ПРИКЛАДНАЯ ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

2025 Прикладная теория графов № 70

УДК 519.17 DOI 10.17223/20710410/70/4

ОПТИМАЛЬНЫЕ ГРАФЫ С ТОЧКОЙ СОЧЛЕНЕНИЯ И ЗАДАННОЙ РЁБЕРНОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

Б. А. Теребин, М. Б. Абросимов

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия

E-mail: bogdan.terebin@yandex.ru, mic@rambler.ru

Вершинной связностью k называется наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному или тривиальному графу. Рёберной связностью λ нетривиального графа называется наименьшее число рёбер, удаление которых приводит к несвязному графу. Д. Фалкерсон и Л. Шепли решали задачу определения минимального числа рёбер в графе с заданным числом вершин n и с заданной рёберной связностью λ. В работе исследуются минимальные по числу рёбер n-вершинные графы, которые имеют заданные значения вершинной и рёберной связности. Основной результат состоит в том, что определяется минимальное число рёбер, которые могут иметь n-вершинные графы с точкой сочленения и заданной рёберной связностью $\lambda > 1$: $[(\lambda n + \lambda + 1)/2]$. Предлагается схема построения графов с таким числом рёбер. Это всегда возможно при $n \geqslant 2\lambda$.

Ключевые слова: *граф, вершинная связность, рёберная связность.*

OPTIMAL GRAPHS WITH A CUT VERTEX AND GIVEN EDGE CONNECTIVITY

B. A. Terebin, M. B. Abrosimov

Saratov State University, Saratov, Russia

The vertex connectivity k is the smallest number of vertices whose removal leads to a disconnected or trivial graph. The edge connectivity λ of a nontrivial graph is the smallest number of edges whose removal leads to a disconnected graph. D. Fulkerson and L. Shapley solved the problem of determining the minimum number of edges in a graph with a given number of vertices n and a given edge connectivity λ. In this paper, we study the minimal n-vertex graphs with given values of vertex and edge connectivity. The main result is that we determine the minimum number of edges that n-vertex graphs with an articulation point and a given edge connectivity $\lambda > 1$ can have: $[(\lambda n + \lambda + 1)/2]$. A scheme for constructing graphs with such a number of edges is proposed. This is always possible for $n \geqslant 2\lambda$.

Keywords: *graph, vertex connectivity, edge connectivity.*

1. Предварительные результаты

Связным называется граф, любая пара вершин которого соединена путём. В противном случае граф называется *несвязным*. *Тривиальным* называется одновершинный граф. Граф, любые две вершины которого смежны, называется *полным*. В работе рассматриваются простые неориентированные графы. Основные понятия из теории графов используются в соответствии с работами [1, 2].

Определение 1. *Вершинной связностью* k графа G называется наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному или тривиальному графу.

Определение 2. *Рёберной связностью* λ нетривиального графа G называется наименьшее число рёбер, удаление которых приводит к несвязному графу.

Обозначим минимальную степень вершины в графе через δ.

Вершинная связность, рёберная связность и минимальная степень вершины δ связаны неравенством Уитни [3].

Теорема 1 [3]. Для любого графа G справедливо неравенство $k \leqslant \lambda \leqslant \delta$.

Г. Чартрэнд и Ф. Харари в работе [4] доказали, что для подходящих значений k, λ и δ существует соответствующий граф:

Теорема 2 [4]. Для любых натуральных чисел a, b, c, таких, что $0 < a \leqslant b \leqslant c$, существует граф G, у которого $k = a$, $\lambda = b$, $c = \delta$.

