10.1063/5.0125279
34. Hocking L.M. Waves produced by a vertically oscillating plate // *J. Fluid Mech*. 1987. V. 179. P. 267–281. doi: 10.1017/S0022112087001526
35. Alabuzhev A.A. Influence of surface properties on axisymmetrical oscillations of a cylindrical bubble // *Interfac. Phenom. Heat Transfer*. 2019. V. 7, is. 3. P. 255–268. doi: 10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.2019031147
36. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
37. Алабужев А.А., Любимов Д.В. Влияние динамики контактной линии на колебания сжатой капли // *Прикладная механика и техническая физика*. 2012. Т. 53, № 1. С. 1–12. doi: 10.1134/S0021894412010026
38. Алабужев А.А. Осесимметричные колебания цилиндрической капли с подвижной контактной линией // *Прикладная механика и техническая физика*. 2016. Т. 57, № 6. С. 53–63. doi: 10.1134/S0021894416060079

References

1. De Genn P.G. (1985) Wetting: Statics and dynamics. *Reviews of Modern Physics*. 57. pp. 827–863. doi: 10.1103/RevModPhys.57.827
2. De Gennes G., Brochard-Wyart F., Quere D. (2004) *Capillarity and Wetting Phenomena: Drops, Bubbles, Pearls, Waves*. New York: Springer. doi: 10.1007/978-0-387-21656-0
3. Zhang L., Thiessen D.B. (2013) Capillary-wave scattering from an infinitesimal barrier and dissipation at dynamic contact lines. *Journal of Fluid Mechanics*. 719. pp. 295–313. doi: 10.1017/jfm.2013.5
4. Hocking L.M. (1987) The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary. *Journal of Fluid Mechanics*. 179. pp. 253–266. doi: 10.1017/S0022112087001514

5. Ponomareva M.A., Yakutenok V.A. (2007) Modelirovanie rastekaniya kapli vyazkoy zhidkosti v ploskoy postanovke pri bol'shikh chislakh Bondy [Modelling of spreading of a two-dimensional viscous drop for large Bond number]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1. pp. 79–83.
6. Ponomareva M.A., Shrager G.R., Yakutenok V.A. (2008) Ispol'zovanie uravneniya Dyupre–Yunga dlya resheniya zadachi o rastekanii zhidkosti pri ogranichennom smachivanii [Applying of Young relation for solution of the fluid spreading problem at partial wetting]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(2). pp. 90–96.
7. Davis S.H. (1980) Moving contact lines and rivulet instabilities. Part 1. The static rivulet. *Journal of Fluid Mechanics*. 98. pp. 225–242. doi: 10.1017/S0022112080000110
8. Aktershev S.P., Alekseenko S.V., Tsveldub O.Y. (2022) Theoretical modeling of fluid dynamics and heat transfer in wavy liquid films under complex flow conditions (review). *Thermophysics and Aeromechanics*. 29. pp. 1–34. doi: 10.1134/S0869864322010012
9. Fayzrakhmanova I.S., Straube A.V. (2009) Stick-slip dynamics of an oscillated sessile drop. *Physics of Fluids*. 21(072104). doi: 10.1063/1.3174446
10. Fayzrakhmanova I.S., Straube A.V., Shklyaev S. (2011) Bubble dynamics atop an oscillating substrate: Interplay of compressibility and contact angle hysteresis. *Physics of Fluids*. 23(102105). doi: 10.1063/1.3650280
11. Korobkin A.A., Pukhnachov V.V. (1988) Initial stage of water impact. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 20. pp. 159–185. doi: 10.1146/annurev.fl.20.010188.001111
12. Yarin A.L. (2006) Drop impact dynamics: Splashing, spreading, receding, bouncing... *Annual Review of Fluid Mechanics*. 39. pp. 159–192. doi: 10.1146/annurev.fluid.38.050304.092144
13. Hicks P.D., Ermanyuk E.V., Gavrilov N.V., Purvis R. (2012) Air trapping at impact of a rigid sphere onto a liquid. *Journal of Fluid Mechanics*. 695. pp. 310–320. doi: 10.1017/jfm.2012.20
14. Kumar S. (2015) Liquid transfer in printing processes: liquid bridges with moving contact lines. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 47. pp. 67–94. doi: 10.1146/annurev-fluid-010814-014620
15. Anna S.L. (2016) Droplets and bubbles in microfluidic devices. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 48. pp. 285–309. doi: 10.1146/annurev-fluid-122414-034425
16. Bureš L., Sato Y. (2021) On the modelling of the transition between contact-line and micro-layer evaporation regimes in nucleate boiling. *Journal of Fluid Mechanics*. 916(A53). doi: 10.1017/jfm.2021.204
17. Dussan V.E.B. (1979) On the spreading of liquids on solid surfaces: static and dynamic contact lines. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 11. pp. 371–400. doi: 10.1146/annurev.fl.11.010179.002103
18. Ding H., Gilani M.N.H., Spelt P.D.M. (2010) Sliding, pinch-off and detachment of a droplet on a wall in shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*. 644. pp. 217–244. doi: 10.1615/10.1017/S0022112009992217
19. Voinov O.V. (1976) Hydrodynamics of wetting. *Fluid Dynamics*. 11(5). pp. 714–721. doi: 10.1007/BF01012963
20. Alabuzhev A.A. (2019) Oscillations and parametric instability of a cylindrical drop of a low-viscous liquid. *International Journal of Fluid Mechanics Research*. 46. pp. 441–457. doi: 10.1615/InterJFluidMechRes.2019025743
21. Alabuzhev A.A., Pyankova M.A. (2022) Parametric instability of a single drop and an ensemble of drops under circular vibrations. *Bulletin of Perm University. Physics*. 3. pp. 56–65. doi: 10.17072/1994-3598-2022-3-56-65
22. Ting C.-L., Perlin M. (1995) Boundary conditions in the vicinity of the contact line at a vertically oscillating upright plate: An experimental investigation. *Journal of Fluid Mechanics*. 295. pp. 263–300. doi: 10.1017/S0022112095001960
23. Shklyaev S., Straube A.V. (2008) Linear oscillations of a hemispherical bubble on a solid substrate. *Physics of Fluids*. 20. Article 052102. doi: 10.1063/1.2918728

24. Alabuzhev A.A., Kolupaev V.S. (2021) The effect of substrate surface on the dynamics of sessile drop under axisymmetric vibrations. *Interfacial Phenomena and Heat Transfer*. 9(1). pp. 75–85. doi: 10.1615/INTERFACPHENOMHEATTRANSFER.2021035378
25. Alabuzhev A.A., Lyubimov D.V. (2007) Effect of the contact-line dynamics on the natural oscillations of a cylindrical droplet. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 48. pp. 686–693. doi: 10.1007/s10808-007-0088-6
26. Alabuzhev A.A. (2014) Behavior of a cylindrical bubble under vibrations. *Computational Continuum Mechanics*. 7(2). pp. 151–161. doi: 10.7242/1999-6691/2014.7.2.16
27. Alabuzhev A.A., Kashina M.A. (2019) Influence of surface properties on axisymmetric oscillations of an oblate drop in an alternating electric field. *Radiophysics and Quantum Electronics*. 61(8-9). pp. 589–602. doi: 10.1007/s11141-019-09919-4
28. Miles J.W. (1991) The capillary boundary layer for standing waves. *Journal of Fluid Mechanics*. 222. pp. 197–205. doi: 10.1017/S0022112091001052
29. Pyankova M.A., Alabuzhev A.A. (2022) Influence of the properties of the plate surface on the oscillations of the craped drop. *Physics of Fluids*. 34(092015). doi: 10.1063/5.0101011
30. Xia Y., Steen P.H. (2018) Moving contact–line mobility measured. *Journal of Fluid Mechanics*. 841. pp. 767–783. doi: 10.1017/jfm.2018.105
31. Xia Y., Steen P.H. (2020) Dissipation of oscillatory contact lines using resonant mode scanning. *Npj Microgravity*. 6(3). doi: 10.1038/s41526-019-0093-0
32. Ludwicki J.M., Kern V.R., McCraney J., Bostwick J.B., Daniel S., Steen P.H. (2022) Is contact-line mobility a material parameter? *Npj Microgravity*. 8(6). doi: 10.1038/s41526-022-00190-y
33. McCraney J., Ludwicki J., Bostwick J., Daniel S., Steen P. (2022) Coalescence-induced droplet spreading: Experiments aboard the International Space Station. *Physics of Fluids*. 34(122110). doi: 10.1063/5.0125279
34. Hocking L.M. (1987) Waves produced by a vertically oscillating plate. *Journal of Fluid Mechanics*. 179. pp. 267–281. doi: 10.1017/S0022112087001526
35. Alabuzhev A.A. (2019) Influence of surface properties on axisymmetrical oscillations of a cylindrical bubble. *Interfacial Phenomena and Heat Transfer*. 7(3). pp. 255–268. doi: 10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.2019031147
36. Loitsyanskiy L.G. (1995) *Mechanics of Liquids and Gases*. New York: Begell House Inc.
37. Alabuzhev A.A., Lyubimov D.V. (2012) Effect of the contact-line dynamics on the oscillations of a compressed droplet. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 53. pp. 9–19. doi: 10.1134/S0021894412010026
38. Alabuzhev A.A. (2016) Axisymmetric oscillations of a cylindrical droplet with a moving contact line. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 57(6). pp. 1006–1015. doi: 10.1134/S0021894416060079

Сведения об авторе:

Алабужев Алексей Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник лаборатории вычислительной гидродинамики Института механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук (Пермь, Россия); профессор кафедры теоретической физики Пермского государственного национального исследовательского университета (Пермь, Россия). E-mail: alabuzhev@mail.ru

Information about the author:

Alabuzhev Aleksey A. (Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Perm, Russian Federation; Professor, Department of Theoretical Physics, Perm State University, Perm, Russian Federation). E-mail: alabuzhev@mail.ru

Статья поступила в редакцию 01.10.2024; принята к публикации 06.09.2025

The article was submitted 01.10.2024; accepted for publication 06.09.2025

Научная статья

УДК 539.32

doi: 10.17223/19988621/97/5

Численное исследование механического поведения сегмента позвоночника с остеосаркомой при физиологических и акустических нагрузках

Галина Максимовна Еремина¹, Алексей Юрьевич Смолин²,
Ирина Павловна Мартышина³

^{1, 2, 3} *Институт физики прочности и материаловедения Сибирского отделения
Российской академии наук, Томск, Россия*

² *Томский государственный университет, Томск, Россия*

¹ *anikeeva@ispms.ru*

² *asmolin@ispms.ru*

³ *mira@ispms.ru*

Аннотация. Важнейшие особенности материалов скелета человека – их пористая структура, варьируемая в широком диапазоне значений, насыщенность биологической жидкостью, а также большой разброс упругих характеристик. Разработана макромеханическая модель сегмента четвертого и пятого грудных позвонков с учетом реальных значений пороупругих параметров биологических тканей, в том числе ракового образования. Для этого использована модифицированная модель пороупругости Био, адаптированная для метода подвижных клеточных автоматов. Анализ результатов моделирования согласно механобиологическим принципам показал, что при физиологических нагрузках механические напряжения и давление флюида в порах не препятствуют росту раковых клеток. При акустическом воздействии с интенсивностью $0.2\text{--}0.3\text{ МДж/мм}^2$ напряженное состояние способствует восстановлению костной ткани в пораженной области.

Ключевые слова: напряженно-деформируемое состояние, пороупругая модель, метод подвижных клеточных автоматов, биологические ткани, рак

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта № 23-79-001107; <https://rscf.ru/en/project/23-79-01107/>

Для цитирования: Еремина Г.М., Смолин А.Ю., Мартышина И.П. Численное исследование механического поведения сегмента позвоночника с остеосаркомой при физиологических и акустических нагрузках // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 97. С. 66–82. doi: 10.17223/19988621/97/5

Original article

Numerical study of the mechanical behavior of a spinal segment with osteosarcoma under physiological and acoustic loading

Galina M. Eremina¹, Aleksey Yu. Smolin², Irina P. Martyshina³

^{1, 2, 3} *Institute of Strength Physics and Materials Science of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation*

² *Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*

¹ *anikeeva@ispms.ru*

² *asmolin@ispms.ru*

³ *mira@ispms.ru*

Abstract. Determination of the stress state is a key aspect in developing methods for the mechanical stimulation of structural reorganization processes in biological tissues. The most important features of human skeletal materials include permeability, porosity (varying in a wide range of values and saturated with biological fluid), and a broad spectrum of elastic properties. Neoplastic processes in the bone matrix lead to local structural reorganization of the tissue in the affected area, which is characterized by reduced elastic characteristics and permeability.

A macromechanical model of the fourth and fifth thoracic vertebrae segments is developed with allowance for realistic poroelastic parameters of biological tissues, including tumor formation. To describe the mechanical behavior of biological tissues, the modified Biot model of poroelasticity is used and adapted to the method of movable cellular automata. A geometric model of the thoracic spine segment is constructed in FreeCAD, accounting for its structural features. The model is studied under loads similar to physiological conditions and under external acoustic exposure.

Analysis of the simulation results based on mechanobiological principles shows that under physiological loading, the levels of hydrostatic and pore fluid pressures are insufficient to suppress the differentiation and proliferation of cancer cells. Under acoustic exposure with an intensity of 0.2–0.3 mJ/mm² in the area with neoplastic process, the conditions are provided for transferring healthy stem cells and regeneration of bone tissue in the affected area.

Keywords: stress-strain state, poroelastic model, method of movable cellular automata, biological tissues, cancer

Acknowledgments: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 23-79-01107; <https://rscf.ru/en/project/23-79-01107/>).

For citation: Eremina, G.M., Smolin, A.Yu., Martyshina, I.P. (2025) Numerical study of the mechanical behavior of a spinal segment with osteosarcoma under physiological and acoustic loading. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 97. pp. 66–82. doi: 10.17223/19988621/97/5

Введение

Описание напряженно-деформированного состояния тканей скелета является важной, но в то же время и очень трудной задачей механики. В первую очередь это обусловлено сложной иерархической структурой биологических тканей.

Вторым важным аспектом живых тканей является наличие внутритканевой жидкости, которая расположена внутри пористого пространства, имеющего структуру взаимосвязанных каналов и обеспечивающего проницаемость даже при незначительной общей пористости. Третий аспект – постоянное изменение твердых тканей под действием механических напряжений. Так, в живых костях непрерывно происходит процесс так называемого ремоделирования, т.е. разрушения старых тканей специальными клетками – остеокластами, и зарождение новых тканей другими клетками – остеобластами. Этот процесс регулируется сложными химическими реакциями на уровне клеточных сигналов, на которые, в свою очередь, влияют механические напряжения и деформации.

Кроме того, в тканях возможно возникновение новообразований с совершенно другими механическими свойствами. Так, низкий уровень напряжений и высокопористое пространство костной ткани позвоночника создают благоприятные условия для определения фенотипа клеток как злокачественных [1–3]. Исследования последнего десятилетия показали, что низкий уровень гидростатического давления в поровой структуре костного матрикса (менее 10 кПа) приводит к дифференцировке злокачественных клеток [4]. Согласно данным [5], сжимающие напряжения выше 10 кПа могут снижать пролиферацию раковых клеток и приводить к дегенерации опухоли. Важно отметить, что диапазон напряжений, вызывающих опухолевые клетки, варьирует в зависимости от типа раковых клеток. Однако общая тенденция, наблюдаемая в большинстве исследований по этой теме, заключается в том, что сжимающее напряжение выше 40 кПа способствует остановке процессов дифференцировки клеток злокачественной ткани для большинства типов рака [6]. В соответствии с механобиологической концепцией механические сигналы, стимулирующие дифференцировку клеток здоровых биологических тканей, могут способствовать прекращению пролиферации злокачественных клеток [7]. Было отмечено, что при уровне средних напряжений в интервале от 40 до 150 кПа может остановиться рост первичных и вторичных очагов неопластического процесса в твердых биологических тканях. Согласно [8], механическое напряжение способно существенно влиять на активность как опухолевых, так и костных клеток, потенциально вызывая противоопухолевый эффект и положительную структурную перестройку тканей в пораженной области. Самой естественной механической стимуляцией является физическая активность. Однако влияние ежедневной физической активности, включая ее тип и другие факторы, на рост первичных и вторичных раковых опухолей остается темой для дискуссий, которая требует дальнейших исследований [9]. В настоящее время активно разрабатываются методики внешней механической стимуляции процессов регенерации биологических тканей, в том числе методы, основанные на акустическом воздействии (ударно-волновая терапия) [10].

Для исследования влияния механической стимуляции на положительную структурную перестройку в области онкологического образования проводятся многочисленные исследования как *in vitro* [10], так и *in vivo* [11]. Исследования *ex vivo* сконцентрированы на гистологических исследованиях, а также на томографических или рентгеновских изображениях. Данные подходы позволяют распознать локализованные области неопластического процесса [12]. Исследования онкологических заболеваний требуют больших материальных ресурсов и ограничены нравственными принципами. Имитационное моделирование с помощью вычислительных

машин делает возможной оценку влияния уровня механического воздействия на различные участки организма, пораженные онкологическим образованиями, в отличие от натуральных экспериментов, которые ограничены моральными принципами [13]. Подход, основанный на описании биологических тканей как изотропного упругого тела, широко используется для исследования напряженно-деформированного состояния костных тканей при механических нагрузках [14]. Упругая модель дает возможность проводить корректное описание механического поведения костных тканей, но не позволяет достаточно точно воспроизвести нелинейное поведение тканей межпозвоночных дисков. Гиперупругие модели широко используются для описания мягких тканей межпозвоночного диска и раковых тканей [15], поскольку они могут точно улавливать нелинейное поведение биологических тканей при больших смещениях. Ткани, пораженные неопластическим процессом, демонстрируют вязкоупругое поведение, на которое влияет изменение деформации во времени [16]. Для описания деформационного поведения позвоночного столба и злокачественных новообразований выбирают двухфазные модели типа пороупругости, преимуществом которых является неявный учет тканевой жидкости [17].

Основная доля исследований сконцентрирована, прежде всего, на аспектах роста объема опухолевого процесса и внедрения опухоли в костную структуру в мезоскопическом масштабе при внешней механической стимуляции [18]. Результаты имитационного моделирования на основе подходов механики сплошных сред влияния внешней механической стимуляции на развитие неопластического процесса с учетом персонализированных данных были представлены в статье [19].

Цель настоящей работы – исследование напряженно-деформированного состояния грудного сегмента позвоночника при квазистатическом и динамическом нагружении с учетом различных пороупругих характеристик таких его составляющих, как твердые костные ткани, мягкие ткани межпозвоночного диска, а также злокачественного образования. По результатам исследования проанализированы условия для структурной перестройки костной ткани в пораженной области. В качестве метода исследования использовался дискретный подход с реализованной в нем моделью пороупругого тела.

Метод моделирования

В качестве инструмента для имитационного моделирования использовался метод подвижных клеточных автоматов (ПКА), который основывается на дискретном подходе к описанию о структуры материалов [20]. Пороупругая модель на основе соотношений Био была применена для описания механического поведения тканей позвоночного столба и онкологического образования. Модель двухфазной среды, реализованная в методе ПКА, строится на предположении о том, что материал состоит из пористой структуры, которая вмещает в себя флюид (рис. 1). Построенная модель пороупругого тела в методе подвижных клеточных автоматов хорошо зарекомендовала себя для моделирования механического поведения твердых биологических тканей и геоматериалов.

В предлагаемом методе численного моделирования материал рассматривается как набор дискретных частиц (клеточные автоматы). Дискретные элементы взаимодействуют в соответствии с определенными правилами многочастичного взаимодействия и могут изменять свое состояние (подвижные). Это позволяет рассмат-

ривать деформационное поведение такой системы как изотропного упругопластического тела в рамках подхода частиц. Движение системы автоматов описывается уравнениями Ньютона–Эйлера

$$\begin{cases} m_i \frac{d^2 \mathbf{R}_i}{dt^2} = \sum_{j=1}^{N_i} \mathbf{F}_{ij}^{\text{pair}} + \mathbf{F}_i^{\Omega}, \\ \hat{J}_i \frac{d\boldsymbol{\omega}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{N_i} \mathbf{M}_{ij}, \end{cases} \quad (1)$$

где \mathbf{R}_i , $\boldsymbol{\omega}_i$, m_i и \hat{J}_i радиус-вектор, скорость вращения, масса и момент инерции автомата i соответственно, $\mathbf{F}_{ij}^{\text{pair}}$ – парная сила механического взаимодействия автоматов i и j , \mathbf{F}_i^{Ω} – объемнозависящая сила, действующая на автомат i и обусловленная взаимодействием его соседей с другими автоматами. В последнем уравнении $\mathbf{M}_{ij} = q_{ij}(\mathbf{n}_{ij} \times \mathbf{F}_{ij}^{\text{pair}}) + \mathbf{K}_{ij}$, здесь q_{ij} – расстояние от центра i -го автомата до точки его взаимодействия (контакта) с j -м автоматом, $\mathbf{n}_{ij} = (\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i)/r_{ij}$ – единичный вектор ориентации пары i – j , r_{ij} – расстояние между центрами автоматов.

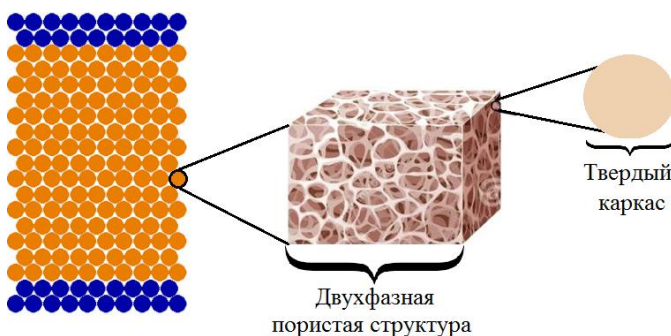


Рис. 1. Представление материала в пороупругой модели метода подвижных клеточных автоматов

Fig. 1. Representation of the material in a poroelastic model of the method of movable cellular automata

С помощью процедуры осреднения для тензора напряжений в автомате выражение для компонент усредненного тензора напряжений в элементе i принимает вид:

$$\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{V_i} \sum_{j=1}^{N_i} q_{ij} n_{ij,\alpha} F_{ij,\beta}, \quad (2)$$

где α и β обозначают оси X , Y , Z лабораторной системы координат, V_i – текущий объем автомата i , $n_{ij,\alpha}$ – α -компонента единичного вектора \mathbf{n}_{ij} , $F_{ij,\beta}$ – β -компонента полной силы, действующей в точке «контакта» между автоматами i и j .

Воздействие жидкой фазы, содержащейся в поровой структуре дискретного элемента, на его напряженное состояние описывается на основе линейной модели пороупругости. Для описания переноса жидкости в фильтрационном объеме элемента он рассматривается как материал, пронизанный сетью взаимосвязанных пор и каналов. Материал твердого каркаса этого материала, вообще говоря, также является пористым. Однако ввиду того, что объемная доля его пор и их размеры

пренебрежимо малы по сравнению с размерами и объемной долей пор всего материала, можно предположить, что на микро- и мезоуровнях материал порового каркаса биологических материалов является сплошным, однородным и изотропным. Поэтому справедливо упрощение модели пороупругости, основанной на соотношениях Био:

$$K_s = K'_s = K''_s,$$

где K'_s – микроскопический модуль объемного сжатия каркаса в дренированном состоянии, K''_s – микроскопический модуль объемного сжатия каркаса в недренированном состоянии.

Предполагается, что градиент давления жидкости играет существенную роль в процессе перераспределения флюида в поровом пространстве материала. В пренебрежении гравитационными эффектами уравнение фильтрации в поровом пространстве твердого тела может быть записано следующим образом:

$$\varphi \frac{\partial \rho}{\partial t} = K_{\Pi} \nabla \left[\frac{k}{\eta} \nabla \rho \right], \quad (3)$$

где η – вязкость жидкости, φ – пористость, k – коэффициент проницаемости твердого каркаса, определяемый как

$$k = \varphi d_{ch}^2, \quad (4)$$

где d_{ch} – эффективный диаметр фильтрационного канала.

Стоит отметить, что поровая структура разных биологических тканей имеет разное строение, но она всегда является проницаемой. Так, несмотря на то что компактная костная ткань характеризуется малой общей пористостью, она имеет связанную сеть каналов, по которым происходит перераспределение флюида [21].

Жидкостный компонент предполагается линейно сжимаемым. Значение порового давления жидкости в объеме автомата рассчитывается на основе соотношений модели пороупругости Био с использованием текущего значения порового объема. В развитой модели жидкость полагается слабосжимаемой и описывается с помощью линейного уравнения состояния

$$\rho(P^{pore}) = \rho_0 \left(1 + (P^{pore} - P_0) / K_{\Pi} \right), \quad (5)$$

где ρ и P^{pore} – текущие значения плотности и давления жидкости в поровом пространстве; ρ_0 и P_0 – значения плотности и давления жидкости при атмосферных условиях; K_{Π} модуль всестороннего сжатия жидкости.

Тогда уравнения для вычисления компонент тензора напряжений примут вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha} &= 2G \left(\varepsilon_{\alpha\alpha} - a P^{pore} / K \right) + \left(1 - 2G/K \right) \sigma^{mean}, \\ \tau_{\alpha\beta} &= G \gamma_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (6)$$

где a – коэффициент Био, определяемый по формуле

$$a = 1 - \frac{K}{K_s}.$$

В данной работе рассмотрены как стандартный случай сжимаемого тела различной пористости ($K/K_s \leq 1$, $K/K_{fl} \leq 1$), так и предельный случай для малосжимаемого низкопроницаемого высокопористого тела ($K/K_s \ll 1$, $K/K_{fl} \ll 1$). Для данного

случая использование эффективных упругих модулей пористого тела, полученных в результате экспериментальных исследований, в качестве входных параметров модели может привести к потере устойчивости, а также некорректным результатам моделирования. Для данного случая предлагается в качестве упругого параметра дренированного тела использовать его максимально возможное значение. Методика расчета максимально возможного упругого параметра таких материалов была предложена в 60-х гг. XX в. Хашином и Штрикманом [22]:

$$K \leq K_s - \frac{3\varphi K}{2 + \varphi}. \quad (7)$$

Необходимость корректного описания пороупругих материалов в широком диапазоне пористости, проницаемости и сжимаемости обусловлена тем, что рассматриваемый в данной работе сегмент позвоночника включает множество структурных составляющих с различной структурой пористости и упругих свойств. Так, согласно изложенному подходу, костные ткани (трабекулярную и компактную) можно классифицировать как сжимаемые пороупругие тела, а мягкие ткани межпозвоночного диска (хрящевая ткань, периферические фиброзные кольца и пульпозное ядро) и раковой опухоли – как малосжимаемые пороупругие тела (таблица).

Физико-механические свойства тканей позвоночника

Ткань	Плотность, ρ_d , кг/м ³	Объемный модуль, K , МПа	Модуль сдвига, G , МПа	Объемный модуль каркаса, K_s , ГПа	Пористость *, φ	Проницаемость *, k , м ²
Периферические кольца (фибро-хрящевая)	1 060	1.1	0.825	2	0.782	1.1×10^{-19}
Пульпозное ядро (ПЯ)	1 060	0.625	0.288	1	0.83	3×10^{-19}
Хрящевая	1 000	8.3	0.87	1	0.8	7×10^{-18}
Компактная	1 850	10 000	4 600	12	0.04	1×10^{-19}
Трабекулярная	700	100	75	10	0.7	1×10^{-16}
Злокачественная	800	0.003	0.002	5	0.8	2.14×10^{-18}

Структурно-механическая модель позвоночно-двигательного сегмента грудного отдела

В данной работе представлена модель позвоночно-двигательного сегмента на уровне четвертого и пятого грудных позвонков (в специальной литературе обозначаются как T4 и T5). Сегмент представляет собой композицию из позвонков, между которыми расположен межпозвоночный диск (рис. 2, *a*). Внутри позвонка находится трабекулярное вещество, которое окружено слоем компактной ткани (рис. 2, *b*). Межпозвоночный диск представляет собой трехкомпонентную композицию, включающую в себя такие компоненты, как студенистое ядро, периферические кольца и концевые пластины хрящевой ткани (см. рис. 2, *b*).

Геометрическая модель позвоночника была взята из открытых источников Интернет. Для создания кортикальной оболочки, пульпозного (студенистого) ядра, хрящевых концевых пластинок и фиброзного кольца использовалось программное обеспечение FreeCAD.

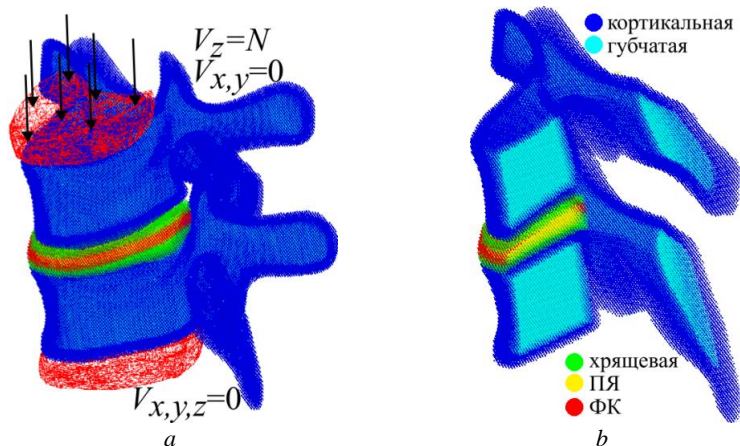


Рис. 2. Структурно-механическая модель позвоночно-двигательного сегмента, представленная в виде упаковки автоматов: кинематические условия, имитирующие положение стоя (а), сечение с указанием материалов (б)

Fig. 2. Structural-mechanical model of the spinal motion segment represented as a packing of automata: (a) kinematic conditions simulating standing position and (b) a model cross-section with indicated materials

Пороупругие свойства биологических тканей грудного отдела позвоночника, используемые в данной модели, представлены таблице и соответствуют литературным данным [23]. Предполагается, что жидкость в тканях позвоночника и раковой опухоли соответствует свойствам физиологического раствора с модулем объемного сжатия $K_f = 2.4$ ГПа, вязкостью $\eta_f = 10^{-3}$ Па·с и плотностью $\rho_f = 1\,000$ кг/м³ [24].

Верификация и валидация модели

Для проверки адекватности модели на первом этапе была выполнена ее верификация по параметру «эффективная жесткость». Верификация заключается в оценке корректности и эффективности численной схемы, используемой в модели. Количество частиц в модельном образце изменяется в диапазоне от 85 372 до 973 136 элементов (радиус автоматов от 0.225 мм до 0.1 мм соответственно).

Моделировалось одноосное сжатие, имитирующее положение стоя. Для этого на имитационную модель позвоночно-двигательного сегмента вдоль вертикальной оси позвоночного столба задавалось механическое воздействие, соответствующее одноосному сжатию с постоянной скоростью 10 мм/с до достижения заданной силы нагружения (см. рис. 2). Результаты верификации разработанной структурно-механической модели по параметру «эффективная жесткость» продемонстрировали, что наибольшее расхождение в значении выходного показателя между минимальной (123 391 автомата) и максимальной дискретизацией составляет менее 2% (рис. 3).

Процесс проверки адекватности входных данных структурно-механической модели позвоночно-двигательного сегмента осуществлялся по параметру «внутридисковое давление» (величина сжимающего напряжения) [25] при одноосном сжатии, имитирующем положение стоя. Среднее значение внутридискового давления для нагружения 200 Н колеблется в диапазоне от 200–400 кПа. На рис. 4

приведены результаты валидации модели сегмента грудного отдела позвоночника с экспериментальными данными, приведенными в работе [26].

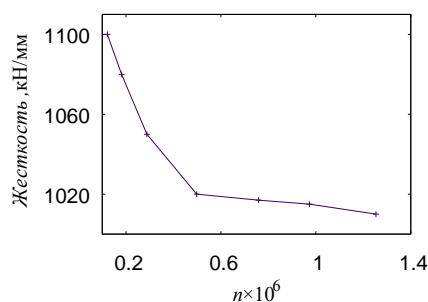


Рис. 3. Зависимость жесткости сегмента грудного отдела позвоночника T4, T5 от количества автоматов

Fig. 3. Stiffness of the T4, T5 thoracic spine segment versus number of elements

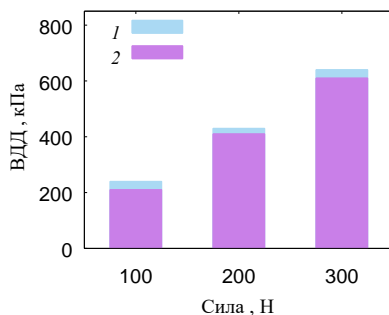


Рис. 4. Гистограмма внутридискового давления при одноосном сжатии с разными силами (1 – экспериментальные данные [26], 2 – данные расчетов по разработанной модели
Fig. 4. Histogram of intradiscal pressure under uniaxial compression with different loads (1, experimental data [26]; and 2, calculated results)

Для исследования влияния физической активности на условия для положительной структурной перестройки в области ракового образования структурно-механическая модель, представленная на рис. 2, была модифицирована. В нее было добавлено сферическое включение с определенными свойствами, имитирующее раковую опухоль. Механические характеристики раковой ткани представлены в таблице. Кинематические условия были подобными параметрам механического воздействия используемым при проверке корректности работы модели.

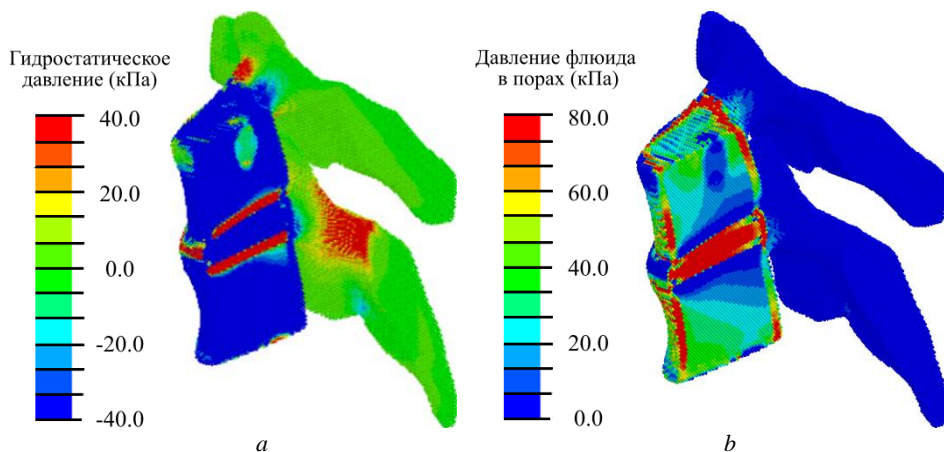


Рис. 5. Распределение среднего напряжения (a) и давления внутритканевой жидкости (b) в позвоночно-двигательном сегменте со злокачественной неоплазией в положении стоя при силе 200 Н

Fig. 5. Fields of the (a) mean stress and (b) interstitial fluid pressure in the spinal motion segment with malignant neoplasia in the standing position under a load of 200 N

Обработка результатов численного исследования позволила установить, что в объеме локализации неопластического процесса возникают условия для формирования фенотипа злокачественных клеток (средние напряжения < 40 кПа). В непосредственной близости от неопластического процесса возникает кольцо шириной 3 мм, напряженно-деформированное состояние которого можно интерпретировать как благоприятные условия для дальнейшей пролиферации злокачественных клеток (рис. 5, *a*). Кроме того значение давления внутритканевой жидкости (рис. 5, *b*) в области вокруг новообразования показал, что уровень данного параметра недостаточен для трансфера здоровых стволовых клеток в пораженную область (< 20 кПа [27]).

Моделирование акустического воздействия на сегмент грудного отдела позвоночника с остеосаркомой

Новообразования, зародившиеся из мезенхимальной ткани (кости, хрящи) имеют наиболее негативный прогноз. При лечении пациентов с новообразованиями в области позвоночно-двигательного сегмента в инициальной фазе высокие результаты в лечении продемонстрировали подходы, основанные на химиотерапии и физиотерапии. Главной целью физиотерапии считается формирование среды с благоприятными условиями для доставки здоровых стволовых клеток в пораженную зону. Предполагается, что последующим шагом в деактивации неопластического процесса будет дифференцировка поступивших мультипотентных клеткок на остеобласты и другие структурные единицы здоровых биологических тканей. Образование защитной склерозной оболочки (стромы) вокруг новообразования является существенной преградой к доставке прогенеторных клеток в поврежденную область. Поэтому важной является разработка малоинвазивных методик физиотерапии, применяемой для создания условий для переноса здоровых стволовых клеток в область с неопластическим процессом.

В представленном исследовании была разработана структурно-механическая модель позвоночно-двигательного сегмента с новообразованием при акустическом воздействии (рис. 6, *a*). При численном исследовании был воспроизведен малоинвазивный способ установки медного аппликатора, который находился в зоне реберной суставной поверхности четвертого грудного позвонка. Анализировалось влияние акустической стимуляции с плотностью потока энергии в интервале от 0.01 до 0.5 мДж/мм².

Для имитации акустического воздействия крайние элементы верха и низа модели позвоночно-двигательного сегмента были неподвижны, а элементы поверхностного слоя аппликатора двигались со скоростью V_y , соответствующей заданной плотности потока энергии воздействия частотой 1 МГц [28] (рис. 6, *b*).

При малоинтенсивном акустическом воздействии с плотностью потока энергии менее 0.01 мДж/мм² (рис. 8) в области новообразования и вокруг него возникают условия для формирования фенотипа злокачественных клеток (среднее напряжение < 40 кПа). При стимуляции с плотностью потока энергии в интервале 0.01 до 0.1 мДж/мм² в объеме менее 15% новообразования возникают сжимающие напряжения достаточные для гибели злокачественных клеток (< 40 кПа). Однако также наблюдается область объемом около 15% с растягивающими напряжениями, которые способствуют развитию злокачественного образования и созданию защитного

слоя (стромы) вокруг опухоли. При среднеинтенсивном акустическом нагружении в интервале $0.1-0.15$ мДж/мм² в 35% от объема новообразования наблюдается достаточный уровень сжимающих напряжений вызывающий прекращение злокачественного клеточного цикла в новообразовании.

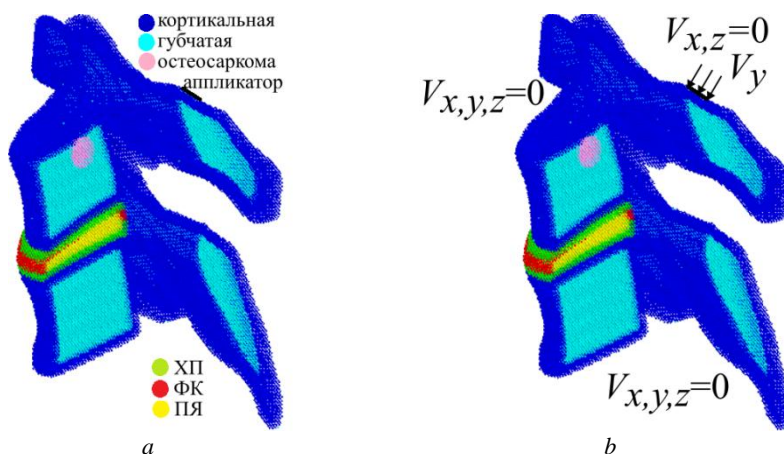


Рис. 6. Структурно-механическая модель позвоночно-двигательного сегмента, пораженного злокачественной неоплазией, представленная в виде набора элементов: сечение модели с указанием типов тканей (a) и кинематическими условиями (b)

Fig. 6. Structural-mechanical model of the spinal motion segment affected by malignant neoplasia, represented as a set of elements: a model cross-section with indicated (a) tissue types and (b) loading conditions for the acoustic effect

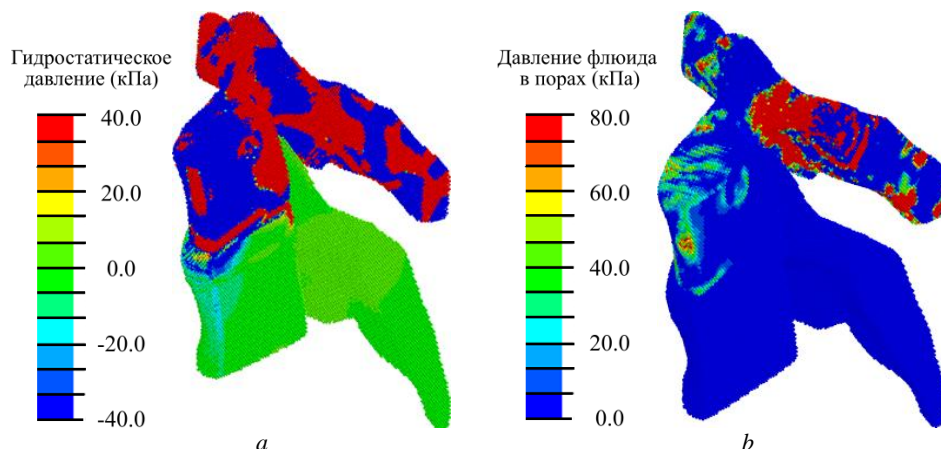


Рис. 7. Распределение среднего напряжения (a) и давления внутритканевой жидкости (b) при акустическом воздействии на сегмент грудного отдела позвоночника, пораженного остеосаркомой, с плотностью потока энергии 0.25 мДж/мм²

Fig. 7. Fields of the (a) mean stress and (b) biological fluid pressure under acoustic exposure of the thoracic spine segment affected by osteosarcoma with an energy flux density of 0.25 mJ/mm²

При данной величине акустической стимуляции также наблюдаются участки с растягивающими напряжениями, способствующими дальнейшему формированию фенотипа злокачественных клеток и образованию защитного кокона вокруг него. В менее 40% объема новообразования возникает достаточный уровень сжимающих напряжений для клеточного цикла и функционирования новообразования при механической стимуляции в диапазоне $0.15\text{--}0.3\text{ мДж/мм}^2$ (см. рис. 7, а). При акустическом воздействии в данном интервале в объеме 25% новообразования наблюдаются участки с подходящими условиями для продолжения клеточного цикла остеосаркомы и создания защитного кокона (склеротического кольца) вокруг нее. При высокоинтенсивном акустическом воздействии (более 0.3 мДж/мм^2) наблюдаются зоны с растягивающими и сжимающими напряжениями более 0.15 МПа , что может привести к дифференцировке клеток фиброзной ткани. Такой эффект может привести увеличению толщины и снижению проницаемости защитного кокона, что, в свою очередь, создаст преграду для поступления в пораженную область мультипотентных клеток. Паттерн давления флюида в порах (см. рис. 7, б) свидетельствует о достаточном уровне данного параметра для переноса здоровых стволовых клеток в зону злокачественного новообразования при акустическом воздействии более 0.2 мДж/мм^2 .

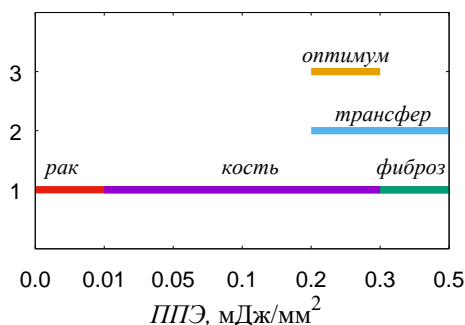


Рис. 8. Оптимальные параметры акустического воздействия для активации различных биологических процессов

Fig. 8. Optimal parameters of the acoustic exposure for the activation of various biological processes

На рис. 8 обобщены полученные результаты в виде диапазонов акустического воздействия на рассматриваемый сегмент позвоночника, приводящих к активации различных биологических процессов, таких как рост определенного вида ткани и трансфер стволовых клеток. Оптимальным для клеточного цикла раковой опухоли и регенерации поврежденных неопластическим процессом тканей установлен интервал акустического воздействия от 0.2 до 0.3 мДж/мм^2 . Дальнейшее увеличение величины плотности потока энергии (при инвазивном расположении аппликатора) способствует формированию и росту защитной оболочки вокруг злокачественного новообразования.

Заключение

Разработана структурно-механическая модель грудного позвоночно-двигательного сегмента с учетом разнообразия свойств его тканей как пороупругих материалов.

При этом использовалась модифицированная модель пороупругости Био, адаптированная к методу подвижных клеточных автоматов. Исследовано механическое поведение разработанной модели при статическом и акустическом воздействии, в том числе в случае неопластического процесса. Для верификации и валидации модели моделировалось одноосное сжатие с постоянной скоростью 10 мм/с. При акустическом воздействии нагружение задавалось через смещение медного аппликатора в зоне реберной суставной поверхности четвертого грудного позвонка. При этом автоматам аппликатора задавалась скорость, соответствующая плотности потока энергии акустического воздействия с частотой 1 МГц.

Результаты моделирования механического поведения грудного позвоночно-двигательно сегмента при статических и динамических нагрузках можно резюмировать следующим образом:

- использование модификации модели Био для предельного случая малосжимаемых материалов (введение эффективного объемного модуля дренированного материала) позволяет корректно описывать механическое поведение всех тканей сегмента позвоночника, в том числе пораженного неопластическим процессом;
- при физиологических нагрузках сегмента с остеосаркомой напряженно-деформированное состояние в области новообразования можно интерпретировать как благоприятные условия для дальнейшего роста опухоли;
- при акустическом нагружении сегмента с плотностью потока энергии в диапазоне 0.2–0.3 мДж/мм² формируемое в нем напряженно-деформированное состояние может способствовать положительной структурной перестройке в зоне неопластического процесса и переносу туда здоровых стволовых клеток.

В качестве возможности практического применения полученных результатов следует указать, что они могут быть использованы при разработке терапевтических подходов нового поколения с учетом индивидуальных особенностей организма пациента для лечения онкологических заболеваний.

