ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

УДК 519.8 DOI 10.17223/20710410/70/7

КАЛЕНДАРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ ПРИ ВОЗМОЖНОСТИ КРЕДИТОВАНИЯ[1]

С. А. Малах, В. В. Сервах

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Омск, Россия

E-mail: malahsveta@mail.ru, svv_usa@rambler.ru

Рассматривается задача календарного планирования проектов. Первая часть посвящена обзору различных постановок задачи в условиях ограничения на ресурсы. Во второй части исследуется вариант задачи с критерием максимизации чистой приведённой прибыли всего проекта. Основное внимание уделяется постановке, возникающей при реализации крупномасштабных проектов, когда ресурсы могут быть заменены их денежным эквивалентом. В этом случае в модели используется единственный вид ресурса — финансовый. Описана традиционная постановка задач и предлагается новый подход к их моделированию: вместо ограничений на ресурсы вводится оплата за их использование. Инструментарием оплаты является кредитование по фиксированной ставке. При таком подходе любое согласованное с частичным порядком расписание становится допустимым. Описана модель для расчёта потенциальных возможностей проекта, предложен алгоритм вычисления собственной прибыли при заданном расписании выполнения работ, исследуется вычислительная сложность задачи построения оптимального расписания, выделен полиномиально разрешимый случай задачи при возможности кредитования.

Ключевые слова: *календарное планирование, инвестиционные проекты, чистая приведённая прибыль, кредитование.*

INVESTMENT PROJECT SCHEDULING WITH LENDING

S. A. Malakh, V. V. Servakh

Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Omsk, Russia

This paper addresses the project scheduling problem. It provides an overview of various problem formulations under resource constraints, including those aimed at maximizing the Net Present Value of the entire project. Special attention is given to modeling scenarios typical of large-scale projects, where traditional resources can be substituted with their monetary equivalents. In such cases, the model is reduced to a single type of resource: financial resources. The standard problem formulation is described, and a novel modeling approach is proposed: instead of hard resource constraints, additional resource usage incurs a cost. This cost is modeled through

[1]Работа выполнена в рамках госзадания ИМ СО РАН, проект FWNF-2022-0020.

borrowing at a fixed interest rate. Under this framework, any schedule consistent with the partial order of activities becomes feasible. A recursive procedure is proposed for calculating net profit given a fixed activity schedule. It is shown that determining a schedule that maximizes net profit is strongly NP-hard. A special case of the problem is identified as polynomially solvable when the total number of profitable, technologically independent activities is bounded by a constant. A model is also presented to estimate the potential of a project under full self-financing. The question of whether this problem is polynomially solvable remains open. To address it, an approximate integer linear programming model with a unimodular matrix is proposed. However, the complexity status of this formulation likewise remains unresolved.

Keywords: *scheduling, investment project, Net Present Value, lending.*

Введение

Проектом будем называть множество технологически взаимосвязанных работ $i \in V$, где $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ — множество всех работ проекта, выполнение которых направлено на достижение определённой цели. Взаимосвязь определяется частичным порядком E, а сам проект задаётся графом $G = (V, E)$. Для каждой работы $i \in V$ известна длительность её выполнения p_i. В выбранных единицах измерения времени величины p_i являются целочисленными. Задача минимизации общего срока выполнения проекта была успешно решена в 1958 г. при реализации проекта создания ракетной системы «Полярис» [1]. Проект, состоящий из 60 тыс. работ, удалось закончить на два года раньше ожидаемого срока. Примерно в это же время при планировании работ по модернизации заводов фирмы «Дюпон» был предложен метод критического пути [2]. Эти разработки получили широкое практическое применение благодаря простоте, наглядности и эффективности их использования. Они позволяют рассчитывать потребности в ресурсах на каждом этапе реализации проекта.

Трудности при составлении расписания выполнения работ возникли, когда проекты требовалось реализовывать в условиях ограничения на ресурсы. Такая задача получила название Resource Constrained Project Scheduling Problem (RCPSP) и заключается в том, чтобы планировать работы с учётом их приоритета и ограничений на ресурсы, при этом время выполнения должно быть минимальным. Математическая модель, представляющая RCPSP, была разработана в 1969 г. [3]. В 1983 г. доказана сильная NP-трудность этой задачи [4]. В дальнейшем были предложены разнообразные постановки задачи планирования проектов с ограниченными ресурсами, в том числе и с различными критериями.

Задачу с критерием чистой приведенной прибыли проекта впервые рассмотрел A. H. Russell [5] в 1970 г. В работе [6] для планирования крупномасштабных проектов предложено свести задачу к ограничениям на ресурс финансового типа, а другие ресурсы трансформировать в их денежный эквивалент. В [7] доказана сильная NP-трудность этой задачи. Задача с кредитованием была представлена в [8], а её сильная NP-трудность доказана в [9]. В настоящей работе мы развиваем подходы к решению задачи с кредитованием.

В п. 1 сделан обзор различных постановок задачи, описана общая концепция ресурсных ограничений. Пункт 2 посвящён классической постановке задачи с критерием максимизации чистой приведённой прибыли. В п. 3 описана постановка задачи максимизации собственной прибыли с учётом возможности кредитования проекта. В п. 4 предложен подход к моделированию задачи, в котором ресурсные ограничения отсутствуют, а недостающие ресурсы покрываются за счёт кредитов. Описан алгоритм расчёта собственной прибыли для заданного расписания выполнения работ. В п. 5 проведён анализ сложности предложенной постановки, выделен полиномиально разрешимый подслучай задачи. В п. 6 рассматривается задача оценки потенциальных возможностей проекта и предлагается подход к её решению.

1. Задача календарного планирования

Приведём классическую постановку задачи [10]. Рассмотрим два типа ресурсов: возобновимые и складируемые. К первым относится оборудование, рабочие, специалисты, производственные помещения, а к складируемым — расходные материалы, сырьё, финансы и т. д. Пусть W^r и W^a — множества видов возобновимых и складируемых ресурсов соответственно. Объём ресурса вида $w \in W^r \cup W^a$ на интервале $[t-1, t)$ обозначим $K^w(t)$, $t \in \mathbb{N}$. Возобновимые ресурсы доступны в течение всего интервала, а складируемые — на начало указанного периода. Без ограничения общности предполагается, что длительности всех работ целочисленные. Работа $i \in V$ на интервале $[\tau - 1, \tau)$, $\tau = 1, 2, \ldots, p_i$, потребляет $k_i^w(\tau)$ единиц ресурса вида w. Необходимо найти s_i — время начала выполнения работы $i \in V$. Обозначим через $N_t = \{i \in V : s_i < t \leqslant s_i + p_i\}$ множество работ, выполняемых на интервале $[t-1, t)$. Расписание $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ называется допустимым, если:

— соблюдается технологическая последовательность выполнения работ:

$$s_i + p_i \leqslant s_j, \quad (i, j) \in E;$$

— соблюдаются ограничения на ресурсы складируемого типа:

$$\sum_{\tau=1}^{t} \sum_{i \in N_\tau} k_i^w(\tau - s_i) \leqslant \sum_{\tau=1}^{t} K^w(\tau), \quad w \in W^a,\ t = 1, 2, \ldots;$$

— соблюдаются ограничения на ресурсы возобновимого типа:

$$\sum_{i \in N_\tau} k_i^w(\tau - s_i) \leqslant K^w(t), \quad w \in W^r, \quad t = 1, 2, \ldots$$

Если имеются только ресурсы складируемого типа, то задача минимизации общего времени завершения всех работ полиномиально разрешима [10]. Для других критериев задача NP-трудна в сильном смысле. Если ресурсы возобновимые, то даже поиск допустимого решения является сильно NP-трудной задачей. В этом случае легко сконструировать примеры, когда хотя бы одно допустимое решение есть, но отыскать его трудно. Для этого достаточно взять произвольное расписание выполнения работ и рассчитать, сколько в точности требуется ресурсов для его реализации. Этот минимально необходимый уровень ресурсов зафиксировать как входные данные. Далее информацию о расписании убрать. В результате получаем пример с непустым множеством допустимых решений. Найти допустимое расписание такого примера — очень трудная задача, так как ограничения на ресурсы получаются очень жёсткие. Такие примеры являются наиболее сложными в дискретной оптимизации.

