то состояние $S = S_0\ S_1\ \ldots\ S_{q-1}$ лежит в цикле графа функционирования системы с параметрами

$$n = \sum_{i=0}^{q-1} n_i, \quad k = k_0 + \sum_{i=0}^{q-1} n_i - n_0, \quad T = T_0 + \sum_{i=0}^{q-1} W(S_i) - W(S_0)$$

и является состоянием с короткими сериями.

Теорема 5. Пусть состояние S' лежит в цикле графа функционирования системы с параметрами n', k', T' и отображением A' и выполнено условие $W(S) = W(A'(S'))$. Тогда состояние

$$S = \underbrace{S'\ S'\ \ldots\ S'\ S'}_{m}$$

лежит в цикле графа функционирования системы с параметрами

$$n = mn', \quad k = k' + ln', \quad T = T' + lW(S')$$

и является состоянием с короткими сериями для всех $0 < l < m$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Евдокимов А. А., Лиховидова Е. О.* Дискретная модель генной сети циркулянтного типа с пороговыми функциями // Вестник Томского государственного университета. 2008. №2. С. 18–21.
2. *Быков И. С.* Функционирование дискретных моделей генных сетей циркулянтного типа с пороговыми функциями // Материалы IX молодежной научн. школы по дискретной математике и её приложениям. МГУ, 2013. С. 26–31.

УДК 519.17

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ Т-НЕПРИВОДИМОГО РАСШИРЕНИЯ ДЛЯ МНОГОУГОЛЬНЫХ ОРГРАФОВ

А. В. Гавриков

Предложен полиномиальный алгоритм построения одного из Т-неприводимых расширений для многоугольного орграфа. Приведено доказательство корректности алгоритма.

Ключевые слова: *многоугольный орграф, отказоустойчивость дискретных систем, Т-неприводимое расширение.*

Под *ориентированным графом* (или *орграфом*) понимается пара $G = (V, \alpha)$, где V — конечное непустое множество вершин; α — отношение на множестве V (дуги орграфа). *Вложение* орграфа $G = (V, \alpha)$ в орграф $H = (W, \beta)$ — это взаимно однозначное отображение $\varphi : V \to W$, такое, что $(\forall u, v \in V)((u, v) \in \alpha \Rightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in \beta)$. При этом говорят, что орграф G вкладывается в орграф H. *Расширение* орграфа $G = (V, \alpha)$ — это орграф $H = (W, \beta)$, где $|W| = |V| + 1$, такой, что орграф G вкладывается в каждый максимальный подграф орграфа H [1]. *Тривиальное расширение* (ТР) орграфа G — это соединение $G + w$ орграфа G с вершиной w, обозначается через ТР(G). *Т-неприводимое расширение* (ТНР) орграфа G — это расширение орграфа G, полученное удалением максимального множества дуг из ТР(G) [2].

Ориентированные графы представляют собой математические модели дискретных систем [3]. Вопросы отказоустойчивости на данный момент сформулированы в терминах теории графов [3, 4]. Конструкции оптимальных расширений, которыми являются

Т-неприводимые расширения, широко применяются в диагностике дискретных систем и криптографии [5].

В общем случае задача определения того, является ли орграф H расширением для орграфа G, является $\mathbb{NP}$-полной, а задача поиска ТНР по заданному орграфу G не принадлежит классу $\mathbb{NP}$ [6].

Контур в орграфе — это простой циклический путь. Контур, состоящий из n вершин, обозначим через $C_n = v_0v_1 \ldots v_{n-1}v_0$, считая v_0 выбранной начальной вершиной. *Многоугольным орграфом порядка* n называется всякий орграф M, полученный переориентацией некоторых дуг контура C_n [7]. Далее все арифметические операции над индексами вершин в многоугольных орграфах будем производить по модулю n.

Следующий алгоритм строит одно из ТНР для многоугольного орграфа.

Алгоритм

Дан многоугольный орграф $M = (Z, \gamma)$. Построим его ТНР следующим образом:

1. Добавим к M вершину w.

2. Для каждой вершины $v \in Z$ добавим дуги следующим образом:

— если $v \in Z$ является источником, то добавим дугу (v, w);
— если $v \in Z$ является стоком, то добавим дугу (w, v);
— если $v \in Z$ такова, что $d^+(v) = 1$ и $d^-(v) = 1$, то добавим дуги (v, w) и (w, v).

Обозначим построенный орграф $H_0 = (W, \beta_0)$. Положим $k = 0$.

3. Рассматриваем вершины многоугольного орграфа M, имеющие степени исхода и захода 1, в порядке возрастания их индексов.