Список источников

1. Jiang Z.Y., Liu J.B., Wang X.F., Ma Y.S., Fu D. Current status and prospects of clinical treatment of osteosarcoma // *Technology in Cancer Research & Treatment*. 2022. V. 21. Art. 15330338221124696. doi: 10.1177/15330338221124696
2. Riehl B.D., Kim E., Bouzid T., Lim J.Y. The role of microenvironmental cues and mechanical loading milieus in breast cancer cell progression and metastasis // *Frontiers in Bioengineering and Biotechnology*. V. 8. Art. 608526. doi: 10.3389/fbioe.2020.608526
3. Kalli M., Stylianopoulos T. Defining the role of solid stress and matrix stiffness in cancer cell proliferation and metastasis // *Frontiers in Oncology*. 2018. V. 8. Art. 55. doi: 10.3389/fonc.2018.00055
4. Akinpelu A., Akinsipe T., Avila L.A., Arnold R.D., Mistriotis P. The impact of tumor microenvironment: unraveling the role of physical cues in breast cancer progression // *Cancer Metastasis Review*. 2024. V. 43 (2). P. 823–844. doi: 10.1007/s10555-024-10166-x
5. Blanco H., Gomez J., Melchor R., Palma J., Soler G. Mechanotransduction in tumor dynamics modeling // *Phys. Life Review*. 2023. V. 44. P. 279–301. doi: 10.1016/j.plrev.2023.01.017
6. Verbruggen S.W. Role of the osteocyte in bone metastasis – The importance of networking // *Journal Bone Oncology*. 2024. V. 44. Art. 100526. doi: 10.1016/j.jbo.2024.100526
7. Mpekris F., Papaphilippou P.C., Panagi M., Voutouri C., Michael C., Charalambous A., Marinov Dinev M., Katsioloudi A., Prokopi-Demetriades M., Anayiotos A., Cabral H., Krasia-Christoforou T., Stylianopoulos T. Pirfenidone-loaded polymeric micelles as an effective

- mechanotherapeutic to potentiate immunotherapy in mouse tumor models // *ACS Nano*. 2023. V. 17 (24). P. 24654–24667. doi: 10.1021/acsnano.3c03305
8. Faraldi M., Gerosa L., Gomarasca M., Sansoni V., Perego S., Ziemann E., Banfi G., Lombardi G. A physically active status affects the circulating profile of cancer-associated miRNAs // *Diagnostics*. 2021. V. 11 (5). Art. 820. doi: 10.3390/diagnostics11050820
 9. Vorobiev A.I., Gorgidze L.A., Zakharov V.N. Influence of the shock-wave pulses of microsecond-range on tumor cells // *Russian Journal of Hematology and Transfusiology*. 2016. V. 61 (2). P. 81–87. doi: 10.18821/0234-5730-2016-61-2-81-87
 10. Chang C.L., Chen K.H., Sung P.H., Chiang J.Y., Huang C.R., Chen H.H., Yip H.K. Combined high energy of extracorporeal shock wave and 5-FU effectively suppressed the proliferation and growth of tongue squamous cell carcinoma // *Biomedicine & Pharmacotherapy*. 2021. V. 142. Art. 112036. doi: 10.1016/j.biopha.2021.112036
 11. Macnamara C.K., Caiazzo A., Ramis-Conde I., Chaplain M.A.J. Computational modelling and simulation of cancer growth and migration within a 3D heterogeneous tissue: The effects of fibre and vascular structure // *Journal of Computational Science*. 2020. V. 40. Art. 101067. doi: 10.1016/j.jocs.2019.101067
 12. Kim B.J., Ahn H.Y., Song C. A novel computer modeling and simulation technique for bronchi motion tracking in human lungs under respiration // *Physical and Engineering Sciences in Medicine*. 2023. V. 46 (4). P. 1741–1753. doi: 10.1007/s13246-023-01336-2
 13. Kulkarni A.G., Kumar P., Shetty G.M., Roy S., Manickam P.S., Dhason R., Chadalavada A.R.S.S., Adbalwad Y.M. Finite element analysis comparing the biomechanical parameters in multilevel posterior cervical instrumentation model involving lateral mass screw versus transpedicular screw fixation at the C7 vertebra // *Asian Spine Journal*. 2024. V. 18 (2). P. 163–173. doi: 10.31616/asj.2023.0231
 14. Чайковская Т.В. Эффективные механические параметры костных тканей для подбора индивидуальных остеоимплантатов // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2024. № 89. С. 162–175. doi: 10.17223/19988621/89/12
 15. Garcke H., Kovács B., Trautwein D. Viscoelastic Cahn–Hilliard models for tumour growth // *Mathematical Models & Methods in Applied Sciences*. 2022. V. 32 (13). P. 2673–2758. doi: 10.48550/arXiv.2204.04147
 16. Reyes-Aldasoro C.C. Modelling the tumour microenvironment, but what exactly do we mean by “Model”? // *Cancers*. 2023. V. 15 (15). Art. 3796. doi: 10.3390/cancers15153796
 17. de Melo Quintela B., Hervas-Raluy S., Garcia-Aznar J.M., Walker D., Wertheim K.Y., Viceconti M. A theoretical analysis of the scale separation in a model to predict solid tumour growth // *Journal of Theoretical Biology*. 2022. V. 547. Art. 111173. doi: 10.1016/j.jtbi.2022.111173
 18. Borau C., Wertheim K.Y., Hervas-Raluy S., Sainz-DeMena D., Walker D., Chisholm R., Richmond P., Varella V., Viceconti M., Montero A., Gregori-Puigjané E., Mestres J., Kasztelnik M., García-Aznar J.M. A multiscale orchestrated computational framework to reveal emergent phenomena in neuroblastoma // *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. 2023. V. 241. Art. 107742. doi: 10.1016/j.cmpb.2023.10774
 19. Katsamba I., Evangelidis P., Voutouri C., Tsamis A., Vavourakis V., Stylianopoulos T. Biomechanical modelling of spinal tumour anisotropic growth // *Proceedings of the Royal Society A*. 2020. V. 4476 (2238). Art. 20190364. doi: 10.1098/rspa.2019.0364
 20. In Multiscale Biomechanics and Tribology of Inorganic and Organic Systems / E.V. Shilko, O.S. Vasiljeva (eds.). Cham: Springer, 2021. doi: 10.1007/978-3-030-60124-9_4 (Springer Tracts in Mechanical Engineering).
 21. Augat P., Schorlemmer S. The role of cortical bone and its microstructure in bone strength // *Age Ageing*. 2006. V. 35, suppl 2. P. ii27–ii31. doi: 10.1093/ageing/afl081
 22. Hashin Z., Shtrikman S. Note on a variational approach to the theory of composite elastic materials // *Journal Franklin Institute*. 1961. V. 271. P. 336–341.
 23. Fan R.X., Liu J., Li Y.L., Liu J., Gao J.Z. Finite element investigation of the effects of the low-frequency vibration generated by vehicle driving on the human lumbar mechanical

- properties // BioMed Research International. 2018. V. 2018. Art. 7962414. doi: 10.1155/2018/7962414
24. Caddy G., Stebbing J., Wakefield G., Xu X.Y. Modelling of nanoparticle distribution in a spherical tumour during and following local injection // *Pharmaceutics*. 2022. V. 14 (8). Art. 1615. doi: 10.3390/pharmaceutics14081615
 25. Cowin S.C., Doty S.B. *Tissue Mechanics*. New York: Springer, 2007. doi: 10.1007/978-0-387-49985-7
 26. Claus A., Hides J., Moseley G.L., Hodges P. Sitting versus standing: does the intradiscal pressure cause disc degeneration or low back pain? // *Journal of Electromyography & Kinesiology*. 2008. V. 18 (4). P. 550–558. doi: 10.1016/j.jelekin.2006.10.011
 27. Anderson D.E., Mannen E.M., Sis H.L., Wong B.M., Cadel E.S., Friis E.A., Boussein M.L. Effects of follower load and rib cage on intervertebral disc pressure and sagittal plane curvature in static tests of cadaveric thoracic spines // *Journal Biomechanics*. 2016. V. 49 (7). P. 1078–1084. doi: 10.1016/j.jbiomech.2016.02.038
 28. Simon U., Augat P., Utz M., Claes L. A numerical model of the fracture healing process that describes tissue development and revascularization // *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*. 2021. V. 14 (1). P. 79–93. doi: 10.1080/10255842.2010.499865

References

1. Jiang Z.Y., Liu J.B., Wang X.F., Ma Y.S., Fu D. (2022) Current status and prospects of clinical treatment of osteosarcoma. *Technology in Cancer Research & Treatment*. 21. Article 15330338221124696. doi: 10.1177/15330338221124696
2. Riehl B.D., Kim E., Bouzid T., Lim J.Y. (2021) The role of microenvironmental cues and mechanical loading milieus in breast cancer cell progression and metastasis. *Frontiers in Bioengineering and Biotechnology*. 8. Article 608526. doi: 10.3389/fbioe.2020.608526
3. Kalli M., Stylianopoulos T. (2018) Defining the role of solid stress and matrix stiffness in cancer cell proliferation and metastasis. *Frontiers in Oncology*. 8. Article 55. doi: 10.3389/fonc.2018.00055
4. Akinpelu A., Akinsipe T., Avila L.A., Arnold R.D., Mistriotis P. (2024) The impact of tumor microenvironment: unraveling the role of physical cues in breast cancer progression. *Cancer and Metastasis Reviews*. 43(2). doi: 10.1007/s10555-024-10166-x
5. Blanco H., Gomez J., Melchor R., Palma J., Soler G. (2023) Mechanotransduction in tumor dynamics modeling. *Physics of Life Reviews*. 44. pp. 279–301. doi: 10.1016/j.plrev.2023.01.017
6. Verbruggen S.W. (2024) Role of the osteocyte in bone metastasis – The importance of networking. *Journal Bone Oncology*. 44. Article 100526. doi: 10.1016/j.jbo.2024.100526
7. Mpekris F., Papaphilippou P.C., Panagi M., Voutouri C., Michael C., Charalambous A., Marinov Dinev M., Katsioloudi A., Prokopi-Demetriades M., Anayiotos A., Cabral H., Krasia-Christoforou T., Stylianopoulos T. (2023) Pirfenidone-loaded polymeric micelles as an effective mechanotherapeutic to potentiate immunotherapy in mouse tumor models. *ACS Nano*. 17(24). pp. 24654–24667. doi: 10.1021/acsnano.3c03305
8. Faraldi M., Gerosa L., Gomasca M., Sansoni V., Perego S., Ziemann E., Banfi G., Lombardi G. (2021) A physically active status affects the circulating profile of cancer-associated miRNAs. *Diagnostics*. 11(5). Article 820. doi: 10.3390/diagnostics11050820
9. Vorobiev A.I., Gorgidze L.A., Zakharov V.N. (2016) Influence of the shock-wave pulses of microsecond-range on tumor cells. *Russian Journal of Hematology and Transfusiology*. 61(2). pp. 81–87. doi: 10.18821/0234-5730-2016-61-2-81-87
10. Chang C.L., Chen K.H., Sung P.H., Chiang J.Y., Huang C.R., Chen H.H., Yip H.K. (2021) Combined high energy of extracorporeal shock wave and 5-FU effectively suppressed the proliferation and growth of tongue squamous cell carcinoma. *Biomedicine & Pharmacotherapy*. 142. Article 112036. doi: 10.1016/j.biopha.2021.112036

11. Macnamara C.K., Caiazzo A., Ramis-Conde I., Chaplain M.A.J. (2020) Computational modelling and simulation of cancer growth and migration within a 3D heterogeneous tissue: The effects of fibre and vascular structure. *Journal of Computational Science*. 40. Article 101067. doi: 10.1016/j.jocs.2019.101067
12. Kim B.J., Ahn H.Y., Song C. (2023) A novel computer modeling and simulation technique for bronchi motion tracking in human lungs under respiration. *Physical and Engineering Sciences in Medicine*. 46(4). pp. 1741–1753. doi: 10.1007/s13246-023-01336-2
13. Kulkarni A.G., Kumar P., Shetty G.M., Roy S., Manickam P.S., Dhason R., Chadalavada A.R.S.S., Adbalwad Y.M. (2024) Finite element analysis comparing the biomechanical parameters in multilevel posterior cervical instrumentation model involving lateral mass screw versus transpedicular screw fixation at the C7 vertebra. *Asian Spine Journal*. 18(2). pp. 163–173. doi: 10.31616/asj.2023.0231
14. Chaykovskaya T.V. (2024) Effektivnye mekhanicheskie parametry kostnykh tkaney dlya podbora individual'nykh osteoimplantatov [Effective mechanical parameters of bone tissue sample for the section of individual osteoimplants]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematic and Mechanics*. 89. pp. 162–175. doi: 10.17223/19988621/89/12
15. Garcke H., Kovács B., Trautwein D. (2022) Viscoelastic Cahn–Hilliard models for tumour growth. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 32(13). pp. 2673–2758. doi: 10.48550/arXiv.2204.04147
16. Reyes-Aldasoro C.C. (2023) Modelling the tumour microenvironment, but what exactly do we mean by "Model"? *Cancers*. 15(15). Article 3796. doi: 10.3390/cancers15153796
17. De Melo Quintela B., Hervás-Raluy S., García-Aznar J.M., Walker D., Wertheim K.Y., Viceconti M. (2022) A theoretical analysis of the scale separation in a model to predict solid tumour growth. *Journal of Theoretical Biology*. 547. Article 111173. doi: 10.1016/j.jtbi.2022.111173
18. Borau C., Wertheim K. Y., Hervás-Raluy S., Sainz-DeMena D., Walker D., Chisholm R., Richmond P., Varella V., Viceconti M., Montero A., Gregori-Puigjané E., Mestres J., Kasztelnik M., García-Aznar J.M. (2023) A multiscale orchestrated computational framework to reveal emergent phenomena in neuroblastoma. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. 241. Article 107742. doi: 10.1016/j.cmpb.2023.10774
19. Katsamba I., Evangelidis P., Voutouri C., Tsamis A., Vavourakis V., Stylianopoulos T. (2020) Biomechanical modelling of spinal tumour anisotropic growth. *Proceedings of the Royal Society A*. 4476(2238). Article 20190364. doi: 10.1098/rspa.2019.0364
20. Shilko E.V., Vasiljeva O.S. (eds.) (2021) *Multiscale Biomechanics and Tribology of Inorganic and Organic Systems*. Springer Nature. doi: 10.1007/978-3-030-60124-9_4
21. Augat P., Schorlemmer S. (2006) The role of cortical bone and its microstructure in bone strength. *Age Ageing*. 35. Suppl 2:ii27–ii31. doi: 10.1093/ageing/af1081
22. Hashin Z., Shtrikman S. (1961) Note on a variational approach to the theory of composite elastic materials. *Journal Franklin Institute*. 271. pp. 336–341. doi: 10.1016/0016-0032(61) 90032-1
23. Fan R.X., Liu J., Li Y.L., Liu J., Gao J.Z. (2018) Finite element investigation of the effects of the low-frequency vibration generated by vehicle driving on the human lumbar mechanical properties. *BioMed Research International*. 2018. Article 7962414. doi: 10.1155/2018/7962414
24. Caddy G., Stebbing J., Wakefield G., Xu X.Y. (2022) Modelling of nanoparticle distribution in a spherical tumour during and following local injection. *Pharmaceutics*. 14(8). Article 1615. doi: 10.3390/pharmaceutics14081615
25. Cowin S.C., Doty S.B. (2007) *Tissue Mechanics*. New York: Springer. doi: 10.1007/978-0-387-49985-7
26. Claus A., Hides J., Moseley G.L., Hodges P. (2008) Sitting versus standing: does the intradiscal pressure cause disc degeneration or low back pain? *Journal of Electromyography & Kinesiology*. 18(4). pp. 550–558. doi: 10.1016/j.jelekin.2006.10.011
27. Anderson D.E., Mannen E.M., Sis H.L., Wong B.M., Cadel E.S., Friis E.A., Bouxsein M.L. (2016) Effects of follower load and rib cage on intervertebral disc pressure and sagittal plane

- curvature in static tests of cadaveric thoracic spines. *Journal Biomechanics*. 49(7). pp. 1078–1084. doi: 10.1016/j.jbiomech.2016.02.038
28. Simon U., Augat P., Utz M., Claes L. (2011) A numerical model of the fracture healing process that describes tissue development and revascularization. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*. 14(1). pp. 79–93. doi: 10.1080/10255842.2010.499865

Сведения об авторах:

Еремина Галина Максимовна – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории компьютерного конструирования материалов Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения Российской академии наук (Томск, Россия). E-mail: anikeeva@ispms.ru

Смолин Алексей Юрьевич – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник лаборатории компьютерного конструирования материалов Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения Российской академии наук (Томск, Россия); профессор кафедры механики деформируемого твердого тела Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: asmolin@ispms.ru

Мартышина Ирина Павловна – младший научный сотрудник лаборатории компьютерного конструирования материалов Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения Российской академии наук (Томск, Россия). E-mail: mira@ispms.ru

Information about the authors:

Eremina Galina M. (Researcher, Institute of Strength Physics and Materials Science of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation). E-mail: anikeeva@ispms.ru

Smolin Aleksey Yu. (Doctor of Physics and Mathematics, Principal Researcher, Institute of Strength Physics and Materials Science of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation; Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: asmolin@ispms.ru

Martyshina Irina P. (Junior Researcher, Institute of Strength Physics and Materials Science of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation). E-mail: mira@ispms.ru

Статья поступила в редакцию 04.12.2024; принята к публикации 06.09.2025

The article was submitted 04.12.2024; accepted for publication 06.09.2025

Научная статья

УДК 533.15; 666.3.017

doi: 10.17223/19988621/97/6

Моделирование процессов газообмена в пористом пространстве между поверхностью металлокерамических плат и огнеупорной оснасткой в условиях высокотемпературного спекания

Илья Александрович Жуков¹, Алексей Юрьевич Крайнов²,
Ксения Михайловна Моисеева³, Евгений Валерьевич Ермолаев⁴,
Валерий Алексеевич Егошин⁵, Шамиль Наилевич Шугаепов⁶,
Равил Шамилевич Ахметгалиев⁷

^{1, 2, 3, 5, 6, 7} Томский государственный университет, Томск, Россия

^{4, 5, 6} Марийский государственный университет, Йошкар-Ола, Россия

^{4, 5, 6, 7} АО «Завод полупроводниковых приборов», Йошкар-Ола, Россия

¹ zhukoviatsu@yandex.ru

² akrainov@ftf.tsu.ru

³ moiseeva_km@t-sk.ru

⁴ ermolaev_ev@zpp12.ru

⁵ vaegoshin@zpp12.ru

⁶ shnshugaepov@zpp12.ru

⁷ rshahmetgaliev@zpp12.ru

Аннотация. Проведено моделирование процессов конвекции и диффузии примесей в формиру-газе в процессах высокотемпературного спекания керамических изделий. Для описания изотермического фильтрационного движения газа в пористом пространстве использована модель Лейбензона. Определены стационарные поля давления, концентрации паров металлов и модуля скорости движения смеси газов в пористом пространстве между шероховатой пластиной и поверхностью корпуса микросхемы. **Ключевые слова:** математическое моделирование, газообмен, фильтрация газа, диффузия примесей, пористость

Благодарности: Работа выполнена в рамках государственного задания № FSWM-2025-0010 «Физико-химические закономерности формирования структурно-фазового состояния и физико-механических свойств композиционных керамических материалов, стойких к интенсивным термомеханическим воздействиям и износу».

Для цитирования: Жуков И.А., Крайнов А.Ю., Моисеева К.М., Ермолаев Е.В., Егошин В.А., Шугаепов Ш.Н., Ахметгалиев Р.Ш. Моделирование процессов газообмена в пористом пространстве между поверхностью металлокерамических плат и огнеупорной оснасткой в условиях высокотемпературного спекания // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 97. С. 83–99. doi: 10.17223/19988621/97/6

Modeling of gas exchange processes in the porous space between the surface of metal-ceramic boards and the refractory tooling under high-temperature sintering conditions

Il'ya A. Zhukov¹, Aleksey Yu. Krainov², Kseniya M. Moiseeva³,
Evgeniy V. Ermolaev⁴, Valeriy A. Egoshin⁵, Shamil' N. Shugaepov⁶,
Ravil' Sh. Akhmetgaliev⁷

^{1, 2, 3, 5, 6, 7} Tomsk State University, Tomsk, Tomsk, Russian Federation

^{4, 5, 6} Mari State University, Yoshkar-Ola, Russian Federation

^{4, 5, 6, 7} JSC Semiconductor Devices Plant, Yoshkar-Ola, Russian Federation

¹ zhukoviatsu@yandex.ru

² akrainov@ftf.tsu.ru

³ moiseeva_km@t-sk.ru

⁴ ermolaev_ev@zpp12.ru

⁵ vaegoshin@zpp12.ru

⁶ shnshugaepov@zpp12.ru

⁷ rshahmetgaliev@zpp12.ru

Abstract. The convection and diffusion of impurities in the forming gas during the high-temperature sintering of ceramic products are simulated. The Leibenson model is used to describe the isothermal filtration gas flow in the porous space. The stationary fields of pressure, impurity vapor concentration, and velocity modulus of the gas mixture in the porous region between the rough plate and the microcircuit housing surface are determined. The characteristic time of convection and diffusion in the porous space between the metal plate and the ceramic-metal board surface is estimated. The conditions for the accumulation and release of impurities from the porous space of the metal plate under the bottom of the board are determined. The proposed mathematical models can be used to calculate the rate of impurity release from the porous space under the board bottom depending on the roughness of the metal plate surface.

Keywords: mathematical modeling, gas exchange, gas filtration, impurity diffusion, porosity

Acknowledgments: This work was carried out within the framework of the state assignment No. FSWM-2025-0010 “Physico-chemical regularities of formation of structural-phase state and physical-mechanical properties of composite ceramic materials resistant to intensive thermomechanical effects and wear”.

For citation: Zhukov, I.A., Krainov, A.Yu., Moiseeva, K.M., Ermolaev, E.V., Egoshin, V.A., Shugaepov, S.N., Akhmetgaliev, R.Sh. (2025) Modeling of gas exchange processes in the porous space between the surface of metal-ceramic boards and the refractory tooling under high-temperature sintering conditions. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 97. pp. 83–99. doi: 10.17223/19988621/97/6

Введение

Известно, что высокотемпературная обработка не спеченных металлокерамических плат в условиях массового производства корпусов микросхем осуществляется в многотажных огнеупорных пакетах, представляющих собой сборную конструкцию из чередующихся прямоугольных огнеупорных пластин в несколько уровней [1]. В качестве основного материала пластин используют муллитокорундовую керамику или же тугоплавкий металл (Nb, Mo, Ta, W, Re). Как показала практика, металлический материал является наиболее предпочтительным. Одно из существенных преимуществ тугоплавкого металла перед муллитокорундовой керамикой – способность выдерживать циклические изменения температуры до 1 000 проходов через печь обжига с максимальной температурой 1 600°C без изменения механических свойств.

Так как подготовка плат к обжигу предполагает их укладку на огнеупорные пластины, то к поверхности пластин предъявляются особые требования в период эксплуатации. К наиболее существенным требованиям можно отнести поддержание точности уровня плоскостности пластин, обеспечивающих устойчивое положение огнеупорных пакетов при их движении через канал печи обжига, уровня шероховатости профиля поверхности, необходимого для минимизации физического контакта огнеупорных пластин и металлокерамических плат. Для этого применяются специальные технологические приемы обработки поверхности металлических пластин, предотвращающие залипание металлокерамических плат к их поверхности и обеспечивающие стабильные условия диффузии и циркуляции формирующего газа в пространстве между дном платы и поверхностью металлических пластин. Последнее условие является крайне важным и определяет степень спекания металлизационных частей плат, примыкающих к поверхности металлических пластин.

Известно, что спекание металлокерамических плат проводят в туннельной печи обжига при температурах 1 500–1 600°C в среде формирующего газа (азот + водород), увлажненного парами воды до температуры точки росы 15–35°C. На поверхности металлизационных частей плат под воздействием водорода и паров воды протекают гетерогенные окислительно-восстановительные реакции. При этом известно, что лимитирующими стадиями процесса восстановления окисленных частиц металла водородом являются подвод восстановителя и отвод продуктов восстановления, а лимитирующей стадией процесса окисления – скорость реакции. Вследствие этого при недостаточно развитой поверхности металлических пластин к поверхности металлизационных частей плат, расположенных на ее дне, может быть затруднен подвод водорода и отвод продуктов восстановления [2]. Тогда окислительно-восстановительное равновесие будет смещаться в сторону окисления, в отличие от поверхности металлизационных частей плат с хорошим доступом формирующего газа (окислительно-восстановительное равновесие смещается в сторону восстановления). То есть при плохой фильтрации формирующего газа поверхность металлизационных частей плат, примыкающих к поверхности металлических пластин, может быть сильно окислена. Помимо этого, в пористом пространстве между дном металлокерамической платы и шероховатой поверхностью металлической пластины за счет конвекции и фильтрации формирующего газа должны удаляться продукты деструкции органики.

Органические вещества в объеме керамической массы и металлизационных паст разлагаются при температурах от 300 до 1 000°C. При повышении темпе-

ратуры до значений от 1 000 до 1 500°C в летучих компонентах появляются пары металла из-за его сублимации при высоких температурах. Смесь формирующего газа и летучих компонентов, содержащих пары металла, поступает в пористое пространство между дном металлокерамической платы и поверхностью металлической пластины. При недостаточной фильтрации в пористом пространстве шероховатой металлической пластины под поверхностью платы возможна десублимация паров металлов в углублениях шероховатости металлической пластины. Это явление является крайне нежелательным, так как после нескольких циклов обжига металлические пластины теряют свои свойства шероховатости и становятся непригодными для использования.

В работе [3] проведены измерения коэффициента диффузии кислорода, коэффициента поверхностного обмена, диссоциативной адсорбции и скорости инкорпорации. Показано, что коэффициент диффузии кислорода увеличивается при повышении температуры и уменьшается с увеличением давления кислорода.

Решение задач вычислительной газодинамики применительно к проектированию геометрии поверхности газопроницаемой керамики рассматривается в работе [4]. Авторы приводят вычислительные данные концептуального дизайна инновационного компактного теплообменника из газовой керамики, подходящего для высокотемпературных применений.

Создание композиционных мембран возможно при моделировании пористой основы методами гидродинамики [5]. В данной работе представлены данные по проницаемости композитных мембран с верхними слоями различной толщины, нанесенными на подложку, подготовленную по общей технологии процесса инверсии фаз.

Влияние инертных частиц, расположенных на поверхности смешанной ионно / электроннопроводящей оксидной керамики, на кислородные потоки было изучено путем численного моделирования основных транспортных процессов [6]. Показано, что реакция поверхностного обмена блокируется инертными поверхностными частицами, что приводит к выраженному эффекту сужения потока.

Внимание форме частиц уделяется при изучении кинетики кислородного обмена керамических частиц [7]. Результаты моделирования были интерпретированы с точки зрения длины трехфазной границы каталитических частиц.

По результатам обзора открытых источников целью исследований является моделирование процесса конвекции и диффузии примесей в формирующем газе в пористом пространстве между дном платы и шероховатой поверхностью металлической пластины. При этом требуется определить зависимость концентрации примеси в данном пространстве от характеристик шероховатости металлической пластины.

Вывод уравнений фильтрации и переноса примесей в пространстве между пластиной и поверхностью корпуса микросхемы

Изменение температуры металлокерамической платы происходит медленно, поэтому примем, что процессы диффузии и конвекции газов происходят в изотермических условиях. На границе платы принимаются исходная концентрация формирующего газа и нулевая концентрация продуктов газификации органических веществ и паров металла, так как в печи происходит вытяжка газов из объема печи.

Пространство под дном платы представляет собой пространство с определенной величиной пористости. Примем эту пористость постоянной по площади под

дном платы; высоту пористого пространства также принимаем постоянной величиной (рис. 1).

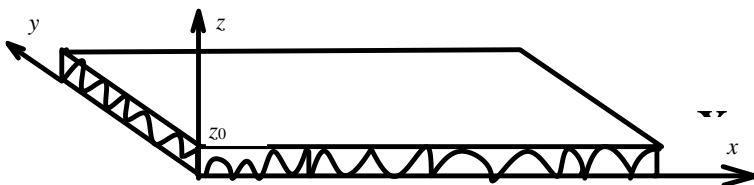


Рис. 1. Пористое пространство под металлокерамической платой, образованное шероховатой поверхностью подложки

Fig. 1. Porous space under the metal-ceramic board formed by the rough surface of the substrate

Для описания изотермического фильтрационного движения газа в пористом пространстве будем использовать модель Лейбензона [8]. Выведем уравнения фильтрации для рассматриваемого случая. Уравнение сохранения массы формируемого газа в пористом пространстве с пористостью m записывается в виде:

$$m \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho u), \quad (1)$$

где t – время, ρ – плотность, u – скорость, m – пористость.

В (1) скорость фильтрации определяется законом Дарси

$$u = -\frac{k}{\mu} \operatorname{grad}(p), \quad (2)$$

где p – давление, k – коэффициент фильтрации, μ – коэффициент динамической вязкости.

Скорость u – это скорость, определяемая как объемный расход газа в единицу времени через площадку, перпендикулярную направлению вектора скорости:

$$u = \frac{Q}{S_n},$$

где Q – объемный расход газа, S_n – площадь сечения пористого пространства, перпендикулярная направлению вектора скорости.

Скорость u связана с истинной скоростью движения газа U в порах пористого пространства с пористостью m соотношением

$$U = \frac{u}{m}.$$

Плотность газа ρ_0 при температуре T_0 определяется из уравнения состояния идеального газа

$$\rho_0 = \frac{p}{RT_0}. \quad (3)$$

Подставим (2), (3) в (1) и получим

$$\frac{m}{RT_0} \frac{\partial p}{\partial t} = -\operatorname{div} \left(-\frac{k}{\mu} \operatorname{grad}(p) - \frac{p}{RT_0} \right). \quad (4)$$

Постоянная величина RT_0 сокращается. Учтем, что $\text{grad}(p)p = \frac{1}{2}\text{grad}(p^2)$ и перепишем (4) в виде:

$$m \frac{\partial p}{\partial t} = -\text{div} \left(-\frac{k}{2\mu} \text{grad}(p^2) \right). \quad (5)$$

В общем случае k является функцией пространственных координат $k = k(x, y, z)$.

Запишем уравнение (5) в декартовой системе координат в виде, в котором последнее слагаемое (производная по z) остается без преобразований вида (2)–(4):

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k(x, y, z)}{\mu} \frac{\partial p^2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k(x, y, z)}{\mu} \frac{\partial p^2}{\partial y} \right) \right) - \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) RT_0. \quad (6)$$

На высоте $z = z_0$ происходит выделение продуктов газификации органических веществ и паров металла со скоростью W_Δ (имеет отрицательную величину в силу направления оси z). При $z = 0$ поток массы равен нулю (см. рис. 1).

С учетом того, что ширина пористого слоя составляет десятки микрометров, а размеры изделия – десятки миллиметров, очевидно, что толщина пористого слоя много меньше его ширины и длины, поэтому проведем усреднение по толщине пористого слоя, принимая, что по толщине пористого слоя имеется однородное распределение давления. Проинтегрируем (6) по координате z от $z = 0$ до $z = z_0$:

$$\int_0^{z_0} \frac{\partial p}{\partial t} dz = \frac{1}{2m} \int_0^{z_0} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k(x, y, z)}{\mu} \frac{\partial p^2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k(x, y, z)}{\mu} \frac{\partial p^2}{\partial y} \right) \right) dz - \frac{1}{m} \int_0^{z_0} \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) RT_0 dz,$$

$$\int_0^{z_0} \frac{\partial p}{\partial t} dz = \frac{\partial p}{\partial t} z_0 = \frac{\partial p}{\partial t} \Delta(x, y).$$

Здесь принято обозначение $z_0 = \Delta(x, y)$. С учетом того, что толщина пористого слоя в общем случае может быть переменной по площади под металлокерамической платой, интегрирование дает следующие результаты:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2m} \int_0^{z_0} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k(x, y, z)}{\mu} \frac{\partial p^2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k(x, y, z)}{\mu} \frac{\partial p^2}{\partial y} \right) \right) dz = \\ & = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k(x, y) \Delta(x, y)}{\mu} \frac{\partial p^2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k(x, y) \Delta(x, y)}{\mu} \frac{\partial p^2}{\partial y} \right) \right), \\ & \frac{1}{m} \int_0^{z_0} \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) RT_0 dz = \frac{1}{m} RT_0 \rho_0 W_\Delta = \frac{1}{m} p W_\Delta. \end{aligned}$$

С учетом проведенных преобразований уравнение (6) перепишется в виде:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2m \Delta(x, y)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k(x, y) \Delta(x, y)}{\mu} \frac{\partial p^2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k(x, y) \Delta(x, y)}{\mu} \frac{\partial p^2}{\partial y} \right) \right) - \frac{W_\Delta p}{m \Delta(x, y)}. \quad (7)$$

Введем обозначение $p^2 = P$, $p = \sqrt{P}$. Преобразуем

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{2p}{2p} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2p} \frac{\partial p^2}{\partial t} = \frac{1}{2p} \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{P}} \frac{\partial P}{\partial t}.$$

Тогда (7) переписывается в виде:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\sqrt{P}}{m\Delta(x, y)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k(x, y)\Delta(x, y)}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k(x, y)\Delta(x, y)}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right) - \frac{2W_{\Delta}P}{m\Delta(x, y)}. \quad (8)$$

В изотермических условиях вязкость принимаем постоянной.

Для металлической пластины принимаем $k(x, y)$ и $\Delta(x, y)$ постоянными, тогда (8) переписывается в виде:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{k\sqrt{P}}{m\mu} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right) - \frac{2W_{\Delta}P}{m\Delta(x, y)}. \quad (9)$$

Для решения уравнения (9) необходимо поставить начальные и граничные условия.

Запишем уравнение конвекции и диффузии продуктов сублимации металлов в пористом пространстве под металлокерамической платой. Примем, что формирующий газ, содержащий пары металла, является двухкомпонентным (формирующий газ и пары металла как примесь в газе).

Введем величину массовой концентрации примесей в формирующем газе

$$Y(x, y, z, t) = \frac{\rho_a(x, y, z, t)}{\rho_0},$$

где ρ_a – парциальная плотность примесей в газе.

На высоте $z = z_0$ происходит выделение продуктов газификации органических веществ и паров металла со скоростью W_{Δ} и концентрацией $Y(x, y, z_0, t) = Y_0$. Максимальное значение относительной концентрации примесей имеется в потоке газов от поверхности металлокерамической платы $Y_0(x, y, z_0, t) = \frac{\rho_a(x, y, z_0, t)}{\rho_0}$.

Величина Y_0 принимается постоянной по всей нижней поверхности металлокерамической платы, лежащей на металлической пластине. W_{Δ} имеет отрицательную величину в силу направления оси z . При $z = 0$ поток массы равен нулю.

Уравнение сохранения массы примесей в пористом пространстве с учетом конвективного и диффузионного переноса имеет вид:

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \frac{\partial \rho_a U}{\partial x} + \frac{\partial \rho_a V}{\partial y} + \frac{\partial \rho_a W}{\partial z} = D\rho_0 \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} \right). \quad (10)$$

Перепишем (10) в виде:

$$\frac{\partial Y\rho_0}{\partial t} + \frac{\partial Y\rho_0 U}{\partial x} + \frac{\partial Y\rho_0 V}{\partial y} + \frac{\partial Y\rho_0 W}{\partial z} = D\rho_0 \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} \right). \quad (11)$$

Уравнение сохранения массы формирующего газа в пористом пространстве запишется в виде:

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0 U}{\partial x} + \frac{\partial \rho_0 V}{\partial y} + \frac{\partial \rho_0 W}{\partial z} = 0. \quad (12)$$

С учетом (12) уравнение (11) переписывается в виде:

$$\rho_0 \frac{\partial Y}{\partial t} + \rho_0 U \frac{\partial Y}{\partial x} + \rho_0 V \frac{\partial Y}{\partial y} + \rho_0 W \frac{\partial Y}{\partial z} = D\rho_0 \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} \right).$$

После сокращения на ρ_0 получим:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + U \frac{\partial Y}{\partial x} + V \frac{\partial Y}{\partial y} + W \frac{\partial Y}{\partial z} = D \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} \right). \quad (13)$$

Разделим (13) на постоянную величину Y_0 и введем обозначение $c(x, y, z, t) = \frac{Y(x, y, z, t)}{Y_0}$, тогда уравнение (13) запишется в виде:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + U \frac{\partial c}{\partial x} + V \frac{\partial c}{\partial y} + W \frac{\partial c}{\partial z} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right). \quad (14)$$

Проведем осреднение по толщине пористого слоя. Проинтегрируем (14) по координате z от $z = 0$ до $z = z'_0$, $z'_0 = z_0 m$:

$$\int_0^{z'_0} \frac{\partial c}{\partial t} dz + \int_0^{z'_0} \left(U \frac{\partial c}{\partial x} + V \frac{\partial c}{\partial y} + W \frac{\partial c}{\partial z} \right) dz = \int_0^{z'_0} \left(D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + D \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) dz. \quad (15)$$

$$\int_0^{z'_0} \frac{\partial c}{\partial t} dz = z'_0 \frac{\partial c}{\partial t} = z_0 m \frac{\partial c}{\partial t} = \Delta(x, y) m \frac{\partial c}{\partial t}.$$

$$\int_0^{z'_0} \left(U \frac{\partial c}{\partial x} + V \frac{\partial c}{\partial y} + W \frac{\partial c}{\partial z} \right) dz = \Delta(x, y) m U \frac{\partial c}{\partial x} + \Delta(x, y) m V \frac{\partial c}{\partial y} + W_\Delta c_0.$$

$$\int_0^{z'_0} \left(D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + D \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) dz = \Delta(x, y) m D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \Delta(x, y) m D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \left(D \frac{\partial c}{\partial z} \Big|_{z_0} - 0 \right).$$

После интегрирования уравнение (14) переписывается в виде:

$$\begin{aligned} & \Delta(x, y) m \frac{\partial c}{\partial t} + \Delta(x, y) m U \frac{\partial c}{\partial x} + \Delta(x, y) m V \frac{\partial c}{\partial y} = \\ & = \Delta(x, y) m D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \Delta(x, y) m D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \left(D \frac{\partial c}{\partial z} \Big|_{z_0} - 0 \right) - W_\Delta c_0. \end{aligned}$$

Принимаем, что $D \frac{\partial c}{\partial z} \Big|_{z_0} = 0$, так как по оси z проведено осреднение, получим

$$\begin{aligned} & \Delta(x, y) m \frac{\partial c}{\partial t} + \Delta(x, y) m U \frac{\partial c}{\partial x} + \Delta(x, y) m V \frac{\partial c}{\partial y} = \\ & = \Delta(x, y) m D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \Delta(x, y) m D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - W_\Delta c_0, \end{aligned}$$

или

$$\frac{\partial c}{\partial t} + U \frac{\partial c}{\partial x} + V \frac{\partial c}{\partial y} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - \frac{W_\Delta c_0}{m \Delta(x, y)}. \quad (16)$$

Таким образом, система уравнений (9) и (16) описывает процессы фильтрации газовой смеси с учетом диффузии компонентов газовой смеси в пористом пространстве шероховатой металлической пластины с установленной сверху заготовкой корпуса микросхемы при его термической обработке в печи.

Математическая постановка задачи о переносе примесей в пространстве между пластиной и поверхностью металлокерамической платы

Система уравнений (9) и (16) описывает процессы фильтрации газовой смеси с учетом диффузии компонентов газовой смеси в пористом пространстве между поверхностями шероховатой металлической пластины и поверхностью металлокерамической платы. Для получения однозначного решения этой системы уравнений необходимо поставить начальные и граничные условия. Тогда математическая постановка задачи принимает вид:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{k\sqrt{P}}{m\mu} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right) - \frac{2W_{\Delta}P}{m\Delta(x, y)}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + U \frac{\partial c}{\partial x} + V \frac{\partial c}{\partial y} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - \frac{W_{\Delta}c_0}{m\Delta(x, y)}, \quad (18)$$

$$U = \frac{u}{m}, \quad u = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (19)$$

$$V = \frac{v}{m}, \quad v = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (20)$$

Начальные условия:

$$P(x, y, 0) = p_0^2, \quad c(x, y, 0) = 0, \quad (21)$$

граничные условия:

$$P(x_{\text{гр}}, y_{\text{гр}}, t) = p_0^2, \quad c(x_{\text{гр}}, y_{\text{гр}}, t) = 0. \quad (22)$$

$$c_0 = 1.$$

В системе уравнений (17) – (20) уравнение (17) – уравнение фильтрации газа, (18) – уравнение конвекции и диффузии примеси в газе, (19) и (20) – уравнения для определения скорости фильтрации газа в направлениях декартовой системы координат.

Начальные условия соответствуют атмосферному давлению в пористом пространстве и отсутствию примесей в формируемом газе.

Граничные условия соответствуют атмосферному давлению на границе зазора между дном металлокерамической платы и шероховатой металлической пластиной по периметру платы и отсутствию примесей в газе, так как проводится вентилирование объема печи.

Задача (17)–(22) решается численно методом продольно-поперечной прогонки [8–13]. Расчет проводится до установления стационарных значений распределения давления и концентраций.

Тестирование программы ЭВМ расчета переноса примесей в пространстве между пластиной и поверхностью платы проводилось на выполнимость закона сохранения массы примесей в пространстве под металлокерамической платой. С поверхности корпуса микросхемы приходит относительная масса примесей

$$Q_{in} = c_0 \cdot W_{\Delta} \cdot L_x \cdot L_y.$$

Со всех границ в окружающее пространство выходит относительная масса примесей

$$Q_{out} = \int_0^{L_y} \left(-c(0, y) \cdot U(0, y) + D \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=0} + c(L_x, y) \cdot U(L_x, y) - D \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=L_x} \right) dy + \\ + \int_0^{L_x} \left(-c(x, 0) \cdot V(x, 0) + D \frac{\partial c}{\partial y} \Big|_{y=0} + c(x, L_y) \cdot U(x, L_y) - D \frac{\partial c}{\partial y} \Big|_{y=L_y} \right) dx.$$

В стационарном состоянии выполняется равенство

$$Q_{in} = Q_{out}. \quad (23)$$

В численном решении равенство (23) выполняется с точностью 95–97% в зависимости от толщины пористого пространства.

Расчеты были проведены для модельного образца металлокерамической платы с размерами: длина и ширина корпуса микросхемы $L_x = 0.02$ м, $L_y = 0.02$ м. В качестве исходных данных для расчета задавалась вязкость формир-газа при температуре 1000°C $\mu = 53.5 \cdot 10^{-5}$ Па·с, пористость пространства под металлокерамической платой $m = 0.85$, давление газа $p = 101\,230$ Па, коэффициент диффузии $D = 1.36 \cdot 10^{-4}$ м²/с, скорость газа $W_\Delta = 0.1 \cdot 10^{-3}$ м/с.

Коэффициент проницаемости зависит от геометрических характеристик пористой среды. Для определения величины коэффициента проницаемости будем использовать формулу Козени–Кармана

$$k = \frac{d^2 m^3}{(1-m)^2}, \quad (24)$$

где d – характерный размер пор, вычисляется как отношение объема пористого тела к площади поверхности пор.

Коэффициент проницаемости, рассчитанный по формуле (24), $k = 1.69 \cdot 10^{-8}$ м².

Расчеты проведены для трех значений толщины пористого пространства: $\Delta = 60 \cdot 10^{-6}$ м, $\Delta = 30 \cdot 10^{-6}$ м, $\Delta = 120 \cdot 10^{-6}$ м.

Результаты расчетов переноса примесей в пространстве между пластиной и поверхностью металлокерамической платы

На рис. 2–4 представлены стационарные поля давления, концентрации паров металлов и модуля скорости движения смеси газов в пористом пространстве между шероховатой пластиной и поверхностью корпуса микросхемы. Рисунки построены для ряда значений толщины пористого пространства по мере ее уменьшения. Когда толщина пористого пространства большая, избыточное давление в пористом пространстве небольшое, скорости движения газовой смеси невысокие, относительная концентрация паров металла невысокая (см. рис. 2). При уменьшении толщины пористого пространства (см. рис. 3, 4) наблюдаются увеличение избыточного давления в пористом пространстве, увеличение скорости движения газа и увеличение относительно концентрации паров металла. В таблице представлены максимальные величины относительной концентрации паров металла при заданных значениях толщины пористого пространства. Видно, что при $\Delta = 120 \cdot 10^{-6}$ м она невелика: 0.22, при $\Delta = 60 \cdot 10^{-6}$ м имеет величину 0.48, а при $\Delta = 30 \cdot 10^{-6}$ м становится близкой к 1. Это указывает на то, что при дальнейшем уменьшении толщины пористого слоя в центральной части пористого пространства может начаться десублимация паров металла на шероховатую поверхность металлической пластины,

а также прекращение сублимации металла с поверхности металлокерамической платы. В этом случае, если металл находится во внутренних слоях платы, при сублимации он диффундирует к ее поверхности и будет оставаться там.