В литературе представлено множество идей по поводу того, каким образом можно ослабить жёсткость ресурсных ограничений. В [11, 12] возобновимые ресурсы заменяются складируемыми, что позволяет получить нижние оценки оптимального решения задачи. Хорошо известна задача trade-off, в которой длительность работы зависит от выделенных на неё ресурсов [13]: имеется возможность перераспределить ограниченные ресурсы в пользу критических работ. С другой стороны, в случае нехватки ресурсов в некоторый момент времени можно увеличить длительность работ и уложиться в ограничения. Ещё одним важным подходом, направленным на более гибкую работу с ресурсными ограничениями, является приобретение ресурсов. Задача минимизации затрат на закупку ресурсов впервые была рассмотрена в 1984 г. [14]. Из последних исследований отметим работы [15, 16]. В [17, 18], помимо составления расписания, решается задача, в которой необходимо определить дополнительные параметры: в какие моменты времени, где и в каком количестве заказывать материалы для проекта. В работах [15, 18] учитывается ещё и скидка на количество заказов. Недостатком такого подхода является необходимость оптимизации второй целевой функции — стоимости закупленных ресурсов.

В настоящее время представления о ресурсах существенно расширились. Прежде всего отметим понятие регенерации ресурсов [19, 20]. Предположим, что каждая выполняемая работа потребляет некоторое количество единиц ресурса, это интерпретируется как расход, и воспроизводит другое количество единиц ресурса после своего завершения, которое интерпретируется как доход. Для возобновимых ресурсов расход равен доходу, а для складируемых доход равен нулю. Регенерация ресурсов предполагает наличие коэффициента β восстановления ресурсов после выполнения работы. Ранее рассматривалось два значения этого коэффициента: если $\beta = 1$, то ресурс является возобновимым, если $\beta = 0$ — складируемый. В более общем случае значение β может принимать любые значения. В качестве примера можно рассмотреть работы [21, 22], в которых исследуется модель промежуточного переселения жителей в рамках проекта перепланировки районов города. Описанная задача отличается от классической задачи календарного планирования с ограниченными ресурсами тем, что доход любой выполненной работы может быть не только положительным или равным нулю, но и отрицательным. Авторы работы [23] рассматривают особый случай с парами работ, когда первая работа занимает ресурс в момент своего начала, при этом такое же количество мощности высвобождается по завершении второй работы. Связанные ресурсы называются ресурсами «брать — давать».

Этот подход можно обобщить, предполагая воспроизведение ресурса не только после окончания работы, но и в процессе её выполнения, а также с временным лагом после её завершения. Были введены понятия частично возобновимых ресурсов, а также понятие последовательно восстановимых ресурсов. В [24] авторы используют частично возобновимые ресурсы в рамках задачи планирования нескольких проектов. В [25] рассматривается задача с частично возобновимыми ресурсами и минимальными и максимальными временными задержками.

Отметим ещё несколько аспектов, связанных с ресурсами [26]. Это понятие общего или совокупного ресурса, когда подмножество работ использует общий ресурс. Другое направление связано с ресурсами, которые обладают множественными навыками (multiple skills), а каждая работа требует наличия определённого набора этих навыков. Некоторые исследователи рассматривают проблему множественных навыков с эффектами обучения или усталости. Но исследование ресурсов таких типов выходит за рамки данной работы.

Хотя RCPSP является классической моделью, она не может охватить все ситуации, возникающие на практике. Поэтому многие исследователи разработали более общие задачи планирования проектов, часто используя стандартную RCPSP в качестве отправной точки. В [27] собрано более 60 статей, охватывающих многие важные модели и методы планирования проектов. S. Hartmann и D. Briskorn [26] представили широкий обзор вариантов и расширений RCPSP, которые были предложены другими авторами.

2. Критерии, основанные на чистой приведённой стоимости

Одним из важных вариантов рассматриваемой задачи является планирование инвестиционных проектов, основная цель которых направлена на получение прибыли от выполнения комплекса технологически взаимосвязанных работ. В такой постановке возникают денежные потоки, а для их сравнения в различные моменты времени используется операция дисконтирования. При совершении финансовых операций предполагается, что имеется возможность альтернативного безрискового ликвидного размещения капитала под ставку r_0 за единичный период времени. Тогда капитал K_0, которым располагает инвестор в момент t_0, к моменту t увеличивается до величины $K_t = K_0(1 + r_0)^{t-t_0}$. Тем самым капитал K_t в момент времени t эквивалентен капиталу $K_t/(1 + r_0)^{t-t_0}$ в момент t_0. Операция приведения к начальному моменту времени называется дисконтированием и позволяет сравнивать деньги в разные моменты времени.

В литературе рассматриваются разные подходы к моделированию инвестиционных проектов. Отток денежных средств вызван выполнением работ и использованием ресурсов, приток денежных средств происходит по завершении определённых частей проекта. Это приводит к необходимости максимизировать чистую текущую стоимость (Net Present Value, NPV) проекта. В дополнение к стандартному приоритету и ограничениям по ресурсам учитывается ограничение по срокам. RCPSP с целью максимизации NPV изучалось в [28–31]. Эти исследования основаны на непрерывном начислении сложных процентов, то есть денежные потоки дисконтируются с коэффициентом $e^{-\beta t}$. В [32] рассматривается та же ситуация, но используется начисление сложных процентов за период с коэффициентом дисконтирования $(1 + \alpha)^{-t}$. Однако эти два типа дисконтирования существенно не отличаются, поскольку могут быть конвертированы друг в друга. В работе [33] расширяется RCPSP с целевой функцией NPV — рассматривается отток денежных средств либо в начале, либо в конце работы, либо на протяжении всего периода её выполнения (приток денежных средств происходит только в конце периода). Ограничение гарантирует, что капитал никогда не станет отрицательным.

В [34] применяется аналогичный подход, где три варианта поступления платежей применяются также к притоку денежных средств. В [35] рассматриваются платежи в регулярные и нерегулярные моменты времени, а также платежи, связанные с работами, которые включены как в одномодовую, так и в многорежимную RCPSP.

В [36] предлагается рассматривать цель, основанную на чистой приведённой стоимости, которая учитывает приток денежных средств после завершения деятельности, затраты на ресурсные мощности, а также бонусы и штрафные платежи в зависимости от завершения проекта в отношении срока выполнения. Учитывается также уровень инфляции.

Затраты на объём ресурсов относятся только к интервалу времени, в течение которого ресурс фактически используется. В [37] исследуется RCPSP с целью максимизировать чистую текущую стоимость и дополнительный единый непрерывный ресурс.

