

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрисимов М. Б. О нижней оценке числа ребер минимального реберного 1-расширения сверхстройного дерева. // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. 2011. Т. 11. Сер. Математика. Механика. Информатика. Вып. 3. Ч. 2. С. 111–117.
2. Богомолов А. М., Салий В. Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, 1997. 368 с.

УДК 519.6

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЛОКАЛЬНОЙ ПРИМИТИВНОСТИ
НЕПРИМИТИВНЫХ ОРГРАФОВ

С. Н. Кяжин

В некоторых коммуникационных системах, моделируемых неотрицательными матрицами, важные свойства достигаются, если положительны определённые подматрицы степеней данной матрицы. В связи с этим известные понятия примитивности и экспонента матрицы (орграфа) обобщены до понятий локальной примитивности и локальных экспонентов матрицы (орграфа). Представлены достаточные условия локальной примитивности и оценки локальных экспонентов для непримитивных орграфов.

Ключевые слова: примитивная матрица, примитивный граф, локальная примитивность, локальный экспонент.

Введение

Для объектов некоторых коммуникационных систем, моделируемых неотрицательными матрицами (орграфами), некоторые важные свойства достигаются, если положительны их подматрицы (подграфы являются полными). В связи с этим в [1] известные понятия примитивности и экспонента матрицы (орграфа) обобщены до понятий локальной примитивности и локальных экспонентов матрицы (орграфа).

Обозначим $N_n = \{1, \dots, n\}$, где n — натуральное число; $I = \{i_1, \dots, i_k\}$, $J = \{j_1, \dots, j_r\}$, $\emptyset \neq I \subseteq N_n$, $\emptyset \neq J \subseteq N_n$. Пусть Γ есть n -вершинный орграф, A — матрица смежности вершин графа Γ , $A(I \times J)$ — её подматрица размера $k \times r$, $0 < k, r \leq n$, полученная из A вычёркиванием строк с номерами $i \notin I$ и столбцов с номерами $j \notin J$.

Матрица A называется $I \times J$ -примитивной ($i \times j$ -примитивной при $I = \{i\}$, $J = \{j\}$), если существует натуральное число γ , такое, что матрица $A^t(I \times J)$ положительна при любом $t \geq \gamma$. Наименьшее такое число γ называется $I \times J$ -экспонентом ($i \times j$ -экспонентом при $I = \{i\}$, $J = \{j\}$) матрицы A , обозначается $I \times J$ -exp A ($i \times j$ -exp A).

Орграф Γ называется $I \times J$ -примитивным, если и только если матрица A является $I \times J$ -примитивной, при этом соответствующие $I \times J$ -экспоненты матрицы A и графа Γ равны. Некоторые условия $I \times J$ -примитивности матриц (орграфов) получены в [1]. В работе развиваются и обобщаются результаты работы [1]. Приведены условия $I \times J$ -примитивности матрицы (орграфа), не обязательно являющейся примитивной.

1. Достаточные условия $I \times J$ -примитивности орграфов

Используем определения и обозначения работы [1]. Путь в Γ из i в j , проходящий через некоторые вершины множества Y , назовем Y -путём из i в j . Сильносвязный подграф $\tilde{U}$ (множество его вершин обозначается U) орграфа Γ назовём i, j -связываю-

щим, если в Γ существует U -путь из i в j . В частности, сильносвязный орграф есть i, j -связывающий орграф при любых i, j .

Связный циклический орграф Γ является $I \times J$ -примитивным, если и только если он $i \times j$ -примитивный для любой пары вершин $(i, j) \in I \times J$, при этом $I \times J$ -exp $\Gamma = \max_{(i,j) \in I \times J} i \times j$ -exp Γ [1], то есть достаточно получить условия $i \times j$ -примитивности для связного циклического орграфа Γ .

При натуральном d множество натуральных чисел называется d -полным, если оно содержит полную систему вычетов по модулю d . Для d -полного множества M обозначим через $q(M)$ такое наименьшее натуральное число, что для любого $a \in \{q(M), q(M) + 1, \dots, q(M) + d - 1\}$ в M имеется число b , не превышающее a и $b \equiv a \pmod{d}$. В силу d -полноты множества M число $q(M)$ существует и не превышает $\max M$.

Обозначим $L(i, j)$ множество длин всех простых путей из i в j . Сумму $R + R'$ множеств натуральных чисел $R = \{r_1, r_2, \dots\}$ и $R' = \{r'_1, r'_2, \dots\}$ определим как $\{r_i + r'_j : i, j = 1, 2, \dots\}$.

Теорема 1. Пусть в связном орграфе Γ имеется i, j -связывающий цикл $\tilde{C}$ длины l и множество $M_{i,j} = \bigcup_{\mu, \nu \in C} \{L(i, \mu) + L(\mu, \nu) + L(\nu, j)\}$ является l -полным. Тогда граф Γ является $i \times j$ -примитивным и $i \times j$ -exp $\Gamma \leq q(M_{i,j})$.