В работе [5] рассматривается задача о поиске графов с минимальным числом вершин и рёбер для любых a, b, c из теоремы 2. Найдено полное решение этой задачи, причём для всех рассматриваемых наборов значений a, b, c доказываются значения минимального числа вершин и рёбер, а также строятся графы с указанным числом вершин и рёбер. Некоторые из полученных результатов существенным образом используются для решения задачи, которая рассматривается в данной работе: нахождение и описание множеств графов, состоящих из заданного числа вершин n с минимальным числом рёбер для пар возможных значений k и λ. В частности, далее используются следующие результаты из работы [5]:

Теорема 3 [5]. Граф с наименьшим количеством вершин и рёбер, удовлетворяющий условию $a < b = c$, у которого $k = a$, $\lambda = b$, $c = \delta$, является графом с числом вершин $2(c + 1) - a$ и числом рёбер $c^2 - a^2 + a + c + \sigma$, где

$$\sigma = \begin{cases} 0, & \text{если } \lceil (2a^2 - ac - 2a)/2 \rceil \leqslant 0, \\ \lceil (2a^2 - ac - 2a)/2 \rceil & \text{иначе.} \end{cases}$$

В [6] Д. Фалкерсон и Л. Шепли рассматривают задачу описания графов с минимальным числом рёбер для заданного числа вершин и рёберной связности $\lambda(G)$. В данной работе мы рассмотрим более общую задачу: для заданного числа вершин n, вершинной связности $k(G)$ и рёберной связности $\lambda(G)$ требуется определить минимальное число рёбер, которое может иметь граф G с указанными параметрами [7, 8]. Согласно неравенству Уитни, минимальная степень вершины в графе не меньше рёберной связности, поэтому очевидно, что в искомом графе не может быть меньше чем $\lceil \lambda n/2 \rceil$ рёбер. Семейство графов именно с таким числом рёбер описано в работе [7]. Однако в общем случае не обязательно, что граф с таким числом рёбер для заданных параметров существует. Например, оптимальные по числу рёбер n-вершинные графы с $k = \lambda = 1$ — это деревья с числом рёбер $n - 1$. Приводимые далее полные результаты были анонсированы в работе [8].

В [9] приводится список из 14 нерешённых задач теории графов. Задача № 11 следующая: какова наибольшая связность графа с n вершинами и m рёбрами? Решение было найдено Ф. Харари в работе [10]: наибольшая связность k графа с n вершинами и m рёбрами равна $\lceil 2m/n \rceil$ при $m \geqslant n - 1$. Достигается она на графах Харари $H_{k,n}$, в которых все вершины имеют степень k, если kn чётно, либо одна вершина имеет степень $k + 1$, а все остальные вершины имеют степень k, если kn нечётно. Рассмотрим в некотором смысле обратную задачу: какое минимальное число вершин и рёбер может быть в графе с заданной вершинной связностью k и рёберной связностью λ. Соответствующие значения непосредственно следуют из результатов работы [5].

Обозначим через $N_{k,\lambda}$ минимальное число вершин, которое может содержать граф G с заданной вершинной связностью k и рёберной связностью λ:

$$N_{k,\lambda} = \begin{cases} 2(\lambda+1) - k & \text{при } \lambda > k, \\ \lambda + 1 & \text{при } \lambda = k. \end{cases} \tag{1}$$

Обозначим через $E_{k,\lambda}$ минимальное число рёбер, которое может содержать граф G с заданной вершинной связностью k и рёберной связностью λ:

$$E_{k,\lambda} = \begin{cases} \lambda^2 - k^2 + k + \lambda + \sigma & \text{при } \lambda > k, \\ \lambda(\lambda+1)/2 & \text{при } \lambda = k, \end{cases} \tag{2}$$

где

$$\sigma = \begin{cases} 0, & \text{если } \lceil (2k^2 - k\lambda - 2k)/2 \rceil \leqslant 0, \\ \lceil (2k^2 - k\lambda - 2k)/2 \rceil & \text{иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что если нас интересует минимальное число вершин N_k, которое может содержать граф с заданной вершинной связностью k, то получаем $N_k = N_{k,k} = k+1$, что соответствует полному графу с числом вершин $k+1$. Аналогично для случая минимального числа вершин N_λ, которое может содержать граф с заданной рёберной связностью λ.

Если нас интересует минимальное число рёбер E_k, которое может содержать граф с заданной вершинной связностью k, то получаем $E_k = E_{k,k} = k(k+1)/2$, что соответствует полному графу с числом вершин $k+1$. Аналогично для случая минимального числа рёбер E_λ, которое может содержать граф с заданной рёберной связностью λ.