В [38] максимизируется чистая приведённая стоимость; в [39] в RCPSP с заданными сроками выполнения работ минимизируется чистая приведённая стоимость штрафов за нарушение директивных сроков этих работ.

В данной работе предлагается подход, который может быть использован для моделирования крупномасштабных проектов и включает в себя большинство описанных выше понятий. Кроме того, в модели удаётся избежать многокритериальности.

Заметим, что в крупномасштабных проектах можно заменить все ресурсы их денежным эквивалентом и рассматривать только один вид ресурса — финансовый. Имея финансовый ресурс, рабочих можно нанять, необходимые помещения и оборудование арендовать, взять в лизинг или купить, возможно, с последующей продажей. Если же финансового ресурса не хватает, то его можно приобрести с помощью кредита. В итоге все платежи, связанные с работой $i \in V$, сводятся к одному потоку $(c_i(0), c_i(1), \ldots, c_i(p_i))$, где $c_i(\tau)$ — баланс платежей работы i в момент времени $\tau = 0, 1, \ldots, p_i$. Под балансом платежей будем понимать разность между поступлениями и расходами. Если $c_i(\tau) < 0$ — затраты превосходят поступления, если $c_i(\tau) > 0$ — поступления больше затрат. Величина

$$NPV_i = \sum_{\tau=0}^{p_i} \frac{c_i(\tau)}{(1+r_0)^\tau}$$

называется чистой прибылью работы $i \in V$, *приведённой к началу её выполнения*. Предполагается, что каждая работа выполняется без прерываний. Наличие ресурсов в момент времени t также задаём в денежном эквиваленте совокупной величиной $K(t)$, $t = 0, \ldots, T$, где T — горизонт планирования проекта.

Обозначим, как и ранее, через s_i момент начала выполнения работы $i \in V$. Вектор $\mathbf{S} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ задаёт расписание выполнения работ проекта. Так как p_i — целые числа и потоки платежей дискретны, достаточно рассмотреть расписания с целыми значениями s_i.

В данной постановке платежи привязаны к моментам $\tau = 0, 1, \ldots, p_i$. Поэтому переопределим множество N_t как множество работ, выполняемых в момент $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$, то есть $N_t = \{i \in V : s_i \leqslant t \leqslant s_i + p_i\}$. Расписание $\mathbf{S}$ называется допустимым, если:

— проект завершается к моменту T:

$$s_i + p_i \leqslant T, \quad i \in V;$$

— сохраняется заданный частичный порядок выполнения работ:

$$s_i + p_i \leqslant s_j, \quad (i, j) \in E;$$

— в каждый момент времени с учётом реинвестирования дохода и размещения свободного капитала под ставку r_0 финансовых ресурсов достаточно для выполнения работ проекта:

$$\sum_{t=0}^{t^*} \frac{K(t)}{(1+r_0)^t} + \sum_{t=0}^{t^*} \sum_{i \in N_t} \frac{c_i(t - s_i)}{(1+r_0)^t} \geqslant 0, \quad t^* = 0, \ldots, T.$$

Требуется определить допустимое расписание выполнения работ, при котором чистая приведённая прибыль всего проекта будет максимальной. Чтобы просуммировать прибыль от всех работ, требуется величины NPV_j привести к моменту времени $t = 0$. Тогда целевая функция будет выглядеть следующим образом:

$$NPV_{rc}(\mathbf{S}) = \sum_{i \in V} \frac{NPV_i}{(1+r_0)^{s_i}} \to \max_{\mathbf{S}}.$$

Данная задача является NP-трудной в сильном смысле [7]. Различные варианты этой модели исследовались в [28, 29, 33, 35].

Отметим, что критерий чистой приведённой прибыли удобно использовать для достижения различных целей проекта, в частности для минимизации общего времени его выполнения. Достаточно ввести фиктивную заключительную работу, которая зависит от всех работ проекта, и сделать её доход больше, чем максимально возможный общий доход проекта. Тогда при оптимизации NPV-критерия эта работа автоматически будет выполняться в ранние сроки, и весь проект завершится как можно раньше.

3. Задача планирования инвестиционных проектов при возможности кредитования

Обобщим модель, допустив возможность привлечения за определённую плату дополнительных ресурсов. Рассмотрим проблемы финансирования проекта. Основными источниками финансирования инвестиционного проекта являются собственные средства, кредиты и средства соинвесторов. В описанной выше постановке финансирование проекта полностью осуществляется за счёт собственных средств инвестора. Если их не хватает, то либо берётся кредит, либо привлекаются соинвесторы. Соинвестирование и кредитование проекта — это два разных подхода к финансированию, каждый из которых имеет свои особенности и цели.

Соинвестирование подразумевает, что каждый соинвестор вносит свою долю капитала и, как правило, получает пропорциональную долю в прибыли и убытках проекта. Соинвесторы могут участвовать в управлении проектом, принимая решения о его развитии, что может привести к более активному вовлечению в процесс.

Кредитование проекта — это процесс получения заёмных средств от финансовых учреждений под определённые условия (процентная ставка, график погашения и т. д.). Заёмщик обязан возвращать заём с процентами независимо от успеха или неудачи проекта. Кредиторы, как правило, не участвуют в управлении проектом, но могут устанавливать условия и требования к заёмщику.

Каждый из этих методов имеет свои преимущества и недостатки, и выбор между ними зависит от конкретных обстоятельств проекта и целей инвесторов. Далее рассмотрим только вариант с кредитованием проекта, а соинвестирование оставим для дальнейших исследований.

При моделировании кредитов возникает большое количество дополнительных характеристик, таких, как процентная ставка, тип кредита, его размер, срок, схема выплат и т. д. Сделаем некоторое предположение, которое упрощает постановку, но по существу не влияет на адекватность модели. Будем считать, что: 1) в любой момент времени можно взять кредит; 2) процентная ставка фиксирована и не меняется в зависимости от срока и суммы кредита; 3) любая сумма кредита доступна в любое время; 4) погашение кредита допускается в любое время. Тогда любой кредит можно представить в виде потока платежей

$$\begin{pmatrix} t_0 & t_1 & \dots & t_k \\ \xi_0 & \xi_1 & \dots & \xi_k \end{pmatrix},$$

обладающего свойством

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{\xi_i}{(1+r)^{t_i-t_0}} = 0,$$

где r — процентная ставка по кредиту за единичный период времени.

Кредит любой сложности можно разбить на последовательность простых кредитов, реализуемых по схеме «взял — вернул с процентами». Так как у нас время дискретно и t принимает целочисленные значения, то справедливо следующее

Утверждение 1 [9]. При фиксированной процентной ставке кредит любого вида можно разбить на эквивалентную последовательность кредитов единичной длительности.

Действительно, при дискретном времени в очередной целочисленный момент времени возвращается весь долг по кредиту вместе с начисленными процентами. Кредит полностью закрывается. И в тот же момент открываем новый кредит на ту же сумму. Полученная последовательность потоков платежей соответствует исходной схеме кредита.