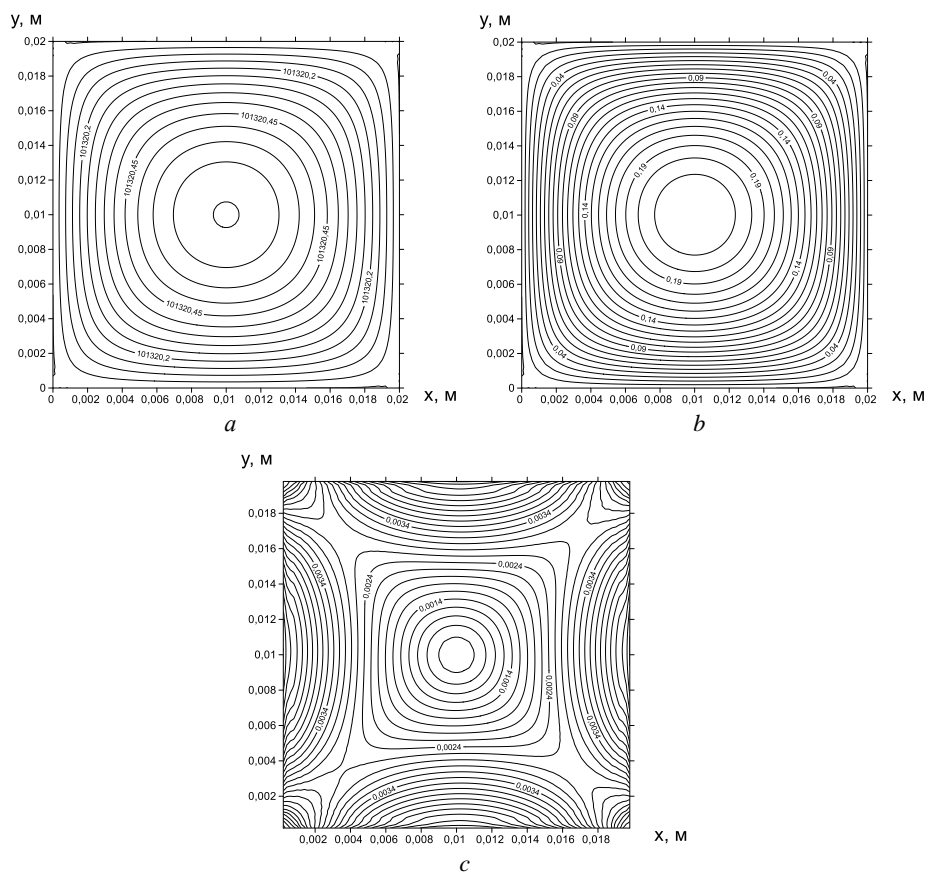
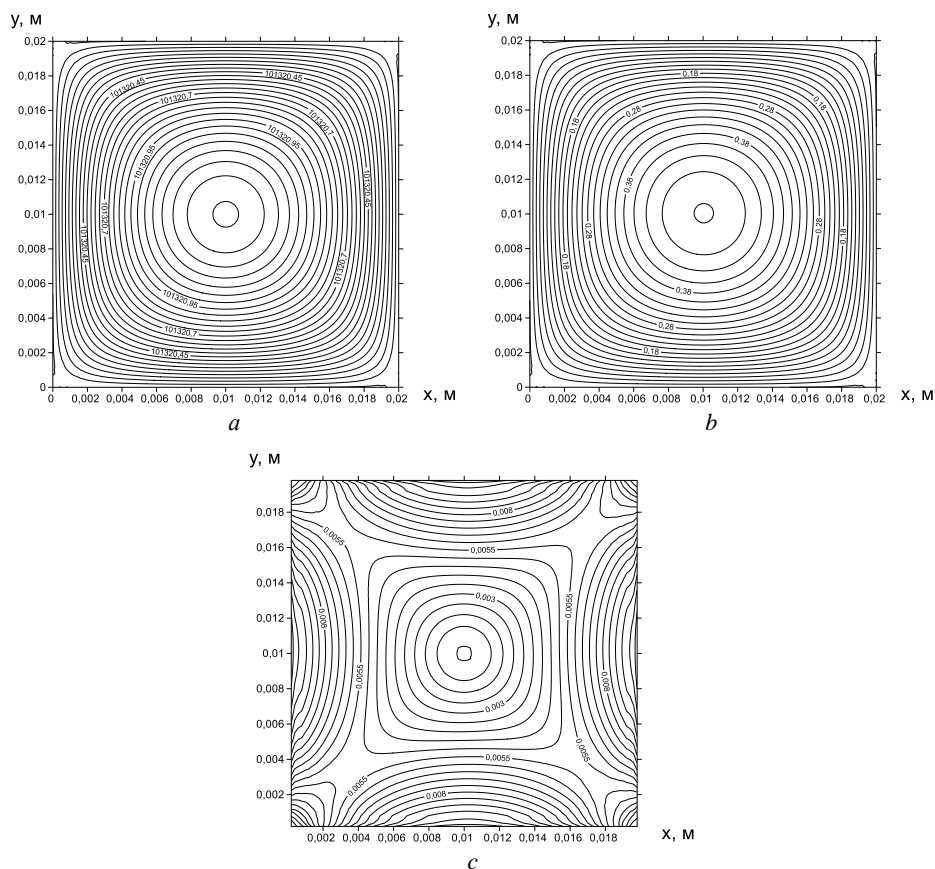


Рис. 2. Стационарное поле давления (*a*), относительной концентрации паров примесей (*b*), скорости течения газа (*c*) в пористом пространстве между металлической пластиной и поверхностью металлокерамической платы ($\Delta = 120 \cdot 10^{-6}$ м)

Fig. 2. Field of the (*a*) stationary pressure, (*b*) relative concentration of the impurity vapors, and (*c*) gas flow velocity in the porous space between the metal plate and the surface of the metal-ceramic board ($\Delta = 120 \cdot 10^{-6}$ m)

Максимальные значения относительной концентрации паров металлов в пористом пространстве между шероховатой пластиной и поверхностью металлокерамической платы

Δ , мкм	C_{\max}
120	0.22
60	0.48
30	0.97



платы летучих компонентов – паров металла при его сублимации. При фиксированной температуре скорость сублимации одинакова (одинакова величина W_{Δ}). С увеличением толщины пористого слоя (при одинаковой пористости) увеличивается площадь проходного сечения для протекания газа, поэтому скорость течения газа уменьшается. Разбавление летучих компонентов в пористом пространстве происходит диффузией формир-газа с границы от периметра платы. Диффузия происходит навстречу конвективного движения газа. Поэтому при высокой скорости течения газа из пористого пространства формир-газ за счет диффузии с границ пористого пространства не успевает «разбавить» летучие компоненты (пары металла) в пористом пространстве. При увеличении толщины пористого слоя скорость течения газа уменьшается, и за счет встречной диффузии происходит разбавление выделяющихся из объема платы летучих компонентов.

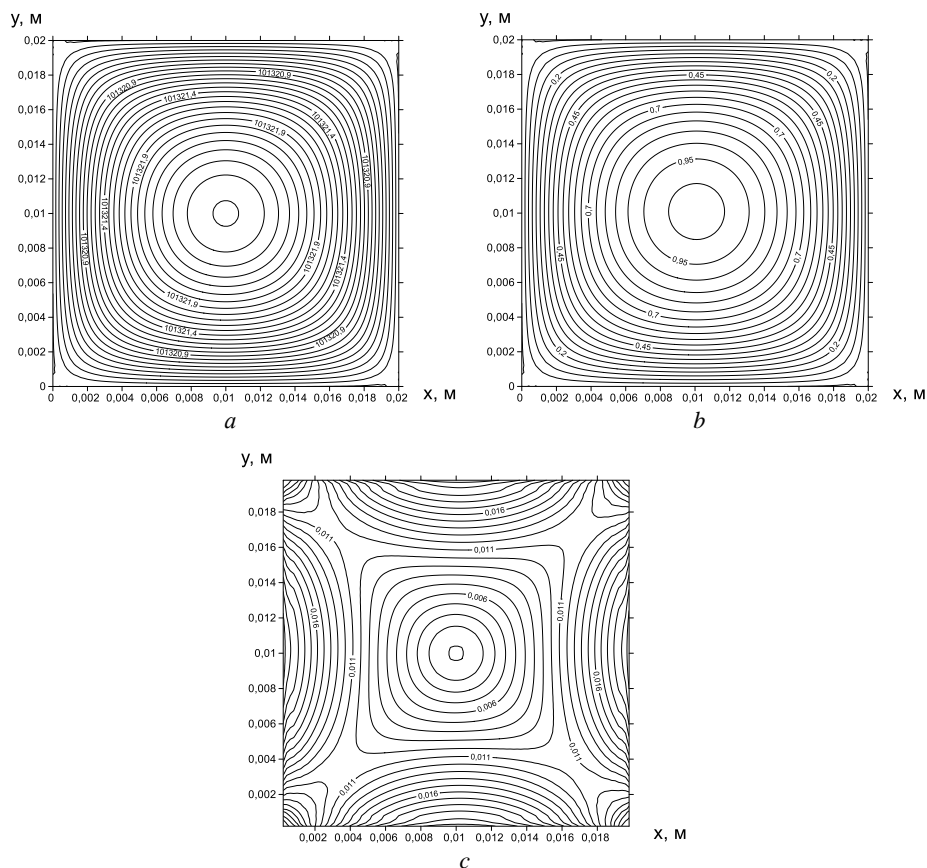


Рис. 4. Стационарное поле давления (а), относительной концентрации паров примесей (б), скорости течения газа (с) в пористом пространстве между металлической пластиной и поверхностью металлокерамической платы ($\Delta = 30 \cdot 10^{-6}$ м)

Fig. 4. Field of the (a) stationary pressure, (b) relative concentration of the impurity vapors, and (c) gas flow velocity in the porous space between the metal plate and the surface of the metal-ceramic board ($\Delta = 30 \cdot 10^{-6}$ m)

С площади поверхности дна заготовки корпуса микросхемы выделяется газ со скоростью $W_{\Delta} = 0.1 \cdot 10^{-3}$ м/с. В стационарном процессе через зазор толщиной Δ этот газ вытекает в окружающее пространство. Соблюдается равенство объемных потоков газа $Q_{in} = Q_{out}$, где $Q_{in} = L_x \cdot L_y \cdot |W_{\Delta}|$, $Q_{out} = (2L_x + 2L_y) \cdot \Delta \cdot |V|$. Подставляя числовые значения? определяем величину скорости $|V|$ на выходе из зазора: при $\Delta = 30 \cdot 10^{-6}$ м $|V| = 0.016$ м/с, при $\Delta = 60 \cdot 10^{-6}$ м $|V| = 0.008$ м/с, при $\Delta = 120 \cdot 10^{-6}$ м $|V| = 0.004$ м/с. Пренебрегая переменностью скорости газа по траектории от центра дна платы до границы, оценим время движения элементарного объема газа на расстояние $L_x/2$ (характерное время фильтрации, $t_g^* = \frac{L_x/2}{|V|}$). При $\Delta = 30 \cdot 10^{-6}$ м это

время составляет 0.625 с, при $\Delta = 60 \cdot 10^{-6}$ м 1.25 с, при $\Delta = 120 \cdot 10^{-6}$ м 2.5 с. Навстречу этому потоку имеется диффузионный поток формир-газа. Характерное время распространения диффузии на расстояние $L_x/2$ определяется соотношением

$$t_D^* = \frac{(L_x/2)^2}{D}. \text{ Подставляя числовые значения определяем } t_D^* = 0.735 \text{ с. Очевидно,}$$

что если характерное время диффузии t_D^* больше характерного времени фильтрации t_g^* ($t_D^* > t_g^*$), то летучие компоненты (пары металла при его сублимации) будут накапливаться в пористом пространстве металлической пластины под дном платы. Если $t_D^* \leq t_g^*$, то за счет взаимной диффузии формир-газ успевает проникнуть к центру пористого пространства, летучие компоненты успевают выводиться в окружающее пространство.

Как видно из результатов расчетов, представленных на рисунках 2-4, при $\Delta = 60 \cdot 10^{-6}$ м летучие компоненты не накапливаются в пористом пространстве металлической пластины под дном металлокерамической платы. Как показывают оценки характерных времен, в этом случае выполняется соотношение $t_D^* \leq t_g^*$.

Заключение

Необходимо отметить, что приведенные математические модели позволяют определить характер взаимодействия формир-газа с нижней частью платы в зависимости от шероховатости поверхности металлических пластин. Но в реальных условиях обжига лицевая сторона металлокерамических плат также остается закрытой специальными керамическими грузами, которые размещаются поверх плат во избежание попадания и дальнейшего припекания на поверхности плат каких-либо загрязнений, а также позволяют подавить неоднородность усадочных деформаций платы во время спекания. При этом между лицевой поверхностью платы и керамическим грузом также создается пористое пространство, которое должно обеспечивать равномерный прогрев заготовок, равномерный газообмен в виде удаления продуктов деструкции органики и подачу восстановительной азотно-водородной среды к поверхности металлизационных частей плат, размещенных на их лицевой стороне.

В связи с этим в плане дальнейших исследований представляет большой интерес проведение численного моделирования процесса выхода образующихся при обжиге заготовок корпусов микросхем летучих компонентов, когда заготовка

лежит на шероховатой поверхности металлической пластины и прикрыта сверху керамической пластинкой-грузиком также с заданной шероховатостью.

Список источников

1. Ермолаев Е.В. Структурно-фазовое состояние вольфрамовых межслойных переходов и его влияние на механические характеристики металлокерамических плат: дис. ... канд. техн. наук. Томск, 2024. 152 с.
2. Афонев О.Н. Влияние конструктивных и технологических факторов на коррозию металлокерамических корпусов интегральных схем: дис. ... канд. техн. наук. Йошкар-Ола, 2005. 152 с.
3. Porotnikova N., Zakharov D., Khodimchuk A., Kurumchin E., Osinkin D. Determination of kinetic parameters and identification of the rate-determining steps in the oxygen exchange process for $\text{LaNi}_{0.6}\text{Fe}_{0.4}\text{O}_{3-d}$ // Int. J. Mol. Sci. 2023. V. 24. Art. 13013. doi: 10.3390/ijms241613013
4. Zavattoni S.A., Cornolti L., Puragliesi R., Arrivabeni E., Ortona A., Barbato M.C. Conceptual design of an innovative gas–gas ceramic compact heat exchanger suitable for high temperature applications // Heat and Mass Transfer. 2024. V. 60. P. 1979–1990. doi:10.1007/s00231-022-03284-1
5. Hao P., Wijmans J.G., He Z., White L.S. Effect of pore location and pore size of the support membrane on the permeance of composite membranes // Journal of Membrane Science. 2020. V. 594. Art. 117465. doi: 10.1016/j.memsci.2019.117465
6. Preis W. Modeling of oxygen exchange of oxide ceramics: effect of inert particles at the surface // Journal of Solid State Electrochemistry. 2019. V. 23. P. 1089–1097 doi: 10.1007/s10008-019-04200-0
7. Preis W. Modeling the effect of spill-over on oxygen exchange kinetics of oxide ceramics covered by catalytically active surface particles // Journal of Solid State Electrochemistry. V. 29. P. 2849–2857. doi: 10.1007/s10008-024-06186-w
8. Леонтьев Н.Е. Основы теории фильтрации: учебное пособие. 2-е изд. М.: МАКС Пресс, 2017. 88 с.
9. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло-массообмена. М.: Наука, 1984. 288 с.
10. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 388с.
11. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 552 с.
12. Крайнов А.Ю., Миньков Л.Л. Численные методы решения задач тепло- и массопереноса: учеб. пособие. Томск: STT, 2016. 92 с.
13. Rimar M., Yeromin O., Larionov G., Kulikov A., Fedak M., Krenicky T., Gupalo O., Myanovskaya Y. Method of sequential approximation in modelling the processes of heat transfer and gas dynamics in combustion equipment. Appl. Sci. 2022. V. 12. Art. 11948. doi: 10.3390/app122311948.

References

1. Ermolaev E.V. (2024) *Strukturno-fazovoe sostoyanie vol'framovykh mezhslownykh perekhodov i ego vliyanie na mekhanicheskie kharakteristiki metallokeramicheskikh plat* [Structure-phase state of tungsten interlayer transitions and its influence on the mechanical characteristics of ceramic-metal boards]. Dissertation. Tomsk.
2. Afonov O.N. (2005) *Vliyanie konstruktivnykh i tekhnologicheskikh faktorov na korroziyu metallokeramicheskikh korpusov integral'nykh skhem* [Influence of the design and technological factors on the corrosion of the metal-ceramic cases of the integrated circuits]. Dissertation. Yoshkar-Ola.
3. Porotnikova N., Zakharov D., Khodimchuk A., Kurumchin E., Osinkin D. (2023) Determination of kinetic parameters and identification of rate-determining stages in the oxygen exchange

- process for LaNi_{0.6}Fe_{0.4}O₃-d. *International Journal of Molecular Sciences*. 24. Article 13013. doi: 10.3390/ijms241613013
4. Zavattoni S.A., Cornolti L., Puragliesi R., Arrivabeni E., Ortona A., Barbato M.C. (2024) Conceptual design of an innovative gas-gas ceramic compact heat exchanger suitable for high temperature applications. *Heat and Mass Transfer*. 60. pp. 1979–1990. doi: 10.1007/s00231-022-03284-1
 5. Hao P., Wijmans J.G., He Z., White L.S. (2020) Influence of pore location and pore size of the support membrane on the permeability of composite membranes. *Journal of Membrane Science*. 594. Article 117465. doi: 10.1016/j.memsci.2019.117465
 6. Preiss W. (2019) Modeling of oxygen exchange of oxide ceramics: influence of inert particles on the surface. *Journal of Solid State Electrochemistry*. 23. pp. 1089–1097. doi: 10.1007/s10008-019-04200-0
 7. Preiss W. (2025) Modeling the influence of spillover on the oxygen exchange kinetics of oxide ceramics coated with catalytically active surface particles. *Journal of Solid State Electrochemistry*. 29. pp. 2849–2857. doi: 10.1007/s10008-024-06186-w
 8. Leontiev N.E. (2017) *Osnovy teorii fil'tratsii: uchebnoe posobie* [Fundamentals of filtration theory: textbook]. Moscow: MAKSS Press.
 9. Paskonov V.M., Polezhaev V.I., Chudov L.A. (1984) *Chislennoe modelirovanie protsessov teplo-massoobmena* [Numerical modeling of heat and mass transfer processes]. Moscow: Nauka.
 10. Samarskiy A.A. (1977) *Teoriya raznostnykh skhem* [Theory of difference schemes]. Moscow: Nauka.
 11. Samarskiy A.A. (1971) *Vvedenie v teoriyu raznostnykh skhem* [Introduction to the theory of difference schemes]. Moscow: Nauka.
 12. Kraynov A.Yu., Min'kov L.L. (2016) *Chislennyye metody resheniya zadach teplo- i massopereenos: uchebnoe posobie* [Numerical methods for solving problems of heat and mass transfer: textbook]. Tomsk: STT.
 13. Rimar M., Eromin O., Larionov G., Larionov G., Kulikov A., Fedak M., Krenitsky T., Gupalo O., Myanovskaya Yu. (2022) Method of sequential approximation in modeling of heat transfer and gas dynamics processes in furnace equipment. *Applied Sciences*. 12. Article 11948. doi: 10.3390/app122311948

Сведения об авторах:

Жуков Илья Александрович – доктор технических наук, доцент, заведующий лабораторией нанотехнологий металлургии Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: zhukoviatsu@yandex.ru

Крайнов Алексей Юрьевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

Моисеева Ксения Михайловна – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математической физики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: moiseeva_km@t-sk.ru

Ермолаев Евгений Валерьевич – кандидат технических наук, заместитель главного конструктора по новым разработкам АО «Завод полупроводниковых приборов» (Йошкар-Ола, Россия); старший преподаватель Марийского государственного университета (Йошкар-Ола, Россия). E-mail: ermolaev_ev@zpp12.ru

Егошин Валерий Алексеевич – заместитель главного конструктора по материалам АО «Завод полупроводниковых приборов» (Йошкар-Ола, Россия); старший преподаватель Марийского государственного университета (Йошкар-Ола, Россия); аспирант Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: vaegoshin@zpp12.ru

Шугаев Шамиль Наилевич – директор по развитию АО «Завод полупроводниковых приборов» (Йошкар-Ола, Россия); старший преподаватель Марийского государственного

университета (Йошкар-Ола, Россия), аспирант Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: shnshugaepov@zpp12.ru

Ахметгалиев Равил Шамилевич – главный технолог АО «Завод полупроводниковых приборов» (Йошкар-Ола, Россия), аспирант Томского государственного университета (Томск, Россия), e-mail: rshahmetgaliev@zpp12.ru.

Information about the authors:

Zhukov Il'ya A. (Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Head of Laboratories of Nanotechnology in Metallurgy, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: zhukoviatsu@yandex.ru

Krainov Aleksey Yu. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

Moiseeva Kseniya M. (Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: moiseeva_km@t-sk.ru

Ermolaev Evgeniy V. (Deputy Chief Designer for New Developments, JSC Semiconductor Devices Plant, Yoshkar-Ola, Russian Federation; Senior Lecturer, Mari State University, Yoshkar-Ola, Russian Federation). E-mail: ermolaev_ev@zpp12.ru

Egoshin Valeriy A. (Deputy Chief Designer for Materials, JSC Semiconductor Devices Plant, Yoshkar-Ola, Russian Federation; Senior Lecturer, Mari State University, Yoshkar-Ola; Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: vaegoshin@zpp12.ru

Shugaepov Shamil' N. (Development Director, JSC Semiconductor Devices Plant, Yoshkar-Ola, Russian Federation; Senior Lecturer, Mari State University, Yoshkar-Ola; Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: shnshugaepov@zpp12.ru

Akhmetgaliev Ravil' Sh. (Chief Technologist, JSC Semiconductor Devices Plant, Yoshkar-Ola, Russian Federation; Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: rshahmetgaliev@zpp12.ru.

Статья поступила в редакцию 27.02.2025; принята к публикации 06.09.2025

The article was submitted 27.02.2025; accepted for publication 06.09.2025

Научная статья

УДК 539.422.5

doi: 10.17223/19988621/97/7

Влияние скорости деформации квазихрупких композиционных огнеупорных материалов на характер их разрушения

Андрей Васильевич Заболотский¹, Андрей Иванович Дмитриев²

^{1, 2} Институт физики прочности и материаловедения Сибирского отделения
Российской академии наук, Томск, Россия

¹ ООО «Группа “Магнезит”», Сатка, Россия

² Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ zabolotsky@bk.ru

² dmitr@ispms.ru

Аннотация. Предложена модель разрушения композиционного квазихрупкого материала, предполагающая вовлечение различных элементов структуры в процесс трещинообразования в зависимости от скорости упругой деформации. Введена зависимость критической скорости деформации материала от его упругих характеристик, измеренных квазистатическими методами. При скорости деформации ниже критической разрушению подвергается менее прочная составляющая композиционного материала. При увеличении ее сверх вычисленного критического значения разрушение приобретает объемный характер с вовлечением в трещинообразование всех элементов структуры материала.

Ключевые слова: хрупкое разрушение, динамика разрушения, композиционный материал

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта № 22-19-00688, <https://rscf.ru/project/22-19-00688>).

Для цитирования: Заболотский А.В., Дмитриев А.И. Влияние скорости деформации квазихрупких композиционных огнеупорных материалов на характер их разрушения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 97. С. 100–115. doi: 10.17223/19988621/97/7

Original article

Effect of strain rate on the fracture behavior of quasi-brittle composite refractory materials

Andrey V. Zabolotskiy¹, Andrey I. Dmitriev²

^{1, 2} Institute of Strength Physics and Materials Science of the Siberian Branch
of the Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation

¹ *Magnezit Group, Satka, Russian Federation*

² *Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*

¹ *zabolotsky@bk.ru*

² *dmitr@ispms.ru*

Abstract. A fracture model for a composite quasi-brittle material is proposed, assuming that different structural elements are involved in crack formation depending on the strain rate. The deformation of the material may result from either external mechanical loading or self-expansion due to temperature changes. A dependence is introduced between the critical strain rate of the material and its elastic properties measured using the static methods. At strain rates below the critical threshold, fracture initiates in the weaker component of the composite, whereas at rates exceeding the critical value, failure becomes volumetric, involving all structural elements in crack formation. For such materials, the critical strain rate at which the fracture mechanism changes is calculated. The theoretical results are validated through laboratory static and dynamic strength tests of the industrial refractories. It is established that, in practice, the grain frame of the composite material is involved in crack formation when the strain rate exceeds the calculated critical value.

Keywords: brittle destruction, destruction dynamics, composite material

Acknowledgments: This work was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 22-19-00688).

For citation: Zabolotskiy, A.V., Dmitriev, A.I. (2025) Effect of strain rate on the fracture behavior of quasi-brittle composite refractory materials. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 97. pp. 100–115. doi: 10.17223/19988621/97/7

Введение

Огнеупорные материалы, или огнеупоры, применяются в качестве ограждения рабочей зоны высокотемпературных промышленных агрегатов. Такие материалы одновременно несут конструкционную функцию и играют роль тепловой изоляции. В большинстве случаев эти материалы представляют собой керамику на основе тугоплавких оксидов, карбидов или нитридов распространенных металлов. Структура такого композиционного материала представлена зерновым армирующим каркасом, равномерно распределенным в относительно однородной матрице. Матрица, в свою очередь, образуется в результате спекания мелких фракций сырьевого материала. Применение огнеупоров в качестве конструкционных материалов предъявляет к ним требования по прочностным характеристикам в соответствии с типичными нагрузками при эксплуатации высокотемпературного оборудования.

Определение прочностных характеристик промышленных огнеупоров регламентируется стандартными испытаниями на прочность при сжатии и изгибе при нормальных условиях, а также высокотемпературными исследованиями прочности при трехточечном изгибе и определении температуры начала деформации под нагрузкой. Последний вид испытаний проводится путем приложения к материалу постоянной сжимающей нагрузки при изменении температуры образца. В результате определяется максимальная допустимая температура эксплуатации материала, выше которой происходит деградация свойств, исключающая использование материала в качестве конструкционного. Все стандартные испытания прочности огнеупоров проводят в квазистатическом режиме, при котором нагрузка остается

постоянной или нарастает с малой скоростью – не более нескольких процентов ожидаемой прочности за секунду.

Вследствие особенностей микроструктуры, содержащей множественные дефекты в виде пор и микротрещин, огнеупоры демонстрируют так называемый квазихрупкий характер разрушения, характеризующийся нелинейными зависимостями напряжений от деформаций при нагружении композиционных материалов. Причиной такого поведения материалов является множественный локальный рост трещин на микроуровне, сопровождающийся разгрузкой напряженно-деформированного состояния (НДС) окружающей области материала, который приводит к формированию продолжительного участка диаграммы разрушения, на котором не наблюдается снижения эксплуатационных характеристик материала. При этом на макро- и мезоскопическом уровнях структуры поведение материала может характеризоваться как ограниченно пластичное, а на микроуровне – как хрупкое.

Описанный характер структуры и особенности разрушения огнеупорных материалов приводят к тому, что измеренные значения прочностных характеристик являются функцией условий, в которых проводятся испытания. При варьировании этих условий результаты испытаний могут кратно изменяться [1]. Например, при определении динамической прочности (которое не входит в перечень стандартных испытаний) ее значение оказывается значительно выше результата квазистатического измерения, применяемого в условиях заводской лаборатории [2].

Для описания разрушения композиционных материалов широкое распространение получили континуальные методы учета накопления поврежденности, в основе которых лежат исследования Качанова, Работнова и др., подробно рассмотренные в обзоре [3]. Такой подход может быть применен при накопленных статистических данных для статических условий разрушения, а также для расчета динамической прочности материалов путем введения в уравнения соответствующих функций, учитывающих скорость нарастания деформаций:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = f(\vartheta, \sigma_1, \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \tau}, P_j), \quad (1)$$

где τ – время, $\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}$ – скорость накопления поврежденности в материале, σ_1 и ε_1 –

максимальные главные нормальные напряжения и деформации, $\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \tau}$ – скорость

деформирования композиционного материала, P_j – комплекс характеристик материала, определяющих его механические свойства. Для квазихрупких композиционных материалов наибольший риск трещинообразования связан с нормальными растягивающими напряжениями и деформациями, приводящими к появлению трещин нормального отрыва.

Известен способ использования степенных функций, аналогичных уравнению Аррениуса для описания деградации механических свойств конструкционных материалов при накоплении дефектов структуры [4], который также требует статистических исследований процесса разрушения для вычисления коэффициентов уравнения. В работе [5] показано, что использование континуальных характеристик композиционных материалов может приводить к значительным погрешностям в результатах расчетов, что требует применения более детального описания структуры материалов при динамическом нагружении.

При исследовании динамического разрушения композиционных материалов в настоящее время принято [2] пользоваться критерием инкубационного времени разрушения. В обобщенном виде этот критерий можно представить условием

$$\frac{1}{\tau_n} \int_{\tau_n}^{\tau} \left(\frac{F(\tau)}{F_c} \right)^{\alpha} d\tau \leq 1, \quad (2)$$

где $F(\tau)$ – характеристика локального силового поля (функция, описывающая НДС объекта, например главная компонента тензора напряжений, которая является предпочтительной характеристикой для квазихрупких композиционных материалов); F_c – критическое значение функции $F(\tau)$, в рассматриваемом случае квазистатический предел прочности материала при растяжении; τ_n — инкубационное время, связанное с динамикой релаксационных процессов, предшествующих разрушению (потеря несущей способности образца), и, следовательно, характеризующее время разрушения; α – чувствительность среды к уровню локального силового поля. Время и место разрушения определяются как момент и точка (в объеме материала) выполнения условия (2).

Сложность практического применения критерия (2) заключается в том, что входящие в него параметры могут быть определены только из серии испытаний материала на динамическую прочность, например по методу Кольского [6]. Оборудование для проведения подобного испытания на данный момент не является стандартным для лабораторий заводов-производителей композиционных материалов. Таким образом, актуальной является задача определения характера разрушения и оценки прочностных характеристик промышленных материалов при динамическом нагружении (которое часто возникает при эксплуатации материалов в результате механического или термомеханического внешнего воздействия) с использованием характеристик, определяемых в заводской лаборатории.

Цель работы – численно-экспериментальное выявление взаимосвязи между упругими свойствами компонентов композиционного материала, измеренными в квазистатическом режиме, и характером его разрушения при динамических нагрузках. Для нахождения границ применения результатов прочностных испытаний в квазистатическом режиме выполнена оценка скорости приложения механической нагрузки к материалу, при которой происходит изменение характера разрушения материала, приводящее к существенному изменению измеренных значений прочности.

Особенности разрушения огнеупорного композиционного материала

Разрушение конструкционных материалов по квазихрупкому сценарию под действием механической или термомеханической нагрузки состоит из трех последовательных стадий [7] (рис. 1):

– *стадии упругой деформации*, характеризующейся линейной зависимостью напряжений в материале от возникающих деформаций. На этой стадии выполняется закон Гука (см. рис. 1, 1). Для абсолютно хрупких материалов эта стадия завершается мгновенным катастрофическим разрушением всей конструкции: при достижении предела прочности материала происходит переход сразу к стадии образования катастрофической трещины (см. рис. 1, 4);

– *квазихрупкой стадии*, которая характеризуется нелинейными зависимостями напряжений от деформаций. На данной стадии происходят множественное образо-

вание и рост трещин на масштабе структуры материала с образованием сетки микротрещин, которая в пределе приводит к деградации механических свойств изучаемого объекта [8, 9] (см. рис. 1, 2, 3);

– *катастрофической стадии, или обострения* [10], характеризующейся резкой, чрезвычайно быстрой деградацией функциональных свойств объекта, сопровождающейся образованием одной или нескольких трещин макроскопического масштаба (см. рис. 1, 4).

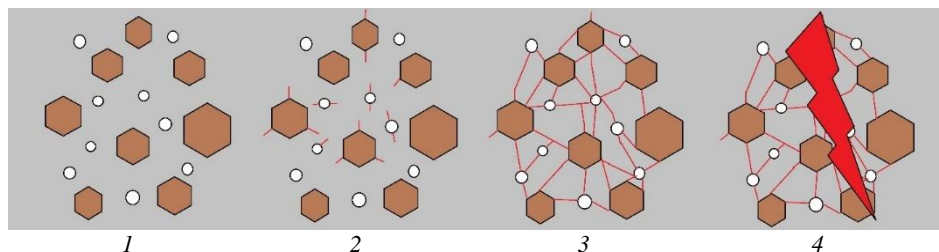


Рис. 1. Этапы развития трещины при квазихрупком разрушении композиционного керамического материала: 1 – трещины отсутствуют (исходное состояние), 2 – появление микротрещин на концентраторах напряжений, 3 – образование трещиноватой структуры на участке материала, 4 – рост катастрофической (разрушающей) трещины

Fig. 1. Stages of crack development during quasi-brittle fracture of a composite ceramic material: 1, no cracks (initial state); 2, appearance of microcracks on stress concentrators; 3, cracked structure formation in a section of the material; and 4, growth of a catastrophic destructive crack

Стадия квазихрупкого разрушения является определяющей для ресурса конструкции [11]: на протяжении этой стадии материал сохраняет свои конструкционные прочностные характеристики. В свою очередь, данная стадия складывается из стадии зарождения или инициации микротрещин, их роста или формирования микротрещиноватой структуры и начала роста магистральной трещины.

В реальных материалах на этапе инициации трещин происходит конкуренция между различными концентраторами напряжений, одновременно возникающие трещины приводят к разгрузке НДС в некоторой окрестности формирующейся поверхности. Соответственно, имеет место множественный рост дефектов на концентраторах напряжений, локализация которых будет зависеть в том числе и от скорости приложения нагрузки [1]. Действительно, медленное нагружение приводит к преимущественному формированию повреждений в матрице и на интерфейсах – границах раздела фаз в материале, в то время как при высокой скорости нагружения возрастает степень поврежденности армирующих зерен огнеупора [1, 12].

Наблюдаемая картина локализации поврежденности при различных скоростях нагружения объясняется динамикой накопления напряжений в зернах и матрице огнеупора. Зерна, как правило, представляют собой плотные, упругие среды с относительно малой плотностью внутренних дефектов, при этом геометрическая форма зерен может обуславливать значительное количество поверхностных концентраторов напряжений. Матрица, напротив, обладает высокой объемной плотностью дефектов и относительно низким модулем упругости. Скорость распространения деформаций в матрице и зернах различна и соответствует скорости звука в упругой среде [13].

Скорость роста трещин в материалах и, соответственно, разгрузки НДС за счет локального разрушения может достигать половины от скорости звука в них [14, 15]. Таким образом, при малых скоростях деформации разрушение может быть локализовано в матрице материала, а при ее высокой скорости вследствие запаздывания разгрузки в процесс вовлекается и зерновая составляющая.

Описание математической модели

Наблюдаемые закономерности разрушения квазихрупких композиционных огнеупорных материалов описываются, исходя из законов сохранения. Закон сохранения масс (неразрывности) для сплошных сред имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad (3)$$

где ρ – массовая характеристика (плотность), τ – время, \vec{v} – вектор скорости.

Под действием внешних сил, которые могут возникать в том числе и в результате теплового процесса, в материале возникают смещения, приводящие как к перемещению тела в пространстве как целого, так и деформациям, ответственным за формирование НДС. Эти процессы описываются законом сохранения импульса (уравнением движения) [14]

$$\rho \frac{d\vec{v}}{d\tau} = \nabla \cdot \vec{\sigma} + \rho \vec{F}, \quad (4)$$

где $\vec{\sigma}$ – тензор напряжений, \vec{F} – вектор массовых сил. Тензор деформаций описывается соотношением Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (5)$$

В выражении (5) ε_{ij} – компоненты тензора полных деформаций, u_i (u_j) – компоненты вектора перемещений, x_i (x_j) – координаты.

Механические напряжения связаны с упругими деформациями в рассматриваемых материалах законом Гука для изотропной среды, так как в пределах индивидуальных фаз, составляющих композиционный материал, рассматриваемое тело является изотропным:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_{ij}^e + \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \varepsilon_{kk}^e \delta_{ij}. \quad (6)$$

где ε_{ij}^e – компоненты упругой части тензора деформаций, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, δ_{ij} – символ Кронекера.

Фиксируемые значения прочности материалов при динамических испытаниях демонстрируют значительное превышение при высокой скорости деформации по сравнению с квазистатическими условиями нагружения. Кроме того, размеры образцов образцов различны для динамических и квазистатических режимов.

При наличии корреляции между скоростью деформации материала и характером трещинообразования последовательность разрушения выглядит следующим образом: на стадии упругой деформации квазихрупкого композиционного материала вся работа внешних сил расходуется на формирование НДС. Переход к следующей стадии разрушения определяется локальным достижением предела прочности,

например в окрестности концентраторов напряжений, который может быть определен как критическим механическим напряжением, так и критической упругой деформацией.

Для композиционного материала критический уровень параметров НДС в общем случае различен для разных составляющих фаз материала. В случае огнеупоров и керамики зерна армирующего каркаса обладают повышенными упругими и прочностными характеристиками по сравнению с матрицей материала и, соответственно, требуют дополнительных воздействий для их вовлечения в процесс трещинообразования.

Путем несложных преобразований зависимости (6) при допущении, что рассматриваемые материалы на масштабе структуры разрушаются, как хрупкие тела, получено уравнение для вычисления критической скорости деформации, требуемой для вовлечения зерен армирующего каркаса в процесс трещинообразования:

$$\left(\frac{\partial \varepsilon_1^e}{\partial \tau} \right)_{cr} = \frac{(\sigma_{cr}^t)_{gr} \omega_m}{E_{gr} x K}, \quad (7)$$

где $\left(\frac{\partial \varepsilon_1^e}{\partial \tau} \right)_{cr}$ – минимальная (критическая) скорость растягивающей деформации композиционного квазихрупкого материала, требуемая для трещинообразования в зернах каркаса, с^{-1} , $(\sigma_{cr}^t)_{gr}$ – предел прочности зерен на растяжение, Па, ω_m – скорость звука в матрице, м/с, E_{gr} – модуль упругости зерна, Па, в данном случае $\frac{(\sigma_{cr}^t)_{gr}}{E_{gr}}$ определяет критическую упругую деформацию фазы зерен, сверх которой

происходит их разрушение, x – расстояние от рассматриваемого зерна до ближайшего источника роста трещин, м (порядок величины для типичного огнеупора $10^{-5} \div 10^{-3}$ м), K – безразмерный коэффициент, связывающий скорость распространения трещин в матрице со скоростью звука в ней (может принимать значения от 2 до 10, согласно [16]).

Энергия, затраченная на трещинообразование на 2-й стадии разрушения квазихрупкого материала, оценивается в соответствии с уравнениями

$$U = \frac{EV}{2} (\varepsilon_1^{sp})^2, \quad (8)$$

$$\varepsilon_1^{sp} = \varepsilon_1^e - \varepsilon_{cr}^e, \quad (9)$$

где V – объем окрестности вершины трещины, энергия которого расходуется на образование ее новой поверхности, ε_1^{sp} – превышение главной компонентой деформации критического уровня ε_{cr}^e , при котором начинается трещинообразование на масштабе структуры. При выводе зависимости (8) также предполагалось, что основной вклад в разрушение вносят максимальные главные деформации, что в большинстве случаев выполняется для условий эксплуатации и испытаний огнеупорной керамики. В настоящее время отсутствует единое мнение о размере окрестности трещины, энергия которой может быть использована при образовании ее поверхности, однако большинство исследователей оценивает его как $2 \div 2,5$ характерных размеров растущей трещины. Скорость приращения длины трещины при этом

$$\frac{\partial l}{\partial \tau} = \frac{1}{\gamma h} \frac{\partial U}{\partial \tau} \quad (10)$$

Здесь γ – поверхностная энергия материала, l и h – геометрические параметры трещины. Соответственно, скорость роста трещины пропорциональна производной деформации материала, причем в случае квазихрупкого материала рассматривается именно сверхкритическая составляющая (в том числе ответственная за проявления квазихрупких или пластичных эффектов при разрушении композиционных материалов), энергия которой расходуется на трещинообразование при 2-й стадии квазихрупкого разрушения:

$$\frac{EV_{\varepsilon_1^{sp}}}{\gamma h} \frac{\partial \varepsilon_1^{sp}}{\partial \tau} = \frac{1}{K} \omega_m, K = 2 \div 10. \quad (11)$$

Таким образом, скорость распространения деформаций в теле, равная скорости звука в упругой среде, превышает скорость роста трещины в нем в K раз [15]. Соответственно, при различных упругих характеристиках зерен каркаса и матрицы существует критическая скорость нагружения, свыше которой внешние деформации будут создавать критическое НДС в каркасе ранее его разгрузки в окрестности зерен за счет трещинообразования в матрице, что приведет к вовлечению каркаса в процесс разрушения. Кроме того, из (11) следует, что при снятии внешней нагрузки ($\frac{\partial \varepsilon_1^e}{\partial \tau}$ обращается в 0) рост трещин в квазихрупком материале прекращается; таким образом, необходимым условием разрушения является наличие внешнего воздействия на тело (как и выше, имеются в виду деформации растяжения для этого класса материалов):

$$\frac{\partial \varepsilon_1^e}{\partial \tau} > 0. \quad (12)$$

Результаты и их обсуждение

Выражение (7) связывает деформации растяжения в зерновом каркасе композиционного материала со скоростью роста трещин в матрице, определяющей разгрузку НДС в окрестности рассматриваемого зерна. Применение зависимости (7) к типичным огнеупорам для оценки порядка этой величины показало, что для начала трещинообразования в зернах каркаса необходима скорость нагружения порядка 10^2 с^{-1} или более. Действительно, прочность зерен армирующего каркаса может варьировать от десятков до сотен МПа, модуль их упругости имеет порядок сотен ГПа, скорость звука в матрице – 10^3 м/с , расстояния между армирующими зернами – порядка миллиметров (10^{-3} м), а коэффициент K – единицы. Это подтверждается также фиксируемыми значениями прочности материала при различных скоростях приложения нагрузки [1, 2, 17], что объясняется вовлечением более прочной зерновой фракции в процесс трещинообразования.

Увеличение измеренной прочности композиционных материалов при повышении скорости их деформации зафиксировано в многочисленных экспериментальных работах по определению динамической прочности [7] для широкого класса объектов. Также зафиксировано соответствие порядка величины критической скорости нагружения, рассчитанной по формуле (7) и определенной экспериментально, при

которой происходит изменение сценария разрушения композиционных материалов [2].

Стадия квазихрупкого поведения одного и того же композиционного материала в зависимости от скорости приложения нагрузки может реализоваться при различных уровнях деформации и напряжения. При скоростях деформации, значительно превышающих порог трещинообразования в зернах (критическую скорость деформации (9)), разгрузка НДС за счет их разрушения будет происходить медленнее роста деформаций, что приведет к разрушению композиционного материала одновременно в значительном объеме тела.

Трехточечный изгиб огнеупорного материала

Для типичной структуры огнеупора было выполнено численное моделирование стандартного испытания материала на прочность при трехточечном изгибе как пример медленного накопления деформаций в материале, не приводящего к разрушению зерен армирующего каркаса вплоть до образования магистральной трещины. Условия приложения нагрузки в этом случае были квазистационарными: согласно стандарту не допускался рост механических напряжений более чем 5% от ее ожидаемой прочности в секунду.

Определение НДС для такого испытания выполнено методом конечных элементов в трехмерной постановке. При этом размер образца и расчетной области составляет $150 \times 25 \times 25$ мм, к торцам прикладывали условие «жесткой заделки»: запрещено перемещение узлов на этих поверхностях, а к центральной части образца прикладывали силу, обеспечивающую его изгиб. Характерный размер элементов выбирали около 1 мм, соответственно, их общее количество составляло около 10^5 . В серии проведенных вычислений варьировали изгибающую силу до достижения напряжений в центральном сечении образца, обеспечивающих выполнение условия начала роста трещины на типичном концентраторе напряжения (микротрещине) для материала.

Оценка размерных параметров концентраторов напряжений матрицы, являющихся геометрическим местом возникновения трещин, выполнена путем компьютерного моделирования по оригинальной методике авторов, описанной в [18], и валидирована методом электронной микроскопии на примере серийных огнеупоров производства «Группы «Магнезит»» периклазографитового состава на органическом связующем. Средние расстояния между армирующими зёрнами разных фракций приведены в табл. 1. Предполагалось, что в исходном материале микротрещины обладают эллиптической формой, соотношение осей эллипсоида составляло 2:1.

Таблица 1

Средние расчетные расстояния между частицами периклаза разных фракций для фактического гранулометрического состава огнеупорного изделия производства ООО «Группа «Магнезит»»

№	Фракция, мкм	Среднее расстояние, мкм
1	4 000–6 000	18 800
2	1 000–4 000	7 800
3	500–1 000	2 700
4	175–500	1 800

Критерием начала роста трещины считалось достижение растягивающим напряжением в ее вершине предела прочности на разрыв для материала матрицы либо соответствующей упругой деформации в вершине дефекта (7). Напряжения в вершине микротрещины определяли в соответствии с зависимостью [19]

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 + 2 \frac{l}{b}\right), \quad (13)$$

где σ – максимальное эффективное напряжение в окрестности вершины микротрещины, σ_0 – напряжение в отдаленной окрестности микротрещины, определяемое в соответствии с (6); l и b – длины большой и малой осей микротрещины соответственно. Экспериментально определенные свойства материала, использованные для расчета, приведены в табл. 2 (погрешность лабораторного измерения этих величин для хрупких композиционных материалов в типичных случаях достигает 15–20%), кроме того, упругие характеристики рассматриваемых материалов могут определяться и расчетным путем [20].

Таблица 2

Свойства материала, используемые для моделирования

Показатель	Значение	Источник
Прочность матрицы при растяжении, МПа	20	[21]
Модуль упругости матрицы, ГПа	10	[21]
Вязкость разрушения матрицы, МПа·√м	2	[21]
Прочность армирующих зерен при растяжении, МПа	150	[22]
Модуль упругости зерен, ГПа	250	[22]
Прочность композита при изгибе, МПа	8	Эксперимент

Возникшая микротрещина в композиционном материале при рассматриваемом типе нагружения распространяется со скоростью не более 0,5 скорости звука в данном материале [14] до выхода на границу раздела фаз: либо на поверхность армирующего зерна, либо на границу испытываемого образца.

Очевидно, что по мере роста микротрещины требуемое для его продолжения напряжение в окрестности ее вершины снижается (рис. 2, красная линия).