Добавим ещё один параметр к поиску и будем рассматривать такую задачу: какое минимальное число рёбер может быть в n-вершинном графе с заданной вершинной связностью k и рёберной связностью λ? Обозначим это значение через $E_{k,\lambda,n}$. Из условия Уитни имеем, что минимальная степень вершины в графе $\delta \geqslant \lambda$, поэтому справедлива очевидная оценка:

$$E_{k,\lambda,n} \geqslant \lceil \lambda n/2 \rceil.$$

В работе [7] удалось описать множество значений k и λ, при которых достигается указанная оценка. Задача поиска оптимальных графов с максимальными мерами связности представляет интерес не только с теоретической, но и с практической точки зрения, например для построения отказоустойчивых сетей [11, 12].

2. Основной результат

Точкой сочленения в связном графе называется вершина, удаление которой вместе со всеми инцидентными ей рёбрами приводит к несвязному графу. Если в графе есть точка сочленения, то число вершинной связности $k = 1$. Рассмотрим сначала частный случай, когда и число рёберной связности $\lambda = 1$. По формулам (1) и (2) получаем, что $N_{1,1} = 2$ и $E_{1,1} = 1$. Очевидно, что минимальное число рёбер среди графов с n вершинами с $k = 1$ и $\lambda = 1$ имеют деревья. Как известно, n-вершинное дерево содержит $n - 1$ ребро.

Далее рассмотрим случай $k = 1$ и $\lambda > 1$. В этом случае $N_{1,\lambda}$ можно вычислить следующим образом:

$$N_{1,\lambda} = 2(\lambda+1) - k = 2\lambda + 1.$$

Теорема 4. Пусть $k = 1$, $\lambda > 1$. Тогда для всех $n \geqslant N_{k,\lambda} = 2\lambda + 1$ минимальное число рёбер $E_{1,\lambda,n}$, которое может иметь n-вершинный граф с заданными k и λ, равно $[(\lambda n + \lambda + 1)/2]$. Эта оценка является достижимой. Соответствующий оптимальный по числу рёбер n-вершинный граф с заданными k и λ существует и имеет следующий вид:

— если λ чётное или n нечётное, то в таком графе степень одной вершины (точки сочленения) равна 2λ, а остальных — λ;
— если λ нечётное и n чётное, то граф может иметь один из двух видов:
  — степень одной вершины (точки сочленения) равна $2\lambda + 1$, а остальных — λ;
  — степень одной вершины (точки сочленения) равна 2λ, степень ещё одной вершины — $\lambda + 1$, а остальных — λ.

Доказательство. Рассмотрим произвольный n-вершинный граф G с $k = 1$, $\lambda > 1$, $n \geqslant 2\lambda + 1$. Пусть вершина v — точка сочленения графа G. Согласно неравенству Уитни, минимальная степень вершины в графе G не может быть меньше λ. Покажем, что степень $d(v)$ точки сочленения не может быть меньше 2λ. Предположим обратное: пусть $d(v) < 2\lambda$. Удаление вершины v из графа G приводит к несвязному графу, который состоит не менее чем из двух компонент связности. Обозначим через G_1 одну из этих компонент, через G_2 — оставшуюся часть. Так как $d(v) < 2\lambda$, то вершина v инцидентна менее чем λ вершинам либо из G_1, либо из G_2. Не ограничивая общности, можно считать, что вершина v инцидентна менее чем λ вершинам из G_1. Удалив эти рёбра из графа G, мы нарушим его связность, а это противоречит тому, что рёберная связность графа G равна λ. Следовательно, степень точки сочленения не может быть меньше 2λ.