Такой подход позволяет ввести только один дополнительный тип переменных $D(t)$ — размер кредита, взятого в год t. Тогда модель с кредитами и реинвестированием дохода имеет следующий вид: построить расписание выполнения работ $\mathbf{S} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, $s_i \in \{0, 1, \ldots, T - p_i\}$, при котором:

— соблюдается технологический порядок выполнения работ:

$$s_i + p_i \leqslant s_j, \quad (i, j) \in E;$$

— в каждый целочисленный момент времени $t^* \in \mathbb{Z}^+$ сохраняется неотрицательный платёжный баланс с учётом взятых кредитов, выплат по ним, реинвестирования дохода и размещения свободного капитала под ставку r_0:

$$\sum_{t=0}^{t^*} \left(\frac{K(t)}{(1 + r_0)^t} + \sum_{i \in N_t} \frac{c_i(t - s_i)}{(1 + r_0)^t} + \frac{D(t) - (1 + r)D(t - 1)}{(1 + r_0)^t} \right) \geqslant 0;$$

— чистая приведённая прибыль с учётом выплат по кредитам достигает максимального значения:

$$NPV_{\text{loan}}(\mathbf{S},\, \mathbf{D}) = \sum_{i \in V} \frac{NPV_i}{(1 + r_0)^{s_i}} + \sum_{t=0}^{T} \frac{D(t) - (1 + r)D(t - 1)}{(1 + r_0)^t} \to \max_{\mathbf{S},\mathbf{D}},$$

где T — горизонт планирования проекта; $D(-1) = 0$ и $D(T) = 0$.

Использование кредитов расширяет множество допустимых решений задачи, поэтому оптимальное решение NPV^*_{loan} должно быть по крайней мере не хуже, чем оптимальное решение NPV^*_{rc} для задачи без кредитов. Таким образом, если задача с критерием NPV_{rc} разрешима, то справедливо следующее неравенство:

$$NPV^*_{rc} \leqslant NPV^*_{\text{loan}}.$$

Выделим особенности построенной модели:
- цель — получение инвестором максимальной прибыли;
- используется единственный ресурс — финансовый;
- учитывается временной фактор стоимости денежных средств;
- имеется возможность использования кредита;
- полученный в процессе выполнения проекта доход реинвестируется.

Данная задача также является NP-трудной в сильном смысле [9]. Более того, в ней увеличилось количество переменных. Далее предлагается использовать другой подход к моделированию этой задачи, основные идеи которого изложены в [40].

4. Рекурсивный подход при планировании инвестиционных проектов

Пусть, как и прежде, r_0 — ставка альтернативного безрискового ликвидного размещения свободного капитала, r — ставка по кредиту. Для финансирования проекта в момент t имеется капитал K_t, где $t = 0, 1, \ldots, T$. Если в какой-то момент времени его не хватает, то инвестор берёт кредит. Заметим, что при заданном расписании выполнения работ кредитные заимствования определяются однозначно. Для этого в каждый целочисленный момент времени недостаток финансовых средств покрывается минимально необходимым кредитом, который, в соответствии с утверждением 1, возвращается в следующий целочисленный момент времени. В такой ситуации при заданном расписании выполнения работ собственную чистую приведённую прибыль проекта $NPV_{\text{taut}}(\mathbf{S})$ можно вычислять алгоритмически (алгоритм 1).

Алгоритм 1. Вычисление собственной чистой приведённой прибыли для заданного расписания

1: Сформируем общий поток платежей проекта для расписания $\mathbf{S}$. Для этого достаточно сложить потоки работ $(c_i(0), c_i(1), \ldots, c_i(p_i))$, привязывая их к моменту начала выполнения работы s_i. В результате получим общий поток платежей по проекту $(C_0, C_1, \ldots, C_t, \ldots, C_T)$ для данного расписания $\mathbf{S}$, где $T = \max\limits_{i \in V}(s_i + p_i)$. Данный поток платежей и поступлений не зависит от того, как этот проект будет финансироваться.

2: Обозначим через F_t текущий платёжный баланс на момент t с учётом использования кредитов и выплат по ним, $t = 0, 1, \ldots, T$. Первоначально полагаем $F_0 = K_0$.

3: **Если** $K_0 + C_0 < 0$, **то**
  необходимо взять кредит по ставке r и $F_1 = (K_0 + C_0)(1 + r)$.

4: **Если** $K_0 + C_0 \geqslant 0$, **то**
  свободные деньги размещаем под ставку r_0 и $F_1 = (K_0 + C_0)(1 + r_0)$.

5: **Для всех** $t = 1, 2, \ldots, T - 1$
  значения F_{t+1} для $t = 1, 2, \ldots, T - 1$ вычисляются рекурсивно:
  $F_{t+1} = (F_t + K_t + C_t)(1 + r)$, если $F_t + K_t + C_t < 0$;
  $F_{t+1} = (F_t + K_t + C_t)(1 + r_0)$, если $F_t + K_t + C_t \geqslant 0$.

6: Дисконтируя величину $F_T + C_T$ к начальному моменту времени и вычитая вложенный капитал, получаем собственную чистую прибыль, приведённую к начальному моменту времени:

$$NPV_{\text{taut}}(\mathbf{S}) = \frac{F_T + C_T}{(1 + r_0)^T} - \sum_{i=0}^{T-1} \frac{K_t}{(1 + r_0)^t}.$$

7: **Вывести** $NPV_{\text{taut}}(\mathbf{S})$.

В конечном итоге требуется найти расписание выполнения работ проекта, при котором собственная прибыль будет наибольшей:

$$\begin{cases} NPV_{\text{taut}}(\mathbf{S}) \to \max\limits_{\mathbf{S}}, & \\ s_i + p_i \leqslant s_j, & (i, j) \in E, \\ s_i \in \{0, 1, \ldots, T - p_i\}, & i \in V. \end{cases}$$

Утверждение 2. Оптимальные значения целевых функций NPV^*_{taut} и NPV^*_{loan} совпадают.

Доказательство. Построенная модель отличается от модели с критерием NPV_{loan} дополнительным требованием использования минимально необходимого объёма кредита в любой момент времени. Понятно, что в оптимальном решении модели с ограничением значения D_t также будут минимально необходимыми. Оба подхода являются решением одной и той же задачи. ■

Трудоёмкость шага 1 алгоритма 1 составляет $\sum\limits_{i\in V} p_i$ операций. Шаг 3 реализуется за $O(T)$ операций. Учитывая, что длина входа задачи зависит линейно от $\sum\limits_{i\in V} p_i$ и T, алгоритм расчёта собственной прибыли для заданного расписания выполнения работ является полиномиальным.

5. Вычислительная сложность и подходы к решению задачи

Приведём несколько результатов по вычислительной сложности решения поставленной задачи.

Утверждение 3. Задача максимизации $NPV_{\mathrm{taut}}(\mathbf{S})$ NP-трудна в сильном смысле.

Доказательство. В силу утверждения 2 при нахождении оптимума задачи с критерием NPV_{taut} мы находим и оптимум задачи с критерием NPV_{loan}. Так как последняя задача NP-трудна в сильном смысле [9], такую же сложность имеет исходная задача. ■

Заметим, что вклад работы i в целевую функцию составляет $\dfrac{NPV_i}{(1+r_0)^{s_i}}$. Если $NPV_i < 0$, то данная функция убывает с ростом s_i Следовательно, при увеличении момента s_i общая прибыль проекта возрастает. Это свойство позволяет выделить полиномиально разрешимый случай задачи. Если $NPV_i > 0$, то работу i будем называть прибыльной.

Теорема 1. Если число прибыльных работ ограничено константой m, то задача максимизации собственной прибыли $NPV_{\mathrm{taut}}(\mathbf{S})$ полиномиально разрешима.

