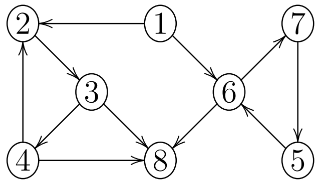

Рис. 2. Граф Γ_2

Пусть $\mu_1 = 2$, $\nu_1 = 3$, $\mu_2 = \nu_2 = 6$, тогда $L(1,2) = \{1\}$, $L(3,8) = \{1,2\}$, $L(2,3) = \{1\}$, $L(1,6) = \{1\}$, $L(6,8) = \{1\}$, $L(6,6) = \{0\}$. Отсюда

$$\{L(1,2) + L(2,3) + L(3,8)\} \cup \{L(1,6) + L(6,6) + L(6,8)\} = \{3,4\} \cup \{2\} = \{2,3,4\},$$

следовательно, $M_{1,8}$ есть 3-полное множество, где $q(M_{1,8}) = 2$.

Условия теоремы 2 выполнены, следовательно, орграф Γ_2 является 1×8-примитивным и $1 \times 8\text{-}\exp\Gamma \leqslant 2$. Заметим, что $1 \times 8\text{-}\exp\Gamma = 2$, так как длина кратчайшего пути из 1 в 8 равна 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кяжин С. Н., Фомичев В. М.* Локальная примитивность графов и неотрицательных матриц // Прикладная дискретная математика. 2014. №3(25) (в печати).

УДК 519.17

ОБ ОДНОМ КОНТРПРИМЕРЕ ДЛЯ Т-НЕПРИВОДИМЫХ РАСШИРЕНИЙ СВЕРХСТРОЙНЫХ ДЕРЕВЬЕВ

Д. Ю. Осипов

Т-неприводимым расширением (ТНР) графа называется его расширение, получаемое из тривиального удалением максимально возможного количества добавленных при построении тривиального расширения рёбер. Рассматривается один из способов построения ТНР. Приводится контрпример для схемы из работы Ф. Харари и М. Хурума «One node fault tolerance for caterpillars and starlike trees», которая описывает построение одного ТНР для произвольного сверхстройного дерева. Рассматривается способ построения всех неизоморфных ТНР для подкласса сверхстройных деревьев — равнолучевых звезд.

Ключевые слова: *граф, Т-неприводимое расширение, сверхстройные деревья, равнолучевые звезды.*

Все понятия и определения соответствуют понятиям и определениям в [1].

Определение 1. Расширением n-вершинного графа G называется граф H с $n+1$ вершинами, такой, что граф G вкладывается в каждый максимальный подграф графа H.

Простейшим примером расширения графа G является его тривиальное расширение — соединение графа G с одноэлементным графом (т. е. к графу G добавляется вершина, которая соединяется ребром с каждой вершиной графа G).

Понятие расширения графа тесно связано с вопросами отказоустойчивости дискретных систем. Если граф G рассматривать как функциональную модель некоторого устройства Σ, то расширение H графа G можно воспринимать как схему отказоустойчивой реализации этого устройства: при отказе любого элемента (что истолковывается как удаление из H соответствующей вершины и всех связанных с нею рёбер) в неповрежденной части обнаруживается работоспособная модель для Σ.

При таком подходе естественно возникает вопрос об оптимальности отказоустойчивой реализации для данной системы, т. е. о получении такого расширения H графа G, которое не содержало бы «лишних» рёбер. Один из способов — конструкция минимального расширения графа [2], другой — его Т-неприводимое расширение [3].

Определение 2. Минимальным расширением графа G называется его расширение с минимальным количеством рёбер.

В общем случае при построении минимального расширения возникает необходимость добавлять рёбра в исходный граф, т. е. менять всю систему, моделируемую этим графом. Но иногда технически важно найти решение следующей задачи: построить оптимальное расширение данного графа, сохраняя его первоначальную конструкцию (т. е. не меняя связей внутри него). Существует следующая процедура:
- построить тривиальное расширение исходного графа;
- удалять из полученного графа рёбра до тех пор, пока выполняется свойство расширения.