Пример 1. В 5-вершинном орграфе Γ_1 (рис. 1) имеется 1,5-связывающий цикл $\tilde{C} = (2, 3, 4)$ длины $l = 3$. Покажем 1×5 -примитивность орграфа Γ_1 .

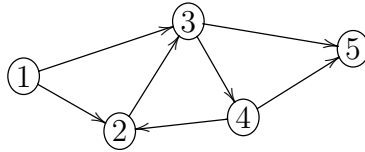


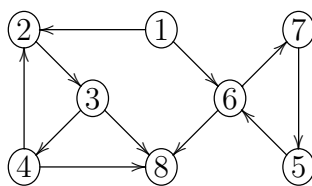
Рис. 1. Граф Γ_1

Пусть $\mu = \nu = 3$, тогда $L(1, 3) = \{1, 2\} = L(3, 5)$, $L(\mu, \nu) = \{0\}$, следовательно, $L(1, 3) + L(3, 3) + L(3, 5) = \{2, 3, 4\} \subseteq M_{1,5}$. Тогда $M_{1,5}$ есть 3-полное множество, где $q(M_{1,5}) = 2$.

Условия теоремы 1 выполнены, следовательно, граф Γ_1 является 1×5 -примитивным и 1×5 -exp $\Gamma \leq 2$. Заметим, что 1×5 -exp $\Gamma = 2$, так как длина кратчайшего пути из 1 в 5 равна 2.

Теорема 2. Пусть в связном орграфе Γ имеются i, j -связывающие циклы $\tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_k$ длины l , где $k \geq 1$, и множество $M_{i,j} = \bigcup_{r=1}^k \bigcup_{\mu_r, \nu_r \in C_r} \{L(i, \mu_r) + L(\mu_r, \nu_r) + L(\nu_r, j)\}$ является l -полным. Тогда граф Γ является $i \times j$ -примитивным и $i \times j$ -exp $\Gamma \leq q(M_{i,j})$.

Пример 2. В 8-вершинном орграфе Γ_2 (рис. 2) имеются два 1,8-связывающих цикла длины $l = 3$: $\tilde{C}_1 = (2, 3, 4)$, $\tilde{C}_2 = (5, 6, 7)$. Покажем 1×8 -примитивность орграфа Γ_2 .

Рис. 2. Граф Γ_2

Пусть $\mu_1 = 2$, $\nu_1 = 3$, $\mu_2 = \nu_2 = 6$, тогда $L(1, 2) = \{1\}$, $L(3, 8) = \{1, 2\}$, $L(2, 3) = \{1\}$, $L(1, 6) = \{1\}$, $L(6, 8) = \{1\}$, $L(6, 6) = \{0\}$. Отсюда

$$\{L(1, 2) + L(2, 3) + L(3, 8)\} \cup \{L(1, 6) + L(6, 6) + L(6, 8)\} = \{3, 4\} \cup \{2\} = \{2, 3, 4\},$$

следовательно, $M_{1,8}$ есть 3-полное множество, где $q(M_{1,8}) = 2$.

Условия теоремы 2 выполнены, следовательно, орграф Γ_2 является 1×8 -примитивным и 1×8 -ехр $\Gamma \leq 2$. Заметим, что 1×8 -ехр $\Gamma = 2$, так как длина кратчайшего пути из 1 в 8 равна 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кязисин С. Н., Фомищев В. М. Локальная примитивность графов и неотрицательных матриц // Прикладная дискретная математика. 2014. № 3(25) (в печати).

УДК 519.17

ОБ ОДНОМ КОНТРПРИМЕРЕ ДЛЯ Т-НЕПРИВОДИМЫХ РАСШИРЕНИЙ СВЕРХСТРОЙНЫХ ДЕРЕВЬЕВ

Д. Ю. Осипов

Т-неприводимым расширением (ТНР) графа называется его расширение, получаемое из тривиального удалением максимально возможного количества добавленных при построении тривиального расширения рёбер. Рассматривается один из способов построения ТНР. Приводится контрпример для схемы из работы Ф. Харари и М. Хурума «One node fault tolerance for caterpillars and starlike trees», которая описывает построение одного ТНР для произвольного сверхстройного дерева. Рассматривается способ построения всех неизоморфных ТНР для подкласса сверхстройных деревьев — равнолучевых звезд.

Ключевые слова: граф, Т-неприводимое расширение, сверхстройные деревья, равнолучевые звезды.

Все понятия и определения соответствуют понятиям и определениям в [1].

Определение 1. Расширением n -вершинного графа G называется граф H с $n+1$ вершинами, такой, что граф G вкладывается в каждый максимальный подграф графа H .

Простейшим примером расширения графа G является его тривиальное расширение — соединение графа G с одноэлементным графом (т.е. к графу G добавляется вершина, которая соединяется ребром с каждой вершиной графа G).

Понятие расширения графа тесно связано с вопросами отказоустойчивости дискретных систем. Если граф G рассматривать как функциональную модель некоторого