Доказательство. Доказательство основано на приведённом выше замечании. В оптимальном расписании работы, имеющие отрицательную чистую приведённую прибыль, выполняются как можно позднее. Таким образом, если зафиксировать моменты начала выполнения прибыльных работ S_i, то для всех остальных работ достаточно найти поздние моменты их начала. А так как $S_i \in \{0, 1, \ldots, T - p_i\}$, где T — горизонт планирования проекта, то трудоёмкость перебора расписаний составит не более $O(T^m)$ шагов. Для расчёта прибыли для каждого расписания требуется не более $\sum\limits_{i\in V} p_i$ операций. Следовательно, в данном случае алгоритм является полиномиальным. ■

Трудоёмкость $O(T^m)$ является грубой верхней оценкой и может быть уменьшена за счёт использования алгоритма из [6], основанного на схеме динамического программирования. Его трудоёмкость экспоненциально зависит от максимального числа технологически независимых прибыльных работ. Если число таких работ ограничено константой, то алгоритм становится полиномиальным. Это усиливает результат теоремы 1, но его доказательство выходит за рамки данной работы.

Плюсом построенной модели является то, что в ней отсутствуют ограничения на ресурсы, а значит, любое согласованное с частичным порядком расписание является допустимым. Это позволяет использовать широкий спектр метаэвристик, включая эволюционные алгоритмы. Разработка таких алгоритмов является целью наших дальнейших исследований.

6. Оценка эффективности проекта

Рассмотрим задачу максимизации NPV в предположении, что ресурсы не ограничены. Величина

$$NPV(\mathbf{S}) = \sum_{j \in V} \frac{NPV_j}{(1 + r_0)^{s_j}}$$

характеризует чистую приведённую прибыль проекта при отсутствии ограничений на ресурсы. Заметим, что для любого технологически допустимого расписания $\mathbf{S}$ выполняется неравенство

$$NPV_{\text{loan}}(\mathbf{S}) \leqslant NPV(\mathbf{S}).$$

Нахождение расписания, для которого $NPV(\mathbf{S})$ принимает наибольшее значение, позволяет:

1) определить потенциальные возможности проекта;
2) построить верхнюю оценку оптимума для задачи с ресурсными ограничениями;
3) найти оптимальное решение задачи в случае, когда собственных средств хватает на полное финансирование проекта.

Отметим, что для части работ $NPV_i < 0$. Это в основном стартовые работы. Но отрицательность NPV_i возможна также и для заключительных работ. Это происходит, когда в проект включены, например, социально значимые работы (благоустройство территории, строительство спортивной площадки, культурных объектов и т. д.) или работы, связанные с обеспечением безопасности объекта. Некоторые из них могут быть весьма затратными. Максимизация прибыли в этом случае приводит к тому, что для этих работ $s_i \to \infty$, то есть фактически работа $i \in V$ не будет выполнена. Чтобы избежать таких ситуаций, необходимо ввести либо директивный срок, либо горизонт планирования проекта, к которому все работы должны быть завершены, обозначим его через T. Таким образом, возникает следующая модель:

$$\begin{cases} NPV(\mathbf{S}) = \sum\limits_{i \in V} \dfrac{NPV_i}{(1 + r_0)^{s_i}} \to \max\limits_S, & \\ s_i + p_i \leqslant s_j, & (i, j) \in E, \\ s_i \in \{0, 1, \ldots, T - p_i\}, & i \in V. \end{cases}$$

Данная задача представляет определённый математический интерес, но к настоящему моменту построить полиномиальный алгоритм её решения не удалось и вопрос о её вычислительной сложности остаётся открытым. Далее предлагается алгоритм построения приближённого решения, основанный на линеаризации целевой функции.

Целевая функция является линейной комбинацией выпуклых и вогнутых строго монотонных функций. При $NPV_j < 0$ функция $\dfrac{NPV_j}{(1 + r_0)^{s_j}}$ возрастает, и значит, увеличение s_j приводит к увеличению прибыли. В результате эту работу необходимо выполнять как можно позднее. Если $NPV_j > 0$, то, наоборот, работа должна быть выполнена как можно раньше. Ограничением является наличие частичного порядка выполнения работ E.

Рассмотрим релаксационную модель задачи, в которой условие целочисленности отсутствует, то есть $0 \leqslant s_i \leqslant T - p_i$, $i \in V$. Компоненты градиента целевой функции знакопостоянны и не могут быть равны нулю. Значит, оптимум достигается на границе. Более того, на грани меньшей размерности все свойства целевой функции сохраняются. Для граней $s_i = 0$ и $s_i = T - p_i$ это очевидно. На грани $s_i + p_i = s_j$ сумма двух членов равна

$$\frac{NPV_i}{(1+r_0)^{s_i}} + \frac{NPV_j}{(1+r_0)^{s_j}} = \frac{NPV_i}{(1+r_0)^{s_i}} + \frac{NPV_j}{(1+r_0)^{s_i+p_i}} = \frac{1}{(1+r_0)^{s_i}}\left(NPV_i + \frac{NPV_j}{(1+r_0)^{p_i}}\right) = \frac{NPV_{ij}}{(1+r_0)^{s_i}},$$

где NPV_{ij} — общая доходность работ i и j. Получаем такую же функцию со знакопостоянным градиентом. Таким образом, можно сделать вывод, что оптимальное решение релаксационной задачи достигается в вершине многогранника. А так как матрица ограничений унимодулярна, то оптимальное решение будет целочисленным.

К сожалению, это мало что даёт для поиска оптимального решения задачи. Опишем алгоритм, использующий линеаризацию целевой функции. Аппроксимация экспоненты $(1 + r_0)^{-s_i}$ линейной функцией даёт очень грубое приближение, иллюстрация при $r_0 = 0{,}1$ и $s_i \in \{0, \ldots, 40\}$ приведена на рис. 1.

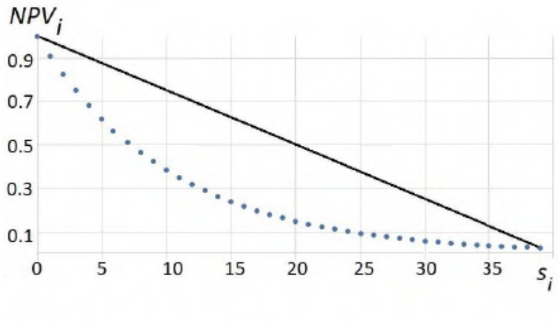

Рис. 1. Линейная аппроксимация NPV_i на интервале планирования 40 лет

Однако в нашей задаче есть особенности, которые можно использовать при аппроксимации. Реальные инвестиционные проекты на 40 лет не планируют. Если $s_i \in \{0, \ldots, 10\}$, то приближение становится значительно лучше (рис. 2). Если же процентная ставка повышается, то в силу экономических особенностей горизонт планирования проектов становится меньше и качество приближения не ухудшается.

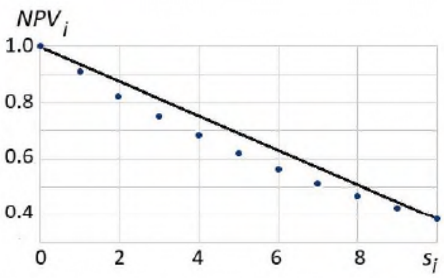

Рис. 2. Линейная аппроксимация NPV_i на интервале планирования 10 лет

Если меняется единица измерения, то соответственно меняется и процентная ставка. На рис. 3 рассматриваемая функция и её линейная регрессия отображены на интервале планирования 120 месяцев.

