Секция 6

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ НАДЁЖНОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ И УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

УДК 519.718

## НЕНАДЁЖНОСТЬ СХЕМ В БАЗИСЕ РОССЕРА — ТУРКЕТТА[1]

М. А. Алехина, О. Ю. Барсукова

Рассматривается реализация функций трёхзначной логики схемами из ненадёжных функциональных элементов в базисе Россера — Туркетта. Предполагается, что все базисные элементы независимо друг от друга переходят в такие неисправные состояния, что любой базисный элемент на любом входном наборе с вероятностью $1-2\varepsilon$ выдаёт правильное значение и с вероятностью, равной $\varepsilon$, может выдать любое из двух неправильных значений. Получены верхние и нижние оценки ненадёжности схем, которые оказались асимптотически равны для функций некоторого класса.

**Ключевые слова:** *функции трёхзначной логики, схема из ненадёжных функциональных элементов, ненадёжность схемы.*

Пусть $n \in \mathbb{N}$, а $P_3$ — множество всех функций трёхзначной логики, т. е. функций $f(x_1,\ldots,x_n) : \{0,1,2\}^n \to \{0,1,2\}$. Обозначим через $\tilde{x}$ набор $(x_1,\ldots,x_n)$.

Рассмотрим реализацию функций из множества $P_3$ схемами из ненадёжных функциональных элементов в базисе Россера — Туркетта $\{0,1,2,J_0(x_1),J_1(x_1),J_2(x_1),$ $\max\{x_1,x_2\},\min\{x_1,x_2\}\}$. Будем считать, что схема из ненадёжных элементов реализует функцию $f(\tilde{x})$, если при поступлении на входы схемы набора $\tilde{a}$ при отсутствии неисправностей в схеме на её выходе появляется значение $f(\tilde{a})$.

Предполагается, что все базисные элементы ненадёжны, переходят в неисправные состояния независимо друг от друга. Базисный элемент с приписанной ему функцией $\varphi(x_1,x_2)$ на любом входном наборе $(a_1,a_2)$, $\varphi(a_1,a_2)=\tau$, с вероятностью $1-2\varepsilon$ ($\varepsilon \in (0,1/4)$) выдаёт значение $\tau \bmod 3$, с вероятностью $\varepsilon$ — значение $(\tau+1) \bmod 3$ и с вероятностью $\varepsilon$ — значение $(\tau+2) \bmod 3$.

Пусть схема $S$ реализует функцию $f(\tilde{x})$, $\tilde{a}$ — произвольный входной набор схемы $S$, $f(\tilde{a})=\tau$. Обозначим через $P_{f(\tilde{a})\neq\tau}(S,\tilde{a})$ вероятность появления ошибки на выходе схемы $S$ при входном наборе $\tilde{a}$. Ясно, что $P_{f(\tilde{a})\neq\tau}(S,\tilde{a}) = P_{\tau+1}(S,\tilde{a}) + P_{\tau+2}(S,\tilde{a})$.

Например, если входной набор $\tilde{a}$ схемы $S$ такой, что $f(\tilde{a})=0$, то вероятность ошибки на этом наборе равна $P_{f(\tilde{a})\neq 0}(S,\tilde{a}) = P_1(S,\tilde{a}) + P_2(S,\tilde{a})$.

*Ненадёжностью схемы* $S$ будем называть число $P(S) = \max\{P_{f(\tilde{a})\neq\tau}(S,\tilde{a})\}$, где максимум берется по всем входным наборам $\tilde{a}$ схемы $S$. Надёжность схемы $S$ равна $1-P(S)$.

Пусть $P_\varepsilon(f) = \inf P(S)$, где инфимум берется по всем схемам $S$ из ненадёжных элементов, реализующим функцию $f$.

Схема $A$ из ненадёжных элементов, реализующая функцию $f$, называется *асимптотически оптимальной по надёжности*, если $P(A) \sim P_\varepsilon(f)$ при $\varepsilon \to 0$.

[1]Работа поддержана грантами РФФИ № 14-01-00273 и 14-01-31360.

Полученную ранее в работе [1] верхнюю оценку ненадёжности удалось доказать, существенно ослабив ограничение на $\varepsilon$ (ранее эта вероятность зависела от $n$ — числа переменных функции, а в теореме 1 её удалось ограничить константой).

**Теорема 1.** Любую функцию $f \in P_3$ можно реализовать такой схемой $D$, что $P(D) \leqslant 6\varepsilon + 126\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0,\ 0{,}001]$.

Из теоремы 1 следует, что любую функцию из $P_3$ можно реализовать схемой, функционирующей с ненадёжностью, асимптотически (при $\varepsilon \to 0$) не больше $6\varepsilon$.

Обозначим через $K(n)$ множество функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(n \geqslant 3)$ из $P_3$, каждая из которых принимает все три значения $0, 1, 2$ и не представима ни в виде $\max\{x_k, g(\tilde{x})\}$, ни в виде $\min\{x_k, g(\tilde{x})\}$ $(k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $g(\tilde{x})$ — произвольная функция из $P_3)$.

Обозначим через $K$ множество $K = \bigcup\limits_{n=3}^{\infty} K(n)$.

Справедлива теорема 2 о нижней оценке ненадёжности, доказательство которой аналогично доказательству теорем о нижних оценках [2, 3].

**Теорема 2.** Пусть функция $f \in K$. Тогда для любой схемы $S$, реализующей $f$, при $\varepsilon \in (0,\ 0{,}001]$ верно неравенство $P(S) \geqslant 6\varepsilon - 16\varepsilon^2 + 12\varepsilon^3$.

**Утверждение 1.** $|K(n)| \geqslant 3^{3^n} - 2n3^{2\cdot 3^{n-1}} - 3 \cdot 2^{3^n}$.

Из утверждения 1 следует, что класс $K$ содержит почти все функции из $P_3$, поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{3^n} - 2n3^{2\cdot 3^{n-1}} - 3 \cdot 2^{3^n}}{3^{3^n}} = 1.$$

Из теоремы 2 следует, что функцию из класса $K$ (содержащего почти все функции множества $P_3$) нельзя реализовать схемой с ненадёжностью, асимптотически (при $\varepsilon \to 0$) не меньше чем $6\varepsilon$. Следовательно, любая схема, удовлетворяющая условиям теоремы 1 и реализующая функцию из класса $K$, является асимптотически оптимальной по надёжности и функционирует с ненадёжностью, асимптотически равной $6\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$.

Таким образом, получаем следующий результат: почти все функции из $P_3$ можно реализовать асимптотически оптимальными по надёжности схемами, функционирующими с ненадёжностью, асимптотически равной $6\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Алехина М. А., Барсукова О. Ю.* О ненадёжности схем, реализующих функции из $P_3$ // Изв. вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2012. № 1(21). С. 57–65.
2. *Алехина М. А.* О ненадёжности схем из ненадёжных функциональных элементов при однотипных константных неисправностях на выходах элементов // Дискретная математика. 1993. Т. 5. Вып. 2. С. 59–74.
3. *Alekhina M. A.* Synthesis and complexity of asymptotically optimal circuits with unreliable gates // Fundamenta Informaticae. 2010. No. 104(3). P. 219–225.