Полученные графы назовем Т-неприводимыми расширениями графа G. Для произвольного графа количество неизоморфных ТНР неизвестно.

Определение 3 [2]. Дерево называется сверхстройным, если в точности одна его вершина имеет степень больше 2. Эту вершину будем называть корнем сверхстройного дерева.

Сверхстройное дерево можно рассматривать как объединение k цепей с общей концевой вершиной. При этом дерево можно закодировать вектором, состоящим из длин цепей в порядке невозрастания: $(m_1, \ldots, m_k)$, где $m_1 \geqslant \ldots \geqslant m_k$. Очевидно, что такое кодирование сверстройных деревьев при $k > 2$ является взаимно однозначным.

Определение 4. Вершина v_{ij} (где i — номер цепи сверхстройного дерева; j — номер вершины в этой цепи, нумерация начинается с 1 от корня) сверхстройного дерева T называется сложной, если среди длин цепей дерева T нет цепи длины $j-1$ или $m_i - j$; $i = 1, \ldots, k$, $m_i > 1$, $j = 2, \ldots, m_i$.

До сих пор остается нерешённой следующая задача: построить все неизоморфные ТНР для произвольного сверхстройного дерева. Попытка построить одно из таких ТНР описывается в [4].

В соответствии со схемой из [4] для построения одного из ТНР произвольного сверхстройного дерева необходимо:
- добавить новую вершину к исходному графу;
- соединить добавленную вершину с корнем и со всеми листьями исходного сверхстройного дерева;
- если в исходном сверхстройном дереве нет сложных вершин, то полученный граф является искомым ТНР. Если есть некоторая сложная вершина v_{ij}, то соединить ребром добавленную вершину и вершину v_{ij-1}. Так поступаем для всякой сложной вершины.

Отметим, что в работе [5] уже приводились контрпримеры для утверждения из [4], что минимальное вершинное 1-расширение сверхстройного дерева с k цепями и p сложными вершинами содержит в точности $k+p+1$ дополнительных рёбер.

Рассмотрим сверхстройное дерево (3, 2, 2) (граф G на рис. 1) и построим ТНР для него по описанной схеме (граф G' на рис. 2).

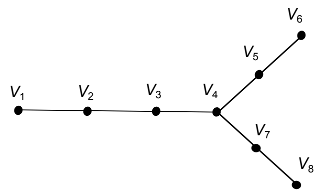

Рис. 1. Граф G

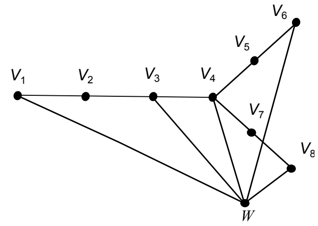

Рис. 2. Граф G'

Однако несложно заметить, что граф G' не является ТНР для сверхстройного дерева G. На самом деле ТНР для графа G является граф H (рис. 3).

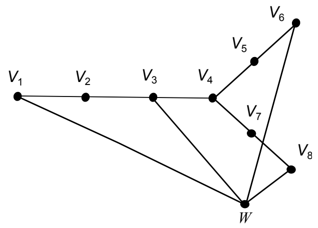

Рис. 3. Граф H

Если сравнить графы G' и H, то несложно заметить, что они отличаются на одно ребро. Докажем, что граф H действительно является ТНР для графа G, представленного на рис. 1.

Легко проверяется, что граф H является расширением графа G. Докажем свойство неприводимости графа H, т. е. что при удалении любого ребра из него получается граф, не являющийся расширением графа G. Очевидно, при удалении ребра wv_6 (или wv_8, или wv_1) полученный граф не будет расширением для графа G, так как достаточно удалить из полученного графа вершину v_5 (или v_7, или v_2 соответственно), чтобы получить вершину v_6 (или v_8, или v_1 соответственно) степени 0, чего не может быть в графе G. При удалении ребра wv_3 достаточно удалить вершину v_4. В этом случае центром графа будет вершина w, а вершина v_8 будет иметь степень 1, но так как вершина v_8 смежна только с w, то мы не сможем получить двухвершинную цепь, а следовательно, в полученный граф не вкладывается граф G. Таким образом, никакой граф, полученный из H удалением ребра, не является расширением для G, и свойство неприводимости графа H доказано. Следовательно, граф H является ТНР для графа G.