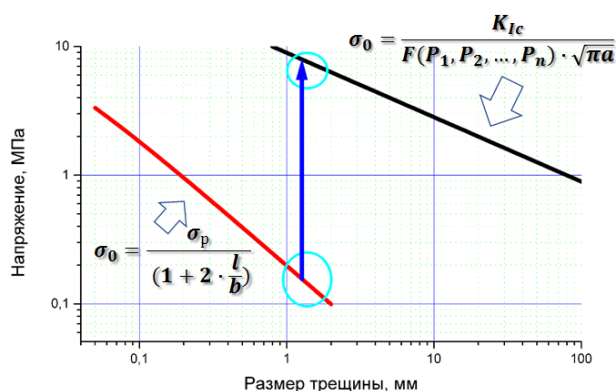


Рис. 2. Корреляция между максимальным размером трещиноподобного дефекта и фактическим значением прочности для одного из периклазоуглеродистых огнеупоров
Fig. 2. Correlation between the maximum size of a crack-like defect and the actual strength value for one of the periclase-carbon refractories

Согласно данным табл. 1, при достижении трещиной размера порядка 10^{-3} м ее вершины придут в соприкосновение с зернами каркаса, обладающими значительно большей прочностью, чем матрица. Далее возможно изменение направления роста трещины, либо начало роста соседних микротрещин, либо разрушение одного из зерен каркаса. Как правило, в огнеупорах на этой стадии формируется трещиноватая структура. Разрушение такой структуры требует большего уровня механических напряжений по сравнению с увеличением длины одиночной докритической трещины и носит катастрофический характер, причем напряжения, при которых образуется магистральная трещина, зависят как от формы и размера сформировавшейся микротрещины, так и от геометрических характеристик самого разрушаемого объекта. Соответствующая линия на рис. 2 была получена путем расчета по методике, описанной в [11] для эллиптической трещины в теле конечного размера:

$$K_{Ic} = f_I(P_1, \dots, P_n) \sigma_0 \sqrt{\pi l}, \quad (14)$$

где f_I – эмпирически определенная функция, зависящая от размеров дефекта и конструкции, способа приложения нагрузки и т.д., обозначенных как перечень параметров P_1, \dots, P_n , σ_0 – напряжения в отдаленной окрестности вершины трещины, l – характерный размер трещины. Величина K_{Ic} , называемая также вязкостью разрушения или критическим коэффициентом интенсивности напряжений является значением, сверх которого происходит катастрофический рост трещины. Функция f_I в уравнении (14) изучена численными методами для большинства распространенных случаев проектирования [11], а само значение вязкости разрушения определяется в лабораторном эксперименте в соответствии с ГОСТ 25.506–85 и ГОСТ 29167–2021.

Переход между линиями на рис. 2 находится в области ожидаемого размера микротрещины в случае ее контакта с ближайшими зернами каркаса (ее длина в этот момент времени равна среднему расстоянию между армирующими зернами), а экспериментально измеренная прочность композиционного материала (см. табл. 2) также соответствует расчетному значению.

Динамическое нагружение огнеупора по методу Кольского

Прямой эксперимент по валидации зависимости характера разрушения огнеупора от скорости деформации был проведен по методу Кольского в ННГУ им. Лобачевского. Целью эксперимента было установление различного характера разрушения образцов квазихрупкого композиционного материала, деформируемого с различной скоростью. Предполагалось, что при деформации с докритической скоростью область разрушения будет находиться преимущественно в матрице материала, а при более высоких скоростях деформации будет наблюдаться разрушение и его зернового каркаса. В качестве объекта исследования выступали серийные огнеупорные материалы производства «Группы “Магнезит”» периклазо-шпинельного состава. Образцы диаметром и высотой 50 мм нагружали ударным способом с различной скоростью движения ударника и, соответственно, упругой деформации, как превышающей вычисленный критический уровень 10^2 с^{-1} , так и ниже его. В процессе эксперимента считывали импульсы, возникающие в ударнике и мерном стержне, по которым восстанавливали значения упругой деформации материала и ее производную по времени (скорость нагружения). Кроме того, процесс разрушения записывали на видео.

На рис. 3 приведено по три последовательных кадра разрушения материала при скорости деформирования менее (80 с^{-1} (a)) и более критической (350 с^{-1} (b)). Были зафиксированы значения прочности материала 60 и 110 МПа соответственно. В квазистатических условиях прочность такого материала при сжатии составляет 50–60 МПа.

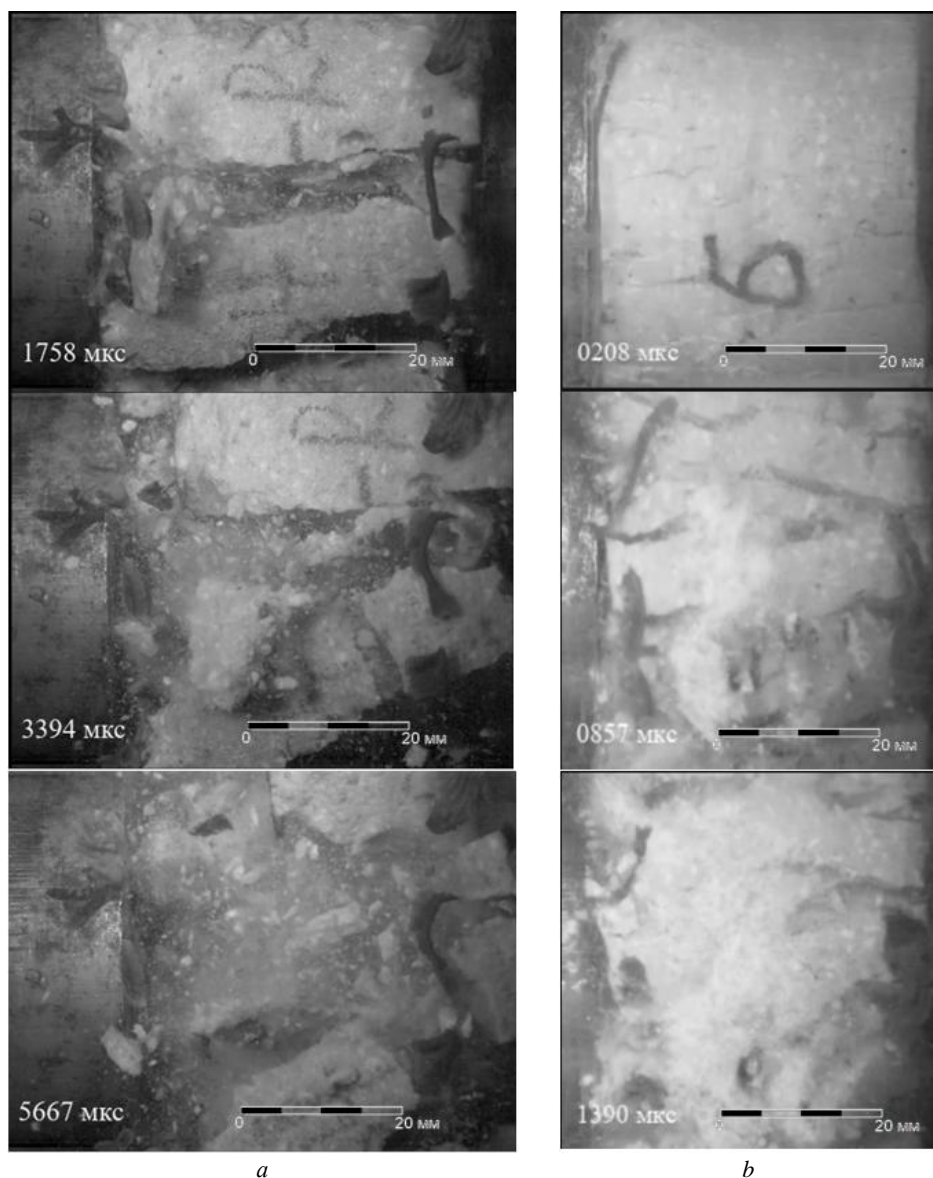


Рис. 3. Характер разрушения огнеупорного материала при малой (a) и высокой (b) скорости деформации

Fig. 3. Fracture behavior of the refractory material at (a) low and (b) high strain rates

При малой скорости деформирования (см. рис. 3, а) происходит разрушение материала на крупные блоки. Трещины проходят преимущественно по матрице или границам раздела между матрицей и зернами каркаса. На рисунке видно, что фрагменты представляют собой либо отдельные зерна каркаса размером около 2 мм, либо блоки, включающие зерна каркаса и прилегающие фрагменты матрицы, – в этом случае размер обломков составляет 5 мм и более. При быстром нагружении, напротив, виден множественный рост трещин на начальной стадии (см. рис. 3, б), сменяющийся интенсивным объемным разрушением на некотором удалении от поверхности приложенной нагрузки. Разрушение в этом случае фиксируется как в матрице материала, так и в зернах каркаса. Фрагменты на фото представляют собой пылевидные частицы, размер которых можно оценить как существенно меньший 1 мм (на 1–2 порядка величины), т.е. менее чем типичный размер компонентов зерновой фракции, что подтверждает трещинообразование внутри зерен армирующего каркаса материала.

Таким образом, экспериментально показано изменение характера разрушения квазихрупкого материала при увеличении скорости деформирования сверх расчетного критического значения. Разрушение в докритической области представлено образованием крупных блоков материала с прохождением трещин по границам раздела зерен каркаса и матрицы, зерна при этом в основном не подвергаются разрушению. В закритической области происходит объемное разрушение материала на мелкие пылевидные фрагменты, причем разрушению подвергаются и зерна каркаса.

Выводы

Предложен способ определения критической скорости упругой деформации композиционного огнеупорного материала. При превышении критической скорости деформирования изменяется характер трещинообразования: происходит переход от разрушения менее прочной матрицы огнеупора к появлению трещин и в зерновой (более прочной) компоненте материала. При расчете критической скорости деформации использовались упругие характеристики компонентов материала, определяемые при лабораторных испытаниях в квазистатическом режиме. Таким образом, предложенный способ позволяет предсказывать характер разрушения композиционного материала при различной динамической нагрузке по результатам стандартных статических прочностных испытаний его компонентов.

На примере измерения предела прочности при трехточечном изгибе в квазистатическом режиме образца серийного огнеупора, производимого «Группой “Магнезит”», показана стадийность разрушения таких композиционных материалов. Применение предложенной модели разрушения к анализу значений прочности, измеренных при трехточечном изгибе огнеупорного материала, показывает совпадение расчетных и экспериментальных значений этой величины.

Для динамического нагружения огнеупора по методу Кольского показано, что при превышении критической скорости деформации характер разрушения материала изменяется предсказанным образом: в процесс массово вовлекаются зерна армирующего каркаса материала. В отличие от медленного нагружения, при высоких скоростях деформации разрушение носит объемный характер: не происходит разделения материала по ограниченному числу новых поверхностей, а имеет место образование многочисленных трещин в значительном объеме материала.

Список источников

1. Grigoriev A.S., Zabolotskiy A.V., Shilko E.V., Dmitriev A.I., Andreev K. Analysis of the Quasi-Static and Dynamic Fracture of the Silica Refractory Using the Mesoscale Discrete Element Modelling // *Materials*. 2021. V. 14. Art. 7376. doi: 10.3390/ma14237376
2. Смирнов И.В., Петров Ю.В. Анализ динамической прочности битумных вяжущих для асфальтобетона в терминах критерия инкубационного времени разрушения // *Физическая мезомеханика*. 2020. Т. 23, № 2. С. 24–34. doi: 10.24411/1683-805X-2020-12003
3. Волегов П.С., Грибов Д.С., Трусов П.В. Поврежденность и разрушение: классические континуальные теории // *Физическая мезомеханика*. 2015. Т. 18, № 4. С. 68–87. doi: 10.24411/1683-805X-2015-00035
4. Баев В.С., Пичугин А.П. Теория динамической прочности композиционных материалов // *Строительные материалы*. 2010. № 7. С. 84–86.
5. Кривошеина М.Н. Моделирование напряженного состояния в преградах из анизотропных материалов // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2022. № 79. С. 89–99. doi: 10.17223/19988621/79/8
6. Kolsky H. An investigation of the mechanical properties of material at very high rates of loading // *Proceedings of the Physical Society. Section B*. 1949. V. 62 (11). P. 676–700.
7. Курдюмов С.П. Режимы с обострением. Эволюция идеи. М. : Физматлит, 2006. 312 с.
8. Shilko E.V., Grigoriev A.S., Lapshina A.A., Buyakov A.S., Shmakov V.V., Dmitriev A.I., Zabolotskiy A.V., Andreev K. Development of a mesoscale mechanical model of ceramic materials with multiscale porosity. Silica refractory case study // *AIP Conference Proceedings*. 2023. Art. 2899. doi: 10.1063/5.0162808
9. Grigoriev A.S., Shilko E.V., Skripnyak V.A., Psakhie S.G. Kinetic approach to the development of computational dynamic models for brittle solids // *International Journal of Impact Engineering*. 2019. V. 123. P. 14–25. doi: 10.1016/j.ijimpeng.2018.09.018
10. Макаров П.В., Еремин М.О. Модель разрушения хрупких и квазихрупких материалов и геосред // *Физическая мезомеханика*. 2013. Т. 16, № 1. С. 5–26. doi: 10.24411/1683-805X-2013-00032
11. Мураками Ю. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: в 2 т. М.: Мир, 1990. Т. 1. 448 с.; Т. 2. 568 с.
12. Andreev K., Yin Y., Luchini B., Sabirov I. Failure of refractory masonry material under monotonic and cyclic loading – Crack propagation analysis // *Construction and Building Materials*. 2021. V. 299. Art. 124203. doi: 10.1016/j.conbuildmat.2021.124203
13. Савельев И.В. Курс общей физики: в 3 т. М.: Лань, 2020. Т. 1: Механика. Молекулярная физика. 436 с.
14. Морозов В.А., Савенков Г.Г. Предельная скорость распространения трещин в динамически разрушаемых материалах. // *Прикладная механика и техническая физика*. 2013. Т. 54, № 1. С. 163–169. doi: 10.1134/S0021894413010173
15. Чекунаев Н.И., Каплан А.М. Предельная скорость распространения трещин в упругих материалах // *Прикладная механика и техническая физика*. 2009. Т. 50, № 4 (296). С. 158–166. doi: 10.1007/s10808-009-0091-1
16. Победря Б.Е. Модели механики сплошной среды // *Фундаментальная и прикладная математика*. 1997. Т. 3, № 1. С. 93–127.
17. Брагов А.М., Карихалу Б.Л., Петров Ю.В., Константинов А.Ю., Ламзин Д.А., Ломунов А.К., Смирнов И.В. Высокоскоростное деформирование и разрушение фибробетона // *Прикладная механика и техническая физика*. 2012. Т. 53, № 6. С. 144–152.
18. Заболотский А.В. Построение и исследование модели поровой структуры керамического материала // *Инновационная наука*. 2017. № 03-1. С. 27–34.
19. Феодосьев В.И. Соппротивление материалов. М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. 593 с.

20. Бельхеева П.К. Малопараметрическое уравнение состояния графита для описания поведения сплошных и пористых образцов в ударных волнах и волнах разгрузки // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 90. С. 50–63. doi: 10.17223/19988621/90/5
21. Стенашкин А.А., Ожерелков Д.Ю., Сазонов Ю.Б., Комиссаров А.А. Критерии оценки вязкости разрушения углерод-углеродных композиционных материалов // Металловедение и термическая обработка металлов. 2018. № 4. С. 64–70.
22. Wang X., Chen Y., Ding J., Yu C., Deng C., Zhu H. Influence of ceramic phase content and its morphology on mechanical properties of MgO–C refractories under high temperature nitriding // Ceramics International. 2021. V. 47 (8). P. 10603–10610. doi: 10.1016/j.ceramint.2020.12.172

References

1. Grigoriev A.S., Zabolotskiy A.V., Shilko E.V., Dmitriev A.I., Andreev K. (2021) Analysis of the quasi-static and dynamic fracture of the silica refractory using the mesoscale discrete element modelling. *Materials*. 14(23). Article 7376. doi: 10.3390/ma14237376
2. Smirnov I.V., Petrov Yu.V. (2020) Dynamic strength analysis of bitumen binders for asphalt concrete mixtures in terms of the fracture incubation time criterion. *Physical Mesomechanics*. 23. pp. 538–546. doi: 10.1134/S1029959920060090
3. Volegov P.S., Gribov D.S., Trusov P.V. (2017) Damage and fracture: Classical continuum theories. *Physical Mesomechanics*. 20. pp. 157–173. doi: 10.1134/S1029959917020060
4. Baev V.S., Pichugin A.P. (2010) Teoriya dinamicheskoy prochnosti kompozitsionnykh materialov [Theory of dynamic strength of composite materials]. *Stroitel'nye materialy – Construction Materials*. 7. pp. 84–86.
5. Krivosheina, M.N. (2022) Modelirovanie napryazhennogo sostoyaniya v pregradakh iz anizotropnykh materialov [Simulation of the stress state in barriers made of anisotropic materials]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 79. pp. 89–99. doi: 10.17223/19988621/79/8
6. Kolsky H. (1949) An investigation of the mechanical properties of material at very high rates of loading. *Proceedings of the Physical Society. Section B*. 62(11). pp. 676–700.
7. Kurdumov S.P. (2006) *Rezhimy s obostreniem. Evolyutsiya idei* [Modes with peaking. Evolution of an idea]. Moscow: FISMATLIT.
8. Shilko E.V., Grigoriev A.S., Lapshina A.A., Buyakov A.S., Shmakov V.V., Dmitriev A.I., Zabolotskiy A.V., Andreev K. (2023) Development of a mesoscale mechanical model of ceramic materials with multiscale porosity. Silica refractory case study. *AIP Conference Proceedings*. Article 2899. doi: 10.1063/5.0162808
9. Grigoriev A.S., Shilko E.V., Skripnyak V.A., Psakhie S.G. (2019) Kinetic approach to the development of computational dynamic models for brittle solids. *International Journal of Impact Engineering*. 123. pp. 14–25. doi: 10.1016/j.ijimpeng.2018.09.018
10. Makarov P.V., Eremin M.O. (2013) Fracture model of brittle and quasibrittle material and geomechanics. *Physical Mesomechanics*. 16. pp. 207–226. doi: 10.1134/S1029959913030041
11. Murakami Y. (1987) *Stress Intensity Factors Handbook*. Oxford: Pergamon Press.
12. Andreev K., Yin Y., Luchini B., Sabirov I. (2021) Failure of refractory masonry material under monotonic and cyclic loading – Crack propagation analysis. *Construction and Building Materials*. 299. Article 124203. doi: 10.1016/j.conbuildmat.2021.124203
13. Savel'ev I.V. (2020) *Kurs obshchey fiziki. Mekhanika. Molekulyarnaya fizika. Tom 1* [General physics course. Mechanics. Molecular physics. Volume 1]. Moscow: LAN'.
14. Morozov V.A., Savenkov G.G. (2013) Limiting velocity of crack propagation in dynamically fractured materials. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 54. pp. 142–147. doi: 10.1134/S0021894413010173

15. Chekunaev N.I., Kaplan A.M. (2009) Limiting velocity of crack propagation in elastic materials. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 50. pp. 677–683. doi: 10.1007/s10808-009-0091-1
16. Pobedrya B.E. (1997) Modeli mekhaniki sploshnoy sredy [Models of continuum mechanics]. *Fundamental'naya i prikladnaya matematika – Fundamental and Applied Mathematics*. 3(1). pp. 93–127.
17. Bragov A.M., Konstantinov A.Y., Lamzin D.A., Lomunov A.K., Karihaloo B.L., Petrov Y.V., Smirnov I.V. (2012) High-rate deformation and fracture of fiber reinforced concrete. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 53(6). pp. 926–933. doi: 10.1134/S0021894412060168
18. Zabolotskiy A.V. (2017) Postroenie i issledovanie modeli porovoy struktury keramicheskogo materiala [Construction and study of a model of the pore structure of a ceramic material]. *Innovatsionnaya nauka – Innovative Science*. 03(1). pp. 27–34.
19. Feodos'ev V.I. (2016) *Soprotivlenie materialov* [Strength of materials]. Moscow: MGТУ im. Baumana.
20. Bel'kheeva R.K. (2024) Maloparametricheskoe uravnenie sostoyaniya grafita dlya opisaniya povedeniya sploshnykh i poristykh obraztsov v udarnykh volnakh i volnakh razgruzki [Low-parametric equation of state for graphite describing solid and porous samples under shock and unloading waves]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 90. pp. 50–63. doi: 10.17223/19988621/90/5
21. Stepashkin A.A., Ozherelkov D.Yu., Sazonov Yu.B., Komissarov A.A. (2018) Kriterii otsenki vyazkosti razrusheniya uglerod - uglerodnykh kompozitsionnykh materialov [Criteria for assessing the fracture toughness of carbon-carbon composite materials]. *Metallovedenie i termicheskaya obrabotka metallov – Metal Science and Heat Treatment*. 4. pp. 64–70.
22. Wang X., Chen Y., Ding J., Yu C., Deng C., Zhu H. (2021) Influence of ceramic phase content and its morphology on mechanical properties of MgO–C refractories under high temperature nitriding. *Ceramics International*. 47(8). pp. 10603–10610. doi: 10.1016/j.ceramint.2020.12.172

Сведения об авторах:

Заболотский Андрей Васильевич – кандидат технических наук, инженер-технолог отдела инжиниринга Управления инжиниринга, проектов и производства работ ООО «Группа “Магнезит”» (Сатка, Россия); научный сотрудник Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения Российской академии наук (Томск, Россия). E-mail: zabolotsky@bk.ru

Дмитриев Андрей Иванович – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения Российской академии наук (Томск, Россия); Томский государственный университет (Томск, Россия). E-mail: dmitr@ispms.ru

Information about the authors:

Zabolotskiy Andrey V. (Candidate of Technical Sciences, Process Engineer, Magnezit Group, Satka, Russian Federation; Researcher, Institute of Strength Physics and Materials Science of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation). E-mail: zabolotsky@bk.ru

Dmitriev Andrey I. (Doctor of Physics and Mathematics, Principal Researcher, Institute of Strength Physics and Materials Science of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation; Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: dmitr@ispms.ru

Статья поступила в редакцию 22.10.2024; принята к публикации 06.09.2025

The article was submitted 22.10.2024; accepted for publication 06.09.2025

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/97/8

Решение краевых стационарно-динамических задач теории упругости для трансверсально-изотропного тела вращения

Дмитрий Алексеевич Иванычев

*Липецкий государственный технический университет, Липецк, Россия
Lsivdmal@mail.ru*

Аннотация. Представлен метод определения упругого состояния конечного трансверсально-изотропного тела вращения в условиях стационарной динамической задачи, когда на поверхность тела наложены кинематические условия, гармонические во времени. Метод решения заключается в разложении искомого упругого состояния в ряд Фурье по элементам ортонормированного базиса пространства граничных состояний. В качестве базисных элементов выступают частные решения пространственной осесимметричной задачи теории упругости для трансверсально-изотропного тела. Приведено решение второй основной задачи для кругового трансверсально-изотропного цилиндра.

Ключевые слова: метод граничных состояний, стационарно-изотропные задачи, вторая основная задача, трансверсально-изотропное тело, осесимметричная деформация

Для цитирования: Иванычев Д.А. Решение краевых стационарно-динамических задач теории упругости для трансверсально-изотропного тела вращения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 97. С. 116–129. doi: 10.17223/19988621/97/8

Original article

Solution of the boundary stationary-dynamic problems of the elasticity theory for a transversely isotropic body of revolution

Dmitriy A. Ivanychev

*Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russian Federation
Lsivdmal@mail.ru*

Abstract. This paper presents a mathematical model for constructing elastic fields for transversely isotropic bodies of revolution under the conditions of the inverse problem

of elasticity, where the displacements prescribed on the body surface vary over time according to a cyclic law. An axisymmetric disturbance propagates at a constant velocity along one of the elastic symmetry axes of the material. The boundary state method is used to solve the problem. Using the method of integral superposition, a relationship is established between the spatial stress-strain state of the transversely isotropic elastic body and certain auxiliary two-dimensional states. The auxiliary states are constructed based on the general solution of the plane stationary dynamic problem. A set of such plane auxiliary states is generated, and a corresponding set of spatial states is obtained by applying the transformation formulas. This set forms a finite-dimensional basis of the internal states with the desired solution expanded after orthogonalization into a Fourier series with the same coefficients.

The solution of the inverse dynamic problem of elasticity is presented for a transversely isotropic circular cylinder with the kinematic boundary conditions varying according to the cosine law.

Keywords: method of boundary states, stationary isotropic problems, inverse problem of elasticity, transversely isotropic body, axisymmetric deformation

For citation: Ivanychev, D.A. (2025) Solution of the boundary stationary-dynamic problems of the elasticity theory for a transversely isotropic body of revolution. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 97. pp. 116–129. doi: 10.17223/19988621/97/8

Введение

Колбательные процессы в механике физических процессов встречаются довольно часто. Если возмущение распространяется с постоянной скоростью, то речь идет о динамических задачах стационарного типа. Учет инерционных составляющих в задаче по определению напряженно-деформированного состояния тела, находящегося под действием данных возмущений, усложняет ее решение, а если тело еще является и анизотропным, то важность иметь математическую модель построения упругих полей в стационарно-динамической задаче очевидна.

Решению задач динамики для изотропных и анизотропных сред посвящено множество работ. Например, в работе [1] исследуются краевые динамические задачи для трансверсально-изотропного упругого сферического слоя. С помощью вариационного принципа Гамильтона получены асимптотические разложения, позволяющие получить напряженно-деформированное состояние при различных значениях частоты возмущающей нагрузки. В работе [2] в рамках модели Тимошенко решена стационарно-динамическая задача для кольцеобразной плоской области. С помощью системы компьютерной алгебры определены частоты и формы собственных колебаний пластины при различных способах ее закрепления. В работе [3] с помощью численных преобразований получены граничные интегральные уравнения для решения различных краевых задач теории упругости для изотропных тел. В работе [4] рассмотрен вопрос применения трех упругих потенциалов для решения пространственных динамических задач для упругого полупространства. Интегральное преобразование Радона позволило перейти к плоской задаче в образах. В работе на основе этого решения исследовались волны Рэлея. Работа [5] посвящена построению квадратур для решения динамических задач теории упругости со смешанными поверхностными условиями для ограниченных сред из линейно-однородного анизотропного материала.

Разнообразие методов решения задач динамики иллюстрируют следующие работы. В [6] обсуждалась возможность решения динамических задач теории упругости в конечно-элементных технологиях. В работе сравнивались три типа вариационных постановок: принцип Гамильтона, принцип Лагранжа и принцип возможных перемещений. Полученные уравнения в матричном виде описывают волновое движение конечно-элементной сетки и могут применяться при решении различных задач о распространении волны. В работе [7] показана численная реализация разностной схемы решения плоских динамических задач для областей сложной формы. В работе [8] представлен численно-аналитический метод решения нестационарно-динамических контактных задач об ударе. Для решения двумерных интегральных уравнений использовался метод последовательных приближений. В работе [9] решение задачи о движущейся нагрузке, приложенной к телам вращения, проводилось методом граничных интегральных уравнений. Рассмотрена плоская динамическая задача для сферической оболочки, нагруженной двумя подвижными сосредоточенными силами. В работе [10] исследовалась динамическая контактная задача с двумя деформируемыми штампами, лежащими на деформируемом основании. Исследование опирается на метод блочного элемента, позволяющего строить точные решения граничных задач для дифференциальных уравнений в частных производных.

1. Постановка задачи

Исследуется осесимметричная динамическая деформация конечного тела вращения из трансверсально-изотропного материала, ось анизотропии которого совпадает с осью вращения тела (рис. 1).

В стационарной динамической задаче компоненты упругого поля (перемещения, деформации и напряжения) зависят от координат r , z и времени t . Заданными являются перемещения точек границы $\mathbf{u} = \{u, w\}$, возмущения в которых распространяются с постоянной скоростью c вдоль координаты z . Вводя подвижную координату $z_0 = z - ct$, можно исключить параметр t из определяющих уравнений, и компоненты упругого поля будут зависеть только от двух переменных r и z_0 .

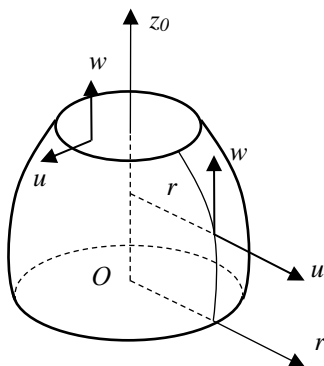


Рис. 1. Анизотропное тело вращения
Fig. 1. Anisotropic solid of revolution

Задача состоит в отыскании переменного во времени напряженно-деформированного состояния.

2. Определяющие соотношения

В цилиндрической системе координат r, z_0 в случае осевой симметрии между неравными нулю перемещениями u, w , деформациями $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{z_0}, \gamma_{z_0r}$, напряжениями $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_{z_0}, \tau_{z_0r}$, а также между техническими $E_{z_0}, E_r, \nu_{z_0}, \nu_r, G_r, G_{z_0}$ константами материала тела имеют место следующие зависимости.

Уравнения равновесия (объемные силы отсутствуют) [11]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{z_0r}}{\partial z_0} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \tau_{z_0\theta}}{\partial z_0} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Соотношения Коши [11]:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z_0}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}; \quad \gamma_{z_0r} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z_0}; \quad u = -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi z_0}{2}\right); \quad \gamma_{z_0\theta} = 0. \quad (2)$$

Уравнения совместности деформаций [12]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} &= 0; \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial z_0} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial z_0} &= 0; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial z_0^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial \varepsilon_{z_0r}}{\partial z_0} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial z_0^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{z_0}}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{z_0r}}{\partial r \partial z_0} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Обобщенный закон Гука [11]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E_r} \left[(\sigma_r - \nu_r \sigma_\theta) - \frac{\nu_{z_0}}{E_{z_0}} \sigma_{z_0} \right]; \\ \varepsilon_{z_0} &= \frac{1}{E_{z_0}} \left[\sigma_{z_0} - \nu_{z_0} (\sigma_r + \sigma_\theta) \right]; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E_r} (\sigma_\theta - \nu_r \sigma_r) - \frac{\nu_{z_0}}{E_{z_0}} \sigma_{z_0}; \quad \gamma_{z_0r} = \frac{1}{G_z} \tau_{z_0r}. \end{aligned} \quad (4)$$

Дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях [11]:

$$\begin{aligned} (A_{33} - \rho c^2) \frac{\partial^2 w}{\partial z_0^2} + A_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + (A_{13} + A_{44}) \frac{\partial^2 u}{\partial z_0 \partial r} &= 0; \\ (A_{13} + A_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial z_0 \partial r} + (A_{44} - \rho c^2) \frac{\partial^2 u}{\partial z_0^2} + A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где ρ – плотность материала; c – скорость распространения волны.

3. Общее решение задачи

В работе [11] представлено общее решение пространственной краевой задачи статики в виде квадратур, ядра которых представляют собой некоторые плоские вспомогательные состояния $\mathbf{u}^{pl} = \{u_y^{pl}, u_{z_0}^{pl}\}$. Компоненты вектора перемещения этого решения имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{z_0} &= \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{\sigma_{z_0}^{pl}}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy; \quad \sigma_{z_0 r} = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{\sigma_{z_0 y}^{pl}}{r \sqrt{r^2 - y^2}} dy; \quad \sigma_{z_0 \theta} = \sigma_{r \theta} = 0; \\ \sigma_r - \sigma_\theta &= \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{(\sigma_y^{pl} - \sigma_\eta^{pl})(2y^2 - r^2)}{r^2 \sqrt{r^2 - y^2}} dy; \quad \sigma_r + \sigma_\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{(\sigma_y^{pl} + \sigma_\eta^{pl})}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy; \\ u &= \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{u_y^{pl}}{r \sqrt{r^2 - y^2}} dy; \quad w = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{u_{z_0}^{pl}}{r \sqrt{r^2 - y^2}} dy; \quad v = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Общее решение плоской стационарной динамической задачи как основа для перехода к пространственному состоянию имеет вид [11]:

$$\begin{aligned} u_{z_0}^{pl} &= \text{Re}[p_1^0 \varphi_1(\zeta_1) + p_2^0 \varphi_2(\zeta_2)]; \quad u_y^{pl} = \text{Re}[iq_1^0 \varphi_1(\zeta_1) + iq_2^0 \varphi_2(\zeta_2)]; \\ p_j^0 &= p_j - g\gamma_j; \quad q_j^0 = q_j - g\gamma_j; \quad g = \rho \Delta c^2 / (2G_r E_{z_0}); \quad \Delta = 1 - \nu_r - 2\nu_{z_0}^2 \frac{E_r}{E_{z_0}}, \end{aligned} \quad (7)$$

где q_j и p_j – комплексные константы (определены упругими параметрами материала), $\zeta_j = z_0 / \gamma_j + iy$, γ_j – комплексные корни векового уравнения [11], функции $\varphi_j(\zeta_j)$ – комплексные функции переменной ζ_j .

4. Метод решения задачи

Совокупность компонент вектора перемещения, компонент тензора деформаций и тензора напряжений определяет допустимое упругое внутренне состояния среды $\xi_k = \{u_i^{(k)}, \varepsilon_{ij}^{(k)}, \sigma_{ij}^{(k)}\}$. Совокупность таких состояний можно организовать в базис конечномерного пространства внутренних состояний [13]:

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k, \dots\}.$$

Базисные элементы пространства Ξ можно организовать, если придать функциям $\varphi_j(\zeta_j)$ в (7) последовательно следующие значения:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(\zeta_1) \\ \varphi_2(\zeta_2) \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} \zeta_1^n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \zeta_2^n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i\zeta_1^n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i\zeta_2^n \end{pmatrix}, \dots \right\}, n = 1, 2, 3, \dots$$

Тем самым построить набор плоских вспомогательных упругих состояний, которые могут быть использованы в интегральных операторах (6) для построения уже множества пространственных состояний для трансверсально-изотропной среды. Это множество и определит базис пространства Ξ .

Внутреннее состояние ξ_k на границе определит граничное состояние:

$$\gamma_k = \{u_{iv}^{(k)}, p_i^{(k)}\},$$

где $u_{iv}^{(k)}$ – перемещения точек границы тела; $p_i^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)} n_j$ – усилия на границе. Набор таких состояний образует базис пространства граничных состояний $G = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_k, \dots\}$.

После построения базисов пространств состояний их элементы подлежат ортонормированию, которое можно осуществить по разработанному рекурсивно-матричному алгоритму ортогонализации [14]. Алгоритм в своей работе использует назначенные в конкретной задаче перекрестные скалярные произведения, например для базиса пространства G :

$$(\gamma^k, \gamma^l) = \int_S u_{iv}^{(k)} u_{iv}^{(l)} dS, \quad (8)$$

где S – поверхность тела.

Решение представляет собой ряд Фурье:

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k. \\ u_i &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_i^{(k)}; \quad \varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon_{ij}^{(k)}; \quad \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma_{ij}^{(k)}. \end{aligned} \quad (9)$$

В условиях второй основной задачи теории упругости, когда на границы тела заданы перемещения ее точек u_{iv} , коэффициенты Фурье вычисляются следующим образом:

$$c_k = \int_S u_{iv} u_{iv}^{(k)} dS. \quad (10)$$

5. Решение задачи

Рассмотрим решение динамической задачи для конечного кругового цилиндра. Материал цилиндра – алевролит крупный темно-серый [15]. До начала решения в методе граничных состояний проводится обезразмеривание параметров задачи [16]. После процедуры:

– упругие характеристики материала: $E_{z_0} = 6.21$; $E_r = 5.68$; $G_r = 2.29$; $G_{z_0} = 2.55$;
 $\nu_{z_0} = 0.22$; $\nu_r = 0.24$;

– цилиндр занимает объем $V = \{(r, z_0) \mid 0 \leq r \leq 1, -2 \leq z_0 \leq 2\}$;

– плотность материала $\rho = 2$;

– скорость распространения возмущения $c = 0.25$.

С практической точки зрения интерес составляют возмущения, являющиеся гармоническими во времени. Пусть на боковой поверхности цилиндра в осевом направлении заданы перемещения по такой функции, изменяющейся от координаты z_0 , чтобы после подстановки $z_0 = z - ct$ перемещения изменялись по циклическому закону, а не устремлялись в бесконечность.

Пусть граничные условия (ГУ) на участках поверхности цилиндра заданы следующим образом:

$$\text{Граница 1:} \quad u = -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi z_0}{2}\right); w = 0 \mid r = 1, -2 \leq z_0 \leq 2;$$

Граница 2: $u = \frac{1}{2}; w = 0 \mid z_0 = -2, 0 \leq r \leq 1 \}$; (11)

Граница 3: $u = \frac{1}{2}; w = 0 \mid z_0 = 2, 0 \leq r \leq 1 \}$.

Если проводить решение задачи, используя граничные условия непосредственно в форме (11), то полученное решение будет удовлетворять граничным условиям (с определенной погрешностью) лишь на области $-2 \leq z_0 \leq 2$. После обратной параметризации при фиксированной координате $-2 \leq z \leq 2$ и увеличении времени будет наблюдаться односторонние осцилляции компонент упругого поля, что не будет соответствовать поставленной задаче в гармонической форме.

Здесь необходимо представить функцию $u = -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi z_0}{2}\right)$ в виде степенного ряда:

$$u = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n \pi^{2n} z_0^{2n}}{(2n)! 4^n}. \quad (12)$$

Предположим, что нужно обеспечить сходимость рядов на конечном интервале времени $0 \leq t \leq 20$, при этом гарантированно не будет осцилляций? если удерживать 15 первых членов ряда, т.е. последний член ряда имеет переменную z_0^{28} .

Если использовать полный ряд (12) в качестве граничных условий, то восстановить в рамках одной задачи упругое поле, удовлетворяющее на границе заданному полю перемещений на принятом интервале времени, не представляется возможным. В данном случае возникает необходимость в использовании принципа независимости действия сил и, как следствие, в решении 15 отдельных краевых задач.

На боковой поверхности цилиндра при $n = 0$ ГУ: $u = 1/2$ и $w = 0$. В этой и последующих задачах граничные условия (11) на торцовых поверхностях (границы 2 и 3) остаются без изменений. Знаки и коэффициенты при членах ряда будут учитываться в окончательном решении.

В таблице приведен вид функций компонент вектора перемещения в базисных элементах пространства Ξ (показано 8 элементов).

Компоненты вектора перемещения ортонормированного базиса

N	u	w
ξ_1	$0.1624r$	$-0.3072z_0$
ξ_2	$-0.4425r$	$-0.1128z_0$
ξ_3	$0.1856rz_0$	$0.0838r^2 - 0.1805z_0^2$
ξ_4	$-0.2469rz_0$	$0.4366r^2 - 0.1648z_0^2$
ξ_5	$-0.3301r - 0.0617r^3 + 0.239rz_0^2$	$z_0(0.3081 + 0.2334r^2 - 0.1593rz_0^2)$
ξ_6	$0.4492r - 0.0882r^3 - 0.2235rz_0^2$	$z_0(-0.3104 + 0.6446r^2 - 0.0635z_0^2)$
ξ_7	$z_0(-0.2446r - 0.1417r^3 + 0.1738rz_0^2)$	$-0.025r^2 - 0.032r^4 + 0.174z_0^2 + 0.275r^2z_0^2 - 0.89z_0^4$
ξ_8	$z_0(0.6952r - 0.1147r^3 - 0.2118rz_0^2)$	$-0.17r^2 - 0.124r^4 - 0.318z_0^2 + 0.514r^2z_0^2 + 0.004z_0^4$

Решение первой задачи является строгим: $u = 1/2r$; $w = 0$. Потребовалось всего два элемента базиса. Коэффициенты Фурье (10): $c_1 = 0.365513$; $c_2 = -0.995691$.

Граничные условия на боковой поверхности во второй задаче ($n = 1$) имеют вид: $u = z_0^2/8$ и $w = 0$.

Для решения задачи используем базис внутренних состояний из 20 элементов. Оценку сходимости решения проведем путем сопоставления заданных ГУ с полученными в ходе решения. Штриховая линия – заданные граничные условия, сплошная – полученные в результате решения. На рис. 2 показаны граничные условия при использовании пяти членов ряда, а на рис. 3 – при 20.

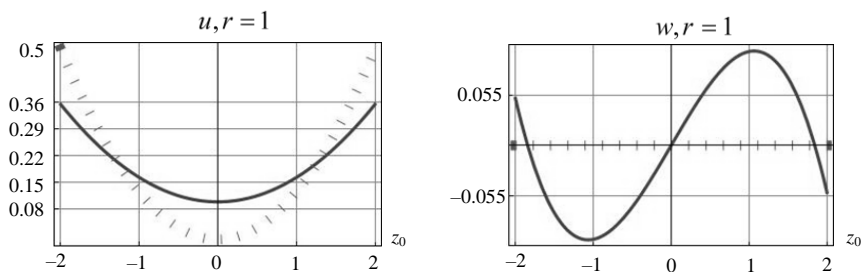


Рис. 2. Восстановленные перемещения на границе при 5 элементах базиса
Fig. 2. Reconstructed displacements at the boundary with 5 basis elements

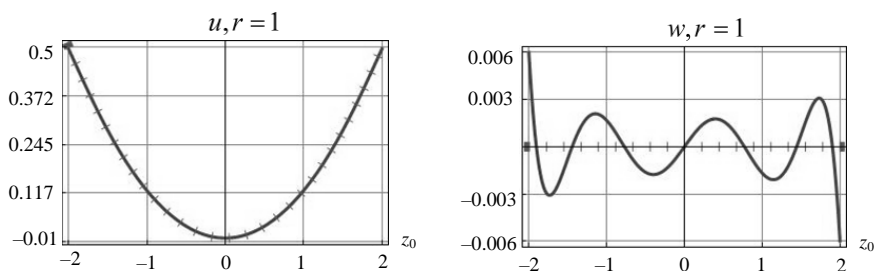


Рис. 3. Восстановленные перемещения на границе при 20 элементах базиса
Fig. 3. Reconstructed displacements at the boundary with 20 basis elements

Далее покажем решение задачи для последнего члена ряда (12) со степенью $n = 28$. ГУ имеют вид: $u = z_0^{28}/536870912$ и $w = 0$.

Для решения данной задачи уже потребовался базис из 60 элементов. Рисунок 4 представляет собой сумму Бесселя. График позволяет косвенным образом судить о сходимости решения.

На рис. 5 представлена верификация граничных условий на одной торцевой и боковой поверхностях.

Максимальная погрешность составила 3.38%. С увеличением числа используемых элементов базиса погрешность уменьшается.

Окончательное решение, представляющее собой сумму решений всех задач, умноженных на соответствующие коэффициенты, согласно (12) и подстановке в решение $z_0 = z - ct$.

На рис. 6 показана верификация граничных условий окончательного решения на боковой поверхности цилиндра в момент времени $t = 0$.

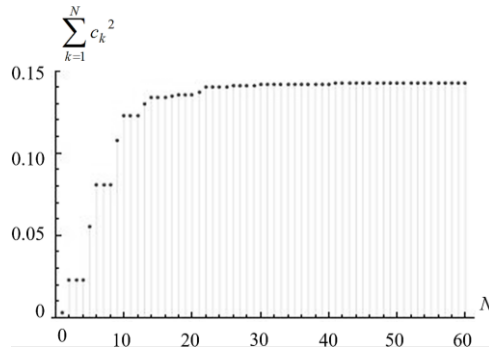
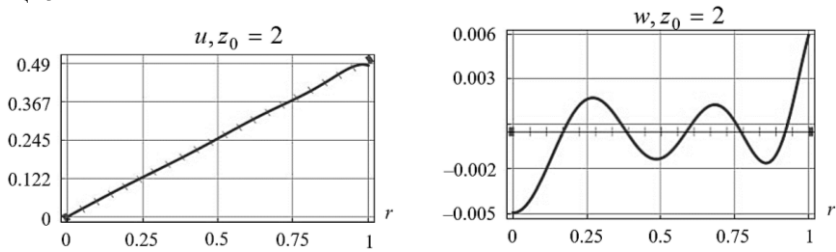


Рис. 4. Сумма Бесселя
Fig. 4. Bessel sum

Граница 3



Граница 1

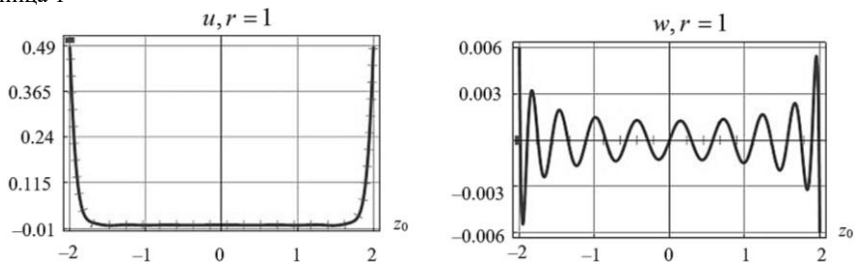


Рис. 5. Верификация граничных условий в пятнадцатой задаче
Fig. 5. Verification of boundary conditions in the fifteenth problem

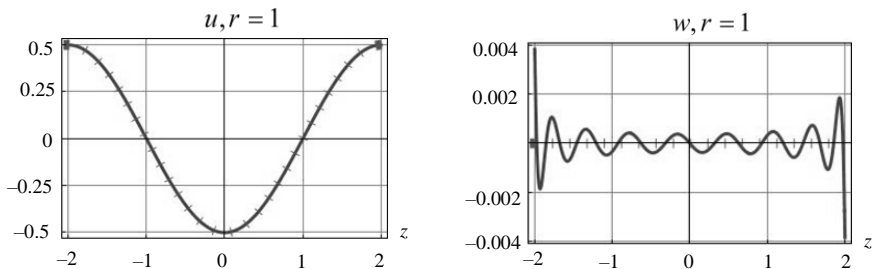


Рис. 6. Верификация граничных условий окончательного решения
Fig. 6. Verification of boundary conditions of the final solution

Благодаря тому, что ряд (12) является знакочередующимся, погрешности от каждой задачи не суммируются.