Следующий этап учитывает то обстоятельство, что переменная s_i изменяется в существенно меньшем диапазоне, чем $\{0, \ldots, T - p_i\}$. Опишем алгоритм 2 локализации значений переменной s_i.

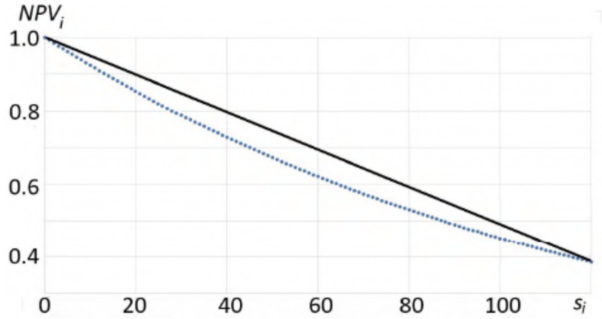

Рис. 3. Линейная аппроксимация NPV_i на интервале планирования 120 месяцев

Алгоритм 2. Локализация значений переменных s_i

1: **Для всех** $i \in V$
находим ранние t_i^r и поздние t_i^p времена начала выполнения работы i.
2: **Для всех** $i \in V$, таких, что $NPV_i > 0$
3: работу i начинаем в срок t_i^r, а остальные работы выполняем как можно позднее. Этот срок берём за новое раннее время выполнения работ с неположительным значением NPV_i.
4: **Для всех** $i \in V$, таких, что $NPV_i < 0$
5: работу i начинаем в срок t_i^p, а остальные работы выполняем как можно раньше. Этот срок берём за новое позднее время выполнения работ с неотрицательным значением NPV_i.
6: **Для всех** $i \in V$
7: имеем $s_i \in [t_i^r, t_i^p]$

Функцию $(1 + r_0)^{-s_i}$ на интервале $[t_i^r, t_i^p]$ аппроксимируем линейной функцией $a_i s_i + b_i$. Возможны два способа линеаризации. В первом строим линейную регрессию. Во втором проводим прямую через две крайние точки. Второй способ учитывает то обстоятельство, что функция строго монотонна и при прочих равных условиях оптимум достигается в крайнем положении.

Рассмотрим функцию $y_i = \dfrac{NPV_i}{(1+r_0)^{s_i}}$ на временном отрезке $[t_i^r, t_i^p]$. Обозначим $\alpha_1 = \dfrac{NPV_i}{(1+r_0)^{t_i^r}}$, $\alpha_2 = \dfrac{NPV_i}{(1+r_0)^{t_i^p}}$. Выпишем уравнение прямой в координатах (s_i, y_i), проходящей через точки $A(t_i^r, \alpha_1)$ и $B(t_i^p, \alpha_2)$:

$$\frac{t - t_i^r}{t_i^p - t_i^r} = \frac{y_i - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

Уравнение прямой можно записать в виде

$$y_i = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{t_i^p - t_i^r} s_i - \frac{t_i^r(\alpha_2 - \alpha_1) - (t_i^p - t_i^r)\alpha_1}{t_i^p - t_i^r} = a_i s_i - b_i.$$

Поскольку константа b_i в целевой функции не влияет на решение, получаем следующую задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i \in V} a_i s_i \to \max\limits_{\mathbf{S}}, \\ s_i + p_i \leqslant s_j, & (i,j) \in E, \\ t_i^r \leqslant s_i \leqslant t_i^p, & i \in V. \end{cases}$$

Матрица данной задачи унимодулярна и параметры p_i, t_i^r, t_i^p целочисленные. Значит, оптимальное решение тоже будет целочисленным. Остаётся подставить полученное решение в целевую функцию.

Проведен эксперимент на задачах с 30 работами. Проекты формировались на основе задач из библиотеки PSLIB. Потоки платежей работ генерировались случайным образом. Точное решение задачи было получено с помощью решателя NLP в среде GAMS. Для аппроксимационной задачи использовался решатель LP. Во всех 20 примерах оптимальное решение исходной и аппроксимационной задач совпали. Построить пример, на котором решения этих задач отличались бы друг от друга, пока не удалось.

Заключение

Предложенный подход расширяет возможности анализа инвестиционных проектов и позволяет эффективнее использовать современные методы решения задач при поиске оптимальных расписаний выполнения работ. Кроме проведения экспериментальных расчетов с эволюционными и другими алгоритмами построения приближённого решения, планируется адаптировать точный алгоритм, основанный на схеме динамического программирования. Открытым остаётся вопрос о полиномиальной разрешимости задачи построения оптимального расписания при достаточном собственном финансировании проекта.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fazar W.* The origin of PERT // The Controller. 1962. No. 30. P. 598–621.
2. *Kelley J. E.* Critical-path planning and scheduling: Mathematical basis // Oper. Res. 1961. V. 9. No. 3. P. 296–320.
3. *Alan A., Pritsker B., Watters L. J., and Wolfe P. M.* Multiproject scheduling with limited resources: A zero-one programming approach // Management Science. 1969. V. 16. No. 1. P. 93–108.
4. *Blazewicz J., Lenstra J. K., and Rinnooy Kan A. H. G.* Scheduling subject to resource constraints: classification and complexity // Discr. Appl. Math. 1983. V. 5. No. 1. P. 11–24.
5. *Russell A. H.* Cash flows in networks // Management Science. 1970. V. 16. No. 5. P. 357–373.
6. *Servakh V. V.* A dynamic algorithm for some project management problems // Proc. Int. Workshop Discrete Optimization Methods in Scheduling and Computer-Aided Design (Minsk, September 5–6, 2000). Minsk: Inst. Eng. Cybern. NAS Belarus, 2000. P. 90–92.
7. *Сервах В. В., Щербинина Т. А.* О сложности одной задачи календарного планирования со складируемыми ресурсами // Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ. 2008. Т. 8. № 3. С. 105–112.
8. *Мартынова Е. А., Сервах В. В.* О задаче календарного планирования проектов с использованием кредитов // Автоматика и телемеханика. 2012. № 3. С. 107–116.
9. *Казаковцева Е. А., Сервах В. В.* Сложность задачи календарного планирования с кредитами // Дискретн. анализ и исслед. опер. 2015. Т. 22. № 4. С. 35–49.
10. *Гимади Э. Х., Залюбовский В. В., Севастьянов С. В.* Полиномиальная разрешимость задач календарного планирования со складируемыми ресурсами и директивными сроками // Дискретн. анализ и исслед. опер. Сер. 2. 2000. Т. 7. № 1. С. 9–34.
11. *Гимади Э. Х., Гончаров Е. Н., Штепа А. А.* Быстрый алгоритм вычисления нижней оценки для решения задачи ресурсно-календарного планирования с тестированием на примерах библиотеки PSPLIB // Тр. ИММ УрО РАН. 2021. Т. 27. № 1. С. 22–36.
12. *Гончаров Е. Н.* Алгоритм локального поиска для задачи календарного планирования с ограниченными ресурсами // Дискретн. анализ и исслед. опер. 2022. Т. 29. № 4. С. 15–37.