Граф G — это сверхстройное дерево с наименьшим числом вершин, которое является контрпримером для описанной в [4] схемы. Среди сверхстройных деревьев с числом вершин 9 такого контрпримера нет. Среди сверхстройных деревьев с числом вершин 10 существует одно такое дерево: (5, 2, 2). Среди сверхстройных деревьев с числом вершин 11 существуют два таких дерева: (4, 3, 3) и (6, 2, 2). Можно предположить, что с ростом числа вершин количество контрпримеров будет возрастать, и такие графы можно выделить в некий подкласс сверхстройных деревьев.

Приведём решение задачи построения одного из ТНР для подкласса сверхстройных деревьев — равнолучевых звёзд [6].

Определение 5. Граф $S_n^m = (V, \alpha)$ называется равнолучевой звездой с m лучами, каждый из которых состоит из n вершин, если $V = \{v_0, v_1^1, \ldots, v_n^1, \ldots, v_1^m, \ldots, v_n^m\}$, $\alpha = \{v_i^j v_{i+1}^j : i = 1, \ldots, n-1; j = 1, \ldots, m\} \cup \{v_0 v_1^j : j = 1, \ldots, m\}$, где v_0 — центр равнолучевой звезды.

Теорема 1. Единственным ТНР для графа S_n^m, $n \geqslant 2$, является граф, полученный из тривиального расширения графа S_n^m удалением рёбер wv_{n-1}^j, $j = 1, \ldots, m$, где w — вершина, добавленная при построении тривиального расширения графа S_n^m.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, 2009.
2. *Абросимов М. Б.* Минимальные расширения объединения некоторых графов // Теоретические проблемы информатики и её приложений. 2001. №4. С. 3–11.
3. *Салий В. Н.* Доказательства с нулевым разглашением в задачах о расширениях графов // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2003. №6. С. 63–65.
4. *Harary F. and Khurum M.* One node fault tolerance for caterpillars and starlike trees // Internet J. Comput. Math. 1995. V. 6. P. 135–143.
5. *Абросимов М. Б., Комаров Д. Д.* Об одном контрпримере для минимальных вершинных 1-расширений сверхстройных деревьев // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2012. №5. С. 83–84.
6. *Осипов Д. Ю.* О Т-неприводимых расширениях сверхстройных деревьев // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2013. №6. С. 85–86.

УДК 519.17

ШПЕРНЕРОВО СВОЙСТВО ДЛЯ МНОГОУГОЛЬНЫХ ГРАФОВ

В. Н. Салий

Конечное упорядоченное множество называется шпернеровым, если среди его максимальных по длине антицепей хотя бы одна составлена из элементов одинаковой высоты. Под многоугольным графом понимается бесконтурный граф, полученный из цикла путём некоторой ориентации его рёбер. В многоугольном графе отношение достижимости вершин является отношением порядка. Таким образом, многоугольный граф можно рассматривать как упорядоченное множество. Найдено необходимое и достаточное условие шпернеровости таких упорядоченных множеств.

Ключевые слова: *упорядоченное множество, шпернерово свойство, многоугольный граф, цепь, зигзаг.*

Пусть $(A, \leqslant)$ — конечное упорядоченное множество. Высота $h(a)$ элемента a в $(A, \leqslant)$ определяется как максимальная из длин убывающих цепей, начинающихся с a.

Антицепь в упорядоченном множестве — это такое его подмножество, в котором любые два элемента несравнимы. Под длиной антицепи понимается количество элементов в ней. Антицепи максимальной длины будем называть главными. Антицепь в конечном