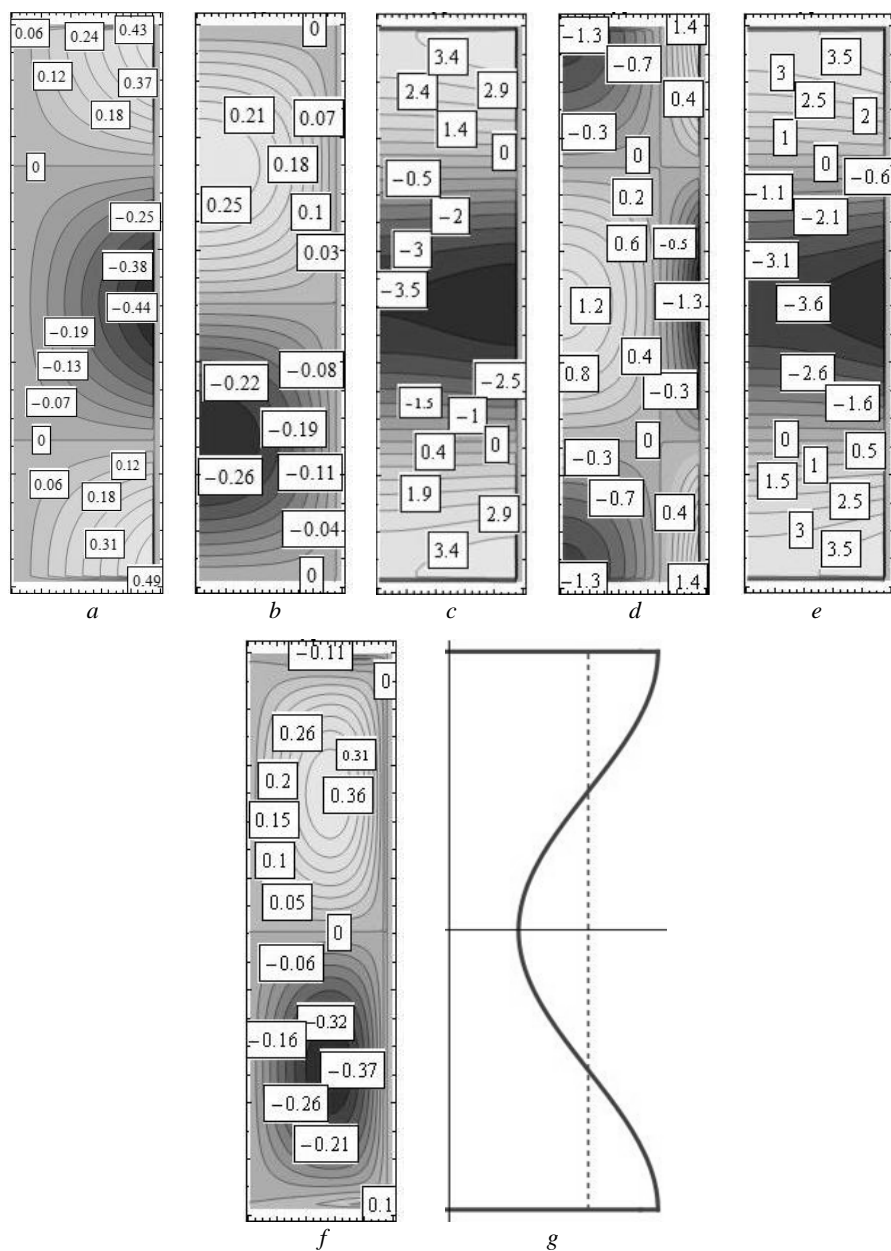


Рис. 7. Изолинии: a – перемещение u , b – перемещение w , c – напряжение σ_{rr} , d – напряжение σ_{zz} , e – напряжение $\sigma_{\theta\theta}$, f – напряжение σ_{zr} , g – контур деформированного состояния

Fig. 7. Isolines of (a) displacement u , (b) displacement w , (c) stress σ_{rr} , (d) stress σ_{zz} , (e) stress $\sigma_{\theta\theta}$, and (f) stress σ_{zr} , (g) contour of the deformed state

Изолинии компонент упругого поля окончательного решения имеют полиномиальный вид и представлены в виде изолиний (в явном виде необозримы) на рис. 7. С учетом осевой симметрии компонент упругого поля относительно оси вращения показано меридианное сечение с $0 \leq r \leq 1$ и $-2 \leq z \leq 2$. На рис. 7, *g* сплошной линией показан контур деформированного состояния, штриховой – недеформированного. В силу малости упругих деформаций контур показан в гипертрофированном виде.

Все полученные компоненты упругого поля строго удовлетворяют уравнениям (1)–(5).

Заключение

В работе решение стационарно-динамической задачи теории упругости в условиях, когда на границе тела заданы перемещения, строится следующим образом. По условию задачи, возмущения распространяются с постоянной скоростью c , что позволило ввести подвижную координату $z_0 = z - ct$ и использовать общее решение плоской стационарной задачи эластостатики (7) для трансверсально-изотропной среды с поправками на комплексные параметры среды и корни характеристического уравнения (теперь в нем учитываются скорость c и плотность ρ). На основе общего решения, определяющего упругие деформации и напряжения двумерного состояния тела, строится конечное множество плоских вспомогательных состояний. Далее по формулам (6) осуществляется переход к множеству пространственных осесимметричных состояний. Это множество определяет пространства внутренних и граничных состояний в аппарате метода граничных состояний. Затем пространства состояний ортонормируются «по перемещениям», используя перекрестные скалярные произведения (8). Окончательно искомые векторы и тензоры разлагаются в ряды (9) с одинаковыми коэффициентами Фурье (10).

В условиях второй основной задачи, когда в динамической задаче за возмущения принимаются перемещения точек границы и носят, например, колебательный характер, заданную гармоническую функцию необходимо разложить в степенной ряд с определенной точностью. Далее для каждого члена ряда проводится решение отдельной задачи, и затем полученные решения суммируются. Однако ввиду того, что ортонормированный базис как самая энергоемкая в плане машинного времени процедура строится один раз и используется в решении каждой задачи, решение множества задач не вызывает принципиальных трудностей. Следует только «наполнить» пространства состояний достаточным числом элементов для возможности решать задачи с большим показателем u степенной функции, так как там заданные перемещения носят практически сингулярный характер (левый график на рис. 5 границы 3).

В перспективе можно редуцировать решение несимметричных стационарно-динамических задач для анизотропных тел. Методика решения стационарных неосесимметричных краевых задач показана в работе [17], а методика построения упругих полей от действия неосесимметричных объемных сил – в работе [18].

Список источников

1. Мехтиев М.Ф., Ахмедов Н.К., Юсубова С.М. Асимптотическое поведение решения осесимметричной динамической задачи теории упругости для трансверсально-изотропного сферического слоя малой толщины // Известия вузов. Северо-Кавказский

- регион. Сер. Естественные науки. 2020. № 2 (206). С. 61–71. doi: 10.18522/1026-2237-2020-2-61-71
2. Фридман Л.И., Моргачев К.С. Решение стационарной динамической задачи для кольцевой пластины в рамках модели Тимошенко // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки. 2005. № 34. С. 68–71.
 3. Низомов Д.Н., Ходжибоев О.А., Ходжибоев А.А. Граничные уравнения динамической задачи теории упругости // Доклады Академии наук Таджикистана. 2014. Т. 57, № 11-12. С. 850–855.
 4. Приказчиков Д.А., Коваленко Е.В. Выбор потенциалов в трехмерных задачах динамической теории упругости // Инженерный журнал: наука и инновации. 2012. № 2 (2). С. 131–137.
 5. Ермоленко Г.Ю. Решение динамической задачи анизотропной теории упругости со смешанными краевыми условиями // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки. 2003. № 19. С. 19–21.
 6. Терпугов В.Н. О возможности построения конечно-элементных алгоритмов для динамических задач теории упругости // Вестник Пермского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2007. № 7. С. 140–144.
 7. Немчинов В.В. Двухслойная разностная схема численного решения плоских динамических задач теории упругости // Вестник МГСУ. 2012. № 8. С. 104–111.
 8. Зеленцов В.Б. Об одном методе решения нестационарных динамических контактных задач теории упругости об ударе // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2010. № 6. С. 35–40.
 9. Галабурдин А.В. Применение метода граничных интегральных уравнений к решению задач о движущейся нагрузке // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Сер. Естественные науки. 2015. № 1(185). С. 9–11.
 10. Бабешко В.А., Уафа С.Б. и др. О динамической контактной задаче с двумя деформируемыми штампами // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24. вып. 1. С. 4–13. doi: 10.18500/1816-9791-2024-24-1-4-13
 11. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости (применение методов теории функций комплексного переменного). М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. 464 с.
 12. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Госиздат техн.-теор. лит., 1955. 491 с.
 13. Пеньков В.Б., Пеньков В.В. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики // Дальневосточный математический журнал. 2001. Т. 2, № 2. С. 115–137.
 14. Сатакина Л.В. Нарращивание базиса пространства состояний при жестких ограничениях к энергоемкости вычислений // Сборник тезисов докладов научной конференции студентов и аспирантов Липецкого государственного технического университета. Липецк, 2007. С. 130–131.
 15. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. 2-е изд. М.: Наука, 1977. 416 с.
 16. Левина Л.В., Новикова О.С., Пеньков В.Б. Полнопараметрическое решение задачи теории упругости односвязного ограниченного тела // Вестник Липецкого государственного технического университета. 2016. № 2 (28). С. 16–24.
 17. Иванычев Д.А. Решение неосесимметричной задачи эластостатики для трансверсально-анизотропного тела вращения // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2022. № 2 (101). С. 4–21. doi: 10.18698/1812-3368-2022-2-4-21
 18. Иванычев Д.А., Левина Л.В. Определение неосесимметричных упругих полей в анизотропных телах вращения, вызванных действием объемных сил // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2022. № 4 (103). С. 22–38. doi: 10.18698/1812-3368-2022-4-22-38

References

1. Mekhtiev M.F., Akhmedov N.K., Yusubova S.M. (2020) Asimptoticheskoe povedenie resheniya osesimmetrichnoy dinamicheskoy zadachi teorii uprugosti dlya transversal'no-izotropnogo sfericheskogo sloya maloy tolshchiny [Asymptotic behavior of the solution of an axisymmetric dynamic problem of elasticity theory for a transversely isotropic spherical layer of small thickness]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Seriya: Estestvennye nauki – Bulletin of Higher Education Institutes. North Caucasus Region. Natural Sciences*. 2(206). pp. 61–71. doi: 10.18522/1026-2237-2020-2-61-71
2. Fridman L.I., Morgachev K.S. (2005) Reshenie statsionarnoy dinamicheskoy zadachi dlya kol'tsevoy plastiny v ramkakh modeli Timoshenko [Solution of a stationary dynamic problem for an annular plate within the framework of the Timoshenko model]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki – Journal of Samara State Technical University. Physical and Mathematical Sciences*. 34. pp. 68–71.
3. Nizomov D.N., Khodzhiboev O.A., Khodzhiboev A.A. (2014) Granichnye uravneniya dinamicheskoy zadachi teorii uprugosti [Boundary equations of the dynamic problem of elasticity theory]. *DAN RT*. 57. 11–12. pp. 850–855.
4. Prikazchikov D.A., Kovalenko E.V. (2012) Vybore potentsialov v trekhmernykh zadachakh dinamicheskoy teorii uprugosti [Choice of potentials in three-dimensional problems of dynamic elasticity theory]. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii – Engineering Journal: Science and Innovation*. 2(2). pp. 131–137.
5. Ermolenko G.Yu. (2003) Reshenie dinamicheskoy zadachi anizotropnoy teorii uprugosti so smeshannymi kraevymi usloviyami [Solution of a dynamic problem of anisotropic elasticity theory with mixed boundary conditions]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki – Journal of Samara State Technical University. Physical and Mathematical Sciences*. 19. pp. 19–21.
6. Terpugov V.N. (2007) O vozmozhnosti postroyeniya konechno-elementnykh algoritmov dlya dinamicheskikh zadach teorii uprugosti [On the possibility of developing finite element algorithms for dynamic problems in the theory of elasticity]. *Vestnik Permskogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika – Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*. 7. pp. 140–144.
7. Nemchinov V.V. (2012) Dvukhsloynnaya raznostnaya skhema chislennogo resheniya ploskikh dinamicheskikh zadach teorii uprugosti [Two-layer difference scheme for numerical solution of plane dynamic problems of elasticity theory]. *Vestnik MGSU*. 8. pp. 104–111.
8. Zelentsov V.B. (2010) Ob odnom metode resheniya nestatsionarnykh dinamicheskikh kontaktnykh zadach teorii uprugosti ob udare [On one method for solving non-stationary dynamic contact problems of elasticity theory on impact]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki – Bulletin of Higher Education Institutes. North Caucasus Region. Natural Sciences*. 6. pp. 35–40.
9. Galaburdin A.V. (2015) Primenenie metoda granichnykh integral'nykh uravneniy k resheniyu zadach o dvizhushchey nagruzke [Application of the method of boundary integral equations to solving problems of moving loads]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Seriya: Estestvennye nauki – Bulletin of Higher Education Institutes. North Caucasus Region. Natural Sciences*. 1(185). pp. 9–11.
10. Babeshko V.A., Ufa S.B., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Telyatnikov I.S (2024) O dinamicheskoy kontaktnoy zadache s dvumya deformiruemyimi shtampami [On a dynamic contact problem with two deformable stamps]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika – Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 24(1). pp. 4–13. doi: 10.18500/1816-9791-2024-24-1-4-13
11. Aleksandrov A.Ya., Solov'ev Yu.I. (1978) *Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti (primenenie metodov teorii funktsii kompleksnogo peremennogo)* [Spatial problems of the theory of elasticity (application of methods of the theory of functions of a complex variable)]. Moscow: Nauka.

12. Lur'e A.I. (1955) *Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti* [Spatial problems of the theory of elasticity]. Moscow: Gosizdat tekhniko-teoreticheskoy literatury.
13. Pen'kov V.B., Pen'kov V.V. (2001) Metod granichnykh sostoyaniy dlya resheniya zadach lineynoy mekhaniki [The method of boundary states for solving problems of linear mechanics]. *Dal'nevostochnyi matematicheskii zhurnal – Far Eastern Mathematical Journal*. 2(2). pp. 115–137.
14. Satalkina L.V. (2007) Narashchivanie bazisa prostranstva sostoyaniy pri zhestkikh ogranicheniyakh k energoemkosti vychisleniy [Expansion of the basis of the state space with severe limitations on the energy consumption of computations]. *Sbornik tezisev dokladov nauchnoy konferentsii studentov i aspirantov Lipetskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*. pp. 130–131.
15. Lekhnitskiy S.G. (1977) *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela* [The theory of elasticity of an anisotropic body]. Moscow: Nauka.
16. Levina L.V., Novikova O.S., Pen'kov V.B. (2016) Polnoparametricheskoe reshenie zadachi teorii uprugosti odnosvyaznogo ogranichennoy tela [Full-parameter solution of the problem of the theory of elasticity of a simply connected bounded body]. *Vestnik LGTU*. 2(28). pp. 16–24.
17. Ivanychev D.A. (2022) Reshenie neosesimmetrichnoy zadachi elastostatiki dlya transversal'no-izotropnogo tela vrashcheniya [Solution of a non-axisymmetric elastostatics problem for a transversely isotropic body of rotation]. *Vestnik MGTU im. N.E. Bauman. Ser. Estestvennye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*. 2(101). pp. 4–21. doi: 10.18698/1812-3368-2022-2-4-21
18. Ivanychev D.A., Levina L.V. (2022) Opredelenie neosesimmetrichnykh uprugikh poley v anizotropnykh telakh vrashcheniya, vyzvannykh deystviem ob'emnykh sil [Determination of non-axisymmetric elastic fields in anisotropic bodies of rotation caused by the action of body forces]. *Vestnik MGTU im. N.E. Bauman. Ser. Estestvennye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*. 3(103). pp. 22–38. doi: 10.18698/1812-3368-2022-4-22-38

Сведения об авторе:

Иванычев Дмитрий Алексеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей механики Липецкого государственного технического университета (Липецк, Россия). E-mail: Lsivdmal@mail.ru

Information about the author:

Ivanychev Dmitriy A. (Candidate of Physics and Mathematics, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russian Federation). E-mail: Lsivdmal@mail.ru

Статья поступила в редакцию 07.12.2024; принята к публикации 06.09.2025

The article was submitted 07.12.2024; accepted for publication 06.09.2025

Научная статья

УДК 532.54

doi: 10.17223/19988621/97/9

Улавливание капель при охлаждении оборотной воды в испарительных градирнях

Ирина Вениаминовна Моренко¹, Владимир Леонидович Федяев²

*^{1, 2} Институт механики и машиностроения Казанского научного центра
Российской академии наук, Казань, Россия*

¹ i.v.morenko@yandex.ru

² vlfed2020@gmail.com

Аннотация. Рассматривается инерционное улавливание капель воды в жалюзийных водоуловителях градирен с использованием методов математического моделирования. Движение газовзвеси в свободном пространстве описывается с применением эйлераво-лагранжева подхода. Турбулентное течение несущей среды (воздуха) моделируется осредненными по Рейнольдсу уравнениями Навье–Стокса. В уравнении движения капель учитываются силы тяжести и аэродинамического сопротивления. На основе анализа результатов расчетов формулируются требования по повышению эффективности каплеуловителей. Предлагается новая V-образная форма лопаток.

Ключевые слова: каплеуловитель, математическое моделирование, эйлераво-лагранжев подход, инерционное улавливание капель

Для цитирования: Моренко И.В., Федяев В.Л. Улавливание капель при охлаждении оборотной воды в испарительных градирнях // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 97. С. 130–142. doi: 10.17223/19988621/97/9

Original article

Droplet capture during cooling of recirculated water in evaporative cooling towers

Irina V. Morenko¹, Vladimir L. Fedyayev²

*^{1, 2} Institute of Mechanics and Engineering of the Kazan Scientific Center
of the Russian Academy of Sciences, Kazan, Russian Federation*

¹ i.v.morenko@yandex.ru

² vlfed2020@gmail.com

Abstract. The inertial capture of water droplets in the louvered drift eliminators of industrial cooling towers is studied using mathematical modeling methods. The motion of the air carrying water droplets within a periodic cell of the drift eliminator formed by two adjacent blades is described based on the Euler–Lagrange approach. The droplet capture efficiency is assessed for common corner-like and trapezoidal blade shapes.

From the analysis of the airflow patterns and droplet trajectories within the periodic cell, the requirements are formulated to improve the blade efficiency. In particular, to ensure high droplet capture efficiency, it is desirable to minimize the number of airflow turns within the periodic cell while simultaneously increasing the air velocity magnitude. For a general assessment of the performance of the drift eliminator design, a complex criterion is proposed that incorporates weighting factors accounting for the significance of the amount of droplet capture, aerodynamic drag coefficient, and manufacturing cost of the grates.

Keywords: drift eliminator, mathematical modeling, Euler-Lagrange approach, inertial droplet trapping

For citation: Morenko, I.V., Fedyaev, V.L. (2025) Droplet capture during cooling of recirculated water in evaporative cooling towers. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 97. pp. 130–142. doi: 10.17223/19988621/97/9

Введение

Для охлаждения оборотной воды в теплоэнергетике, химической, нефтехимической, других отраслях промышленности широко применяются башенные, вентиляторные, а также эжекционные градирни. При эксплуатации испарительных градирен охлаждение воды происходит при непосредственном контакте ее с атмосферным воздухом, вследствие чего в рабочих областях этих градирен находится воздушно-капельная смесь. Для предотвращения капельного выброса воды в окружающую среду на пути восходящих воздушных потоков, содержащих капли воды диаметром около 30–300 мкм, над водораспределительной системой градирен размещаются водоулавливающие устройства [1].

Инерционные каплеуловители жалюзийного типа представляют собой решетки профилей с поперечным сечением в форме волны, уголка, трапеции и др. Лопатки профилей крепятся между собой соединительными элементами. При движении между лопатками воздушные потоки отклоняются от первоначального направления, огибают их. Под влиянием сил инерции капли сталкиваются с поверхностью и оседают на лопатках. Осевшие на лопатках каплеуловителя капли формируют пленку жидкости, которая под действием силы тяжести стекает вниз.

При разработке, эксплуатации каплеуловителей возникает ряд проблем, в частности необходимость повышения коэффициента улавливания, уменьшение добавочного сопротивления движению воздушных потоков. Кроме того, следует увеличить ресурс этих устройств при минимальных затратах материалов. Один из вариантов решения этих проблем – математическое моделирование движения воздушных потоков, капель воды с целью отыскания рациональных технических решений.

В начале прошлого века первые образцы каплеуловителей изготавливались из дерева. Для предотвращения разрушения деревянные конструкции приходилось постоянно обрабатывать специальными растворами. Замена деревянных конструкций на полимерные позволила снизить затраты на их изготовление. Пластмассовые конструкции менее требовательны при эксплуатации, их ресурс значительно больше, чем у деревянных аналогов.

В градирнях охлаждаемая вода разбрызгивается форсунками. Холодный воздух и капли воды двигаются в противоположных направлениях. Основная масса воды под действием силы тяжести стекает вниз. Тем не менее 5–7% от всей массы

воды в виде капель уносится вместе с восходящими воздушными потоками [2] и достигает решеток каплеуловителей. Чем выше скорость воздуха, тем больше доля увлекаемых воздухом капель. При эксплуатации градирен скорость воздуха обычно не превосходит 2,5–3 м/с. Следует отметить, что допустимый предел выноса воды составляет 0,05–0,2% от общего объема подаваемой воды.

Поскольку жалюзийный каплеуловитель представляет собой решетку профилей лопаток, для оценки эффективности их работы достаточно рассмотреть движение двухфазной среды в ячейке периодичности, образованной двумя смежными лопатками. Определим число Рейнольдса по формуле $Re = H_{vod} u_0 / \nu$ (H_{vod} – шаг решетки, u_0 – скорость набегающего потока, ν – кинематическая вязкость воздуха). При характерных значениях параметров Re составляет порядка $10^3 \div 10^4$, что соответствует турбулентному характеру движения несущей среды. Для разработки новых форм лопаток каплеуловителей требуется знание аэродинамических характеристик течения сред. Важные теоретические аспекты эксплуатации водоуловителей, а также результаты технологических испытаний приводятся в работе [1]. В частности, найдены отношение капельного уноса к расходу воды, сопротивление каплеуловителей, максимально допустимая скорость их эксплуатации. Экспериментальные исследования показателей каплеуловителей, в основном сетчатого и сотового типов, приведены в [3]. В работе [4] подчеркивается, что потоки двухфазной среды между лопатками жалюзийного каплеуловителя являются турбулентными. Поэтому авторы достаточно подробно анализируют эффективность и вычислительные затраты различных подходов к моделированию турбулентности. В [5] оценка потерь воды в градириях за счет испарения капель получена с использованием результатов численного исследования, базирующегося на эйлерово-лагранжевом подходе.

Цель данной работы – численное исследование работы каплеуловителей с известной конфигурацией поперечного сечения лопаток, выработка рекомендаций по их проектированию, предложение новой формы лопаток инерционного каплеуловителя.

Математическая модель движения воздуха и капель в ячейке периодичности каплеуловителя

Схемы ячеек периодичности широко применяемых уголкового, трапециевидного каплеуловителей, а также предложенного каплеуловителя с V-образной формой лопаток представлены на рис. 1. В ячейке периодичности снизу вверх движется поток воздуха с каплями воды. При моделировании движения двухфазных потоков необходимо знать закономерности процессов динамического взаимодействия частиц дисперсной фазы с несущей [6]. Данным проблемам посвящены экспериментальные и теоретические исследования [7–10]. Достаточно низкая концентрация капель в несущем потоке воздуха и необходимость отслеживания траекторий движущихся капель делают предпочтительным выбор эйлерово-лагранжева подхода для моделирования движения сред, когда в рамках эйлерова описания характеристики несущей среды рассматриваются как функции пространственных координат и времени, а траектории отдельных капель рассчитываются в переменных Лагранжа. Тестирование данного подхода было выполнено авторами ранее для случая обтекания цилиндрического тела неоднородной средой [11].

Поскольку профиль скорости воздуха в нижнем сечении решетки неизвестен, чтобы избежать неопределенности при постановке граничных условий в этом сечении, исходная расчетная область Ω дополняется подобластью непосредственно перед решеткой с границами Γ_{sym} и Γ_{in} . Данная процедура позволит точнее рассчитать картину течения сред.

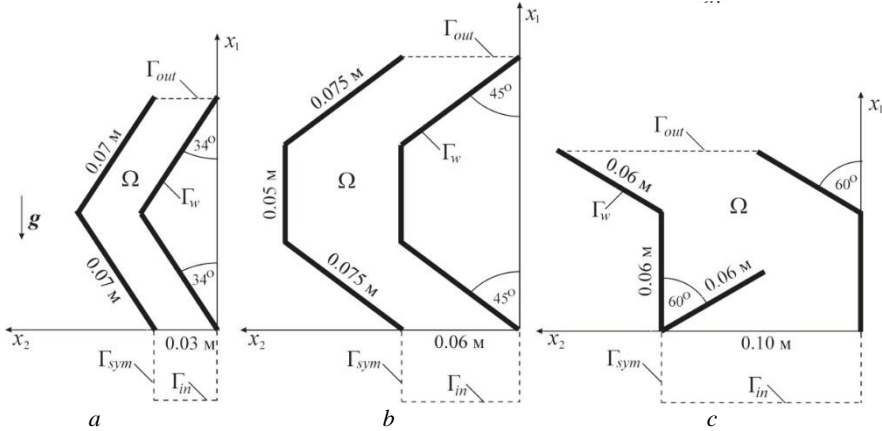


Рис. 1. Схемы ячеек периодичности каплеуловителей:

a – уголкового, *b* – трапециевидного, *c* – предложенного

Fig. 1. Patterns of periodicity cells of drift eliminators:

(*a*) corner-like, (*b*) trapezoid, and (*c*) proposed shape

Предположим, что потоки воздуха двумерны, сжимаемость его не учитывается. Течение считается изотермическим. В работе [4] показано, что при моделировании турбулентного режима движения воздуха в каплеуловителях, основанном на решении осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса (RANS) и на описании течения с помощью метода крупных вихрей (LES), когда большие вихри рассчитываются, а мелкие моделируются, вычислительные затраты для подхода LES в 7–10 раз выше, чем для RANS. Учитывая это обстоятельство, в данной работе при описании турбулентного движения воздуха (несжимаемой жидкости) в области Ω относительно локальной системы координат x_1Ox_2 воспользуемся осредненными по Рейнольдсу уравнениями Навье–Стокса

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu_{eff} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right] - \bar{f}_{pi}. \quad (2)$$

Здесь t – время; u_i, u_j – компоненты осредненного вектора скорости \mathbf{u} ; p – осредненное давление; ρ – плотность жидкости; $\mu_{eff} = \mu + \mu_T$ – эффективная вязкость; $\mu = \rho \nu$ – коэффициент динамической вязкости жидкости; μ_T – турбулентная, или вихревая, вязкость; δ_{ij} – символ Кронекера; k – кинетическая энергия турбулентности; g_i – компоненты ускорения свободного падения; \bar{f}_{pi} – источниковый член, учитывающий влияние капель на движение воздуха. Уравнения (1)–(2) за-

мыкаются моделью турбулентности Ментера SST [12], и задаются следующие начальные и граничные условия.

В начальный момент времени $t = 0$: среда покоится, $u_i = 0$, $p = p_0$.

На входе в расчетную область Γ_{in} : $u_1 = u_0$, $u_2 = 0$, $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$. При этом интенсивность турбулентности $Tu_0 = 5\%$, масштаб турбулентности $L_f = 0.07H_{vod}$, H_{vod} – расстояние между пластинами. Соответствующие значения кинетической энергии турбулентности $k = \frac{3Tu_0^2 u_0^2}{2}$, удельной турбулентной диссипации $\omega = \frac{k^{1/2}}{C_\mu^{1/4} L_f}$ рассчитываются по заданным на входной границе Tu_0 , L_f ; здесь C_μ – эмпирическая постоянная ($C_\mu = 0.09$).

На поверхностях лопаток Γ_w задаются условия прилипания: $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$, $k = 0$, $\omega = 10 \frac{6\nu}{\beta_1 d_1^2}$. Здесь $\beta_1 = 0.075$ – константа, d_1 – расстояние от центра пристеночной ячейки до границы расчетной области.

В выходном сечении Γ_{out} : $\frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0$, $p = p_0$, $\frac{\partial k}{\partial n} = 0$, $\frac{\partial \omega}{\partial n} = 0$.

На участках границы Γ_{sym} ставятся условия симметрии: $\frac{\partial u_1}{\partial n} = 0$, $\frac{\partial u_2}{\partial n} = 0$, $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$, $\frac{\partial k}{\partial n} = 0$, $\frac{\partial \omega}{\partial n} = 0$.

Считается [2], что объемная концентрация дисперсной фазы при реальных гидравлических нагрузках градиент не превышает $2 \cdot 10^{-3}$. Следовательно, можно пренебречь взаимным влиянием отдельных капель в математической модели. Для простоты будем считать, что капли имеют сферическую форму с диаметром d_p , их дробление, слияние, вращение не учитываются.

Пусть $\mathbf{u}_p = (u_{px}, u_{py})$ – вектор скорости центра масс капли. Траектория его движения в прямоугольной декартовой системе координат xOy , совпадающей с x_1Ox_2 , описывается соотношениями

$$\frac{dx}{dt} = u_{px}, \quad \frac{dy}{dt} = u_{py}. \quad (3)$$

Здесь $x = x(t)$, $y = y(t)$ – уравнения движения капли.

Согласно второму закону Ньютона уравнение движения центра масс капли имеет вид:

$$m \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = \mathbf{F}_D + \mathbf{F}_g, \quad (4)$$

где сила гидродинамического сопротивления капли \mathbf{F}_D и сила тяжести \mathbf{F}_g определяются соотношениями

$$\mathbf{F}_D = C_D \rho_f \frac{\pi d_p^2}{8} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_p| (\mathbf{u} - \mathbf{u}_p), \quad \mathbf{F}_g = m_p \mathbf{g}.$$

Коэффициент сопротивления C_D зависит от числа Рейнольдса $Re_p = \frac{d_p |\mathbf{u} - \mathbf{u}_p|}{\nu_f}$,

рассчитанного по диаметру капли и модулю вектора относительной скорости. Если принять во внимание, что относительная скорость капель может варьировать от 0 до некоторого максимального значения, равного модулю скорости воздуха в сечении решетки каплеуловителя (около 3 м/с), и ограничиться расчетом движения капель диаметром не больше 10^{-3} м, то получим, что числа Рейнольдса Re_p не превышают 250. В данном случае для расчета коэффициента сопротивления

можно воспользоваться выражением $C_D = \frac{24}{Re_p} (1 + 0.15 Re_p^{0.687})$, справедливым

при $Re_p \leq 1000$. Обратное влияние капель на поток несущей среды учитывается в уравнениях (2) на каждом временном шаге с использованием источникового

члена $\mathbf{f}_p = - \sum_{k=1}^{N_p} \mathbf{F}_{D,k} / \rho V_{cell}$, где N_p – число капель в объеме ячейки сетки V_{cell} . Далее

ради простоты считается, что капли на границе Γ_{in} распределены равномерно, компоненты векторов скоростей воздуха и капель совпадают: $u_{px} = u_0$, $u_{py} = 0$.

Капля считается уловленной, если ее траектория достигает поверхности лопатки.

Система уравнений решается методом контрольных объемов в открытом программном комплексе OpenFOAM. Привлекается решатель DPMFoam. Дискретизация по времени осуществляется при помощи схемы Эйлера, центральная разностная схема используется для градиентов, диффузионного и конвективного слагаемых. Для согласования поля давления с полем скорости применяется алгоритм PIMPLE. Расчетные области покрываются сеткой со сгущением у поверхности лопаток. Для проверки сеточной сходимости задача о движении среды в ячейке периодичности уголкового каплеуловителя решается на трех сетках M_1 , M_2 , M_3 с количеством элементов $3.2 \cdot 10^4$, $5.8 \cdot 10^4$, $1.0 \cdot 10^5$ соответственно. Оценивается перепад давления Δp на входной и выходной границах расчетной области. Показано, что Δp , полученный на сетках M_1 и M_3 , отличается на 3.26%, а разница в перепаде давления, рассчитанном на сетках M_2 и M_3 , составляет 0.55%. Полагается, что при проведении вычислительных экспериментов количество элементов сетки $5.8 \cdot 10^4$ достаточно для получения сеточно-независимого решения.

Результаты расчетов и их обсуждение

В расчетах задаются свойства воздуха $\rho = 1.2$ кг/м³, $\nu = 1.48 \cdot 10^{-5}$ м²/с и воды $\rho_p = 10^3$ кг/м³, $\nu_p = 10^{-6}$ м²/с. Скорость воздуха перед решеткой каплеуловителя u_0 равняется 1.25 и 2.5 м/с. Поля модулей скорости его в ячейках периодичности в случае $u_0 = 2.5$ м/с показаны на рис. 2.

При движении через решетку уголкового каплеуловителя поток воздуха меняет свое направление дважды. При этом в ячейке периодичности наблюдаются области с пониженными скоростями слева в углу вогнутой стенки профиля и за поворотом выпуклой стенки (см. рис. 2, а). Отмечается неравномерный профиль скорости на выходе.

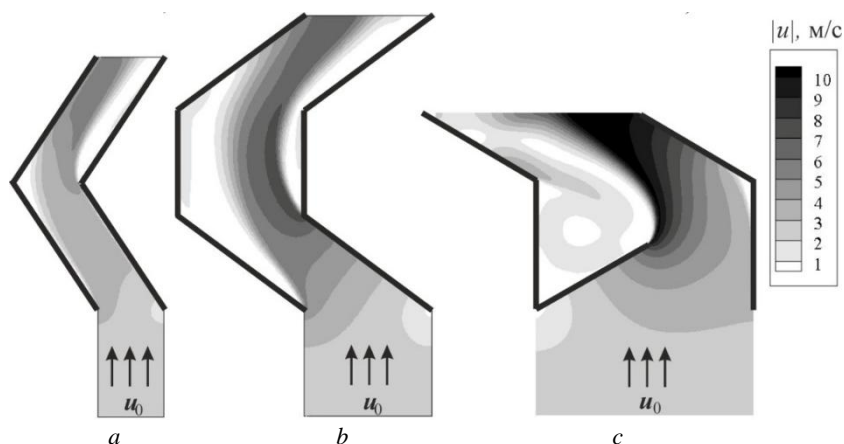


Рис. 2. Поля модуля скорости в ячейках периодичности каплеуловителей с различными профилями лопаток: *a* – уголкового, *b* – трапециевидного, *c* – предложенного
Fig. 2. Velocity module fields in periodicity cells of drift eliminators with various blade profiles: (a) corner-like, (b) trapezoid, and (c) proposed shape

Поток воздуха при прохождении через канал с трапециевидными лопатками меняет направление движения три раза: сначала отклоняется влево от вертикального направления движения, а затем прямо и направо (см. рис. 2, *b*). Вдоль левой стенки поток замедляется, ускоряясь лишь ближе к выходному сечению. За углами правой стенки наблюдается отрыв потока.

Максимальный перепад модуля скорости в ячейке каплеуловителя достигается при V-образной конфигурации лопаток за счет сужения канала (см. рис. 2, *c*), при этом поток дважды меняет направление движения. За выступом формируется вторичное течение. Отметим, что все конфигурации рассматриваемых решеток не имеют вертикального «просвета».

Поскольку в инерционных улавливающих устройствах осаждение капель реализуется за счет изменения направления воздушного потока и его скорости, эффективность их работы во многом зависит от размера капель. В численных расчетах диаметр капель d_p варьирует от 10^{-5} до 10^{-4} м. Показано, что мелкие капли ($d_p < 2 \cdot 10^{-5}$ м) увлекаются потоком воздуха, двигаясь вдоль линий тока. Они практически не оседают на лопатках каплеуловителей. Достаточно крупные капли жидкости ($d_p > 6 \cdot 10^{-5}$ м), двигаясь по первоначальным траекториям, не успевают изменить направление движения, лишь незначительно отклоняясь вблизи поворотов решетки. В результате они осаждаются на поверхности лопаток и считаются уловленными.

Для иллюстрации на рис. 3 представлены траектории движения капель диаметром $d_p = 4 \cdot 10^{-5}$ м в ячейках периодичности каплеуловителей с различными конфигурациями лопаток.

Из результатов расчетов следует, что широко применяемый уголкового каплеуловитель достаточно эффективен. Отмечается осаждение капель на нижней части правой стенки и верхней части левой (см. рис. 3, *a*). Однако данная конструкция обладает недостатком: малый шаг решетки создает высокое аэродинамическое сопротивление.

Траектории капель в ячейке периодичности трапециевидного каплеуловителя показаны на рис. 3, *b*. В области пониженных скоростей воздуха, где модуль скорости меньше u_0 , капли под действием гравитационной силы отклоняются от первоначального направления влево. Осаждение происходит в основном на нижней части правой стенки и верхней части левой. Шаг и высота решетки этой конфигурации больше, чем у уголкового каплеуловителя. На практике отмечаются случаи, когда при возрастании расхода воздуха жесткость данной конструкции оказывается недостаточной и происходит нежелательное «схлопывание» решетки, приводящее к перекрытию восходящих потоков воздуха и нарушению производственного процесса.

Более высокие показатели улавливания можно достичь путем уменьшения шага решетки, однако это повлечет за собой нежелательный рост аэродинамического сопротивления конструкции. Если увеличить расстояние между пластинами, то сопротивление решетки уменьшится, а капли будут свободно выдуваться воздухом в появившийся «просвет» между лопатками.

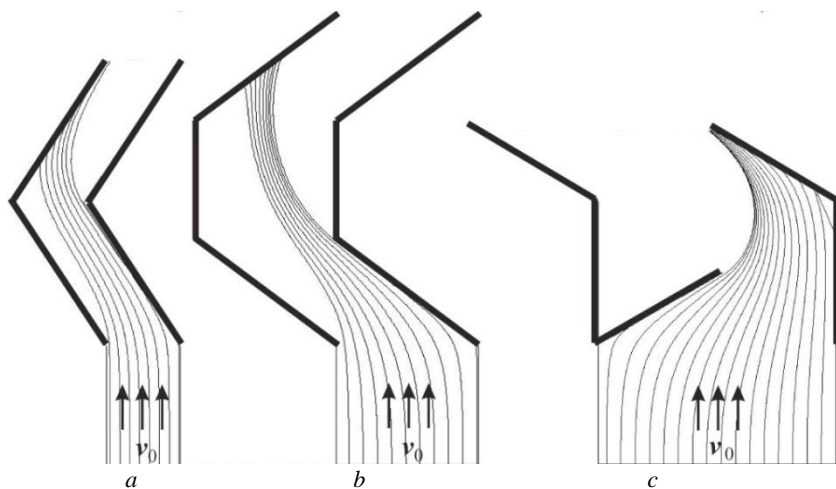


Рис. 3. Траектории капель диаметром $d_p = 40$ мкм в ячейках периодичности каплеуловителей: *a* – уголкового, *b* – трапециевидного, *c* – предложенного при скорости воздуха перед решеткой $u_0 = 2.5$ м/с

Fig. 3. Trajectories of droplets with a diameter of $d_p = 40$ μm in periodicity cells of drift eliminators: (a) corner-like, (b) trapezoid, and (c) proposed shape at a gas velocity in front of the grate of $u_0 = 2.5$ m/s

Таким образом, на основе результатов расчетов полей скорости воздуха и траекторий капель показано, что для обеспечения высокой эффективности улавливающих устройств необходимо, чтобы количество поворотов потока воздуха в ячейке периодичности было бы минимальным, а интенсивность движения воздуха в канале менялась бы по возможности максимально. Данным требованиям соответствует предложенная V-образная конфигурация лопаток (см. рис. 1, *c*). Отметим, что у этого каплеуловителя шаг решетки $H_{\text{vod}} = 0.1$ м и сравнительно малая высота. Высота решетки трапециевидного каплеуловителя составляет $L_{\text{vod}} = 0.14$ м, уголкового – 0.08 м, V-образного – 0.09 м. Как видно из приведенных результатов,

в данном каплеуловителе за счет выступа поток воздуха с каплями разворачивается, далее под действием силы инерции капли оседают на наклонной части правой стенки.

В общем случае эффективность конструкции каплеуловителя определяется тремя показателями: степенью улавливания капель, величиной аэродинамического сопротивления и затратами на производство решеток.

На практике для оценки коэффициента уноса, определяемого как отношение массы жидкости, уносимой за пределы каплеуловителя, к общей массе жидкости, разбрызгиваемой форсунками, необходимо знать объемную долю оборотной воды, которая в виде капель выбрасывается вверх и долетает до решетки, а также долю капель, задержанную вследствие инерционного осаждения. Эффективность каплеуловителя в целом зависит от многих факторов: формы профиля лопаток, шага решетки, скорости воздушного потока, распределения капель по размерам, от угла, под которым капли пересекают сечение решетки и ряда других.

В данной работе акцентируется внимание на оценке эффективности улавливания η , определяемой как доля уловленных капель от общего количества капель на входе в ячейку периодичности, в зависимости от диаметра капель d_p . Результаты расчетов коэффициента эффективности η названных выше конструкций каплеуловителей для двух значений скорости набегающего потока u_0 приводятся на рис. 4. Видно, что в целом все конструкции демонстрируют приемлемую эффективность работы, однако наиболее высокие показатели улавливания наблюдаются у каплеуловителя трапецевидной формы.

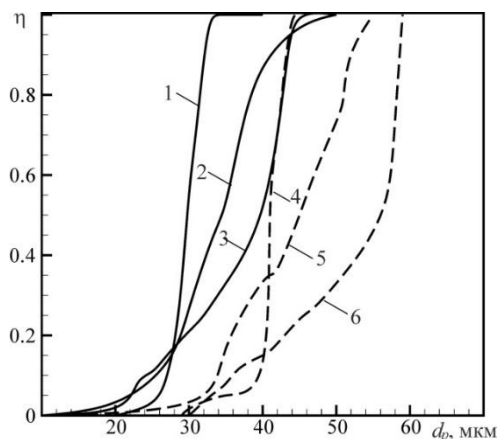


Рис. 4. Эффективность улавливания трапецевидного (1, 4), углового (2, 5), V-образного (3, 6) каплеуловителей в зависимости от диаметра капель при скоростях набегающего потока воздуха 1.25 м/с (4, 5, 6) и 2.5 м/с (1, 2, 3)

Fig. 4. Droplet capture efficiency of the (1, 4) trapezoidal, (2, 5) corner-like, and (3, 6) V-shaped drift eliminators depending on the droplet diameter at an incoming air flow velocity of (4, 5, 6) 1.25 and (1, 2, 3) 2.5 m/s

Вместе с тем у этого каплеуловителя малый шаг решетки, при его изготовлении велики затраты материалов. Показано, что V-образный каплеуловитель предпочтительнее использовать для сравнительно крупных капель $d_p > 55$ мкм при скорости воздуха $u_0 = 1.25$ м/с и для $d_p > 40$ мкм при $u_0 = 2.5$ м/с (рис. 4, кривые 3, 6).

Установлено, что увеличение скорости воздуха в два раза приводит к некоторому «выпрямлению» траекторий капель. При этом эффективность улавливания во всех случаях возрастает с увеличением скорости газа с $u_0 = 1.25$ м/с (рис. 4, кривые 4, 5, 6) до $u_0 = 2.5$ м/с (рис. 4, кривые 1, 2, 3), но при этом может иметь место вторичный унос, не учитываемый при моделировании.

Что касается аэродинамического сопротивления рассматриваемых каплеуловителей, рассчитаем коэффициент аэродинамического сопротивления решеток каплеуловителей по формуле $C_k = \Delta p / 0.5 \rho u_0^2$, где Δp – перепад давления воздуха до решетки и после нее. В таблице показано, что наименьший коэффициент сопротивления имеет уголкового каплеуловитель, наибольший – V-образный.

Коэффициент аэродинамического сопротивления решеток каплеуловителей

Форма лопаток	Трапецевидная		Уголковая		V-образная	
u_0 , м/с	1.25	2.5	1.25	2.5	1.25	2.5
C_k	6.94	6.24	3.44	3.06	15.77	15.71

Известно [1], что коэффициент аэродинамического сопротивления каплеуловителей жалюзийного типа варьирует от 3.0 до 16.0, а коэффициент сопротивления градирни может достигать 50.0 и выше. В результате внедрения и эксплуатации новой формы лопаток в градирнях вентиляторного типа показано, что мощности вентилятора достаточно для эффективной сепарации капель данным типом решетки.

Полагая, что основными затратами на производство решеток каплеуловителей являются затраты, связанные с приобретением материалов, оценим материалоемкость конструкций. Решетки каплеуловителей состоят из лопаток и соединительных элементов, однако основной расход материалов обусловлен производством лопаток. Рассчитаем материалоемкость конструкций с учетом шага решетки и длины лопаток при фиксированной толщине профиля лопаток. Выделим контрольный объем решетки $V_0 = 1 \text{ м} \times 1 \text{ м} \times L_{\text{вод}}$. При заданных параметрах на изготовление такой решетки уголкового каплеуловителя расходуются лопатки площадью $S = 4.67 \text{ м}^2$, трапецевидного – 3.33 м^2 , V-образного – 1.80 м^2 . Следовательно, при изготовлении решетки V-образного каплеуловителя показатель расхода материалов минимален, собранные блоки имеют меньшую массу.

Кроме того, наличие острого угла в сечении этой лопатки (см. рис. 1, с) способствует повышению ее жесткости, предотвращает так называемое «схлопывание», когда под действием высокого напора воздуха пластины смещаются, перекрывая существующие просветы.