13. *Hazir Ö., Haouari M., and Erel E.* Robust optimization for the discrete time-cost tradeoff problem with cost uncertainty // C. Schwindt and J. Zimmermann (eds.). Handbook on Project Management and Scheduling. V. 2. Cham: Springer, 2015. P. 865–874.
14. *Möhring R. H.* Minimizing costs of resource requirements in project networks subject to a fixed completion time // Oper. Res. 1984. V. 32. No. 1. P. 89–120.
15. *Романова А. А.* Минимизация стоимости расписания проекта с возобновимыми ресурсами переменной стоимости // Материалы XII Междунар. школы-симпозиума АМУР. Симферополь, 2018. С. 392–396.
16. *Rodrigues S. B. and Yamashita D. S.* An exact algorithm for minimizing resource availability costs in project scheduling // Europ. J. Oper. Res. 2010. V. 206. No. 3. P. 562–568.
17. *Fu F.* Integrated scheduling and batch ordering for construction project // Appl. Math. Modelling. 2014. V. 38. No. 2. P. 784–797.
18. *Zoraghi N., Shahsavar A., and Niaki S.* A hybrid project scheduling and material ordering problem: Modeling and solution algorithms // Appl. Soft Computing. 2017. V. 58. P. 700–713.
19. *Kononov A. V. and Lin B. M. T.* On relocation problems with multiple working crews // Discret. Optim. 2006. V. 3. No. 4. P. 366–381.
20. *Sevastyanov S. V., Lin B. M. T., and Huang H.-L.* Tight complexity analysis of the relocation problem with arbitrary release dates // Theor. Comput. Sci. 2011. V. 412. No. 35. P. 4536–4544.
21. *Kaplan E. H.* Relocation models for public housing redevelopment programs // Environment and Planning B: Urban Analytics and City Science. 1986. V. 13. No. 1. P. 5–19.
22. *Kaplan E. H. and Amir A.* A fast feasibility test for relocation problems // Europ. J. Oper. Res. 1988. V. 35. No. 2. P. 201–205.
23. *Hanzálek Z. and Šůcha P.* Time symmetry of resource constrained project scheduling with general temporal constraints and take-give resources // Ann. Oper. Res. 2017. V. 248. P. 209–237.
24. *Okubo H., Miyamoto T., Yoshida S., et al.* Project scheduling under partially renewable resources and resource consumption during setup operations // Computers & Industrial Engineering. 2015. V. 83. P. 91–99.
25. *Watermeyer K. and Zimmermann J.* A branch-and-bound procedure for the resource-constrained project scheduling problem with partially renewable resources and general temporal constraints // OR Spectrum. 2020. V. 42. P. 427–460.
26. *Hartmann S. and Briskorn D.* An updated survey of variants and extensions of the resource-constrained project scheduling problem // Europ. J. Oper. Res. 2022. V. 297. No. 1. P. 1–14.
27. Handbook on Project Management and Scheduling. C. Schwindt and J. Zimmermann (eds). Cham: Springer, 2015. 1401 p.
28. *Gu H., Schutt A., Stuckey P. J., et al.* Exact and heuristic methods for the resource-constrained net present value problem // C. Schwindt and J. Zimmermann (eds). Handbook on Project Management and Scheduling. V. 1. Cham: Springer, 2015. P. 299–318.
29. *Leyman P. and Vanhoucke M.* A new scheduling technique for the resource constrained project scheduling problem with discounted cash flows // Intern. J. Production Res. 2015. V. 53. No. 9. P. 2771–2786.
30. *Thiruvady D., Wallace M., Gu H., and Schutt A.* A lagrangian relaxation and ACO hybrid for resource constrained project scheduling with discounted cash flows // J. Heuristics. 2014. V. 20. P. 643–676.

31. *Vanhoucke M.* A scatter search heuristic for maximising the net present value of a resource-constrained project with fixed activity cash flows // Intern. J. Production Res. 2010. V. 48. No. 7. P. 1983–2001.
32. *Fink A. and Homberger J.* An ant-based coordination mechanism for resource-constrained project scheduling with multiple agents and cash flow objective // Flex. Serv. Manuf. J. 2013. V. 25. P. 94–121.
33. *Leyman P. and Vanhoucke M.* Capital- and resource-constrained project scheduling with net present value optimization // Europ. J. Oper. Res. 2017. V. 256. No. 3. P. 757–776.
34. *Leyman P., Van Driessche N., Vanhoucke M., and De Causmaecker P.* The impact of solution representations on heuristic net present value optimization in discrete time/cost trade-off project scheduling with multiple cash flow and payment models // Computers & Oper. Res. 2019. V. 103. P. 184–197.
35. *Leyman P. and Vanhoucke M.* Payment models and net present value optimization for resource constrained project scheduling // Computers & Industrial Engineering. 2016. V. 91. P. 139–153.
36. *Shahsavar M., Niaki S. T. A., and Naja A. A.* An efficient genetic algorithm to maximize net present value of project payments under inflation and bonus–penalty policy in resource investment problem // Adv. Engineering Software. 2010. V. 41. No. 7. P. 1023–1030.
37. *Waligóra G.* Discrete-continuous project scheduling with discounted cash inflows and various payment models — a review of recent results // Ann. Oper. Res. 2014. V. 213. P. 319–340.
38. *Tirkolaee E. B., Goli A., Hematian M., et al.* Multi-objective multi-mode resource constrained project scheduling problem using pare-to-based algorithms // Computing. 2019. V. 101. No. 11. P. 547–570.
39. *Khoshjahan Y., Najafi A. A., and Afshar-Nadjafi B.* Resource constrained project scheduling problem with discounted earliness-tardiness penalties: Mathematical modeling and solving procedure // Computers & Industrial Engineering. 2013. V. 66. No. 2. P. 293–300.
40. *Malakh S. A. and Servakh V. V.* The problem of planning investment projects with lending // LNCS. 2024. V. 14766. P. 187–198.

REFERENCES

1. *Fazar W.* The origin of PERT. The Controller, 1962, no. 30, pp. 598–621.
2. *Kelley J. E.* Critical-path planning and scheduling: Mathematical basis. Oper. Res., 1961, vol. 9, no. 3, pp. 296–320.
3. *Alan A., Pritsker B., Watters L. J., and Wolfe P. M.* Multiproject scheduling with limited resources: A zero-one programming approach. Management Science, 1969, vol. 16, no. 1, pp. 93–108.
4. *Blazewicz J., Lenstra J. K., and Rinnooy Kan A. H. G.* Scheduling subject to resource constraints: classification and complexity. Discr. Appl. Math., 1983, vol. 5, no. 1, pp. 11–24.
5. *Russell A. H.* Cash flows in networks. Management Science, 1970, vol. 16, no. 5, pp. 357–373.
6. *Servakh V. V.* A dynamic algorithm for some project management problems. Proc. Int. Workshop Discrete Optimization Methods in Scheduling and Computer-Aided Design (Minsk, September 5–6, 2000). Minsk, Inst. Eng. Cybern. NAS Belarus, 2000, pp. 90–92.
7. *Servakh V. V. and Shcherbinina T. A.* O slozhnosti odnoy zadachi kalendarnogo planirovaniya so skladiruemymi resursami [Complexity of some project scheduling problem with non-renewable resources]. Vestnik NSU. Ser. Matematika, Mekhanika, Informatika, 2008, vol. 8, no. 3, pp. 105–112. (in Russian)
8. *Martynova E. A. and Servakh V. V.* On scheduling credited projects. Autom. Remote Control, 2012, vol. 73, no. 3, pp. 508–516.