Таким образом, оптимальный по числу рёбер n-вершинный граф G с $k = 1$, $\lambda > 1$ должен иметь по крайней мере одну вершину степени не менее 2λ (точку сочленения) и остальные вершины — со степенью не ниже λ, что даёт оценку числа рёбер

$$E_{1,\lambda,n} \geqslant \lambda(n + 1)/2.$$

Однако с учётом того, что количество вершин нечётной степени должно быть чётно, оценку можно уточнить для случая, когда λ нечётно, а n чётно. Рассмотрим подграфы графа G, порождённые вершинами G_1 и вершиной v, G_2 и вершиной v. Обозначим через n_1 и n_2 число вершин в этих подграфах. Очевидно, что $n = n_1 + n_2 - 1$. Так как n чётно, количество вершин в одном из этих подграфов чётное, а в другом нечётное. Следовательно, в подграфе с нечётным числом вершин все вершины не могут иметь нечётную степень и одна из вершин должна иметь степень на 1 больше, чем указано. Это может быть либо вершина v, которая имеет степень $\lambda + 1$ (и соответственно $2\lambda + 1$ в графе G), либо какая-то другая вершина, которая имеет степень $\lambda + 1$. В любом случае это даёт следующую оценку числа рёбер:

$$E_{1,\lambda,n} \geqslant (\lambda(n + 1) + 1)/2.$$

С учётом первого случая можно записать оценку в общем виде:

$$E_{1,\lambda,n} \geqslant [(\lambda n + \lambda + 1)/2].$$

Далее покажем, что эта оценка является достижимой: n-вершинный граф с $k = 1$, $\lambda > 1$ и числом рёбер $[(\lambda n + \lambda + 1)/2]$ существует для всех $n \geqslant N_{k,\lambda} = 2\lambda + 1$.

Предыдущие рассуждения предлагают и схему построения соответствующего оптимального графа: необходимо взять два графа H_1 и H_2 с количеством вершин n_1 и n_2

с рёберной связностью λ. Если n_1 и n_2 чётные, то графы H_1 и H_2 должны быть λ-регулярными. Если число вершин в одном из графов нечётно, то он должнен быть почти λ-регулярным с единственной вершиной степени $\lambda + 1$. Далее в графах H_1 и H_2 выбираются произвольные вершины v_1 и v_2, графы соединяются путём отождествления выбранных вершин. Получаем n-вершинный граф G, $n = n_1 + n_2 - 1$.

Для доказательства того, что эта схема реализуема, заметим, что достаточно в качестве графов H_1 и H_2 взять графы Харари H_{λ,n_1} и H_{λ,n_2}, степени вершин в которых имеют в точности указанные значения. Как известно, граф Харари $H_{k,n}$ существует для $k > 1$ и $n \geqslant k + 1$ [9]. ■

Рассмотрим более подробно схему построения искомых графов из доказательства теоремы 4 для каждого случая по отдельности с примерами и обсудим вопрос единственности построения:

1) Пусть λ чётное или n нечётное. Графы H_1 и H_2 — два λ-регулярных графа с рёберной связностью λ, которые соединяются одной общей вершиной (точкой сочленения). Её степень равна 2λ. При этом оба подграфа для случая, когда λ нечётное, должны содержать чётное число вершин.

2) Пусть λ нечётное и n чётное. Один из подграфов перестаёт быть λ-регулярным: степень одной из его вершин равна $\lambda+1$. За счёт выбора вершины для отождествления появляется два варианта. Если выбираются вершины степени λ, то точка сочленения будет иметь степень 2λ, одна вершина — степень $\lambda + 1$, а остальные вершины — степени λ. Либо вершина, которая является общей (точкой сочленения) для подграфов, со стороны одного подграфа имеет степень $\lambda + 1$, со стороны другого — степень λ, степени всех остальных вершин равны λ. Таким образом, степень точки сочленения равна $2\lambda + 1$.

На рис. 1 показана реализация графа с минимальным числом рёбер при $n = 6$, $\lambda = 2$, $k = 1$. Количество рёбер в этом графе равно $[(\lambda n+\lambda+1)/2] = [(12+2+1)/2] = 7$.