Таким образом, для общей оценки эффективности конструкции каплеуловителя можно воспользоваться комплексным показателем, учитывающим эффективность улавливания капель, коэффициент аэродинамического сопротивления, затраты на производство лопаток решеток:

$$K = c_1 (\eta / \eta_0) + c_2 (C_k / C_{k,0}) + c_3 (S / S_0),$$

где $\eta_0, C_{k,0}, S_0$ – характерные значения соответствующих показателей; c_1, c_2, c_3 – весовые коэффициенты, назначаемые экспертно в зависимости от их значимости при условии, что $\sum_{i=1}^3 c_i = 1$. Названный показатель по форме аналогичен так назы-

ваемому обобщенному критерию оптимальности, широко применяемому, в частности, при оптимизации производственных объектов и процессов [13, 14]. Он в полной мере характеризует эффективность конструкции каплеуловителя, поскольку содержит все основные параметры, а весовые коэффициенты позволяют гибко учитывать приоритеты заказчиков в каждом конкретном случае.

Заключение

Полученные результаты численных расчетов потоков воздуха, траекторий капель, а также показателей эффективности позволили провести анализ работы инерционных каплеуловителей градирен, сформулировать требования, которым должна удовлетворять форма их лопаток. В частности, для обеспечения высокой эффективности улавливания капель лопатками желательнее минимизировать количество поворотов потока воздуха в ячейке периодичности с одновременным увеличением модуля скорости воздуха в градирне. Для общей оценки эффективности конструкции каплеуловителя целесообразно воспользоваться комплексным показателем с весовыми коэффициентами, учитывающими величину улавливания капель, коэффициент аэродинамического сопротивления, затраты на производство решеток. Предложенную V-образную конфигурацию поперечного сечения лопаток можно взять за основу при разработке новых систем улавливания, а также перспективных устройств конденсации паров воды, когда острый угол перекрывается стенкой, в лопатке образуется полость.

Список источников

1. Пономаренко В.С., Арефьев Ю.И. Градирни промышленных и энергетических предприятий: справ. пособие. М.: Энергоатомиздат, 1998. 376 с.
2. Боровков В.С., Майрановский Ф.Г. Аэрогидродинамика систем вентиляции и кондиционирования воздуха. М.: Стройиздат, 1978. 116 с.
3. Ruiz J., Cutillas C.G., Kaiser A.S., Zamora B., Sadafi H., Lucas M. Experimental study on pressure loss and collection efficiency of drift Eliminators // Applied Thermal Engineering. 2019. V. 149. P. 94–104. doi: 10.1016/j.applthermaleng.2018.12.023
4. Ruiz J., Kaiser A.S., Zamora B., Cutillas C.G., Lucas M. CFD analysis of drift eliminators using RANS and LES turbulent Models // Applied Thermal Engineering. 2016. V. 105. P. 979–987. doi: 10.1016/j.applthermaleng.2016.01.108
5. Pedraza O.J.G., Ibarra J.J.P., Rubio-Maya C., González S.R.G., Arista J.A.R. Numerical study of the drift and evaporation of water droplets cooled down by a forced stream of air // Applied Thermal Engineering. 2018. V. 142. P. 292–302. doi: 10.1016/j.applthermaleng.2018.07.011
6. Архипов В.А., Васенин И.М., Усанина А.С., Шрагер Г.Р. Динамическое взаимодействие частиц дисперсной фазы в гетерогенных потоках. Томск: Изд. Дом Том. гос. ун-та, 2019. 328 с.
7. Архипов В.А., Басалаев С.А., Перфильева К.Г., Романдин В.И., Усанина А.С. Анализ режимов гравитационного осаждения капли // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 86. С. 21–34. doi: 10.17223/19988621/86/2
8. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Течения газа с частицами. М.: Физматлит, 2008. 600 с.
9. Бушланов В.П., Бутов В.Г., Глазунов А.А. Численное исследование полидисперсных двухфазных течений в осесимметричном сопле Лавалья с учетом силы Магнуса, действующей на вращающиеся капли // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 88. С. 66–78. doi: 10.17223/19988621/88/6

10. Вараксин А.Ю. Двухфазные потоки с твердыми частицами, каплями и пузырями: проблемы и результаты исследований (обзор) // Теплофизика высоких температур. 2020. Т. 58, вып. 4. С. 646–669. doi: 10.31857/S004036442004016X
11. Моренко И.В., Федяев В.Л. Ламинарное неизотермическое обтекание вращающегося кругового цилиндра вязкой жидкостью с твердыми частицами // Инженерно-физический журнал. 2014. Т. 87, № 3. С. 549–555. doi: 10.1007/s10891-014-1046-9
12. Menter F.R. Two-equation eddy viscosity turbulence models for engineering applications // AIAA Journal. 1994. V. 32 (8). P. 1598–1605. doi: 10.2514/3.12149
13. Ахмадиев Ф.Г., Гиззятов Р.Ф., Гильфанов Р.М. Математическое моделирование. Методы оптимизации. Вычислительный эксперимент: учеб. пособие. Казань: Изд-во Акад. наук РТ, 2021. 492 с.
14. Федяев В.Л., Галимов Э.Р., Беляев А.В. Математическое моделирование процессов термической обработки рабочих поверхностей деталей и изделий. Казань: Изд-во Акад. наук РТ, 2019. 240 с.

References

1. Ponomarenko V.S., Aref'ev Yu.I. (1998) *Gradirni promyshlennykh i energeticheskikh predpriyatiy: Spravochnoe posobie* [Cooling towers of industrial and energy enterprises: Reference manual]. Moscow: Energoatomizdat.
2. Borovkov V.S., Mayranovskiy F.G. (1978) *Aerogidrodinamika sistem ventilyatsii i konditsionirovaniya vozdukha* [Aerohydrodynamics of ventilation and air conditioning systems]. Moscow: Stroyizdat.
3. Ruiz J., Cutillas C.G., Kaiser A.S., Zamora B., Sadafi H., Lucas M. (2019) Experimental study on pressure loss and collection efficiency of drift eliminators. *Applied Thermal Engineering*. 149. pp. 94–104. doi: 10.1016/j.applthermaleng.2018.12.023
4. Ruiz J., Kaiser A.S., Zamora B., Cutillas C.G., Lucas M. (2016) CFD analysis of drift eliminators using RANS and LES turbulent models. *Applied Thermal Engineering*. 105. pp. 979–987. doi: 10.1016/j.applthermaleng.2016.01.108
5. Pedraza O.J.G., Ibarra J.J.P., Rubio-Maya C., González S.R.G., Arista J.A.R. (2018) Numerical study of the drift and evaporation of water droplets cooled down by a forced stream of air. *Applied Thermal Engineering*. 142. pp. 292–302. doi: 10.1016/j.applthermaleng.2018.07.011
6. Arkhipov V.A., Vasenin V.A., Usanina A.S., Shrager G.R. (2019) *Dinamicheskoe vzaimodeystvie chastits dispersnoy fazy v geterogennykh potokakh* [Dynamic interaction of particles of the dispersed phase in heterogeneous flows]. Tomsk: Izdatel'skiy dom Tomskogo gosudarstvennogo universiteta.
7. Arkhipov V.A., Basalaev S.A., Perfilieva K.G., Romandin V.I., Usanina A.S. (2023) Analiz rezhimov gravitatsionnogo osazhdeniya kapli [Analysis of gravitational settling regimes for a drop]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 86. pp. 21–34. doi: 10.17223/19988621/86/2
8. Volkov K.N., Emel'yanov V.N. (2008) *Techenie gaza s chastitsami* [Gas flow with particles]. Moscow: Fizmatlit.
9. Bushlanov V.P., Butov V.G., Glazunov A.A. (2024) Chislennoe issledovanie polidispersnykh dvukhfaznykh techeniy v osesimmetrichnom sople Lavalya s uchetom sily Magnusa, deystvuyushchey na vrashchayushchiesya kapli [Numerical modeling of polydisperse two-phase flows in an axisymmetric de Laval nozzle with account for the Magnus force acting on rotating droplets]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 88. pp. 66–78. doi: 10.17223/19988621/88/6
10. Varaksin A.Y. (2020) Two-phase boundary layer of gas with solid particles. *High Temperature*. 58. pp. 716–732. doi: 10.1134/S0018151X20050107

11. Morenko I.V., Fedyaev V.L. (2014) Laminar nonisothermal flow of a viscous fluid with solid particles past a rotating circular cylinder. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 87(3). pp. 566–572. doi: 10.1007/s10891-014-1046-9
12. Menter F.R. (1994) Two-equation eddy viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA Journal*. 32(8). pp. 1598–1605. doi: 10.2514/3.12149
13. Akhmadiev F.G., Gizzatov R.F., Gil'fanov R.M. (2021) *Matematicheskoe modelirovanie. Metody optimizatsii. Vychislitel'nyy eksperiment: Uchebnoe posobie* [Mathematical modeling. Optimization methods. Computational experiment: A textbook]. Kazan: Academy of Sciences of RT.
14. Fedyaev V.L., Galimov E.R., Belyaev A.V. (2019) *Matematicheskoe modelirovanie protsessov termicheskoy obrabotki rabochnykh poverkhnostey detaley i izdeliy* [Mathematical modeling of heat treatment processes of working surfaces of parts and products]. Kazan: Academy of Sciences of RT.

Сведения об авторах:

Моренко Ирина Вениаминовна – кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории моделирования технологических процессов Института механики и машиностроения – структурного подразделения Казанского научного центра Российской академии наук (Казань, Россия). E-mail: i.v.morenko@yandex.ru

Федяев Владимир Леонидович – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории моделирования технологических процессов Института механики и машиностроения – структурного подразделения Казанского научного центра Российской академии наук (Казань, Россия). E-mail: vlfed2020@gmail.com

Information about the authors:

Morenko Irina V. (Candidate of Technical Sciences, Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Scientific Center of Russian Academy of Sciences, Kazan, Russian Federation). E-mail: i.v.morenko@yandex.ru

Fedyaev Vladimir L. (Doctor of Technical Sciences, Professor, Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Scientific Center of Russian Academy of Sciences, Kazan, Russian Federation). E-mail: vlfed2020@gmail.com

Статья поступила в редакцию 17.10.2024; принята к публикации 06.09.2025

The article was submitted 17.10.2024; accepted for publication 06.09.2025

Научная статья

УДК 621.9.011; 004.942

doi: 10.17223/19988621/97/10

Численное моделирование распределения контактных напряжений в режущем клине при фрезеровании сплавов AISI 304 и Grade 5 твердосплавной конической концевой фрезой

Пётр Михайлович Пивкин¹, Артём Сергеевич Бабаев²,
Виктор Николаевич Козлов³, Артём Романович Семёнов⁴,
Екатерина Сергеевна Назаренко⁵, Алексей Борисович Надыкто⁶

^{1, 5, 6} *Московский государственный технологический университет «СТАНКИН»,
Москва, Россия*

^{2, 3, 4} *Томский государственный университет, Томск, Россия*

¹ *pmpivkin@gmail.com*

² *a.s.babaev@mail.tsu.ru*

³ *kozlov-viktor@bk.ru*

⁴ *artems2102@yandex.ru*

⁵ *katarina.86@bk.ru*

⁶ *abnadykto@yandex.ru*

Аннотация. Представлены результаты моделирования процесса фрезерования нержавеющей стали марки AISI 304 SS и титанового сплава марки Grade 5 с использованием метода конечных элементов. Показаны математическая постановка задачи, принятые допущения и упрощения для эффективного решения, а также приведены результаты математического моделирования с учетом изменений условий резания (режимы резания, острота кромки).

Ключевые слова: численное моделирование резания, метод конечных элементов, фрезерование, контактные напряжения, сталь, титановый сплав

Благодарности: Работа выполнена в рамках государственного задания № FSFS-2024-0014 «Цифровая кибер-физическая система проектирования и производства многономенклатурной гаммы режущего инструмента нового поколения с уникальными функциональными свойствами для нужд отечественной станкоинструментальной промышленности».

Для цитирования: Пивкин П.М., Бабаев А.С., Козлов В.Н., Семёнов А.Р., Назаренко Е.С., Надыкто А.Б. Численное моделирование распределения контактных напряжений в режущем клине при фрезеровании сплавов AISI 304 и Grade 5 твердосплавной конической концевой фрезой // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 97. С. 143–157. doi: 10.17223/19988621/97/10

Numerical modeling of the contact stress distribution in a cutting wedge during the milling of AISI 304 and Grade 5 alloys with a carbide conical end mill

Pyotr M. Pivkin¹, Artyom S. Babaev², Viktor N. Kozlov³,
Artyom R. Semyonov⁴, Ekaterina S. Nazarenko⁵, Aleksey B. Nadykto⁶

^{1, 5, 6} Moscow State University of Technology STANKIN, Moscow, Russian Federation

^{2, 3, 4} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ pmpivkin@gmail.com

² a.s.babaev@mail.tsu.ru

³ kozlov-viktor@bk.ru

⁴ artems2102@yandex.ru

⁵ katarina.86@bk.ru

⁶ abnadykto@yandex.ru

Abstract. This paper presents the results of the finite element modeling of the milling of AISI 304 SS stainless steel and Grade 5 titanium alloy. The mathematical formulation of the problem is outlined along with the assumptions and simplifications adopted to enable efficient computation. The results of the numerical simulations are reported, taking into account variations in the cutting conditions, including the cutting regimes and edge micro-geometry. A multilevel model is proposed in which functional relations between the tool design parameters, cutting edge sharpness, cutting modes, characteristics of the processed material, and the arising equivalent von Mises stresses in the cutting wedge of the milling tooth are specified. The study results make it possible to obtain a cutting part with improved geometrical parameters of a new generation tool, to increase its rigidity and strength, and to improve the tool performance.

Keywords: numerical modeling of cutting, finite element method, milling, contact stresses, steel, titanium alloy

Acknowledgments: This work was carried out within the framework of the State Assignment No. FSFS-2024-0014 “Digital cyber-physical system for design and production of a multidomain range of new generation cutting tools with unique functional properties for the needs of the domestic machine-tool industry”.

For citation: Pivkin, P.M., Babaev, A.S., Kozlov, V.N., Semyonov, A.R., Nazarenko, E.S., Nadykto A.B. (2025) Numerical modeling of the contact stress distribution in a cutting wedge during the milling of AISI 304 and Grade 5 alloys with a carbide conical end mill. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 97. pp. 143–157. doi: 10.17223/19988621/97/10

Введение

В настоящее время установление эффективности процесса резания посредством натурных испытаний становится менее эффективным из-за высокой стоимости времени работы станка и необходимости проведения значительного числа итераций для достижения статистически достоверного количества экспериментов [1–2].

В этой связи натурные испытания заменяются вычислительными экспериментами, которые основываются на моделировании процессов резания с использованием различных вычислительных моделей [3–5]. Данные модели применяются в рамках специализированных программных продуктов, таких как Abaqus, LS-Dyna, Ansys Workbench и др. При правильной формулировке задачи последние способны значительно снизить финансовые затраты на исследование процесса резания, особенно когда в эксперименте задействовано дорогостоящее оборудование или материалы, доступность которых может быть ограничена по различным причинам. Таким образом, предварительное моделирование процесса резания позволяет избежать необходимость использования станочной базы и машинного времени, при этом обеспечивая адекватное представление о поведении исследуемых процессов [6–8]. На основе анализа литературных данных определена цель исследования – определение величины контактных напряжений и карты их распределения в режущем клине конической концевой фрезы из твердого сплава группы WC + Co при численном моделировании фрезерования сплавов AISI 304 и Grade 5.

Постановка задачи и описание модели

В работе рассмотрено моделирование фрезерования с использованием метода конечных элементов в программном комплексе AUTODYN [9]. Конечно-элементный анализ проведен для фрезерования конструкционных материалов по схеме 5-координатной обработки. Особое внимание уделено изучению условий формирования контактных нагрузок и напряжений на передней и задней поверхностях режущего клина конической концевой фрезы, используемой для 5-осевой координатной обработки сложных фасонных поверхностей (рис. 1).

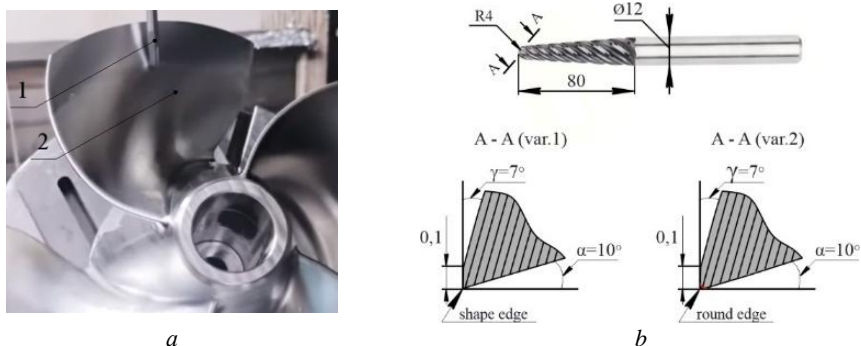


Рис. 1. Пример реализации 5-осевой обработки: 1 – фреза; 2 – лопасть винта
Fig. 1. Example of the 5-axis machining: 1, milling cutter and 2, propeller blade

В качестве обрабатываемых материалов были использованы: коррозионно-стойкая сталь марки AISI 304 SS (отечественный аналог – сталь марки 08X18H10) и титановый сплав марки Grade 5 (отечественный аналог – титановый сплав марки BT6). Данные материалы находят широкое применение при создании ответственных и высоконагруженных элементов морской техники, а именно используются для изготовления импеллеров, винтов и роторов, лопасти которых имеют сложную пространственную геометрию.

Для трехмерного моделирования в качестве геометрической модели обрабатываемого инструмента была использована твердосплавная коническая концевая фреза (см. рис. 1, *b*) диаметром 12 мм и длиной рабочей части 80 мм с радиусом сферической торцевой части 4 мм и 6 зубьями, имеющая следующие геометрические параметры режущего клина фрезы: передний угол $\gamma = +7^\circ$, задний угол $\alpha = 10^\circ$. Участок передней поверхности под углом 0° был выполнен на длине 0,1 мм с целью геометрического упрочнения режущего клина.

Для упрощения модели фрезерования был проведен анализ процесса удаления припуска, который показал, что при небольшой ширине фрезерования $B < 3$ мм, глубине фрезерования $t < 0,5$ мм и существенном радиусе при вершине $r > 5$ мм можно принять, что происходит фрезерование круглой режущей кромкой (рис. 2). Такой вид режущей кромки позволяет увеличить стойкость всего клина благодаря ее небольшому повороту после наступления предельно допустимого износа активной части ее режущей кромки [10].

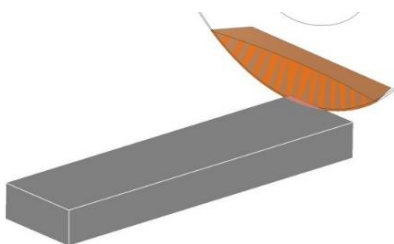


Рис. 2. Трехмерная геометрическая схема модели контакта круглой части режущей кромки и поверхности заготовки

Fig. 2. Three-dimensional geometric model of the contact between the circular part of the cutting edge and the workpiece surface

Рассматриваемая для расчетов область представляет собой участок контактного взаимодействия режущей кромки и обрабатываемой поверхности заготовки, схематичное представление которых показано на рис. 3.

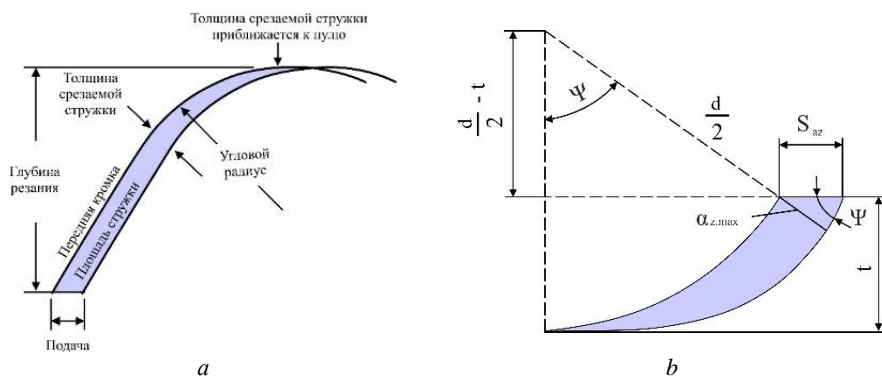


Рис. 3. Схемы определения толщины срезаемой стружки при фрезеровании сферической торцевой фрезой: *a* – общий вид сечения стружки; *b* – геометрическая схема

Fig. 3. Diagrams for determining the chip thickness when milling with a ball-end mill: (a) general view of the chip cross-section and (b) geometric scheme

Перемещение зуба фрезы в направлении подачи при глубине фрезерования t и диаметре фрезы d происходит на величину S_{az} . Ее численное значение определяется центральным углом ψ , измеряемым от точки входа режущей кромки зуба фрезы до ее положения в момент начала выхода зуба из контакта с заготовкой и величиной подачи на зуб s_z .

Для определения толщины среза текущей a_i и наибольшей a_{\max} , которая получается перед выходом зуба фрезы из контакта с заготовкой при встречном фрезеровании, используют формулу

$$S_{az} = 2 \cdot S_z \cdot \sqrt{(t/d)} / \sin \psi_{\max} \quad (1)$$

Если режущая кромка зуба фрезы имела бы прямолинейную форму, то максимальная толщина срезаемого слоя оставалась бы неизменной на протяжении всей ее длины. Однако в случае криволинейной режущей кромки для радиального участка с радиусом $R_{\phi} = 2$ мм необходимо принимать во внимание уменьшение максимальной толщины.

Тогда

$$S_{az} = 2 \cdot S_z \cdot \sqrt{(B/d)} / \sin \beta_{\max} \quad (2)$$

В действительности из-за структурных характеристик инструментального материала (твердого сплава) острота режущей кромки всегда превышает ноль. В связи с этим были разработаны две модели режущей кромки: первая без радиуса округления (острая режущая кромка), а вторая с радиусом округления $\rho_{\text{edge}} = 0,015$ мм (округленная режущая кромка).

Построение эпюр контактных напряжений проведено на передней поверхности сферического торца концевой конической фрезы. Для этого радиусная часть режущей кромки была разделена на три участка (сектора), на каждом из которых рассматривалось сечение в главной секущей плоскости (3 участка). Расчет толщины среза на трех участках выполнен в первом приближении с использованием прямой режущей кромки, касательной к каждому из трех участков.

В работе варьировали скорость резания V как параметр, прямолинейно влияющий на повышение производительности обработки. Также округление режущей кромки выбирали 0 или 0,015 мм, что имеет место при назначении обрабатываемого материала [2, 8]. Варьируемые при моделировании параметры эксперимента имели следующие значения: $V = 50, 80, 120$ м/мин; $S = 500$ мм/мин; $t = 0,2$ мм; $B = 1,0$ мм; $\rho_{\text{edge}} = 0$ и 0,015 мм. Всего шесть комбинаций.

Определение максимальной толщины срезаемого слоя производили по формуле

$$a_{\max} = 2 \cdot S_{az} \cdot \sqrt{t/d - (t/d)^2} \quad (3)$$

В ходе пересчета по формулам (1–3) с использованием параметров эксперимента было установлено, что толщина срезаемой стружки a_{\max} составляет: № 1, 2 – 0,036 мм; № 3, 4 – 0,023 мм; № 5, 6 – 0,015 мм.

Моделирование рабочих материалов

Численное моделирование процесса обработки резанием включает в себя разработку вычислительной модели, которая охватывает выбор элементов твердотельных конструкций, определение характера взаимодействия между контактирующими

поверхностями, а также назначение характеристик и свойств используемых материалов. Переход от макроуровня к микроуровню обусловлен геометрическими особенностями режущей кромки инструмента и специфическими характеристиками процесса фрезерования. Серия вычислительных экспериментов была выполнена с использованием явного решателя AUTODYN, встроенного в программный комплекс Ansys Explicit.

Физико-математическая модель механического поведения деформируемой среды фрезы и обрабатываемого образца включала уравнения сохранения массы, импульса и энергии, записанные в рамках классического лагранжевого подхода континуальной механики для динамических условий взаимодействия [11, 12]. Уравнение состояния для конденсированных фаз сплавов WC + Co 6% (инструментальный материал), Grade 5 и AISI 304 SS использовано в линейной форме Ми-Грюнайзена [9, 13].

Материальные константы для уравнения состояния, использованные в расчетах, приведены в табл. 1.

Таблица 1

Материальные константы для уравнения состояния

Материал	Γ_0	C_0 , м/с	S_1	ρ_0 , кг/м ³	μ , ГПа
Фреза (WC + Co)	1,54	4 029	1,237	17 000	160
Заготовка № 1 (AISI 304 SS)	1,23	5 130	1,028	7 950	77
Заготовка № 2 (Grade 5)	1,93	4 570	1,49	4 419	42

Оценка прочности фрезы проводилась на основе четвертого критерия прочности, когда рабочее состояние детали при нагружении описывается эквивалентными напряжениями, которые не должны превышать некой критической величины. Материал фрезы – сплав системы WC + Co ($\sigma_{\text{н}} = 3\,200$ МПа), который является хрупким материалом с невыраженной пластичностью, поэтому в качестве критической величины выбрано значение временного сопротивления.

В качестве критерия пластичности использовано условие Мизеса $\sigma_{eq} \leq \sigma_s$, где $\sigma_{eq} = [(3/2)S_{ij}S_{ij}]^{1/2}$.

Для описания кинетики развития пластического течения материала обрабатываемого образца в диапазоне скоростей деформации 10^{-3} до 10^4 с⁻¹ использовалось соотношение Джонсона–Кука:

$$\sigma_s = \left[A + B \cdot \varepsilon_p^n \right] \cdot \left[1 + C \cdot \ln \varepsilon_p^* \right] \cdot \left[1 - (T_H)^m \right], \quad (4)$$

где материальная константа A – это значение условного предела текучести материала при исходной скорости деформации 1 с⁻¹, B и n – константа и степень деформационного упрочнения; C – параметр скоростной чувствительности, m – коэффициент температурного разупрочнения, ε_p^* – нормированная величина эквивалентной

скорости пластической деформации, $T_H = \left(\frac{T - T_r}{T_m - T_r} \right)$ – гомологическая температура.

Температурное разупрочнение влияет на напряжение течения, которое стремится к нулю при приближении температуры проведения эксперимента к температуре плавления. Из многочисленных экспериментальных исследований известно, что в зависимости от скорости резания и свойств обрабатываемого материала разогрев режущих кромок и стружки может достигать сотен градусов и существенно

влиять как на сопротивление резанию, так и на величину трения между обрабатываемым материалом и фрезой. Поэтому в модели учтен эффект локального разогрева материалов в зоне резания и формирования стружки, возникающий из-за диссипации энергии пластической деформации и описанный в [11, 12].

Значения констант материалов, используемых для расчетов, и физико-механические характеристики обрабатываемых и инструментальных материалов приведены в табл. 2 и 3.

Таблица 2

**Основные механические и термические свойства
материалов заготовок и инструмента**

Физические параметры	Заготовка № 1 (AISI 304 SS)	Заготовка № 2 (Grade 5)	Инструмент (WC + Co)
Температура плавления (К)	1 663	1 283	3 135
Удельная теплота (Дж/(кг·К))	423	520	134

Таблица 3

Определяющие параметры модели Джонсона–Кука для материала заготовки

Константы уравнения	Заготовка № 1 (AISI 304 SS) [14, 15]	Заготовка № 2 (Grade 5) [16]
A , МПа	452	783
B , МПа	694	498
n	0,311	0,28
C	0,0067	0,028
m	0,996	1

В процессе фрезерования происходит образование стружки, что обусловлено отделением материала образцов под воздействием фрезы с высокой скоростью. В связи с этим в вычислительной модели был учтен эффект накопления повреждений в зоне деформации, а отрыв материала моделировался с помощью эрозии элементов при достижении значения параметра поврежденности, равного 1. Эволюция параметра поврежденности среды D вычислялась путем суммирования приращений на дискретных интервалах времени, соответствующих шагу интегрирования:

$$D = \sum_{k=1} \Delta D_k, \quad (5)$$

где $\Delta D_k = [\Delta \varepsilon_{eq}^p]_k / \varepsilon_f$ – приращение параметра поврежденности за шаг по времени Δt_k ;

$[\Delta \varepsilon_{eq}^p]_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{\varepsilon}_{eq}^p dt$ – приращение эквивалентной пластической деформации; ε_f –

значение эквивалентной пластической деформации в момент начала макроскопического повреждения деформируемой среды, выраженная через

$$\varepsilon_f = [D_1 + D_2 \exp(D_3 \sigma^*)][1 + D_4 \ln \varepsilon][1 + D_5 T_H], \quad (6)$$

где $\sigma^* = \frac{P}{\sigma_{eq}}$ – параметр трехосности напряженного состояния; P – гидростатическое давление; σ_{eq} – эквивалентные напряжения по Мизесу; D_1 – D_5 параметры модели разрушения Джонсона–Кука при повреждении (табл. 4).

Параметры разрушения материала заготовки по модели Джонсона–Кука

Константы уравнения	Заготовка № 1 (AISI 304 SS) [14, 15]	Заготовка № 2 (Grade 5) [16]
D_1	0,53	–0,09
D_2	0,5	0,25
D_3	–6,8	–0,5
D_4	0,014	0,014
D_5	0	3,87

Конечно-элементная модель и сетка

В процессе создания вычислительной модели были внесены некоторые упрощения в геометрическое описание фрезы и образца. Это было обусловлено необходимостью учитывать округление режущей кромки, равное 0,015 мм, при размере самой кромки около 0,05 мм. Отношение этих величин к другим геометрическим параметрам режущей пластины значительно, что ведет к увеличенному количеству элементов в расчетной сетке. Путь движения режущей кромки по образцу имеет размеры, соизмеримые с величинами самой кромки. Кроме того, для точного моделирования образования стружки во время процесса фрезерования необходимо, чтобы количество элементов внутри стружки было не менее пяти по толщине, а размеры разрушенных элементов в области отрыва соответствовали размерам зарождающихся трещин. Эти условия значительно влияют на размер и количество элементов сетки. В результате общее увеличение количества малых сеточных элементов на макроуровне усложняет решение динамических задач в явной форме, реализуемых с помощью решателя AUTODYN [9], что вызывает значительное увеличение времени вычислений из-за уменьшенного шага интегрирования, зависящего от размеров самого малого элемента сетки. Например, в литературе [14, 15] обращают внимание на аналогичный масштабный уровень моделируемого процесса и предлагаются решения для оптимизации моделирования фрезерования. Они включают в себя переход от макроскопического уровня, учитывающего все особенности реальных объектов, участвующих в процессе фрезерования, к альтернативным постановкам задачи и ее идеализации до двумерных моделей на микроуровне. В силу принятых упрощений модель задачи может переходить от характерных для фрезерования движений, где режущая кромка движется по круговой траектории, к строганию, где применяется линейное движение. При этом геометрические размеры и скорости резания сохраняются на сопоставимом уровне.

Исходя из этого, в работе при моделировании фрезерования были использованы микромеханические модели двух видов режущих пластин с радиусом округления кромки $\rho_{\text{edge}} = 0$ мм (рис. 6, а) и $\rho_{\text{edge}} = 0,015$ мм (рис. 4, б). На этом рисунке представлены моменты сближения режущей кромки с заготовкой до начала касания и начала образования стружки. Резание проводили на длине $LI = 0,4$ мм.

Граничные условия при решении задачи соответствовали следующим случаям:

- на верхней ($L1$) и торцевой справа ($L4$) гранях модели образца заданы условия свободной поверхности;
- на нижней ($L3$) и торцевой слева ($L2$) гранях модели образца задано жесткое закрепление;

– на верхней ($L5$) и торцевой справа ($L9$) гранях фрезы постоянная скорость смещения V вдоль образца от грани $L4$ к $L2$, соответствующая значениям скорости резания (см. табл. 1), и ограничения на смещения в других направлениях, что принуждает фрезу двигаться с приданной постоянной линейной скоростью, не меняя направления.

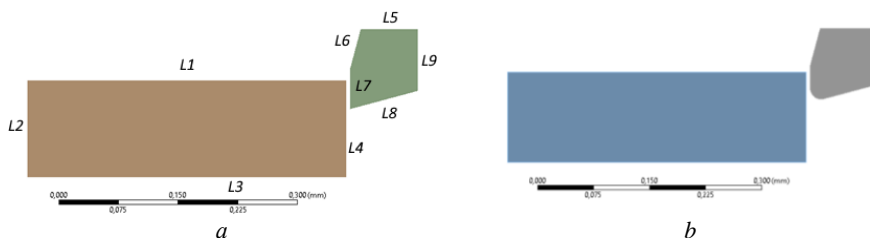


Рис. 4. Примеры микромасштабных геометрических моделей, используемых в моделировании: a – радиус скругления 0 мм (острая кромка); b – радиус скругления 0,015 мм (округленная кромка)

Fig. 4. Examples of the microscale geometric models used in the modeling at the following rounding radii: (a) 0 mm (sharp edge) and (b) 0.015 mm (rounded edge)

В зависимости от радиуса округления, исследуемого материала заготовок и скорости резания решено 12 случаев нагружения. Выбор шага пространственной дискретизации расчетной области обеспечивал сходимость численного решения задачи. При выборе оптимальных размеров элементов сеточных моделей, приводящих к стабильному сходящемуся решению, дополнительно каждая задача про-решивалась по три раза с разной плотностью сетки, итого минимум 36 решенных итерационных вариантов. Шаг интегрирования по времени определялся из условия Куранта [11]. Средний размер элемента был принят 0,004 мм, исходя из предварительного анализа сеточной сходимости.

Результаты и обсуждение

Рассмотрим результаты моделирования обработки стали AISI 304 SS, показанные на рис. 5–6.

Сплав AISI 304 SS обладает достаточной пластичностью, что описывается моделью механического поведения с выбранными константами [13, 14, 16]. Поэтому с момента касания кромки с заготовкой до момента образования стружки (отрыв материала) перед кромкой во всех случаях образуется значительный «навал» материала за счет пластической деформаций как в случае без округления, так и с округлением. Режущий клин с округлением до момента отрыва успевает погрузиться в материал большей частью округления. Большая площадь контакта перераспределяет возникающие усилия по поверхности инструмента, и концентратор напряжений «размывается» по большому объему материала, чем у инструмента без округления.

При скорости резания 120 мм/мин, когда площадь контакта минимальная из возможных, напряжения концентрируются ближе к режущей кромке и равны 4 986 МПа, причем их значение максимально по сравнению с другими двумя случаями – 3 066 и 2 555 МПа, что может быть причиной локального скола – преждевременного повреждения кромки фрезы.

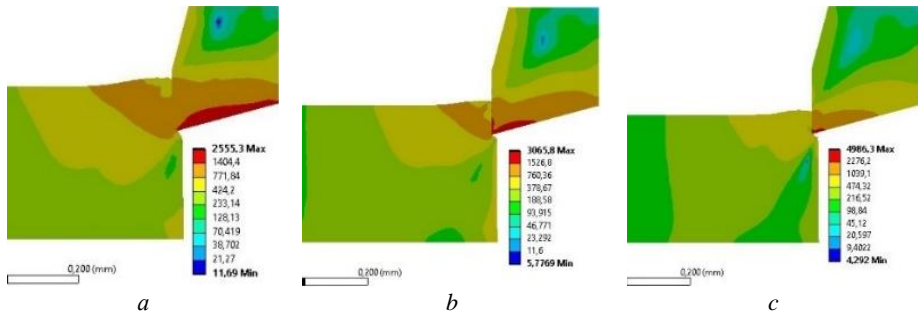


Рис. 5. Поля распределения эквивалентных напряжений Мизеса (МПа) в момент зарождения стружки в заготовке из сплава AISI 304 SS с различной скоростью резания (острая кромка): *a* – 50 м/мин; *b* – 80 м/мин; *c*)– 120 м/мин

Fig. 5. Fields of von Mises equivalent stress (MPa) at the onset of chip formation in an AISI 304 SS workpiece at various cutting speeds (sharp edge): (*a*) 50, (*b*) 80, and (*c*) 120 m/min

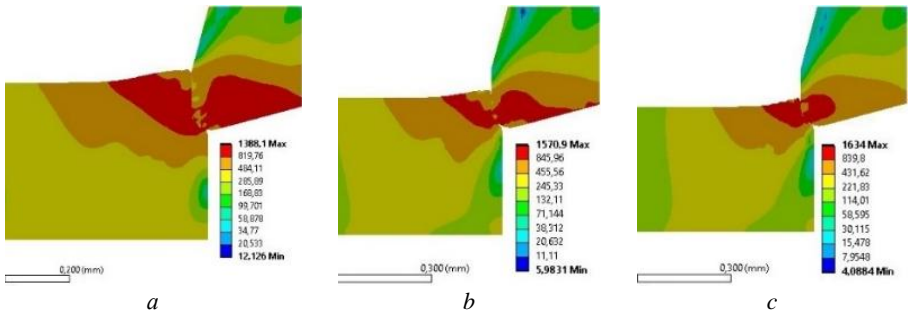


Рис. 6. Поля распределения эквивалентных напряжений Мизеса (МПа) в момент зарождения стружки в заготовке из сплава AISI 304 SS с различной скоростью резания (округленная кромка): *a* – 50 м/мин; *b* – 80 м/мин; *c* – 120 м/мин

Fig. 6. Fields of von Mises equivalent stress (MPa) at the onset of chip formation in an AISI 304 SS workpiece at various cutting speeds (rounded edge): (*a*) 50, (*b*) 80, and (*c*) 120 m/min

Рассмотрим результаты моделирования обработки титанового сплава Grade 5, представленного на рис. 7, 8, в той же постановке из табл. 1, что и для случая обработки стали AISI 304 SS.

Сплав Grade 5 в отличие от стали AISI 304 SS, описанный моделью механического поведения с выбранными константами [10, 16], обладает меньшей пластичностью, что влияет на отличие механизмов отделения стружки. Отмечено, что в начальные моменты взаимодействия фрезы с образцом во всех случаях не образуется значительного «навала» материала перед режущей кромкой. Это особенно отмечается в случае со скругленной кромкой, которая не успевает погрузиться округлением в материал до начала образования отрыва. Отрыв стружки происходит по направлению образования адиабатической полосы сдвига, направленной в образец от места касания с режущей кромкой на $L4$ (см. рис. 4) под углом к $L1$.

На рис. 9, *a*, *b* приведены результаты, демонстрирующие изменение величины максимальных эквивалентных напряжений от скорости резания (толщины среза) с учетом длины перемещения режущего клина при фрезеровании стали AISI 304 SS и сплава Grade 5 соответственно.

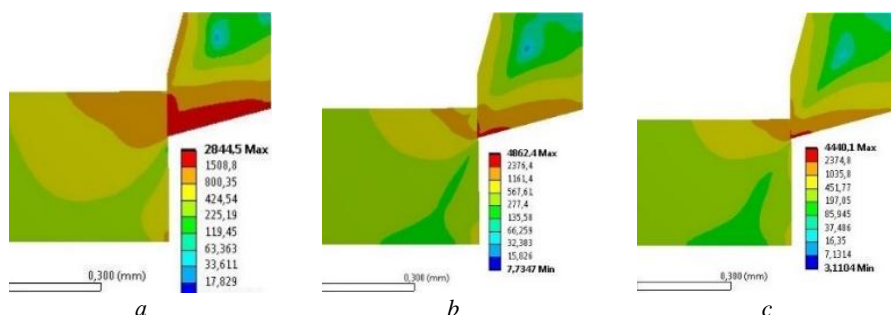


Рис. 7. Поля распределения эквивалентных напряжений Мизеса (МПа) в момент зарождения стружки в заготовке из сплава Grade 5 с различной скоростью резания (острая кромка): *a* – 50 м/мин; *b* – 80 м/мин; *c* – 120 м/мин

Fig. 7. Fields of von Mises equivalent stress (MPa) at the onset of chip formation in a Grade 5 workpiece at various cutting speeds (sharp edge): (*a*) 50, (*b*) 80, and (*c*) 120 m/min

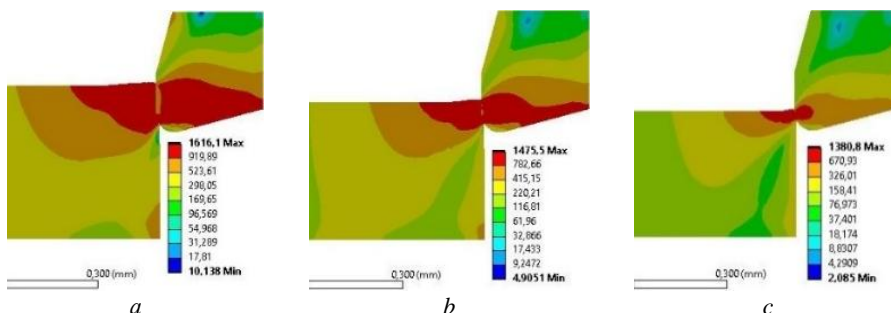


Рис. 8. Поля распределения эквивалентных напряжений Мизеса (МПа) в момент зарождения стружки в заготовке из сплава Grade 5 с различной скоростью резания (округленная кромка): *a* – 50 м/мин; *b* – 80 м/мин; *c* – 120 м/мин

Fig. 8. Fields of von Mises equivalent stress (MPa) at the onset of chip formation in a Grade 5 workpiece at various cutting speeds (rounded edge): (*a*) 50, (*b*) 80, and (*c*) 120 m/min

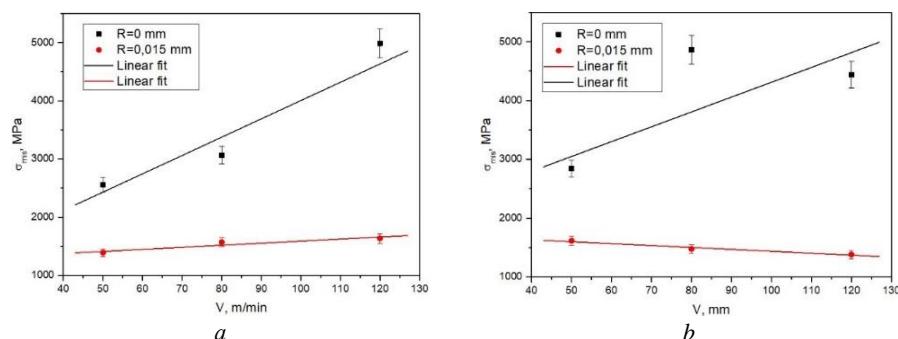


Рис. 9. Зависимость максимальных значений эквивалентных напряжений от скорости резания при фрезеровании заготовки: *a* – из нержавеющей стали AISI 304 SS; *b* – из титанового сплава Grade 5

Fig. 9. Maximum equivalent stress as a function of the cutting speed during milling of the workpiece made of: (*a*) AISI 304 SS stainless steel and (*b*) Grade 5 titanium alloy

Символами на рис. 9. представлены результаты вычислительных экспериментов, а линии – это линейная аппроксимация расчетных данных. Интервалы достоверности на расчетных данных соответствуют разбросу их значений в диапазоне $\pm 5\%$. Расчетные данные аппроксимированы линейными зависимостями, имеющими коэффициент детерминации $R^2 = 0,95$ и $0,94$ для режущих кромок без скругления ($\rho = 0$ мм) и со скруглением ($\rho_{\text{edge}} = 0,015$ мм) соответственно, – это говорит о достаточной точности полученной аппроксимирующей функции. По поведению аппроксимирующей функции можно судить о том, что процесс фрезерования сплава AISI 304 SS в обоих случаях имеет тенденцию к увеличению максимальных значений эквивалентных напряжений при увеличении скорости резания. При этом напряжения зарождаются на режущей кромке и распространяются в узкой зоне ближе к нижней поверхности вглубь режущего клина.

В процессе фрезерования в объеме фрезы возникает сложнапряженное состояние. Основной вклад в напряженно-деформированное состояние вносит сжимающая нагрузка как максимальное отрицательное значение нормальной компоненты тензора напряжений. Поэтому при сравнении прочности на сжатие инструментального материала типа WC + Co, имеющей значение 4 350 МПа, с возникающими эквивалентными напряжениями опасность представляет случай с острой кромкой фрезы с максимальными значениями 4 986 МПа при коэффициенте запаса прочности $n = 0,87$. Во всех других случаях эквивалентные напряжения ниже предела прочности на сжатие. При использовании округленной кромки минимальный коэффициент запаса прочности $n = 2,66$, что является хорошим прогнозом относительно сохранения прочности.

Для сплава Grade 5 линейные функции, аппроксимирующие экспериментальные данные, имеют коэффициенты детерминации $R^2 = 0,82$ и $0,95$ для режущих кромок без округления ($\rho_{\text{edge}} = 0$ мм) и со округлением ($\rho_{\text{edge}} = 0,015$ мм) соответственно, – в первом случае это говорит о недостаточной точности полученной аппроксимирующей функции. Однако в общем сравнительном анализе приходится мириться с подобной зависимостью. По поведению аппроксимирующих функций можно судить о том, что процесс фрезерования сплава Grade 5 в случае $\rho_{\text{edge}} = 0$ мм имеет тенденцию к увеличению максимальных значений эквивалентных напряжений при увеличении скорости резания. Однако линия тренда для случая $\rho_{\text{edge}} = 0,015$ мм имеет обратную тенденцию к снижению. При сравнении прочности на сжатие инструментального материала, имеющей значение 4 350 МПа, с возникающими эквивалентными напряжениями в случае фрезерования сплава Grade 5 представляет опасность два случая с острой кромкой с максимальными значениями 4 862 и 4 440 МПа при коэффициентах запаса прочности $n = 0,9$ и $0,98$. Во всех других случаях эквивалентные напряжения ниже предела прочности на сжатие.

Заключение

1. Фрезы с острой режущей кромкой (без округления) склонны к разрушению при увеличении скорости резания в исследуемом диапазоне из-за начального захвата срезаемого материала большей толщины. Развитие зоны потенциального разрушения наблюдается в области вершины кромки вследствие образования в ней узкого фронта концентрации напряжений, превышающего по величине предел прочности инструментального материала. Эквивалентные напряжения на фрезе

с округленной режущей кромкой во всех случаях ниже предела прочности при растяжении с коэффициентами запаса прочности выше 2, что влияет на благоприятный прогноз оценки его надежности.