Пусть, для определённости, вершины пронумерованы таким образом, что для вершины $v_i \in Z$, имеющей степени исхода и захода 1, существуют $v_{i-1}, v_{i+1} \in Z$, такие, что $(v_{i-1}, v_i), (v_i, v_{i+1}) \in \gamma$. По построению в п. 2 алгоритма вершина v_i соединена с вершиной w дугами (v_i, w) и (w, v_i) (рис. 1). Пунктирная линия на рис. 1, соединяющая две вершины, означает, что между ними может быть как одна дуга в любом из направлений, так и две дуги, если одна из инцидентных вершин является вершиной w. Возможны следующие случаи:

С л у ч а й A: многоугольный орграф M вкладывается в орграф $H_k - v_{i-1} - (w, v_i)$. Строим орграф $H_{k+1} = (W, \beta_{k+1})$, такой, что $H_{k+1} = H_k - (w, v_i)$, $\beta_{k+1} = \beta_k - (w, v_i)$. Далее алгоритм продолжает работу с орграфом H_{k+1}, переходим к следующей вершине в п. 3.

С л у ч а й B: многоугольный орграф M вкладывается в орграф $H_k - v_{i+1} - (v_i, w)$. Строим орграф $H_{k+1} = (W, \beta_{k+1})$, такой, что $H_{k+1} = H_k - (v, w)$, $\beta_{k+1} = \beta_k - (v_i, w)$. Далее алгоритм продолжает работу с орграфом H_{k+1}, переходим к следующей вершине в п. 3.

С л у ч а й C: орграф M не вкладывается ни в орграф $H_k - v_{i-1} - (w, v_i)$, ни в орграф $H_k - v_{i+1} - (v_i, w)$. Не производим никаких действий, переходим к следующей вершине в п. 3.

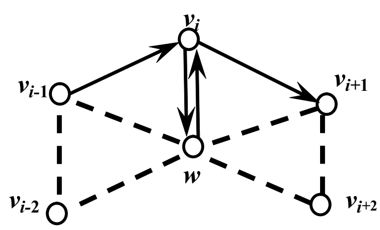

Рис. 1. Иллюстрация п. 3 алгоритма

Уточнение: если в многоугольном орграфе M каждая вершина является либо источником, либо стоком, то п. 3 алгоритма пропускается.

После того как все вершины в п. 3 рассмотрены, алгоритм завершает свою работу. Построенный из орграфа H_0 орграф H_k, где k — количество дуг, удалённых в п. 3 алгоритма, является ТНР для многоугольного орграфа M.

Асимптотическая сложность алгоритма составляет $\mathrm{O}(n^3)$, где $n = |Z|$ — количество вершин в многоугольном орграфе M.

Доказана теорема о корректности предложенного алгоритма. Алгоритм позволяет также получить верхние и нижние оценки количества добавленных дуг в ТНР для многоугольных орграфов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, Физматлит, 1997. 326 с.
2. *Курносова С. Г.* Т-неприводимые расширения для некоторых классов графов //Теоретические проблемы информатики и её приложений: сб. науч. тр. / под ред. проф. А. А. Сытника. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. С. 113–125.
3. *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing systems //IEEE Trans. Comput. 1976. V. C-26. No. 9. P. 875–884.
4. *Абросимов М. Б.* Некоторые вопросы о минимальных расширениях графов // Известия Саратовского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2006. Т. 6. Вып. 1/2. С. 86–91.
5. *Салий В. Н.* Доказательства с нулевым разглашением в задачах о расширениях графов // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2003. № 6. С. 63–65.
6. *Абросимов М. Б.* О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Матем. заметки. 2010. Т. 88. № 5. С. 643–650.
7. *Салий В. Н.* Упорядоченное множество связных частей многоугольного графа //Известия Саратовского университета. 2013. Т. 13. Вып. 2. С. 44–51.

УДК 519.1

ОБ АТТРАКТОРАХ В КОНЕЧНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ДВОИЧНЫХ ВЕКТОРОВ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ОРИЕНТАЦИЯМИ ПАЛЬМ

А. В. Жаркова

Описываются аттракторы в конечных динамических системах двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями пальм, определяется свойство принадлежности состояния аттрактору. Состояниями динамической системы являются все возможные ориентации данной пальмы, а эволюционная функция у данной ориентации пальмы переориентирует все дуги, входящие в стоки.

Ключевые слова: *аттрактор, двоичный вектор, конечная динамическая система, пальма, сверхстройное (звездообразное) дерево.*

Под *конечной динамической системой* понимается пара $(S,\ \delta)$, где S — конечное непустое множество, элементы которого называются *состояниями системы*, $\delta : S \to S$ — отображение множества состояний в себя, называемое *эволюционной функцией системы*. Каждой конечной динамической системе сопоставляется карта, представляющая собой орграф с множеством вершин S и дугами, проведёнными из