УДК 519.718

О НАДЁЖНОСТИ СХЕМ В БАЗИСЕ ИЗ НЕНАДЁЖНЫХ И АБСОЛЮТНО НАДЁЖНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ[1]

М. А. Алехина, А. Е. Лакомкина

Рассматривается реализация булевых функций схемами в стандартном базисе, содержащем конъюнкцию, дизъюнкцию и инверсию. Предполагается, что некоторые из базисных элементов (например, конъюнктор) абсолютно надёжны, а остальные (инвертор и дизъюнктор) — ненадёжные, с вероятностью $\varepsilon \in (0, 1/2)$ подвержены инверсным неисправностям на выходах. Предполагается, что все ненадёжные элементы схемы переходят в неисправные состояния независимо друг от друга. Получены ответы на вопросы: какова ненадёжность схем, если некоторые из базисных элементов абсолютно надёжны, а другие ненадёжны?

Ключевые слова: *ненадёжные и абсолютно надёжные функциональные элементы, надёжность и ненадёжность схемы, инверсные неисправности на выходах элементов.*

Рассматривается реализация булевых функций схемами в стандартном базисе $\{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}$. Предполагается, что некоторые из базисных элементов абсолютно надёжны, а остальные — ненадёжные, с вероятностью $\varepsilon \in (0, 1/2)$ подвержены инверсным неисправностям на выходах. Эти неисправности характеризуются тем, что в исправном состоянии базисный элемент реализует приписанную ему булеву функцию φ, а в неисправном — функцию $\bar{\varphi}$. Считаем, что схема S, содержащая ненадёжные элементы, реализует булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, если при поступлении на входы схемы двоичного набора a при отсутствии неисправностей в схеме S на её выходе появляется значение $f(a)$. Предполагается, что все ненадёжные элементы схемы переходят в неисправные состояния независимо друг от друга.

Впервые задачу синтеза надёжных схем из ненадёжных функциональных элементов рассматривал Дж. фон Нейман [1]. Он также предполагал, что все базисные элементы с вероятностью $\varepsilon \in (0; 1/2)$ подвержены инверсным неисправностям на выходах и переходят в неисправные состояния независимо друг от друга. Дж. фон Нейман с помощью итерационного метода установил, что любую булеву функцию можно реализовать схемой, вероятность ошибки на выходе которой не больше $c\varepsilon$ (c — положительная, зависящая от рассматриваемого базиса константа). Для повышения надёжности некоторой исходной схемы путём многократного дублирования он использовал схему, реализующую функцию голосования $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$.

Число $P(S)$, равное максимальной вероятности ошибки на выходе схемы S при всевозможных входных наборах схемы, назовем ненадёжностью схемы S; надёжность схемы S равна $1 - P(S)$.

С. В. Яблонский [2] рассматривал задачу синтеза надёжных схем в базисе $\{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1, g(x_1, x_2, x_3)\}$. Он предполагал, что элемент, реализующий функцию голосования g, абсолютно надёжный, а конъюнктор, дизъюнктор и инвертор — ненадёжные, подвержены произвольным неисправностям, ненадёжность каждого из них не больше ε. Им доказано, что для любого $p > 0$ существует алгоритм, который для каждой булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ для любого n строит такую схему S, что сложность схемы $L(S) \lesssim 2^{n-1}/n$, а $P(S) \leqslant p$ (т. е. ненадёжность схемы сколь угодно мала). Такие схемы называют схемами сколь угодно высокой надёжности.

[1]Работа поддержана грантом РФФИ, проект № 14-01-00273.

В отличие от С. В. Яблонского, А. В. Васин [3] предполагал, что все элементы базиса $\{x_1\&x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x_1}\}$ ненадёжны, с вероятностью ε подвержены инверсным неисправностям на выходах, и доказал, что любую функцию можно реализовать такой схемой S, что $P(S) \leqslant 3\varepsilon + 32\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/128]$.

В этой работе (в зависимости от того, какие базисные элементы ненадёжны) получены следующие результаты.

Теорема 1. Пусть конъюнктор и дизъюнктор абсолютно надёжны, а инвертор ненадёжный. Тогда любую функцию можно реализовать такой схемой $S^{(k)}$, что $P(S) \leqslant 4(10\varepsilon^2)^k$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/128]$, $k \in \mathbb{N}$.

Из теоремы 1 следует, что любую функцию можно реализовать схемой сколь угодно высокой надёжности. Кроме того, любая неконстантная монотонная функция $f \in [x_1\&x_2, x_1 \vee x_2]$, т. е. может быть представлена в виде ДНФ, в которой нет отрицаний. Поэтому такую функцию f можно реализовать абсолютно надёжно.

Теорема 2. Пусть конъюнктор абсолютно надёжный, а инвертор и дизъюнктор ненадёжные; или дизъюнктор абсолютно надёжный, а инвертор и конъюнктор ненадёжные. Тогда любую функцию можно реализовать такой схемой S, что $P(S) \leqslant \varepsilon + 10\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/128]$.

Теорема 3. Пусть инвертор абсолютно надёжный, а конъюнктор и дизъюнктор ненадёжные. Тогда любую функцию можно реализовать такой схемой S, что $P(S) \leqslant 3\varepsilon + 32\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/128]$.

Теорема 4. Пусть конъюнктор и инвертор абсолютно надёжные, а дизъюнктор ненадёжный; или дизъюнктор и инвертор абсолютно надёжные, а конъюнктор ненадёжный. Тогда любую функцию можно реализовать абсолютно надёжной схемой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Von Neuman J.* Probabilistic logics and the synthesis of reliable organisms from unreliable components // Automata Studies / eds. C. Shannon and J. McCarthy. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1956. P. 329–378. (Рус. пер.: Автоматы. М.: ИЛ, 1956. С. 68–139.)
2. *Яблонский С. В.* Асимптотически наилучший метод синтеза надежных схем из ненадежных элементов // Banach Center. 1982. No. 7. P. 11–19.
3. *Васин А. В.* Об асимптотически оптимальных схемах в базисе $\{x\&y, x \vee y, \bar{x}\}$ при инверсных неисправностях на выходах элементов // Изв. вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2008. №4. С. 3–17.