2. Характер зависимостей максимальных значений эквивалентных напряжений во фрезах от скорости резания аналогичен для фрез без округления и имеет тенденцию к увеличению при обработке обоих исследуемых материалов, в то время как для фрез со округленными кромками тенденция к увеличению наблюдается только при обработке нержавеющей стали AISI 304 SS. При обработке титанового сплава Grade 5 зависимость уменьшается с увеличением скорости резания. Это объясняется различиями в пластичности двух материалов, использованных в исследовании.

3. Характер распределения напряжений в объеме режущего клина фрезы различен в зависимости от формы режущей кромки. При отсутствии округления напряжения концентрируются на кромке с небольшим растеканием в узкой области, прилегающей к задней поверхности несмотря на то, что поверхность контакта с образцом остается в зоне низких напряжений. При наличии округления концентратор напряжений прилегает ко всей поверхности контакта, причем под концентратором образуется область с низкими значениями в районе округления, что способствует сохранению прочности режущего клина.

Список источников

1. Al-Athel K.S., Gadala M.S. The use of volume of solid (VOS) approach in simulating metal cutting with chamfered and blunt tools // *Int. J. Mech. Sci.* 2011. V. 53. P. 23–30. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2010.10.003
2. Denkena B., Kohler J., Mengesha M.S. Influence of the cutting edge rounding on the chip formation process. Part 1. Investigation of material flow, process forces, and cutting temperature // *Prod. Eng. Res. Devel.* 2012. V. 6. P. 329–338 doi: 10.1007/s11740-012-0366-x
3. Black J.T., Huang J.M. An evaluation of chip separation criteria for the FEM simulation of machining // *ASME J. Manuf. Sci. Eng.* 1996. V. 118. P. 545–553.
4. Komvopoulos K., Erpenbeck S.A. Finite element modeling of orthogonal metal cutting // *ASME J. Eng. Ind.* 1991. V. 113 (3). P. 253–267.
5. Lin Z.C., Lin S.Y. A coupled finite element model of thermoelastic-plastic large deformation for orthogonal cutting // *ASME J. Eng. Ind.* 1992. V. 114. P. 218–226.
6. Strenkowski J.S., Carroll J.T. Finite element models of orthogonal cutting with application to single point diamond turning // *Int. J. Mech. Sci.* 1986. V. 30 (12). P. 899–920.
7. Yen Y.-C., Jain A., Altan T. A finite element analysis of orthogonal machining using different tool edge geometrie // *J. Mater. Process. Manuf.* 2004. V. 146. P. 72–81. doi: 10.1016/S0924-0136(03)00846-X
8. Yusoff A.R., Turner S., Taylor C.M., Sims N.D. The role of tool geometry in process damping milling // *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* 2010. V. 50. P. 883–895. doi: 10.1007/s00170-010-2586-6
9. AUTODYN-TM Interactive non-linear dynamic analysis software theory manual. Horsam: Century Dynamics Inc., 1998.
10. Kozlov V., Babaev A., Schulz N. et al. Study of a Methodology for Calculating Contact Stresses during Blade Processing of Structural Steel // *Metals*. 2023. V. 13 (12). Art. 2009. doi: 10.3390/met13122009
11. Skripnyak V.V., Skripnyak V.A. Hexagonal Close-Packed (hcp) Alloys under Dynamic Impacts // *J. Appl. Phys.* 202. V. 28 (131). P. 16–19.
12. Скрипняк Е.Г., Скрипняк Н.В., Козулин А.А., Скрипняк В.А. Моделирование влияния наноструктурированного поверхностного слоя на механическое поведение алюминиевых и магниевых сплавов при динамических воздействиях // *Известия вузов. Физика*. 2010. Т. 53, № 12-2. С. 235–242.

13. Zhang W., Wang X., Hu Y. et al. Predictive modelling of microstructure changes, micro-hardness and residual stress in machining of 304 austenitic stainless steel // *Int. J. Mach. Tool. Manufact.* 2018. V. 130. P. 36–48. doi: 10.1016/j.ijmachtools.2018.03.008
14. Zou Z. Research on inverse identification of Johnson-Cook constitutive parameters for turning 304 stainless steel based on coupling simulation // *JMR&T.* 2023. V. 23. P. 2244–2262.
15. Zhuang K., Zhou S., Zou L., Lin L., Liu Y., Weng J., Gao J. Numerical investigation of sequential cuts residual stress considering tool edge radius in machining of AISI 304 stainless steel // *Simulation Modelling Practice and Theory.* 2022. V. 118. Art. 102525.
16. Molinari A., Musquar C., Sutter G. Adiabatic shear banding in high speed machining of Ti-6Al-4V: experiments and modeling // *Int. J. Plast.* 2002. V. 18. P. 443–459.

References

1. Al-Athel K.S., Gadala M.S. (2011) The use of volume of solid (VOS) approach in simulating metal cutting with chamfered and blunt tools. *International Journal of Mechanical Sciences.* 53. pp. 23–30. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2010.10.003
2. Denkena B., Kohler J., Mengesha M.S. (2012) Influence of the cutting edge rounding on the chip formation process: Part 1. Investigation of material flow, process forces, and cutting temperature. *Production Engineering-Research and Development.* 6. pp. 329–338. doi: 10.1007/s11740-012-0366-x
3. Black J.T., Huang J.M. (1996) An evaluation of chip separation criteria for the FEM simulation of machining. *Journal of Manufacturing Science and Engineering.* 118. pp. 545–553. doi: 10.1115/1.2831066
4. Komvopoulos K., Erpenbeck S.A. (1991) Finite element modeling of orthogonal metal cutting. *Journal of Engineering for Industry.* 113(3). pp. 253–267. doi: 10.1115/1.2899695
5. Lin Z.C., Lin S.Y. (1992) A coupled finite element model of thermoelastic-plastic large deformation for orthogonal cutting. *Journal of Engineering for Industry.* 114(2). pp. 218–226. doi: 10.1115/1.2904165
6. Strenkowski J.S., Carroll J.T. (1986) Finite element models of orthogonal cutting with application to single point diamond turning. *International Journal of Mechanical Sciences.* 30(12). pp. 899–920. doi: 10.1016/0020-7403(88)90073-2
7. Yen Y.-C., Jain A., Altan T. (2004) A finite element analysis of orthogonal machining using different tool edge geometries. *Journal of Materials Processing Technology.* 146. pp. 72–81. doi: 10.1016/S0924-0136(03)00846-X
8. Yusoff A.R., Turner S., Taylor C.M., Sims N.D. (2010) The role of tool geometry in process damping milling. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology.* 50. pp. 883–895. doi: 10.1007/s00170-010-2586-6
9. AUTODYN-TM *Interactive Non-Linear Dynamic Analysis Software Theory Manual* (1998) Horsam: Century Dynamics Inc.
10. Kozlov V., Babaev A., Schulz N., Semenov A., Shevchuk A. (2023) Study of a methodology for calculating contact stresses during blade processing of structural steel. *Metals.* 13(12). Article 2009. doi: 10.3390/met13122009
11. Skripnyak V.V., Skripnyak V.A. (2022) Hexagonal close-packed (hcp) alloys under dynamic impacts. *Journal of Applied Physics.* 28. pp. 16–19. doi: 10.1063/5.0085338
12. Skripnyak E.G., Skripnyak N.V., Kozulin A.A., Skripnyak V.A. (2010) Modelirovanie vliyaniya nanostrukturirovannogo poverkhnostnogo sloya na mekhanicheskoe povedenie alyuminievyykh i magnievyykh splavov pri dinamicheskikh vozdeystviyakh [Simulation of the effect of nanostructured surface layer on the mechanical behavior of aluminum and magnesium alloys under dynamic impacts]. *Izvestiya vuzov. Fizika.* 53(12-2). pp. 235–242.
13. Zhang W., Wang X., Hu Y., Wang S. (2018) Predictive modelling of microstructure changes, micro-hardness and residual stress in machining of 304 austenitic stainless steel. *International Journal of Machine Tools and Manufacture.* 130. pp. 36–48. doi: 10.1016/j.ijmachtools.2018.03.008

14. Zou Z. (2023) Research on inverse identification of Johnson-Cook constitutive parameters for turning 304 stainless steel based on coupling simulation. *Journal of Materials Research and Technology*. 23. pp. 2244–2262. doi: 10.1016/j.jmrt.2023.01.090
15. Zhuang K., Zhou S., Zou L., Lin L., Liu Y., Weng J., Gao J. (2022) Numerical investigation of sequential cuts residual stress considering tool edge radius in machining of AISI 304 stainless steel. *Simulation Modelling Practice and Theory*. 118. Article 102525. doi: 10.1016/j.simpat.2022.102525
16. Molinari A., Musquar C., Sutter G. (2002) Adiabatic shear banding in high speed machining of Ti-6Al-4V: experiments and modeling. *International Journal of Plasticity*. 18(4). pp. 443–459. doi: 10.1016/S0749-6419(01)00003-1

Сведения об авторах:

Пивкин Пётр Михайлович – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории цифрового проектирования кибер-физических инструментальных систем Московского государственного технологического университета «СТАНКИН» (Москва, Россия). E-mail: pmpivkin@gmail.com

Бабаев Артём Сергеевич – кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории нанотехнологий металлургии Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: a.s.babaev@mail.tsu.ru

Козлов Виктор Николаевич – кандидат технических наук, научный сотрудник лаборатории нанотехнологий металлургии Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: kozlov-viktor@bk.ru

Семёнов Артём Романович – младший научный сотрудник лаборатории нанотехнологий металлургии Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: artems2102@yandex.ru

Назаренко Екатерина Сергеевна – кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией цифрового проектирования кибер-физических инструментальных систем Московского государственного технологического университета «СТАНКИН» (Москва, Россия). E-mail: katarina.86@bk.ru

Надыкто Алексей Борисович – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник лаборатории цифрового проектирования кибер-физических инструментальных систем Московского государственного технологического университета «СТАНКИН» (Москва, Россия). E-mail: abnadykto@yandex.ru

Information about the authors:

Pivkin Pyotr M. (Candidate of Technical Sciences, Leading Researcher, Laboratory of Digital Design of Cyber-Physical Cutting Tool Systems, Moscow State University of Technology STANKIN, Moscow, Russian Federation). E-mail: pmpivkin@gmail.com

Babaev Artyom S. (Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher, Laboratories of Nanotechnology of Metallurgy, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: a.s.babaev@mail.tsu.ru

Kozlov Viktor N. (Candidate of Technical Sciences, Researcher, Laboratories of Nanotechnology of Metallurgy, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kozlov-viktor@bk.ru

Semyonov Artyom R. (Junior Researcher, Laboratories of Nanotechnology of Metallurgy, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: artems2102@yandex.ru

Nazarenko Ekaterina S. (Candidate of Technical Sciences, Laboratory Manager, Laboratory of Digital Design of Cyber-Physical Cutting Tool Systems, Moscow State University of Technology STANKIN, Moscow, Russian Federation). E-mail: katarina.86@bk.ru

Nadykto Aleksey B. (Doctor of Physics and Mathematics, Chief Scientist, Laboratory of Digital Design of Cyber-Physical Cutting Tool Systems, Moscow State University of Technology STANKIN, Moscow, Russian Federation). E-mail: abnadykto@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 21.04.2025; принята к публикации 06.09.2025

The article was submitted 21.04.2025; accepted for publication 06.09.2025

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/97/11

Изгиб упруго-пластического бруса коробчатого сечения, армированного упругими волокнами

Сергей Иванович Сенашов¹, Ирина Леонидовна Савостьянова²

^{1, 2} Сибирский государственный университет науки и технологий
им. академика М.Ф. Решетнева, Красноярск, Россия

¹ sen@sibsau.ru

² ruppa@inbox.ru

Аннотация. Рассмотрен коробчатый брус, который изгибается под действием силы, приложенной к его концу. Центр тяжести поперечного сечения не совпадает с точкой приложения изгибающей силы. Предполагается, что деформация в брусѣ упруго-пластическая, и боковая поверхность его свободна от напряжений. Построено точное решение с помощью законов сохранения, описывающее напряженное состояние этой конструкции. Напряженное состояние вычисляется в каждой точке рассмотренной фигуры с помощью интегралов по внешним контурам поперечного сечения и контурам сечений волокон.

Ключевые слова: упругопластический изгиб, коробчатый композитный брус, точное решение, законы сохранения

Для цитирования: Сенашов С.И., Савостьянова И.Л. Изгиб упруго-пластического бруса коробчатого сечения, армированного упругими волокнами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 97. С. 158–167. doi: 10.17223/19988621/97/11

Original article

Bending of the elastic-plastic box-shaped beam reinforced with elastic fibers

Sergey I. Senashov¹, Irina L. Savost'yanova²

^{1, 2} Reshetnev Siberian State University of Science and Technology,
Krasnoyarsk, Russian Federation

¹ sen@sibsau.ru

² ruppa@inbox.ru

Abstract. For the deployment of antennas on spacecraft, long hollow box-shaped beams are used in space technology. These beams are fabricated from composite materials. Solar radiation induces stresses in the beams, which significantly affect the performance of the devices mounted on the deployed structure.

This study examines a box-shaped beam subjected to bending by a force applied at its free end. The center of gravity of the cross-section does not coincide with the point of the bending force application. The analysis assumes elastoplastic deformations and a lateral surface free of stresses. An exact solution is derived using conservation laws that provide a detailed description of the stress state in the structure. The stress state is calculated at each point of the considered domain through integrals along the external boundaries of the cross-section and along the contours of the fiber sections.

Keywords: elastic-plastic bending, box-shaped composite beam, exact solution, conservation laws

For citation: Senashov, S.I., Savost'yanova, I.L. (2025) Bending of the elastic-plastic box-shaped beam reinforced with elastic fibers. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 97. pp. 158–167. doi: 10.17223/19988621/97/11

Введение

Проблема компактного размещения и развертывания крупногабаритных трансформируемых конструкций из транспортного положения в рабочее для наземных и космических условий ставит задачи поиска концепций, способных разрешить основное противоречие: минимальная масса, максимальные компактность и необходимые габариты в рабочем состоянии. Перспективный способ развертывания крупногабаритных трансформируемых конструкций базируется на упругой энергии, запасаемой в процессе компактного размещения. Перспективными составными частями таких конструкций являются гибкие, упругие стержни из армированных композиционных материалов. Проблема изгиба и кручения армированного композитного бруса во многом определяет потенциальные возможности конструкции в целом. Ситуация, когда масса изделия должна быть минимальной, а надежность развертывания максимальной, требует детального изучения механики процесса с полным пониманием ограничений, накладываемых на конструкцию, и, как следствие, ограничений на технологию изготовления составных частей таких конструкций.

В настоящее время большое внимание уделяется всестороннему исследованию композитных материалов. Так, в [1] разработана многослойная броня: алюмооксидная керамика – тканый материал, армированный эпоксидной смолой и алюминиевым сплавом. В [2] исследованы колебания композитной балки из функционально-градиентного в двух направлениях материала, армированного углеродными нанотрубками. В работе [3] определена и сопоставлена эффективность различных схем облицовки пластины композитными покрытиями. В [4] исследована устойчивость подкрепленного отсека фюзеляжа самолета, выполненного из композиционного материала, при чистом изгибе и нагружении внутренним давлением. В [5] проведены исследования стойкости формируемого композитного материала при высокоскоростном соударении. В [6] приводится математическая постановка задачи о вынужденных установившихся и собственных колебаниях рассматриваемых смарт-систем, а также результаты численных расчетов, из которых следует, что графеновые композиты могут быть использованы для дополнительного демпфирования колебаний смарт-структур на основе пьезоэлементов. В работе [7] на основе метода конечных элементов разработан вычислительный алгоритм для решения ограниченного класса задач об изгибе композитных пластин, армированных

системами однонаправленных высокопрочных волокон. Разработана модель динамического деформирования и разрушения композитных материалов, в которой учитывается нелинейность диаграмм ударного нагружения с упрочнением, зависящего от скорости деформирования [8]. В работе В.Э. Богачева и соавт. [9] рассмотрена задача нахождения предела упругого деформирования предельно тонкого адгезионного слоя при нормальном разрыве. Показано, что при плоской деформации напряжение отрыва значительно превышает аналогичное напряжение плоского напряженного состояния.

Авторы статьи [10] представили результаты моделирования основных этапов технологического процесса производства крупногабаритной оболочки методом непрерывной намотки. Они сформулировали систему граничных и начальных условий для конечно-элементного анализа.

В [11] представлены результаты экспериментальных исследований эффективности противоударной стойкости керамических и композитных образцов в диапазоне высоких скоростей удара.

В обзоре [12] описан существующий задел для разработки композитов с металлической матрицей. В [13] описаны подходы к расчету максимального усилия при продавливании стеклопластиковых труб для микротоннелирования, определены упруго-прочностные характеристики труб на элементарных образцах труб и сборках из двух образцов труб, соединенных между собой стальной муфтой. В [14] рассмотрено упругопластическое деформирование тонкого адгезионного слоя упругими консолями, соответствующее нагружению нормального разрыва. Ю.Н. Работнов предложил модель композитного материала с упруго-пластическим связующим и упругими волокнами [15. С. 722]. При этом между волокнами и матрицей при нагружении действует постоянное касательное напряжение. На основе этой модели в предлагаемой статье рассмотрено напряженное состояние коробчатого бруса, изготовленного из композиционных материалов. Задача решена с помощью законов сохранения, что уже применяется для решения и других задач механики [16].

Постановка задачи

Рассмотрим упруго-пластическое состояние бруса коробчатого сечения, армированного упругими волокнами, который находится под действием поперечной силы (рис. 1). С помощью построенных законов сохранения вычислим напряженное состояние в каждой точке этой конструкции.

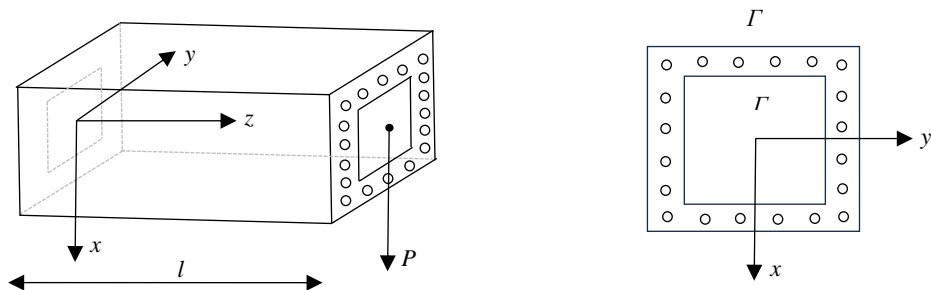


Рис. 1. Изгибаемый брус
Fig. 1. Bent beam

В матрице S выполняются уравнение равновесия и уравнение, которое является следствием соотношений Бельтрами–Митчелла

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\partial \tau_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_2}{\partial y} - P[\delta_1(x - x^0) + \delta_2(y - y^0)] = 0, \\ F_2 &= \frac{\partial \tau_1}{\partial y} - \frac{\partial \tau_2}{\partial x} + P[\delta_1(y - y^0) - \delta_2(x - x^0)] + 2K = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \delta_1 &= -\frac{I_{11}S - S_1^2}{\Delta}, \delta_2 = \frac{I_{12}S - S_1S_2}{\Delta}, \Delta = \begin{vmatrix} I_{22} & I_{12} & S_2 \\ I_{12} & I_{11} & S_1 \\ S_2 & S_1 & S \end{vmatrix}, \\ x^0 &= \frac{S_2}{S}, y^0 = \frac{S_1}{S}, \\ \sigma_{33} &= P(l - z)(\delta_1(x - x^0) + \delta_2(y - y^0)), \\ S &= \iint_S ds, S_1 = \iint_S y ds, S_2 = \iint_S x ds, \\ I_{11} &= \iint_S y^2 ds, I_{12} = \iint_S xy ds, I_{22} = \iint_S x^2 ds, \end{aligned}$$

S – поперечное сечение, I_{ij} – моменты инерции сечения, S_i – статические моменты, $\tau_1 = \tau_{xz}$, $\tau_2 = \tau_{yz}$, σ_{33} – компоненты тензора напряжений, ν – коэффициент Пуассона матрицы, x^0 , y^0 – координаты центра тяжести сечения. Пусть брус нагружен в конечном сечении силами, равномерно распределенными с равнодействующей $P = (P, 0, 0)$, которая действует в направлении оси x , центр тяжести поперечного сечения бруса не совпадает с началом координат. Постоянная K характеризует крутку вокруг продольной оси бруса; вычисление этой постоянной можно найти в [17. С. 455]. Матрица имеет предел текучести k_s .

Волокна расположены в произвольном порядке параллельно оси бруса. Каждое волокно имеет круглое сечение, центр волокна располагается в точке с координатами (x_i, y_i) , радиус волокна равен R , упругие постоянные ν_1 , G_1 . Пределы текучести волокон превосходят предел текучести матрицы $k_1 > k > 0$. Касательное напряжение между волокном и матрицей равно $\tau < k$.

Замечание. Второе уравнение (1) без труда получается как следствие первого уравнения (1) и соотношений Бельтрами–Митчелла

$$\Delta \tau_1 = \frac{P \delta_1}{(1 + \nu)}, \Delta \tau_2 = \frac{P \delta_2}{1 + \nu},$$

Δ – оператор Лапласа.

Граничные условия

Внутренняя и внешние боковые поверхности бруса предполагаются свободными от напряжений и находящимися в пластическом состоянии, поэтому на них выполняются условие

$$\tau_1 n + \tau_2 m = 0 \quad (2)$$

и условие пластичности

$$\tau_1^2 + \tau_2^2 = k^2 = k_s^2 - \frac{1}{3}\sigma_{33}^2, \quad (3)$$

k_s – предел текучести матрицы, n , m – компоненты вектора внешней нормали к боковой поверхности.

В результате из (2), (3) получаем следующие граничные условия:

$$\tau_1 = -mk, \tau_2 = nk. \quad (4)$$

На границе между волокном и матрицей выполняются условия

$$\tau_{xz} m_i - \tau_{yz} n_i = \tau, \quad \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2,$$

где n_i , m_i – компоненты вектора нормали к боковой поверхности i -го волокна, которые запишем в виде:

$$\tau_1 = m_i \tau \mp n_i \sqrt{k^2 - \tau^2}, \tau_2 = n_i \tau \pm m_i \sqrt{k^2 - \tau^2}. \quad (5)$$

Законы сохранения уравнений (1)

Сохраняющийся ток закона сохранения ищем в виде:

$$A = \alpha^1 \tau_1 + \beta^1 \tau_2 + \gamma^1, B = \alpha^2 \tau_1 + \beta^2 \tau_2 + \gamma^2, \quad (6)$$

где $\alpha^i, \beta^i, \gamma^i$ – функции от x, y .

Тогда закон сохранения для дифференциальных уравнений (1) запишется в виде:

$$D_x A + D_y B = \omega_1 F_1 + \omega_2 F_2, \quad (7)$$

где $D_x = \partial_x + \partial_x \tau_1 \partial_{\tau_1} + \partial_x \tau_2 \partial_{\tau_2}$, $D_y = \partial_y + \partial_y \tau_1 \partial_{\tau_1} + \partial_y \tau_2 \partial_{\tau_2}$, ω_1, ω_2 – некоторые линейные дифференциальные операторы, одновременно не тождественно равные нулю.

Замечание. Более общее определение закона сохранения и способы его построения можно найти в [18, 19].

Подставляем (6) в (7), получаем

$$\begin{aligned} & \partial_x (\alpha^1 \tau_1 + \beta^1 \tau_2 + \gamma^1) + \partial_y (\alpha^2 \tau_1 + \beta^2 \tau_2 + \gamma^2) = \\ & = \omega_1 (\partial_x \tau_1 + \partial_y \tau_2 + C) + \omega_2 (\partial_x \tau_2 - \partial_y \tau_1 + D). \end{aligned} \quad (8)$$

В (8) для краткости введены обозначения

$$C = -P[\delta_1(x - x^0) + \delta_2(y - y^0)], \quad D = P[\delta_1(y - y^0) - \delta_2(x - x^0)] + 2K.$$

Из (8) получаем

$$\alpha^1 = \beta^2, \alpha^2 = -\beta^1, \partial_x \beta^1 + \partial_y \alpha^1 = 0, \partial_x \alpha^1 - \partial_y \beta^1 = 0, \partial_x \gamma^1 + \partial_y \gamma^2 = \alpha^1 C + \beta^1 D. \quad (9)$$

Из (9) следует, что система уравнений (1) допускает бесконечную серию законов сохранения.

Вычисления компонент тензора напряжений в матрице

Пусть $(x_0, y_0) \in S$. Рассмотрим решение уравнений (9), которое имеет особенность в этой точке.

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \beta^1 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \gamma^1 &= P[-[\delta_1(x_0 - x^0) + \delta_2(y_0 - y^0 + x - x_0)] \arctg \frac{x - x_0}{y - y_0} + \end{aligned} \quad (10)$$

$$+ \frac{[\delta_1(y_0 - y^0) + \delta_2(x_0 - x^0)]}{2} \ln[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2], \gamma^2 = 0.$$

Опишем вокруг точки $(x_0, y_0) \in S_1$ окружность радиуса $\varepsilon: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2$, сделаем разрез, как это изображено на рис. 2.

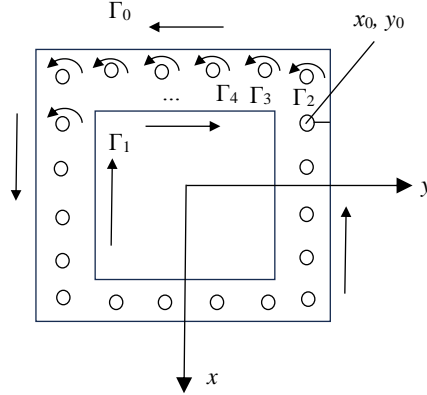


Рис. 2. Поперечное сечение бруса. Направление обхода

Fig. 2. A cross-section of the beam with indicated directions

По формуле Грина из (7) получаем

$$\iint_S (A_x + B_y) dx dy = \oint_{\Gamma_0} A dy - B dx - \sum_{i=1}^n \oint_{\Gamma_i} A dy - B dx - \oint_{\varepsilon} A dy - B dx = 0, \quad (11)$$

где ε – окружность: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2$.

Рассмотрим решение (10), полагая $x - x_0 = \varepsilon \cos \varphi$, $y - y_0 = \varepsilon \sin \varphi$, тогда из (11) с учетом (9) при $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем

$$\begin{aligned} 2\pi\tau_{xz}(x_0, y_0) = & \oint_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} \left(m_0 k \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - n_0 k \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \gamma^1 \right) dy - \\ & - \left(m_0 k \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + n_0 k \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right) dx + \\ & + \sum_{i=1}^n \oint_{\Gamma_i} \left(\frac{(m_i \tau - n_i \sqrt{k^2 - \tau^2})(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - \frac{(-n_i \tau + m_i \sqrt{k^2 - \tau^2})(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \gamma^1 \right) dy - \\ & - \left(\frac{(m_i \tau - n_i \sqrt{k^2 - \tau^2})(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \frac{(n_i \tau + m_i \sqrt{k^2 - \tau^2})(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right) dx. \end{aligned} \quad (12)$$

Рассмотрим другое решение уравнений (9):

$$\begin{aligned} \alpha_*^1 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \beta_*^2 = -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \partial_x \gamma_*^1 + \partial_y \gamma_*^2 = \alpha_*^1 C + \beta_*^2 D. \\ \gamma_*^1 = P[-\delta_1(x - x_0) + \frac{(-\delta_1(x_0 - x^0) + \delta_2(y_0 - y^0))}{2} \ln((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) + \\ + (\delta_2(x_0 - x^0) + \frac{2K}{y - y_0} \operatorname{arctg} \frac{x - x_0}{y - y_0}), \gamma_*^2 = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Почти дословно повторяя предыдущие рассуждения с решением (13), получаем

$$\begin{aligned}
 2\pi\tau_{yz}(x_0, y_0) = & \oint_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} \left(m_0 k \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + n_0 k \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right) dy - \\
 & - \left(-m_0 k \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + n_0 k \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \gamma_*^1 \right) dx + \\
 & + \sum_{i=1}^n \oint_{\Gamma_i} \left(\frac{(m_i \tau - n_i \sqrt{k^2 - \tau^2})(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \frac{(n_i \tau + m_i \sqrt{k^2 - \tau^2})(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \gamma_*^1 \right) dy - \\
 & - \left(-(m_i \tau - n_i \sqrt{k^2 - \tau^2}) \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + (n_i \tau + m_i \sqrt{k^2 - \tau^2}) \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right) dx.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Заключение

В работе построены законы сохранения для уравнений, описывающих напряженное состояние упругого-пластического бруса коробчатого сечения, армированного упругими волокнами, под действием поперечной силы для каждого фиксированного сечения z . Законы сохранения позволили вычислить напряженное состояние в каждой точке бруса по формулам (13) и (14) с помощью интегралов по внешним границам бруса и волокон.

Список источников

1. Ахмед П.С., Абед М.С., Салим И.А. Экспериментальное исследование и численное моделирование баллистического воздействия на гибридный композит (оксид алюминия – тканый материал – эпоксидная смола – алюминий), используемый при изготовлении бронезиelta // Прикладная механика и техническая физика. 2023. № 4. С. 3–13.
2. Пан М., Чжоу С.М., Ху Б.Л., Чжан Ю.Ц. Свободные колебания композитной балки из функционально-градиентного в двух направлениях материала, армированной углеродными нанотрубками // Прикладная механика и техническая физика. 2023. № 5. С. 166–178.
3. Кирпичников В.Ю., Коцеев А.П., Сятковский А.И. Экспериментальное исследование эффективности армированных вибропоглощающих покрытий // Прикладная механика и техническая физика. 2022. № 1. С. 65–70.
4. Железнов Л.П., Серьезнов А.Н. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости композитной оболочки при чистом изгибе и внутреннем давлении // Прикладная механика и техническая физика. 2022. № 2. С. 207–216.
5. Гольшиев А.А., Долгова С.В. Влияние керамического волокна SiC в металломатричном композите на его стойкость при высокоскоростном нагружении // Прикладная механика и техническая физика. 2022. № 6. С. 145–149.
6. Матвеев В.П., Ошмарин Д.А., Юрлова Н.А. Использование электропроводящих композиционных материалов для дополнительного демпфирования смарт-систем на основе пьезоэлементов // Прикладная механика и техническая физика. 2021. № 5. С. 45–57.
7. Петраков И.Е., Садовский В.М., Садовская О.В. Анализ изгиба композитных пластин с учетом различия сопротивлений растяжению и сжатию // Прикладная механика и техническая физика. 2021. № 5. С. 172–183.
8. Федоренко А.Н., Федулов Б.Н., Ломакин Е.В. Моделирование ударного воздействия на демпфирующие элементы, изготовленные из композитных материалов // Прикладная механика и техническая физика. 2021. № 5. С. 100–107.

9. Богачева В.Э., Глаголев В.В., Глаголев Л.В., Маркин А.А. К нахождению предела упругости адгезионного слоя при его нормальном разрыве // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 83. С. 59–73. doi: 10.17223/19988621/83/6
10. Сахабутдинова Л.Р., Сметанников О.Ю., Ильиных Г.В. Численное моделирование процесса изготовления крупногабаритного композитного кокона с учетом термовязкоупругости // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 76. С. 165–181. doi: 10.17223/19988621
11. Зелепугин С.А., Толкачев В.Ф., Тырышкин И.М. Анализ эффективности противоударной стойкости двух групп керамических и композитных материалов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 80. С. 85–96. doi: 10.17223/19988621/80/8
12. Милейко С.Т. Антони Келли и композиты сегодня. Часть 2: Композиты с металлической матрицей // Композиты и наноструктуры. 2021. Т. 13, № 3-4 (51-52). С. 59–107.
13. Мельников Д.А., Иванов С.В., Антошин В.А., Албагачиев А.Ю. Исследование упруго-прочностных характеристик стеклопластиковых труб для микротоннелирования при осевом сжатии // Композиты и наноструктуры. 2022. Т. 14, № 1 (53). С. 48–59. doi: 10.36236/1999-7590-2021-13-3-4-59-107
14. Богачева В.Э., Глаголев В.В., Глаголев Л.В., Маркин А.А. Влияние пластических свойств тонкого адгезионного слоя на распределение зон пластичности и значения j -интеграла в состоянии плоской деформации // Механика композиционных материалов и конструкций. 2023. Т. 29, № 1. С. 115–131.
15. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979.
16. Гомонова О.В., Сенашов С.И. Определение областей упругого и пластического деформирования в задаче об одноосном растяжении пластины, ослабленной отверстиями // Прикладная механика и техническая физика. 2021. Т. 62, № 1. С. 208–216.
17. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.
18. Vinogradov A.M. Local symmetries and conservation laws // Acta Appl. Math. 1984. V. 2. P. 21–78.
19. Senashov S.I., Vinogradov A.M. Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity // Proc. Edinburg Math. Soc. 1988. V. 31. P. 415–439.

References

1. Akhmed P.S., Abed M.S., Salim I.A. (2023) Eksperimental'noe issledovanie i chislennoe modelirovanie ballisticheskogo vozdeystviya na gibridnyy kompozit (oksid alyuminiya - tkanny material - epoksidnaya smola - alyuminiy), ispol'zuemyy pri izgotovlenii bronezhileta [Experimental investigation and numerical modeling of ballistic effects on a hybrid composite (aluminum oxide - woven material - epoxy resin - aluminum) used in the manufacture of body armor]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 64(4). pp. 3–13. doi: 10.15372/PMTF202115020
2. Pan M., Zhou S. M., Hu B.L., Chzan Yu.Ts. (2023) Svobodnye kolebaniya kompozitnoy balki iz funktsional'no-gradientnogo v dvukh napravleniyakh materiala, armirovannoy uglerodnymi nanotrubkami [Free vibrations of a composite beam made of a functionally gradient in two directions material reinforced with carbon nanotubes]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 64(5). pp. 166–178. doi: 10.15372/PMTF202215136
3. Kirpichnikov V.Yu., Kosheev A.P., Syatkovsky I.I. (2022) Eksperimental'noe issledovanie effektivnosti armirovannykh vibropogloshchayushchikh pokrytiy [Experimental study of the effectiveness of reinforced vibration-absorbing coatings]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 63(1). pp. 65–70. doi: 10.15372/PMTF20220109

4. Zheleznov L.P., Ser'oznov A.N. (2022) Issledovanie nelineynogo deformirovaniya i ustoychivosti kompozitnoy obolochki pri chistom izgibe i vnutrennem davlenii [Investigation of nonlinear deformation and stability of a composite shell under pure bending and internal pressure]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 63(2). pp. 207–216. doi: 10.15372/PMTF20220220
5. Golyshev A.A., Dolgova S.V. (2022) Vliyanie keramicheskogo volokna SiC v metallomatrixnom kompozite na ego stoykost' pri vysokoskorostnom nagruzhении [Influence of ceramic fiber SiC in a metal matrix composite on its resistance to high-speed loading]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 63(6). pp. 145–149. doi: 10.15372/PMTF20220616
6. Matveenko V.P., Oshmarin D.A., Yurlova N.A. (2021) Ispol'zovanie elektroprovodyashchikh kompozitsionnykh materialov dlya dopolnitel'nogo dempfirovaniya smart-sistem na osnove p'zeoelementov [The use of electrically conductive composite materials for additional damping of smart systems based on piezoelectric elements]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 62(5). pp. 45–57. doi: 10.15372/PMTF20210505
7. Petrakov I.E., Sadovskiy V.M., Sadovskaya O.V. (2021) Analiz izgiba kompozitnykh plastin s uchetoм razlichiya soprotivleniy rastyazheniyu i szhatiyu [Analysis of bending of composite plates taking into account differences in tensile and compressive resistances]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 62(5). pp. 172–183. doi: 10.15372/PMTF20210517
8. Fedorenko A.N., Fedulov B.N., Lomakin E.V. (2021) Modelirovanie udarnogo vozdeystviya na dempfiruyushchie elementy, izgotovlennye iz kompozitnykh materialov [Modeling of impact on damping elements made of composite materials]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 62(5). pp. 100–107. doi: 10.15372/PMTF20210510
9. Bogacheva V.E., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. (2023) K nakhozheniyu predela uprugosti adgezionnogo sloya pri ego normal'nom razryve [On determining the elastic limit of an adhesive layer in the opening mode of loading]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 83. pp. 59–73. doi: 10.17223/19988621/83/6
10. Sakhabutdinova L.R., Smetannikov O.Yu., Il'inykh G.V. (2022) Chislennoe modelirovanie protsessa izgotovleniya krupnogabaritnogo kompozitnogo kokona s uchetoм termovyazkouprugosti [Numerical simulation of the process manufacture of large-scale composite shell taking into account thermo viscoelastic]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 76. pp. 165–181. doi: 10.17223/19988621/76/12
11. Zelepugin S.A., Tolkachev V.F., Tyryshkin I.M. (2022) Analiz effektivnosti protivoudarnoy stoykosti dvukh grupp keramicheskikh i kompozitnykh materialov [Analysis of impact resistance for two groups of ceramic and composite materials]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 80. pp. 85–96. doi: 10.17223/19988621/80/8
12. Mileyko S.T. (2021) Antoni Kelli i kompozity segodnya. Chast' 2: kompozity s metallicheskoy matritsey [Anthony Kelly and composites today. Part 2: composites with a metal matrix]. *Kompozity i nanostruktury – Composites and Nanostructures*. 13. 3-4(51-52). pp. 59–107. doi: 10.36236/1999-7590-2021-13-3-4-59-107
13. Mel'nikov D.A., Ivanov S.V., Antoshin V.A., Albagachiev A.Yu. (2022) Issledovanie uprugoprochnostnykh kharakteristik stekloplastikovyykh trub dlya mikrotonnelirovaniya pri osevom szhatii [Investigation of elastic-strength characteristics of fiberglass pipes for microtunneling under axial compression]. *Kompozity i nanostruktury – Composites and Nanostructures*. 14. 1(53). pp. 48–59. doi: 10.36236/1999-7590-2021-13-3-4-59-107

14. Bogacheva V.E., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. (2023) Vliyaniye plasticheskikh svoystv tonkogo adgezionnogo sloya na raspredeleniye zon plastichnosti i znacheniya j -integrala v sostoyanii ploskoy deformatsii [Influence of plastic properties of a thin adhesive layer on the distribution of plasticity zones and the values of the J-integral in a state of plane deformation]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsey – Mechanics of Composite Materials and Structures*. 29(1). pp. 115–131. doi: 10.33113/mkmk.ras.2023.29.01.08
15. Rabotnov Yu.N. (1979) *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of a deformable solid]. Moscow: Nauka.
16. Gomonova O.V., Senashov S.I. (2021) Opredeleniye oblastey uprugogo i plasticheskogo deformirovaniya v zadache ob odnoosnom rastyazhenii plastiny, oslablennoy otverstiyami [Determination of elastic and plastic deformation regions in the problem of uniaxial tension of a plate weakened by holes]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 62(1). pp. 208–216. doi: 10.15372/PMTF20210119
17. Novatskiy V. (1975) *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow: Mir.
18. Vinogradov A.M. (1984) Local symmetries and conservation laws. *Acta Applicandae Mathematicae*. 2. pp. 21–78. doi: 10.1007/BF01405491
19. Senashov S.I., Vinogradov A.M. (1988) Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*. 31. pp. 415–439. doi: 10.1017/S0013091500006817

Сведения об авторах:

Сенашов Сергей Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры информационных экономических систем Сибирского государственного университета науки и технологий им. академика М.Ф. Решетнева (Красноярск, Россия). E-mail: sen@sibsau.ru

Савостьянова Ирина Леонидовна – кандидат педагогических наук, доцент, заместитель директора Научно-образовательного центра «Институт космических исследований и высоких технологий» Сибирского государственного университета науки и технологий им. академика М.Ф. Решетнева (Красноярск, Россия). E-mail: ruppa@inbox.ru

Information about the authors:

Senashov Sergey I. (Doctor of Physics and Mathematics, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russian Federation). E-mail: sen@sibsau.ru

Savost'yanova Irina L. (Candidate of Pedagogical Sciences, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russian Federation). E-mail: ruppa@inbox.ru

Статья поступила в редакцию 20.03.2024; принята к публикации 06.09.2025

The article was submitted 20.03.2024; accepted for publication 06.09.2025

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/97/12

Модель термомеханического поведения фотополимеров с памятью формы в условиях терморелаксационного перехода

Олег Юрьевич Сметанников¹, Глеб Валентинович Ильиных²,
Юлия Борисовна Фасхутдинова³

*^{1, 2, 3} Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Пермь, Россия*

¹ sou2009@mail.ru

² gleb@ilinyh.ru

³ fub26@mail.ru

Аннотация. Осуществлена экспериментальная идентификация новых феноменологических определяющих соотношений для сшитых полимеров на примере фотополимерных материалов, эксплуатация которых сопровождается терморелаксационными переходами. Представлена физическая модель, включающая гипотетический элемент, описывающий формирование новых межмолекулярных связей в процессе стеклования, и вязкую составляющую, отвечающую за релаксационные процессы при постоянной температуре. Проведены идентификационные DMA-эксперименты по определению констант модели. Проведен проверочный эксперимент ступенчатого нагружения одноосных образцов при нагреве. В численном эксперименте проиллюстрирован эффект памяти формы.

Ключевые слова: фотополимеры, определяющие соотношения, вязкоупругость, терморелаксационный переход, DMA, ТМА, быстрое прототипирование, эффект памяти формы

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSNM- 2023-0006).

Для цитирования: Сметанников О.Ю., Ильиных Г.В., Фасхутдинова Ю.Б. Модель термомеханического поведения фотополимеров с памятью формы в условиях терморелаксационного перехода // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 97. С. 168–183. doi: 10.17223/19988621/97/12

Original article

A model of the thermomechanical behavior of shape-memory photopolymers under thermorelaxation transition conditions

Oleg Yu. Smetannikov¹, Gleb V. Il'inykh², Yuliya B. Faskhutdinova³

*^{1, 2, 3} Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Пермь, Россия*

¹ sou2009@mail.ru

² gleb@ilinyh.ru

³ fub26@mail.ru

Abstract. This paper presents a series of experiments aimed at deriving the phenomenological constitutive relations for cross-linked polymers. The use of photopolymer materials is accompanied by thermal relaxation transitions, i.e., the glass transition. A model comprising a hypoelastic element and a viscous element is adopted for this class of materials. The hypoelastic element describes the formation of new intermolecular bonds during the glass transition, while the viscous element describes the relaxing processes at a constant temperature.

A complete experimental program for identifying the viscoelastic constants is developed and carried out using dynamic mechanical analysis (DMA). The obtained complex modulus is verified and refined based on thermomechanical analysis (TMA).

Additionally, a validation experiment is performed on a uniaxial specimen subjected to stepwise loading under heating. The results demonstrated a strong quantitative and qualitative agreement between the calculated and experimental data. A numerical simulation based on the proposed model illustrates the shape-memory effect (SME).

Keywords: photopolymers, constitutive relations, viscoelasticity, thermorelaxation transition, DMA, TMA, rapid prototyping, shape memory effect

Acknowledgments: This work was partially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No. FSNM- 2023-0006).

For citation: Smetannikov, O.Yu., Il'inykh, G.V., Faskhutdinova, Yu.B. (2025) A model of the thermomechanical behavior of shape-memory photopolymers under thermorelaxation transition conditions. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 97. pp. 168–183. doi: 10.17223/19988621/97/12

Введение

Фотополимеры широко применяются в стереолитографии, процессе, основанном на послойной фотоинициализации (полимеризации) лазерным излучением или другим источником света фотополимерной композиции для генерирования быстрых прототипов, или гр-моделей (rapid prototyping – быстрое прототипирование), по трехмерной CAD-геометрии. Этот подход используется в медицине [1] и машиностроении [2] и позволяет создавать детали геометрически сложной формы с такими преимуществами над другими аддитивными технологиями, как однородность и изотропность механических свойств детали [3].

Отдельной сферой применения быстрых прототипов из фотополимеров является литье по выплавляемым моделям. Быстрые прототипы используются в качестве основы для формообразования керамической оболочки, которая после высвобождения полимерной массы участвует в создании металлических отливок [4]. Процесс сопровождается появлением остаточных напряжений и деформаций, причинами которых являются объемная усадка модели при формообразовании, выделение тепла в процессе фотополимеризации [5] и различие термомеханических свойств материалов оболочки и прототипа [6]. Последнее может вызывать разрушение керамической оболочки при превышении предельной нагрузки [7]. Проведенные в рамках настоящей работы исследования в первую очередь нацелены на описание поведения фотополимеров в данной сфере применения.

Наличие указанных проблем, напрямую связанных с фазовыми и релаксационными переходами, придает особую значимость изучению термомеханического поведения фотополимеров, созданию адекватных физических соотношений. Описанию моделей поведения стеклующихся полимерных материалов, используемых с целью оценки напряженно деформированного состояния конструкций без точного учета переходных процессов, посвящены известные работы И.И. Бугакова [8, 9], В.В. Болотина [10], Р.А. Турусова [11], В.Т. Томашевского [12], В.В. Shaffer, М. Lewitsky [13] и др. В работах М.С. Boyce, R.B. Dupaix [14], А.Г. Varghese, R.C. Batra [15] предложены модели, описывающие поведение аморфных полимеров в температурном диапазоне стеклования и выше него. Смежной сферой исследований является поведение полимеров, проявляющих эффекты памяти формы. Такого рода материалы используются в аэрокосмической области, при создании медицинских имплантатов, гибкой электроники, мягких роботов [16], в аддитивных технологиях [17] и других областях. В работе [18] описана модель термомеханического поведения такого рода материалов.

В целом можно заключить, что модели в рассмотренных работах предназначены для описания поведения полимера в достаточно узком температурном диапазоне и моделирования конкретного механизма памяти формы и не могут описывать другие термомеханические эффекты.