9. *Kazakovtseva E. A. and Servakh V. V.* Complexity of the project scheduling problem with credits. J. Appl. Industr. Math., 2015, vol. 9, no. 4, pp. 489–496.
10. *Gimadi E. Kh., Zalyubovskiy V. V., and Sevast'yanov S. V.* Polinomial'naya razreshimost' zadach kalendarnogo planirovaniya so skladiruemymi resursami i direktivnymi srokami [Polynomial solvability of scheduling problems with storable resources and directive deadlines]. Diskretn. Analiz i Issled. Oper., 2000, ser. 2, vol. 7, no. 1, pp. 9–34. (in Russian)
11. *Gimadi E. Kh., Goncharov E. N., and Shtepa A. A.* Bystryy algoritm vychisleniya nizhney otsenki dlya resheniya zadachi resursno-kalendarnogo planirovaniya s testirovaniem na primerakh biblioteki PSPLIB [A fast algorithm for finding a lower bound of the solution of the resource-constrained project scheduling problem tested on PSPLIB instances]. Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN, 2021, vol. 27, no. 1, pp. 22–36. (in Russian)
12. *Goncharov E. N.* A local search algorithm for the resource-constrained project scheduling problem. J. Appl. Industr. Math., 2022, vol. 16, no. 4, pp. 672–683.
13. *Hazir Ö., Haouari M., and Erel E.* Robust optimization for the discrete time-cost tradeoff problem with cost uncertainty. C. Schwindt and J. Zimmermann (eds.). Handbook on Project Management and Scheduling, vol. 2, Cham, Springer, 2015, pp. 865–874.
14. *Möhring R. H.* Minimizing costs of resource requirements in project networks subject to a fixed completion time. Oper. Res., 1984, vol. 32, no. 1, pp. 89–120.
15. *Romanova A. A.* Minimizatsiya stoimosti raspisaniya proekta s vozobnovimymi resursami peremennoy stoimosti [Minimizing the schedule cost of a project with renewable resources of variable cost]. Proc. XII Intern. Conf. AMUR, Simferopol, 2018, pp. 392–396. (in Russian)
16. *Rodrigues S. B. and Yamashita D. S.* An exact algorithm for minimizing resource availability costs in project scheduling. Europ. J. Oper. Res., 2010, vol. 206, no. 3, pp. 562–568.
17. *Fu F.* Integrated scheduling and batch ordering for construction project. Appl. Math. Modelling, 2014, vol. 38, no. 2, pp. 784–797.
18. *Zoraghi N., Shahsavar A., and Niaki S.* A hybrid project scheduling and material ordering problem: Modeling and solution algorithms. Appl. Soft Computing, 2017, vol. 58, pp. 700–713.
19. *Kononov A. V. and Lin B. M. T.* On relocation problems with multiple working crews. Discret. Optim., 2006, vol. 3, no. 4, pp. 366–381.
20. *Sevastyanov S. V., Lin B. M. T., and Huang H.-L.* Tight complexity analysis of the relocation problem with arbitrary release dates. Theor. Comput. Sci., 2011, vol. 412, no. 35, pp. 4536–4544.
21. *Kaplan E. H.* Relocation models for public housing redevelopment programs. Environment and Planning B: Urban Analytics and City Science, 1986, vol. 13, no. 1, pp. 5–19.
22. *Kaplan E. H. and Amir A.* A fast feasibility test for relocation problems. Europ. J. Oper. Res., 1988, vol. 35, no. 2, pp. 201–205.
23. *Hanzálek Z. and Šůcha P.* Time symmetry of resource constrained project scheduling with general temporal constraints and take-give resources. Ann. Oper. Res., 2017, vol. 248, pp. 209–237.
24. *Okubo H., Miyamoto T., Yoshida S., et al.* Project scheduling under partially renewable resources and resource consumption during setup operations. Computers & Industrial Engineering, 2015, vol. 83, pp. 91–99.
25. *Watermeyer K. and Zimmermann J.* A branch-and-bound procedure for the resource-constrained project scheduling problem with partially renewable resources and general temporal constraints. OR Spectrum, 2020, vol. 42, pp. 427–460.
26. *Hartmann S. and Briskorn D.* An updated survey of variants and extensions of the resource-constrained project scheduling problem. Europ. J. Oper. Res., 2022, vol. 297, no. 1, pp. 1–14.

27. Handbook on Project Management and Scheduling. C. Schwindt and J. Zimmermann (eds). Cham, Springer, 2015. 1401 p.

28. *Gu H., Schutt A., Stuckey P. J., et al.* Exact and heuristic methods for the resource-constrained net present value problem. C. Schwindt and J. Zimmermann (eds). Handbook on Project Management and Scheduling, vol. 1, Cham, Springer, 2015, pp. 299–318.

29. *Leyman P. and Vanhoucke M.* A new scheduling technique for the resource constrained project scheduling problem with discounted cash flows. Intern. J. Production Res., 2015, vol. 53, no. 9, pp. 2771–2786.

30. *Thiruvady D., Wallace M., Gu H., and Schutt A.* A lagrangian relaxation and ACO hybrid for resource constrained project scheduling with discounted cash flows. J. Heuristics, 2014, vol. 20, pp. 643–676.

31. *Vanhoucke M.* A scatter search heuristic for maximising the net present value of a resource-constrained project with fixed activity cash flows. Intern. J. Production Res., 2010, vol. 48, no. 7, pp. 1983–2001.

32. *Fink A. and Homberger J.* An ant-based coordination mechanism for resource-constrained project scheduling with multiple agents and cash flow objective. Flex. Serv. Manuf. J., 2013, vol. 25, pp. 94–121.

33. *Leyman P. and Vanhoucke M.* Capital- and resource-constrained project scheduling with net present value optimization. Europ. J. Oper. Res., 2017, vol. 256, no. 3, pp. 757–776.

34. *Leyman P., Van Driessche N., Vanhoucke M. and De Causmaecker P.* The impact of solution representations on heuristic net present value optimization in discrete time/cost trade-off project scheduling with multiple cash flow and payment models. Computers & Oper. Res., 2019, vol. 103, pp. 184–197.

35. *Leyman P. and Vanhoucke M.* Payment models and net present value optimization for resource constrained project scheduling. Computers & Industrial Engineering, 2016, vol. 91, pp. 139–153.

36. *Shahsavar M., Niaki S. T. A., and Naja A. A.* An efficient genetic algorithm to maximize net present value of project payments under inflation and bonus–penalty policy in resource investment problem. Adv. Engineering Software, 2010, vol. 41, no. 7, pp. 1023–1030.

37. *Waligóra G.* Discrete-continuous project scheduling with discounted cash inflows and various payment models — a review of recent results. Ann. Oper. Res., 2014, vol. 213, pp. 319–340.

38. *Tirkolaee E. B., Goli A., Hematian M., et al.* Multi-objective multi-mode resource constrained project scheduling problem using pare-to-based algorithms. Computing, 2019, vol. 101, no. 11, pp. 547–570.

39. *Khoshjahan Y., Najafi A. A., and Afshar-Nadjafi B.* Resource constrained project scheduling problem with discounted earliness-tardiness penalties: Mathematical modeling and solving procedure. Computers & Industrial Engineering, 2013, vol. 66, no. 2, pp. 293–300.

40. *Malakh S. A. and Servakh V. V.* The problem of planning investment projects with lending. LNCS, 2024, vol. 14766, pp. 187–198.