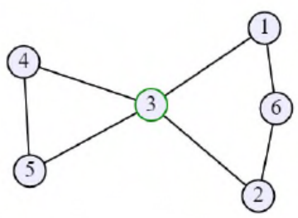

Рис. 1. Пример графа, удовлетворяющего первому случаю ($\lambda = 2$, $k = 1$, $n = 6$)

На рис. 2 показаны две реализации графа с минимальным числом рёбер при $n = 8$, $\lambda = 3$, $k = 1$. В первом случае точка сочленения (вершина 3) имеет степень $2\lambda = 6$, степень вершины 8 равна $4 = \lambda + 1$, а степени всех остальных вершин равны $\lambda = 3$. Во втором случае степени всех вершин, кроме точки сочленения, равны $\lambda = 3$. Степень точки сочленения со стороны левого подграфа равна $\lambda = 3$, а со стороны правого — $\lambda + 1 = 4$. Таким образом, степень точки сочленения равна $2\lambda + 1 = 7$. Очевидно, что графы неизоморфны. Количество рёбер в этих графах равно $[(\lambda n + \lambda + 1)/2] = [(24 + 3 + 1)/2] = 14$.

Последний пример показывает, что есть два неизоморфных 8-вершинных графа, которые имеют точку сочленения и рёберную связность $\lambda = 3$, с минимальным возможным числом рёбер. Формулировка теоремы указывает, что при нечётном $\lambda > 1$ и чётном $n \geqslant 2\lambda + 1$ существует как минимум два неизоморфных оптимальных

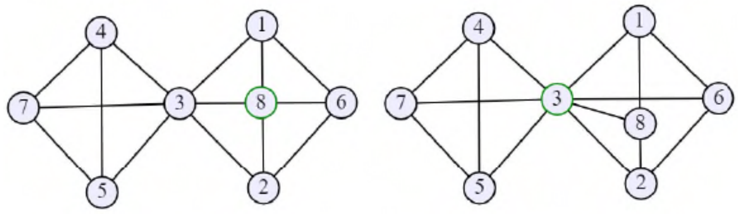

Рис. 2. Примеры графов, удовлетворяющих второму случаю ($\lambda = 3$, $k = 1$, $n = 8$)

n-вершинных графа с заданными значениями k и λ. Однако из доказательства следует, что в общем случае таких оптимальных графов может быть больше: вместо графа Харари можно взять любой k-связный граф с таким же числом рёбер либо графы Харари с разным числом вершин. Например, для случая $n = 7$, $\lambda = 2$ будет также два неизоморфных оптимальных графа. Действительно, имеем два способа выбора графов для соединения: два цикла с числом вершин 4 либо цикл с числом вершин 3 и цикл с числом вершин 5.

Выбор вершин для отождествления также может привести к неизоморфным оптимальным графам. Проведён эксперимент по вычислению количества неизоморфных оптимальных графов с точками сочленения и заданной рёберной связностью, его результаты приведены в таблице.

Количество оптимальных n-вершинных графов с точкой сочленения и рёберной связностью λ

n	λ				
	1	2	3	4	5
3	1	–	–	–	–
4	2	–	–	–	–
5	3	–	–	–	–
6	6	1	–	–	–
7	11	2	1	–	–
8	23	2	2	–	–
9	47	3	2	1	–
10	103	3	19	1	–
11	235	4	11	4	1

Как уже отмечалось, при $\lambda = 1$ оптимальными по числу рёбер графами являются деревья, значения в столбце 2 согласуются с известными данными [13]. Для $n < 10$ значения согласуются с данными сайта «Мир графов» [14]. Прочерки в таблице означают, что при соответствующих значениях n и λ подходящих графов не существует.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1973.
2. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, 1997.
3. *Whitney H.* Congruent graphs and the connectivity of graphs // Amer. J. Math. 1932. V. 54. Iss. 1. P. 150–168.
4. *Chartrand G. and Harary F.* Graphs with prescribed connectivities // Theory of Graphs. N.Y.: Academic Press, 1968. P. 61–63.
5. *Теребин Б. А., Абросимов М. Б.* Оптимальные реализации графов с заданными мерами связности // Матем. заметки. 2023. Т. 113. № 3. С. 323–331.

