

УДК 519.718

О ПОЛНЫХ БАЗИСАХ С КОЭФФИЦИЕНТОМ НЕНАДЁЖНОСТИ <sup>1</sup>

А. В. Васин

Рассматривается задача синтеза асимптотически оптимальных по надёжности схем, реализующих булевы функции, при инверсных неисправностях на выходах элементов в некоторых полных базисах. Доказано, что в рассматриваемых базисах почти все булевы функции можно реализовать асимптотически оптимальными по надёжности схемами, которые функционируют с ненадёжностью, асимптотически равной  $5\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , где  $\varepsilon$  — вероятность инверсной неисправности на выходе базисного элемента.

**Ключевые слова:** ненадёжные функциональные элементы, асимптотически оптимальные по надёжности схемы, инверсные неисправности на выходах элементов, синтез схем из ненадёжных элементов.

Рассматривается реализация булевых функций схемами [1] из ненадёжных функциональных элементов в произвольном полном конечном базисе  $B$ . Предполагаем, что все элементы схемы независимо друг от друга с вероятностью  $\varepsilon \in (0, 1/2)$  подвержены инверсным неисправностям на выходах. Эти неисправности характеризуются тем, что в исправном состоянии функциональный элемент реализует приписанную ему булеву функцию  $\psi$ , а в неисправном — функцию  $\bar{\psi}$ . Считаем, что схема  $S$  из ненадёжных элементов реализует булеву функцию  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , если при поступлении на входы схемы двоичного набора  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  при отсутствии неисправностей на выходе схемы  $S$  появляется значение  $f(a)$ .

Ненадёжностью  $P(S)$  схемы  $S$  назовем максимальную вероятность ошибки на выходе схемы  $S$  при всевозможных входных наборах схемы. Надёжностью схемы  $S$  равна  $1 - P(S)$ . Пусть  $P_\varepsilon(f) = \inf P(S)$ , где инфимум берется по всем схемам  $S$  из ненадёжных элементов, реализующим булеву функцию  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Схема  $A$  из ненадёжных элементов, реализующая функцию  $f$ , называется асимптотически оптимальной (асимптотически наилучшей) по надёжности, если  $P(A) \sim P_\varepsilon(f)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Число  $k$  будем называть коэффициентом ненадёжности полного базиса, если все функции в этом базисе можно реализовать схемами с ненадёжностью, асимптотически не больше  $k\varepsilon$  (при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ), и найдётся функция  $f$ , которую нельзя реализовать схемой с ненадёжностью, асимптотически меньше чем  $k\varepsilon$  (при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ).

В [2] обосновано, что  $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Эта работа посвящена полным базисам с коэффициентом ненадёжности  $k = 5$ .

Пусть

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \{0, 1, \bar{x}_1\} \cup \bigcup_{k=2}^{\infty} \{\& x_i\}, \\ \Psi_2 &= \{0, 1\} \cup \bigcup_{k=2}^{\infty} \{\& x_i\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^k \{\bar{x}_j \cdot \& x_i\}, \\ \Psi_1^* &= \{0, 1, \bar{x}_1\} \cup \bigcup_{k=2}^{\infty} \{\bigvee x_i\}, \\ \Psi_2^* &= \{0, 1\} \cup \bigcup_{k=2}^{\infty} \{\bigvee x_i\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^k \{\bar{x}_j \vee \bigvee x_i\}.\end{aligned}$$

<sup>1</sup>Работа поддержана грантом РФФИ, проекты № 14-01-31360 и 14-01-00273.

С. И. Аксенов сформулировал следующую теорему.

**Теорема 1** [3]. Пусть  $B$  — полный базис и  $B \not\subseteq \Psi_1$ ,  $B \not\subseteq \Psi_2$ ,  $B \not\subseteq \Psi_1^*$ ,  $B \not\subseteq \Psi_2^*$ . Тогда любую булеву функцию  $f$  можно реализовать схемой  $S$  над  $B$  с ненадёжностью  $P(S) \leq 4\varepsilon + c\varepsilon^2$  при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ , где константы  $c > 0$ ,  $\varepsilon_0 \in (0, 1/2)$  зависят от базиса.

Из теоремы 1 следует: если полный базис  $B$  удовлетворяет условиям  $B \not\subseteq \Psi_1$ ,  $B \not\subseteq \Psi_2$ ,  $B \not\subseteq \Psi_1^*$ ,  $B \not\subseteq \Psi_2^*$ , то его коэффициент ненадёжности  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Однако теорема 1 — только верхняя оценка ненадёжности, которая не даёт представления о коэффициенте ненадёжности базисов  $B$ , удовлетворяющих  $B \subseteq \Psi_1$ , или  $B \subseteq \Psi_2$ , или  $B \subseteq \Psi_1^*$ , или  $B \subseteq \Psi_2^*$ .

С. И. Аксеновым в [4] получена верхняя оценка ненадёжности схем в произвольном полном конечном базисе при инверсных неисправностях на выходах элементов. Он доказал, что существуют такие константы  $\varepsilon_0 \in (0, 1/2)$  и  $d > 0$ , зависящие от базиса, что любую булеву функцию  $f$  можно реализовать схемой  $S$  с ненадёжностью  $P(S) \leq 5\varepsilon + d\varepsilon^2$  при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ .

В работе [5] явно найдены константы  $d$ ,  $\varepsilon_0$  и доказана теорема 2.

**Теорема 2** [5]. В произвольном полном конечном базисе  $B$  любую булеву функцию  $f$  можно реализовать схемой  $A$  с ненадёжностью  $P(A) \leq 5\varepsilon + 182\varepsilon^2$  при  $\varepsilon \leq 1/960$ .

Теорема 2 справедлива и для базисов  $B$ , удовлетворяющих условию  $B \subseteq \Psi_1$ , или  $B \subseteq \Psi_2$ , или  $B \subseteq \Psi_1^*$ , или  $B \subseteq \Psi_2^*$ .

Автором в [2] решена задача построения асимптотически оптимальных по надёжности схем при инверсных неисправностях на выходах элементов в полных базисах из трёхвыходовых элементов, доказаны нижние оценки ненадёжности для базисов

$$\begin{aligned} B &\subset \{0, 1, \bar{x}_1, x_1 \& x_2, x_1 \& x_2 \& x_3\}, \\ B &\subset \{0, 1, x_1 \& x_2, x_1 \& x_2 \& x_3, \bar{x}_1 \& x_2, \bar{x}_1 \& x_2 \& x_3\}, \\ B &\subset \{0, 1, \bar{x}_1, x_1 \vee x_2, x_1 \vee x_2 \vee x_3\}, \\ B &\subset \{0, 1, x_1 \vee x_2, x_1 \vee x_2 \vee x_3, \bar{x}_1 \vee x_2, \bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3\} \end{aligned}$$

и показано, что коэффициент ненадёжности указанных базисов равен 5. Нетрудно видеть, что эти базисы являются подмножествами множеств  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$ ,  $\Psi_1^*$ ,  $\Psi_2^*$ .

Поэтому можно предположить, что в базисах  $B$ , удовлетворяющих условию  $B \subseteq \Psi_1$ , или  $B \subseteq \Psi_2$ , или  $B \subseteq \Psi_1^*$ , или  $B \subseteq \Psi_2^*$ , коэффициент ненадёжности базиса также равен 5. Для проверки справедливости последней гипотезы необходимо доказать нижние оценки ненадёжности для этих базисов.

Обозначим  $K(n)$  — множество булевых функций  $f$ , зависящих от переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , не представимых в виде  $(x_i^a \& g(\tilde{x}))^b$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $a, b \in \{0, 1\}$ ,  $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , и сформулируем теорему о нижних оценках ненадёжности для названных базисов.

**Теорема 3.** Пусть  $B$  — полный конечный базис и  $B \subset \Psi_1$ , или  $B \subset \Psi_2$ , или  $B \subset \Psi_1^*$ , или  $B \subset \Psi_2^*$ . Пусть функция  $f \in K(n)$  и  $S$  — любая схема, реализующая  $f$ . Тогда  $P(S) \geq 5\varepsilon(1 - \varepsilon)^4$  при  $\varepsilon \in (0, 1/960]$ .

Из теорем 2 и 3 следует, что в любом из полных базисов  $B$ , таких, что  $B \subset \Psi_1$ ,  $B \subset \Psi_2$ ,  $B \subset \Psi_1^*$ ,  $B \subset \Psi_2^*$ , для почти всех функций асимптотически оптимальные по надёжности схемы функционируют с ненадёжностью, асимптотически равной  $5\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Следовательно, коэффициент ненадёжности базисов  $B$ , удовлетворяющих условию  $B \subseteq \Psi_1$ , или  $B \subseteq \Psi_2$ , или  $B \subseteq \Psi_1^*$ , или  $B \subseteq \Psi_2^*$ , равен 5.

Таким образом, если учесть теоремы 2 и 3 и добавить теорему С. И. Аксенова из работы [3], то получим теорему 4.

**Теорема 4.** Коэффициент ненадёжности полного базиса  $B$  равен 5 тогда и только тогда, когда  $B \subset \Psi_1$ , или  $B \subset \Psi_2$ , или  $B \subset \Psi_1^*$ , или  $B \subset \Psi_2^*$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Лупанов О. Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.
2. *Васин А. В.* Асимптотически оптимальные по надёжности схемы в полных базисах из трехходовых элементов: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Пенза, 2010. 100 с.
3. *Аксенов С. И.* О надёжности схем в широком классе полных базисов // Материалы IX Междунар. семинара «Дискретная математика и её приложения», посвящённого 75-летию со дня рождения акад. О. Б. Лупанова (Москва, МГУ, 18–23 июня 2007 г.) / под ред. О. М. Касим-Заде. М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2007. С. 55–56.
4. *Аксенов С. И.* О надёжности схем над произвольной полной системой функций при инверсных неисправностях на выходах элементов // Изв. вузов. Поволжский регион. Естественные науки. 2005. № 6(21). С. 42–55.
5. *Алехина М. А., Васин А. В.* О надёжности схем в базисах, содержащих функции не более чем трёх переменных // Ученые записки Казанского государственного университета. Сер. Физико-математические науки. 2009. Т. 151. Кн. 2. С. 25–35.