Таким образом, актуальной является задача создания комплексной модели термомеханического поведения изделий из фотополимеров на всех стадиях их жизненного цикла, начиная с послойного наращивания полимеризующейся фотополимерной композиции и заканчивая процессом высокотемпературного извлечения формообразующей массы из керамической формы. Модель в первую очередь должна включать подтвержденные экспериментально определяющие соотношения, учитывающие деформационные эффекты при фазовых и релаксационных превращениях в широком диапазоне температур.

Описание одноосной вязкоупругой модели

Рассматриваются определяющие соотношения, являющиеся развитием модели [19], которая при одноосном нагружении имеет вид:

$$\sigma(\tau) = E_1 \bar{\varepsilon}(\tau) + E_2 \int_0^t [\bar{\varepsilon}(t) - \bar{\varepsilon}(\tau)] dN(\tau), \quad (1)$$

где $E_2 = E^s - E_1$; E_1 , E^s – модули Юнга в высокоэластическом и стеклообразном состояниях соответственно; $\bar{\varepsilon} = \varepsilon - \varepsilon_T$, ε_T – температурная деформация; $N(T)$ – степень стеклования.

Принцип работы модели схематично представлен рис. 1, а. Тонкие пружины на рис. 1 представляют собой наорощенные межмолекулярные связи (НМС), образующиеся в процессе стеклования. Жесткость каждой НМС пропорциональна приращению степени стеклования $\Delta N_k(T_k)$, в момент образования связь считается ненапряженной.

В такой постановке модель описывает процессы стеклования и размягчения при постоянной скорости изменения температуры, в том числе эффекты памяти формы, что подтверждено в работе [19]. Однако модель не может описать эффекты ползучести и релаксации при постоянной температуре. Также в работе [19] показано,

что с помощью модели можно продемонстрировать экспериментально подтверждаемый эффект сдвига интервала стеклования по температурной шкале при изменении скорости изменения температуры, но для этого необходимо задать скорость стеклования как функцию, зависящую от скорости изменения температуры.

Таким образом, актуальной задачей является разработка определяющих соотношений, включающих возможности модели упругого приближения по описанию «замораживания» и «размораживания» деформаций и механизмы, описывающие процессы ползучести и релаксации.

На рис. 1 схематично показан принцип действия модели упругого приближения и модели, включающей демпфирующий элемент.

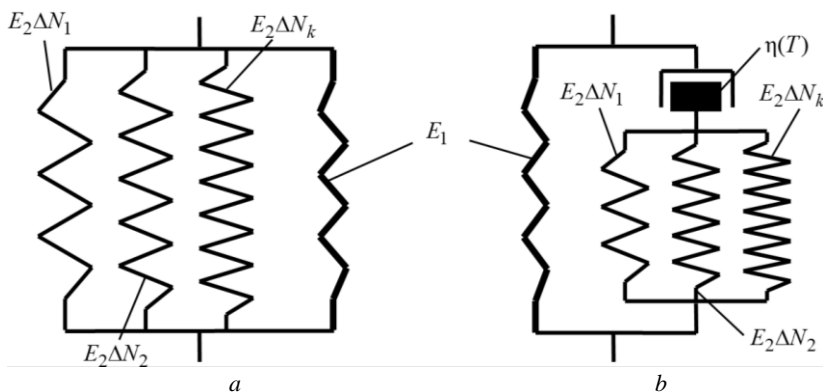


Рис. 1. Механическая схема физических моделей полимеров:
а – модель упругого приближения, б – вязкоупругая модель

Fig. 1. Schematic physical models of polymer:

(a) elastic approximation model and (b) viscoelastic model

Наличие в вязкоупругой модели элемента с вязкостью $\eta(T)$ позволяет описать эффекты ползучести и релаксации при постоянной температуре, а также эффект сдвига интервала стеклования в область высоких температур при увеличении скорости нагрева [19]. Для представления последнего с помощью гипотетической модели необходимо явным образом ввести зависимость температуры стеклования от скорости нагрева $T_g(\dot{T})$.

В случае одноосного напряженного состояния с учетом температурной деформации вязкоупругие определяющие соотношения имеют следующий вид:

$$\sigma(t) = \sigma^{(1)}(t) + \sigma^{(2)}(t); \quad (2)$$

$$\sigma^{(1)}(t) = E_1 [\varepsilon(t) - \varepsilon_T(t)]; \quad (3)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_e(t) + \varepsilon_v(t) + \varepsilon_T(t); \quad (4)$$

$$\sigma^{(2)}(t) = \eta(T(t)) \dot{\varepsilon}_v(t); \quad (5)$$

$$\sigma^{(2)}(t) = E_2 \left[\varepsilon_e(t) N(T(t)) - \int_0^t \varepsilon_e^*(\tau) dN(T(\tau)) \right], \quad (6)$$

где σ – нормальное напряжение в одноосном случае; ε – продольная деформация; $\sigma^{(1)}$ – часть напряжения, определяемая высокоэластическим модулем E_1 ; $\sigma^{(2)}$ – часть

напряжения, определяемая НМС с учетом релаксации; ε_v – деформация ползучести НМС; ε_e – гипопругая деформация НМС; $\varepsilon_e^*(\tau)$ – запасенная на стадии охлаждения («замороженная») гипопругая деформация НМС; $\varepsilon_T(T) = \int_{T_0}^T \alpha_T(T) dT$ – температурная деформация. При получении (6) были использованы последовательность рассуждений и система гипотез, приведенные в [19].

Обобщение на случай сложного напряженного состояния

Общий вид соотношений для случая сложного напряженного состояния сформулирован, исходя из гипотез об аддитивности всех компонент тензоров упругих и вязких деформаций в вязкоупругом элементе, описывающем застеклованную часть материала (см. рис. 1), аддитивности компонент тензоров напряжений высокоэластического каркаса и стеклообразного элемента и гипотезы о естественном ненапряженном и недеформированном состоянии.

Полученные определяющие соотношения представляют собой модифицированную модель Кельвина–Фойхта [20]. С учетом температурной деформации модель приобретает следующий вид:

$$\hat{\sigma} = {}^4\hat{C}_1 [\hat{\varepsilon}(t) - \hat{\varepsilon}_T(t)] + {}^4\hat{C}_2 \left[\hat{\varepsilon}_e(t) N(T(t)) - \int_0^t \hat{\varepsilon}_e^*(\tau) dN(T(\tau)) \right]; \quad (7)$$

$$\hat{\varepsilon}(t) = \hat{\varepsilon}_e(t) + \hat{\varepsilon}_v(t) + \hat{\varepsilon}_T(t); \quad (8)$$

$$\dot{\hat{\varepsilon}}_v(t) = \eta(T(t))^{-1} \left\{ {}^4\hat{C}_2 \left[\hat{\varepsilon}_e(t) N(T(t)) - \int_0^t \hat{\varepsilon}_e^*(\tau) dN(T(\tau)) \right] - \hat{P}_2(t) \right\}; \quad (9)$$

$$\hat{\sigma}_e(t) = {}^4\hat{C}_2 \left[\hat{\varepsilon}_e(t) N(T(t)) - \int_0^t \hat{\varepsilon}_e^*(\tau) dN(T(\tau)) \right]; \quad (10)$$

$$\hat{\sigma}_v(t) = \hat{\sigma}_e(t) = \hat{\sigma}^{(2)}(t); \quad (11)$$

$$\hat{\varepsilon}_v(t) = \int_0^t \dot{\hat{\varepsilon}}_v(\tau) d\tau, \quad (12)$$

где ${}^4\hat{C}_1$ – тензор четвертого ранга упругих констант материала в высокоэластическом состоянии; ${}^4\hat{C}_2 = {}^4\hat{C}_g - {}^4\hat{C}_1$, ${}^4\hat{C}_g$ – тензор четвертого ранга упругих констант материала в стеклообразном состоянии; $\hat{\varepsilon}(t)$ – тензор полных деформаций; $\hat{\varepsilon}_T(t) = \hat{E} \int_{T_0}^{T(t)} \alpha(T) dT$ – тензор температурных деформаций; $\hat{\varepsilon}_e(t)$ – тензор упругих деформаций застеклованной части материала; $\hat{\varepsilon}_v(\mathbf{x}, t)$ – тензор вязких деформаций застеклованной части материала; $\eta(T)$, $\alpha(T)$ – вязкость и коэффициент температурного расширения материала, зависящие от температуры; T_0 – начальная температура; $\hat{P}_2(t) = \sigma_{kk}^{(2)}/3$ – среднее напряжение; \hat{E} – единичный тензор второго ранга. Девиатор тензора вязкой деформации $\hat{e}_v(t) = \hat{\varepsilon}_v(t) - \theta_v(t) \hat{E}/3$ в силу предполагаемой несжимаемости вязкого элемента модели ($\theta_v = 0$) равен тензору вязких деформаций $\hat{e}_v = \hat{\varepsilon}_v$; $\theta_v = \varepsilon_{vkk}$ – объемная деформация.

Методика экспериментальной идентификации

Для дальнейшего проведения вычислительных экспериментов была предварительно реализована серия идентификационных испытаний фотополимера Envisiontec SI500, позволяющих наиболее полно учесть вязкоупругое поведение материала.

Для определения комплексного модуля были проведены ДМА-эксперименты (динамический механический анализ), в рамках которых образцы в виде прямоугольных пластин подвергались гармоническому воздействию с постоянными частотой и амплитудой при переменной температуре. Испытания проходили на динамическом механическом анализаторе DMA Q800 TA Instruments (рис. 2, а). Один конец пластины был зажат, изгибающая нагрузка прикладывалась к свободному концу, схема закрепления представлена на рис. 2, б.

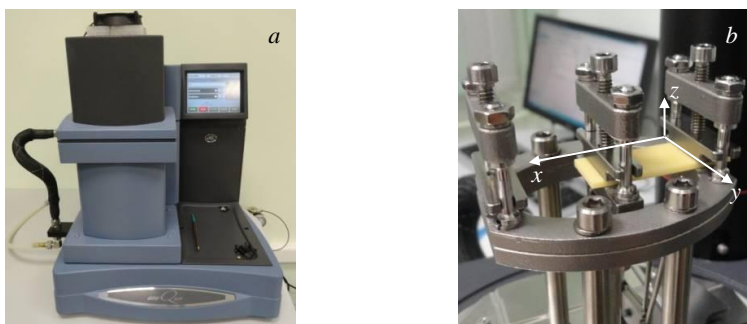


Рис. 2. DMA Q800: а – внешний вид, б – способ крепления образца
Fig. 2. DMA Q800: (a) design of the instrument and (b) sample mounting technique

Геометрические размеры образцов – $35 \times 13 \times 2$ мм, параметры эксперимента: диапазон температур 25–150°C; скорость нагрева образца 5 (2)°C/мин; частота 10 Гц; деформация 0.5%; амплитуда 285 мкм. Контроль температуры осуществлялся встроенными в термокамеру DMA Q800 термодатчиками типа К (хромель–алюмель), расположенными около образца и нагревательного элемента, с точностью $\pm 2.2^\circ\text{C}$.

Комплексный модуль в соответствии с ГОСТ 32794–2014 «Композиты полимерные. Термины и определения» определяется соотношением

$$E^* = E' + iE''.$$

Абсолютное значение комплексного модуля определяется соотношением

$$E_M = \sqrt{(E')^2 + (E'')^2} = \sigma_A / \varepsilon_A, \quad (13)$$

где σ_A , ε_A – амплитуды напряжений и деформаций при гармоническом кинематическом воздействии на образец с частотой ω . Действительная E' и мнимая E'' части комплексного модуля

$$E' = E_M \cos(\delta_g); \quad (14)$$

$$E'' = E_M \sin(\delta_g), \quad (15)$$

где δ_g – фазовый сдвиг между напряжениями и деформациями.

В ходе эксперимента DMA Q800 рассчитывает E_M на основе первичных опытных данных о приложенных усилиях и измеренных перемещениях образца с вычислением фазового сдвига δ_g между ними. При использовании схемы консольного

закрепления (см. рис. 2, *b*) значение комплексного модуля корректируется с учетом сдвиговых деформаций, возникающих в зоне крепления образца [21]. На основе E_M и δ_g по формулам (16), (17) высчитываются значения $E'(T)$ и $E''(T)$, температурные зависимости которых представлены на рис. 3.

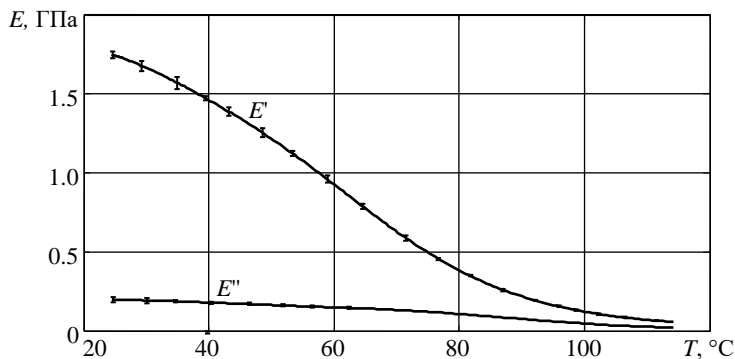


Рис. 3. Результаты DMA-эксперимента

Fig. 3. DMA experimental results

Так как комплексный модуль является характеристикой материала, далее будем предполагать, что полученные значения комплексного модуля Envisontec SI500 могут быть использованы за пределами моделирования конкретного вида напряженно-деформированного состояния. Рассмотрим деформации и напряжения в условиях одноосного растяжения / сжатия при гармоническом воздействии с частотой ω :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_A \sin \omega t ; \quad (16)$$

$$\sigma(t) = \sigma_A \sin(\omega t + \delta_g) , \quad (17)$$

Определим комплексный модуль для материала, поведение которого подчиняется определяющим соотношениям (2)–(6). Будем полагать, что в исследуемом образце отсутствует «замороженная» на стадии охлаждения деформация $\varepsilon_e^*(\tau)$. Тогда формула (6) примет вид:

$$\sigma^{(2)}(t) = E_2 \varepsilon_e(t) N(T(t)) . \quad (18)$$

Далее для краткости будем опускать указание времени как аргумента при соответствующих функциях. Подставляя (3), (18) в (2), получим

$$\sigma = E_1 \varepsilon + E_2 \varepsilon_e N(T) . \quad (19)$$

Приравняв (5) и (14), с учетом (6), (16) получим дифференциальное уравнение относительно гипопругой деформации НМС ε_e :

$$\dot{\varepsilon}_e + E_2 / \eta(T) \varepsilon_e = \varepsilon_A \omega \cos(\omega t) . \quad (20)$$

Решение (20) определяется по известной методике [22]:

$$\varepsilon_e = \varepsilon_A \frac{\omega}{\omega^2 + b^2} (b \cos \omega t + \omega \sin \omega t) , \quad (21)$$

где $b = E_2 / \eta(T)$.

После подстановки (16), (21) в (19) выражение для зависимости напряжения от времени приобретает вид:

$$\sigma = \varepsilon_A [a_1 \sin \omega t + b_1 \cos \omega t], \quad (22)$$

$$\text{где } a_1 = E_1 + E_2 N(T) \frac{\omega^2}{\omega^2 + b^2}, \quad b_1 = E_2 N(T) \frac{\omega b}{\omega^2 + b^2}.$$

Используя известные тригонометрические преобразования [22], преобразуем (22) к виду:

$$\sigma = \varepsilon_A \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \left[\sin \left(\omega t + \arcsin \left(b_1 / \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \right) \right) \right], \quad (23)$$

откуда после сопоставления (23) с (13), (17) получим

$$E_M = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}; \quad (24)$$

$$\delta_g = \arcsin \left(b_1 / \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \right). \quad (25)$$

Подстановка (24), (25) в (14), (15) дает окончательный вид выражений для действительной и мнимой частей комплексного модуля:

$$E'(T) = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cos \left(\arcsin \left(b_1 / \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \right) \right); \quad (26)$$

$$E''(T) = b_1. \quad (27)$$

Как было показано ранее, a_1 , b_1 и b зависят от степени стеклования $N(T)$ и вязкости $\eta(T)$. Таким образом, задача определения $E'(T)$, $E''(T)$ сводится к отысканию функций $N(T)$, $\eta(T)$. Для каждой пары полученных из эксперимента значений E_i' и E_i'' (см. рис. 3), соответствующих температуре T_i , составляется система уравнений относительно неизвестных N_i , η_i :

$$\begin{cases} E_i' = E'(N_i, \eta_i); \\ E_i'' = E''(N_i, \eta_i). \end{cases}$$

Для определения N_i , η_i методом Нелдера–Мида в пакете MatLab решалась задача минимизации невязки между полученными из экспериментов значениями модулей и расчетными значениями E_s' :

$$\Phi(N_i, \eta_i) = \frac{|E_i' - E_s'(N_i, \eta_i)|}{E_i'} + \frac{|E_i'' - E_s''(N_i, \eta_i)|}{E_i''} \rightarrow \min. \quad (28)$$

Определенные из решения (28) N_i , η_i представлены на рис. 4. Для аппроксимации N_i , η_i , исходя из вида полученных кривых, подбираются функции $N(T)$, $\eta(T)$. Для вязкости выбрана функция

$$\lg \tilde{\eta}(T) = g_0 + g_1 T + g_2 T^2 \quad (29)$$

Коэффициенты g_i определяются методом наименьших квадратов. Для степени стеклования выбрана функция

$$\tilde{N}(T) = \left\{ \left[1 - 0.5e^{(T-T_g)/\gamma}, \quad T < T_g \right]; \left[0.5e^{-(T-T_g)/\gamma}, \quad T \geq T_g \right] \right\}. \quad (30)$$

Материальные константы T_g и γ из (30) рассчитывались в пакете MatLab методом Нелдера–Мида путем минимизации относительной невязки между значениями N_i и $\tilde{N}(T_i)$:

$$\Phi(T_g, \gamma) = \frac{|N_i - \tilde{N}(T_i, T_g, \gamma)|}{N_i} \rightarrow \min.$$

В результате решения (29), (30) определены следующие значения материальных констант $g_0 = -10.3363$, $g_1 = 0.1487 \text{ K}^{-1}$, $g_2 = -2.5650 \times 10^{-4} \text{ K}^{-2}$, $T_g = 332.4458 \text{ K}$, $\gamma = 20.3269 \text{ K}$. В процессе определены $E_I = 22.39 \text{ МПа}$, $E_g = E_I + E_2 = 1.86 \text{ ГПа}$. Вычисленные по (29), (30) графики $\lg \tilde{\eta}(T)$ и $\tilde{N}(T)$ показаны на рис. 4.

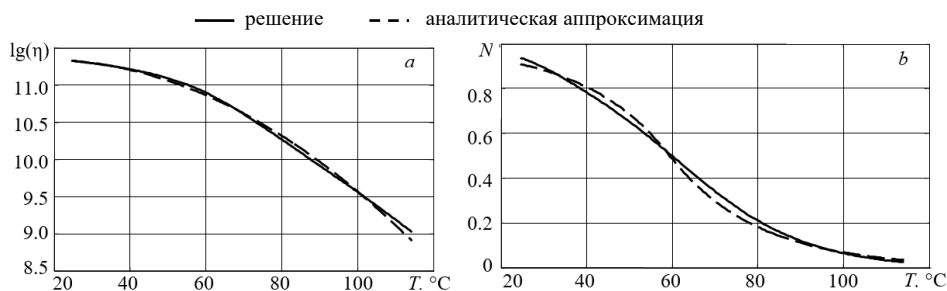


Рис. 4. Температурные зависимости $\lg \eta(T)$, Па с (a) и $N(T)$ (b)

Fig. 4. Temperature dependences: (a) $\lg \eta(T)$, Pa s and (b) $N(T)$

Для определения параметров температурного расширения была проведена серия экспериментов на dilatометре DIL802. Контроль температуры осуществлялся встроенными в печь dilatометра измерительными термопарами типа S (платина–родий) с точностью $\pm 3^\circ\text{C}$. В эксперименте участвовало 7 образцов диаметром 3 мм, длиной 9.1–9.2 мм. Образцы нагревались с постоянной скоростью $2^\circ\text{C}/\text{мин}$ от 20 до 120°C . Полученные данные были аппроксимированы с помощью формулы

$$\alpha_T(T) = a_1\beta(T) + a_2(1 - \beta(T)) + b \frac{d\beta}{dT}, \quad (31)$$

где $\beta(T) = \{[1 - 0.5e^{(T-T_\beta)/\gamma_\beta}, T < T_\beta]; [0.5e^{-(T-T_\beta)/\gamma_\beta}, T \geq T_\beta]\}$ – параметр завершения процесса полимеризации (по форме аналогичен $N(T)$).

С помощью методов нелинейной оптимизации, описанных в [23], получены неизвестные материальные константы $a_1 = 1.0557 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$, $a_2 = 1.8655 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$, $b = 2.1115 \times 10^{-5}$, $T_\alpha = 338.9 \text{ K}$, $\gamma_\beta = 5.68 \text{ K}$.

Верификация модели при стационарном нагружении

Полученные в DMA-экспериментах значения термомеханических параметров представленной модели охватывают температурный диапазон, характерный для условий эксплуатации изделий из фотополимерных материалов. Как отмечалось ранее, одним из основных предназначений фотополимерных прототипов является создание литьевой формы, получаемой послойным нанесением на него жидких слоев из формовочных песков и смол, применяемых в литейной промышленности. На заключительном этапе производства формы проводится выжигание прототипа при температуре порядка 450°C . Наиболее опасной стадией данного процесса является температурное расширение прототипа в интервале стеклообразного состояния. При этом механические характеристики (модуль Юнга, объемный модуль) прототипа, находящегося в стесненном состоянии, еще достаточно велики для создания разрушающих напряжений в форме. В этой связи особую роль играет точность описания термомеханического поведения материала в режиме роста

температуры с постоянной или почти постоянной скоростью. Наиболее близкой к данным условиям является схема испытаний на DMA Q800, при которой производится нагрев статически нагруженных одноосных образцов.

Программа экспериментов включала нагрев цилиндрических образцов радиусом $r = 2$ мм и высотой $h = 7$ мм от комнатной температуры до 150°C с постоянной скоростью изменения температуры \dot{T} под постоянной нагрузкой $P = 3$ Н. Результаты эксперимента представлены на рис. 5 сплошными линиями.

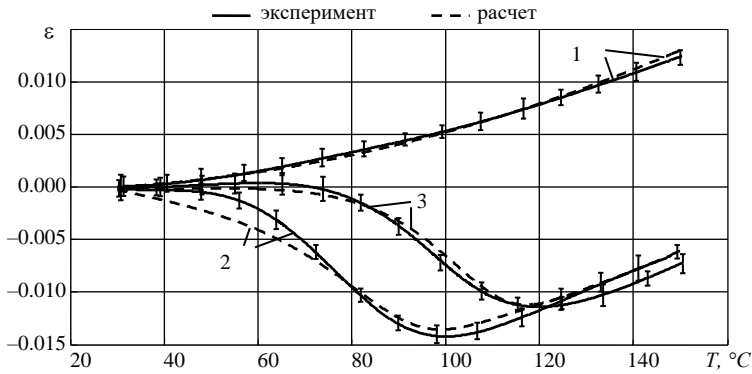


Рис. 5. Температурная зависимость деформации образца:

1 – свободный нагрев, $\dot{T} = 5$ К/мин; 2 – $P = 3$ Н, $\dot{T} = 2$ К/мин; 3 – $P = 3$ Н, $\dot{T} = 5$ К/мин

Fig. 5. Temperature dependence of the sample deformation:

(1) heating without loading, $\dot{T} = 5$ K/min, (2) $P = 3$ N, $\dot{T} = 2$ K/min, and (3) $P = 3$ N, $\dot{T} = 5$ K/min

Для расчета деформации образца использовались уравнения (2)–(6) при постоянном напряжении от заданной нагрузки P : $\sigma(t) = 4P/(\pi d^2) = \text{const}$.

С учетом условий проведения эксперимента (образцы предварительно отжигались для снятия остаточных напряжений) упругие и вязкие деформации при его свободном охлаждении отсутствуют, поэтому второе слагаемое в правой части (6) обнуляется:

$$\sigma^{(2)}(t) = E_2 \varepsilon_e(t) N(T(t)). \quad (32)$$

Система дифференциальных уравнений (2)–(5), (32) является замкнутой относительно пяти неизвестных функций: $\varepsilon(t)$, $\varepsilon_e(t)$, $\varepsilon_v(t)$, $\sigma^{(1)}(t)$, $\sigma^{(2)}(t)$. После преобразований получим уравнение 1-го порядка относительно $\varepsilon_v(t)$:

$$\dot{\varepsilon}_v(t) = \sigma \frac{E_2 N(T)}{\eta(T)[E_1 + E_2 N(T)]} - \frac{E_1 E_2 N(T)}{\eta(T)[E_1 + E_2 N(T)]} \varepsilon_v(t) \quad (33)$$

Задача Коши (33) решается численно методом Рунге–Кутты 4-го порядка. Искомое значение деформации $\varepsilon(t)$ определяется из выражения

$$\varepsilon(t) = \dot{\varepsilon}_v(t) \frac{\eta(T)}{E_2 N(T)} + \varepsilon_e(t) + \varepsilon_T(t). \quad (34)$$

Численный анализ показал, что полученное решение сходится с погрешностью менее 1% при разбиении рассматриваемого интервала времени на 200 шагов. Относительная невязка между экспериментальными и расчетными данными не превышает 3%.

Верификация модели в экспериментах со ступенчатой нагрузкой

Были проведены верификационные эксперименты нагружения образцов со ступенчато снижающейся (рис. 6, *a*) и ступенчато повышающейся нагрузкой (рис. 6, *b*) при нагреве до 110°C со скоростями 1 и 2°C/мин. Таким образом, было рассмотрено 4 варианта испытаний, каждое из которых проведено для 3 образцов. Для снятия возможных остаточных напряжений образцы предварительно были подвергнуты отжигу: нагреты до 120°C, выдержаны в течение 10 мин и охлаждены до комнатной температуры в течение 30 мин.

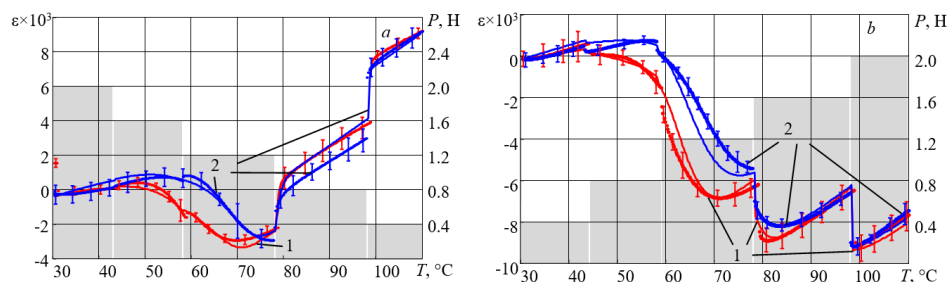


Рис. 6. Температурная зависимость деформации образцов: *a* – ступенчатое снижение нагрузки, *b* – ступенчатое увеличение нагрузки. Точки – эксперимент, линии – расчет, столбцы – нагрузка; 1 – $\dot{T} = 1^\circ\text{C}/\text{мин}$, 2 – $\dot{T} = 2^\circ\text{C}/\text{мин}$

Fig. 6. Temperature dependence of the sample deformation: (*a*) stepping unloading and (*b*) stepping loading. Experimental results (dotted lines), simulation results (solid lines), and loads (bars); $\dot{T} = (1)$ 1 and (2) 2°C/min

Из рис. 6, *a* видно, что при увеличении скорости нагрева минимум на термомеханических кривых сдвигается к более высоким температурам. Это явление объясняется тем, что при большей скорости нагрева время воздействия температуры уменьшается, соответственно, вязкая составляющая деформации ϵ_v нарастает с некоторым отставанием. Аналогичные данные показаны на рис. 6, *b* для ступенчато растущей при нагреве нагрузки. Сравнение результатов расчета с экспериментом в обоих случаях демонстрирует хорошее качественное и количественное совпадение.

Моделирование эффекта памяти формы

Рассмотрена задача, моделирующая эффект памяти формы образца при одноосном сжатии. При температуре 150°C образец находится в естественном ненагруженном состоянии – точка 1 на рис. 7. На этапе 1–2 образец нагружается без изменения температуры, на этапе 2–3 происходит охлаждение до 25°C без снятия нагрузки. Разгрузка 3–4 сопровождается незначительным уменьшением деформаций. Таким образом, продемонстрирован эффект «замороженных» деформаций, наблюдаемый в экспериментах с эпоксидными смолами [24]. При нагреве 4–1 происходит эффект «размораживания» деформаций, и образец возвращается в исходное состояние («вспоминает» исходную форму).

Кроме того, из анализа рисунков следует, что температура стеклования возрастает с увеличением скорости нагрева. Так, при $\dot{T} = 1^\circ\text{C}/\text{мин}$ (см. рис. 7, *a*) она составляет порядка 72°C, при $\dot{T} = 10^\circ\text{C}/\text{мин}$ (см. рис. 7, *b*) – 89°C. Видимая протя-

женность интервала стеклования падает с ростом \dot{T} . При этом используемый в описании степени стеклования (30) параметр, температура стеклования T_g , является постоянным.

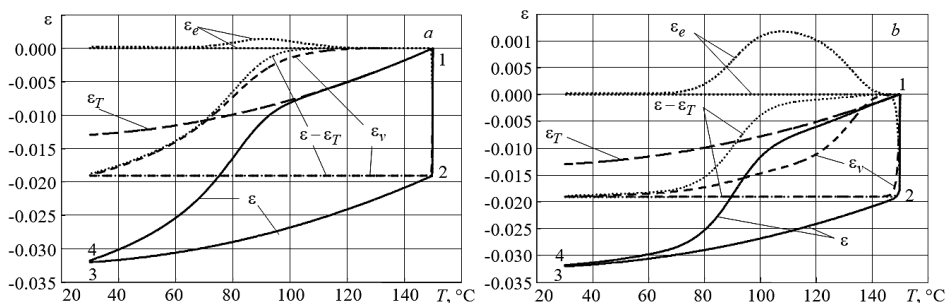


Рис. 7. Деформации при охлаждении под нагрузкой и свободном нагреве, $P = 3$ Н;
1–2 – нагружение, 2–3 – охлаждение, 3–4 – разгрузка, 4–1 – нагрев;
 $a - \dot{T} = 1^\circ\text{C}/\text{мин}$, $b - \dot{T} = 10^\circ\text{C}/\text{мин}$

Fig. 7. Strains under load during cooling and without load during heating, $P = 3$ N;
1–2 – loading, 2–3 – cooling, 3–4 – unloading, and 4–1 – heating;
 $\dot{T} = (a) 1$ and $(b) 10^\circ\text{C}/\text{min}$

Скорость нагрева–охлаждения влияет также на перераспределение общей структурной деформации $\varepsilon - \varepsilon_T = \varepsilon_e + \varepsilon_v$ между упругой ε_e и вязкой ε_v деформациями дополнительных связей. Так, при низкой скорости охлаждения (см. рис. 7, *a*) начальное мгновенное нагружение при максимальной температуре вызывает упругую деформацию ε_e , которая за 60 с возвращается к нулевому значению за счет интенсивной ползучести. При росте \dot{T} происходит смещение данного процесса вправо по температурной шкале (см. рис. 7, *b*). По этой же причине в высвобождении запасенной при охлаждении деформации на стадии нагрева с ростом \dot{T} все большую долю составляет упругая деформация новых межмолекулярных связей ε_e (см. «горку» на рис. 7, *a, b*). На качественном уровне выявленные эффекты соответствуют наблюдаемым на практике.

Заключение

Были разработаны феноменологические определяющие соотношения, описывающие поведение фотополимерных материалов в широком диапазоне температур, в том числе при терморелаксационных переходах. Рассмотрены вязкоупругая модель и модель упругого приближения с учетом нелинейного поведения материала. На основе данных идентификационных экспериментов получены материальные константы определяющих соотношений вязкоупругой модели.

Проведены верификационные эксперименты определения эволюции напряженно-деформированного состояния образцов в условиях нагрева при постоянной и ступенчатой нагрузках. Показано соответствие расчетных и экспериментальных результатов.

Представлены результаты численного моделирования эффекта памяти формы образца при циклическом охлаждении–нагреве. Проиллюстрированы характерные для сшитых полимеров процессы «замораживания» и «размораживания» деформаций.

Список источников

1. Эртесян А.Р., Садыков М.И., Нестеров А.М., Арестова А.А. Обзор фотополимерных смол, применяемых в стоматологии // Естественные и технические науки. 2020. № 12. С. 238–240. doi: 10.37882/2223-2966.2020.12.42
2. Головченко И.В., Финогеев Д.Ю. Применение фотополимерных смол в производстве высокоточных изделий в машиностроительной отрасли // Перспективные материалы и высокоэффективные процессы обработки: сб. материалов Всерос. молодежной конф. Саратов: Саратов. гос. техн. ун-т им. Гагарина Ю.А., 2022. С. 56–60.
3. Гордеев Е.Г., Анаников В.П. Общедоступные технологии 3D-печати в химии, биохимии и фармацевтике: приложения, материалы, перспективы // Успехи химии. 2020. Т. 89, № 12. С. 1507–1561. doi: 10.1070/RCR4980
4. Сорокин О.Ю., Кузнецов Б.Ю., Лунегова Ю.В., Ерасов В.С. Высокотемпературные композиционные материалы с многослойной структурой (обзор) // Труды ВИАМ. 2020. № 4-5 (88). С. 42–53. doi: 10.18577/2307-6046-2020-0-45-42-53
5. Koplin C., Gurr M., Mülhaupt R., Jaeger R. Shape accuracy in stereolithography: A material model for the curing behavior of photo-initiated resins // International User's Conference on Rapid Prototyping & Rapid Tooling & Rapid Manufacturing (Euro-uRapid). Berlin, 2008.
6. Морозов В.В. Исследование и разработка технологических режимов изготовления отливок по выжигаемым моделям, полученных методом лазерной стереолитографии: дис. ... канд. техн. наук: 05.16.04. М., 2005 161 с.
7. Макаров П.В., Еремин М.О. Моделирование разрушения керамических композиционных материалов при одноосном сжатии // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 1 (21). С. 61–74.
8. Бугаков И.И. Способ оценки остаточных температурных напряжений в полимерных телах // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1978. № 3. Р. 68–74.
9. Бугаков И.И. Определяющие уравнения для материалов с фазовым переходом // Механика твердого тела. 1989. № 3. С. 111–117.
10. Болотин В.В., Воронцов А.Н., Мурзаханов Р.Х. Анализ технологических напряжений в намоточных изделиях из композитов на протяжении всего процесса изготовления // Механика композитных материалов. 1980. № 3. С. 500–508.
11. Турусов Р.А. Механические явления в полимерах и композитах (в процессах формирования): дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1983. 363 с.
12. Tomashevskii V.T., Yakovlev V.S. Models in the Engineering Mechanics of Polymer-Matrix Composite Systems // International Applied Mechanics. 2004. V. 40 (6). P. 601–621. doi: 10.1023/B:INAM.0000041391.28104.b7
13. Shaffer B.W., Levitsky M. Thermoelastic Constitutive Equations for Chemically Hardening Materials // ASME. J. Appl. Mech. 1974. V. 41 (3). P. 652–657. doi: 10.1115/1.3423365
14. Dupaix R.B., Boyce M.C. Constitutive modeling of the finite strain behavior of amorphous polymers in and above the glass transition // Mechanics of Materials. 2007. V. 39 (1). P. 39–52. doi: 10.1016/j.mechmat.2006.02.006
15. Varghese A.G., Batra R.C. Constitutive equations for thermomechanical deformations of glassy polymers // International Journal of Solids and Structures. 2009. V. 46 (22). P. 4079–4094. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2009.08.006
16. Xia Y., He Y., Zhang F., Liu Y., Leng J. A Review of Shape Memory Polymers and Composites: Mechanisms, Materials, and Applications // Advanced Materials. 2021. V. 33 (6). Art. 2000713. doi: 10.1002/adma.202000713.
17. Verma S., Verma V.K. Shape memory polymers for additive manufacturing: An overview // Materials Today. 2022. V. 57. P. 2077–2081. doi: 10.1016/j.matpr.2021.11.507
18. Liu Y.P., Gall K., Dunn M.L., Greenberg A.R., Diani J. Thermomechanics of shape memory polymers: uniaxial experiments and constitutive modeling // Int. J. Plast. 2006. V. 22. P. 279–313.

19. Matveenko V.P., Shardakov I.N., Smetannikov O.Y., Trufanov N.A. Models of thermomechanical behavior of polymeric materials undergoing glass transition // *Acta Mechanica*. 2012. V. 223 (6). P. 1261–1284.
20. Kelvin (Thomson) W. On the theory of viscoelastic fluids // *Math. a. Phys. Pap.* 1875. V. 3. P. 27–84.
21. Henriquesa I.R., Borgesa L.A., Costab M.F., Soaresc B.G., Castelloa D.A. Comparisons of complex modulus provided by different DMA // *Polymer Testing*. 2018. V. 72, P. 394–406. doi: 10.1016/j.polymertesting.2018.10.034
22. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1973. 832 с.
23. Сметанников О.Ю. Оптимизация остаточного прогиба круглой пластинки из стеклующегося полимера при неравномерном охлаждении // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2010. Т. 3, № 1. С. 81–92. doi: 1010.7242/1999-6691/2010.3.1.9
24. Сметанников О.Ю., Труфанов Н.А. Экспериментальная идентификация модели термомеханического поведения стеклующихся полимеров // *Вестник Удмуртского университета. Механика*. 2009. № 4. С. 133–145. doi: 10.20537/vm090413

References

1. Ertesyan A.R., Sadykov M.I., Nesterov A.M., Arestova A.A. (2020) Overview of photopolymer resins used in dentistry. *Modern Science: Actual Problems of Theory and Practice*. 12. pp. 238–240. doi: 10.37882/2223-2966.2020.12.42
2. Golovchenko I.V., Finogeev D.Yu. (2022) Primenenie fotopolimernykh smol v proizvodstve vysokotochnykh izdeliy v mashinostroitel'noy otrasli [Application of photopolymer resins in the production of high-precision products in the engineering industry]. *Proceedings of the Conference «Advanced Materials and Highly Efficient Processing Processes», Saratov, 2022: SGTU*. pp. 56–60.
3. Gordeev E.G., Ananikov V.P. (2020) Widely accessible 3D printing technologies in chemistry, biochemistry and pharmaceuticals: Applications, materials and prospects. *Russian Chemical Reviews*. 89(12). pp. 1507–1561. doi: 10.1070/RCR4980
4. Sorokin O.Yu., Kuznetsov B.Yu., Lunegova Yu.V., Erasov V.S. (2020) Vysokotemperaturnye kompozitsionnye materialy s mnogosloynnoy strukturoy (obzor) [High-temperature composite materials with a multilayer structure (review)]. *Trudy VIAM – Proceedings of VIAM*. 88(4). pp. 42–53.
5. Koplin C., Gurr M., Mülhaupt R., Jaeger R. (2008) Shape accuracy in stereolithography: A material model for the curing behavior of photo-initiated resins. *International User's Conference on Rapid Prototyping & Rapid Tooling & Rapid Manufacturing (Euro-uRapid), Berlin*.
6. Morozov V.V. (2005) Issledovanie i razrabotka tekhnologicheskikh rezhimov izgotovleniya otlivok po vyzhigaemym modelyam, poluchennykh metodom lazernoy stereolitografii [Research and development of technological modes for the production of castings using burnt-out models obtained by laser stereolithography]: Dissertation. RGB OD.
7. Makarov P.V., Eremin M.O. (2013) Modelirovanie razrusheniya keramicheskikh kompozitsionnykh materialov pri odnoosnom szhatii [Simulation of ceramic compositional materials fracture upon uniaxial compression]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 21(1). pp. 61–74.
8. Bugakov I.I. (1978) Sposob otsenki ostatochnykh temperaturnykh napryazheniy v polimernykh telakh [Method for assessing residual thermal stresses in polymer bodies]. *Izvestiya AN SSSR. MTT*. 3. pp. 68–74.
9. Bugakov I.I. (1989) Opredelyayushchie uravneniya dlya materialov s fazovym perekhodom [Constitutive equations for materials with a phase transition]. *Mekhanika tverdogo tela – Solid Mechanics*. 3. pp. 111–117.

10. Bolotin V.V., Vorontsov A.N., Murzakhanov R.Kh. (1980) Analiz tekhnologicheskikh napryazheniy v namotochnykh izdeliyakh iz kompozitov na protyazhenii vsego protsessa izgotovleniya. *Mekhanika kompozitnykh materialov – Mechanics of Composite Materials*. 3. pp. 500–508.
11. Turusov R.A. (1983) *Mekhanicheskie yavleniya v polimerakh i kompozitakh (v protsessakh formirovaniya)* [Mechanical phenomena in polymers and composites (during formation processes)]. Dissertation.
12. Tomashevskii V.T., Yakovlev V.S. (2004) Models in the engineering mechanics of polymer-matrix composite systems. *International Applied Mechanics*. 40(6). pp. 601–621. doi: 10.1023/B:INAM.0000041391.28104.b7
13. Shaffer B.W., Levitsky M. (1974) Thermoelastic constitutive equations for chemically hardening materials. *ASME. Journal of Applied Mechanics*. 41(3). pp. 652–657. doi: 10.1115/1.3423365
14. Dupaix R.B., Boyce M.C. (2007) Constitutive modeling of the finite strain behavior of amorphous polymers in and above the glass transition. *Mechanics of Materials*. 39(1). pp. 39–52. doi: 10.1016/j.mechmat.2006.02.006
15. Varghese A.G., Batra R.C. (2009) Constitutive equations for thermomechanical deformations of glassy polymers. *International Journal of Solids and Structures*. 46(22). pp. 4079–4094. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2009.08.006
16. Xia Y., He Y., Zhang F., Liu Y., Leng J. (2021) A review of shape memory polymers and composites: mechanisms, materials, and applications. *Advanced Materials*. 33(6). Article 2000713. doi: 10.1002/adma.202000713
17. Verma S., Verma V.K. (2022) Shape memory polymers for additive manufacturing: An overview. *Materials Today: Proceedings*. 57. pp. 2077–2081. doi: 10.1016/j.matpr.2021.11.507
18. Liu Y.P., Gall K., Dunn M.L., Greenberg A.R., Diani J. (2006) Thermomechanics of shape memory polymers: uniaxial experiments and constitutive modeling. *International Journal of Plasticity*. 22. pp. 279–313. doi: 10.1016/j.ijplas.2005.03.004
19. Matveenko V.P., Shardakov I.N., Smetannikov O.Y., Trufanov N.A. (2012) Models of thermomechanical behavior of polymeric materials undergoing glass transition. *Acta Mechanica*. 223(6). pp. 1261–1284. doi: 10.1007/s00707-012-0626-z
20. Kelvin (Thomson) W. (1875) On the theory of viscoelastic fluids. *Mathematics and Physics*. 3. pp. 27–84.
21. Henriquesa I.R., Borgesa L.A., Costab M.F., Soaresc B.G., Castellola D.A. (2018) Comparisons of complex modulus provided by different DMA. *Polymer Testing*. 72. pp. 394–406. doi: 10.1016/j.polymertesting. 2018.10.034
22. Korn G., Korn T. (1973) *Spravochnik po matematike* [Handbook of mathematics]. Moscow: Nauka.
23. Smetannikov O.Yu. (2010) Optimizatsiya ostatocznego progiba krugloy plastinki iz stekluyushchegosya polimera pri neravnomernom okhlazhdenii [Optimization of the residual deflection of a round plate made of vitrified polymer under uneven cooling]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred – Computational Continuum Mechanics*. 3(1). pp. 81–92. doi: 10.1010.7242/1999-6691/2010.3.1.9
24. Smetannikov O.Yu., Trufanov N.A. (2009) Eksperimental'naya identifikatsiya modeli termomekhanicheskogo povedeniya stekluyushchikhsya polimerov [Experimental identification of a model of thermomechanical behavior of vitrified polymers]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Mekhanika – The Bulletin of Udmurt University. Mechanics*. 4. pp. 133–145. doi: 10.20537/vm090413

Сведения об авторах:

Сметанников Олег Юрьевич – доктор технических наук, профессор кафедры «Вычислительная математика, механика и биомеханика» Пермского национального исследовательского политехнического университета (Пермь, Россия). E-mail: sou2009@mail.ru

Ильиных Глеб Валентинович – ведущий инженер кафедры «Вычислительная математика, механика и биомеханика» Пермского национального исследовательского политехнического университета (Пермь, Россия). E-mail: gleb@ilinyh.ru

Фасхутдинова Юлия Борисовна – аспирант кафедры «Вычислительная математика, механика и биомеханика» Пермского национального исследовательского политехнического университета (Пермь, Россия). E-mail: fub26@mail.ru

Information about the authors:

Smetannikov Oleg Yu. (Doctor of Technical Sciences, Professor, Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation). E-mail: sou2009@mail.ru

Il'inykh Gleb V. (Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation). E-mail: gleb@ilinyh.ru

Faskhutdinova Yuliya B. (Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation). E-mail: fub26@mail.ru

Статья поступила в редакцию 24.05.2024; принята к публикации 06.09.2025

The article was submitted 24.05.2024; accepted for publication 06.09.2025

Научный журнал

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

2025. № 97

Редактор Е.Г. Шумская
Оригинал-макет Е.Г. Шумской
Дизайн обложки Л.Д. Кривцова

Подписано в печать 23.10.2025 г. Формат 70×100¹/₁₆.
Печ. л. 11,5; усл. печ. л. 10,7. Цена свободная.
Тираж 250 экз. Заказ № 6515.

Дата выхода в свет 10.11.2025 г.

Адрес издателя и редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
Томский государственный университет

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании
Издательства Томского государственного университета
634050, г. Томск, Ленина, 36
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: rio.tsu@mail.ru