6. *Fulkerson D. R. and Shapley L. S.* Minimal k-arc-connected graphs // Networks. V. 1. No. 1. P. 91–98.
7. *Теребин Б. А., Абросимов М. Б.* Об одном семействе оптимальных графов с заданными мерами связности // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2022. №15. С. 116–119.
8. *Теребин Б. А., Абросимов М. Б.* О графах с заданной рёберной связностью, точками сочленения и минимальным числом рёбер // Материалы XIV Междунар. семинара «Дискретная математика и её приложения» имени академика О. Б. Лупанова (Москва, МГУ, 20–25 июня 2022 г.) / под ред. В. В. Кочергина. М.: ИПМ им. Келдыша, 2022. С. 200–203.
9. *Берж К. Ж.* Теория графов и её применения. М.: ИЛ, 1962. 323 с.
10. *Harary F.* The maximum connectivity of a graph // Proc. NAS USA. 1962. V. 48. P. 1142–1146.
11. *Steiglitz K., Weiner P., and Kleitman D.* The design of minimum-cost survivable networks // IEEE Trans. Circuit Theory. 1969. V. 16. No. 4. P. 455–460.
12. *Jafarpour M., Shekaramiz M., Javan A., and Moeini A.* Building graphs with maximum connectivity // Proc. IETS. Orem, UT, USA, 2020. P. 1–5.
13. `oeis.org/A000055` — Number of trees with n unlabeled nodes. 2025.
14. `graphworld.ru` — Мир графов. 2025.

REFERENCES

1. *Harary F.* Graph Theory. N.Y., Addison-Wesley, 1969. 274 p.
2. *Bogomolov A. M. and Saliy V. N.* Algebraicheskie osnovy teorii diskretnykh sistem [Algebraic foundations of the theory of discrete systems]. Moscow, Nauka, 1997. (in Russian)
3. *Whitney H.* Congruent graphs and the connectivity of graphs. // Amer. J. Math. 1932. V. 54. Iss. 1. P. 150–168.
4. *Chartrand G. and Harary F.* Graphs with prescribed connectivities. Theory of Graphs. N.Y., Academic Press, 1968, pp. 61–63.
5. *Terebin B. A. and Abrosimov M. B.* Optimal graphs with prescribed connectivities. Math. Notes, 2023, vol. 113, iss. 3, pp. 319–326.
6. *Fulkerson D. R. and Shapley L. S.* Minimal k-arc-connected graphs. Networks, vol. 1, no. 1, pp. 91–98.
7. *Terebin B. A. and Abrosimov M. B.* Ob odnom semeystve optimal'nykh grafov s zadannymi merami svyaznosti [One family of optimal graphs with prescribed connectivities]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika. Prilozhenie, 2022, no. 15, pp. 116–119. (in Russian)
8. *Terebin B. A. and Abrosimov M. B.* O grafakh s zadannoy rebernoy svyaznost'yu, tochkami sochleneniya i minimal'nym chislom reber [On graphs with given edge connectivity, cut points and minimum number of edges]. Proc. XIV Intern. Seminar "Discrete Mathematics and its Applications" named after Academician O. B. Lupanov (MSU, June 20–25, 2022), Moscow, Keldysh Institute of Applied Mathematics, 2022, pp. 200–203. (in Russian)
9. *Berge C. J.* Theorie des graphes et ses applications. Dunod, 1958, 270 p. (in French)
10. *Harary F.* The maximum connectivity of a graph. Proc. NAS USA, 1962, vol. 48, pp. 1142–1146.
11. *Steiglitz K., Weiner P., and Kleitman D.* The design of minimum-cost survivable networks. IEEE Trans. Circuit Theory, 1969, vol. 16, no. 4, pp. 455–460.
12. *Jafarpour M., Shekaramiz M., Javan A., and Moeini A.* Building graphs with maximum connectivity. Proc. IETS, Orem, UT, USA, 2020, pp. 1–5.
13. `oeis.org/A000055` — Number of trees with n unlabeled nodes, 2025.
14. `graphworld.ru`. 2025.