

с ростом числа вершин количество контрпримеров будет возрастать, и такие графы можно выделить в некий подкласс сверхстройных деревьев.

Приведём решение задачи построения одного из ТНР для подкласса сверхстройных деревьев — равнолучевых звёзд [6].

Определение 5. Граф $S_n^m = (V, \alpha)$ называется равнолучевой звездой с m лучами, каждый из которых состоит из n вершин, если $V = \{v_0, v_1^1, \dots, v_n^1, \dots, v_1^m, \dots, v_n^m\}$, $\alpha = \{v_i^j v_{i+1}^j : i = 1, \dots, n-1; j = 1, \dots, m\} \cup \{v_0 v_1^j : j = 1, \dots, m\}$, где v_0 — центр равнолучевой звезды.

Теорема 1. Единственным ТНР для графа S_n^m , $n \geq 2$, является граф, полученный из тривиального расширения графа S_n^m удалением рёбер wv_{n-1}^j , $j = 1, \dots, m$, где w — вершина, добавленная при построении тривиального расширения графа S_n^m .

ЛИТЕРАТУРА

1. Богомолов А. М., Салий В. Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, 2009.
2. Абросимов М. Б. Минимальные расширения объединения некоторых графов // Теоретические проблемы информатики и её приложений. 2001. № 4. С. 3–11.
3. Салий В. Н. Доказательства с нулевым разглашением в задачах о расширениях графов // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2003. № 6. С. 63–65.
4. Harary F. and Khurum M. One node fault tolerance for caterpillars and starlike trees // Internet J. Comput. Math. 1995. V. 6. P. 135–143.
5. Абросимов М. Б., Комаров Д. Д. Об одном контрпримере для минимальных вершинных 1-расширений сверхстройных деревьев // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2012. № 5. С. 83–84.
6. Осипов Д. Ю. О Т-неприводимых расширениях сверхстройных деревьев // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2013. № 6. С. 85–86.

УДК 519.17

ШПЕРНЕРОВО СВОЙСТВО ДЛЯ МНОГОУГОЛЬНЫХ ГРАФОВ

В. Н. Салий

Конечное упорядоченное множество называется шпернеровым, если среди его максимальных по длине антицепей хотя бы одна составлена из элементов одинаковой высоты. Под многоугольным графом понимается бесконтурный граф, полученный из цикла путём некоторой ориентации его рёбер. В многоугольном графе отношение достижимости вершин является отношением порядка. Таким образом, многоугольный граф можно рассматривать как упорядоченное множество. Найдено необходимое и достаточное условие шпернеровости таких упорядоченных множеств.

Ключевые слова: упорядоченное множество, шпернерово свойство, многоугольный граф, цепь, зигзаг.

Пусть $(A, \leq)$ — конечное упорядоченное множество. Высота $h(a)$ элемента a в $(A, \leq)$ определяется как максимальная из длин убывающих цепей, начинающихся с a .

Антицепь в упорядоченном множестве — это такое его подмножество, в котором любые два элемента несравнимы. Под длиной антицепи понимается количество элементов в ней. Антицепи максимальной длины будем называть главными. Антицепь в конечном

упорядоченном множестве называется правильной, если все её элементы имеют одинаковую высоту. Так, в упорядоченном множестве $(\mathbb{N}_8, |)$ (первые 8 натуральных чисел с отношением делимости) среди главных антицепей $\{2, 3, 5, 7\}$, $\{3, 4, 5, 7\}$, $\{3, 5, 7, 8\}$ правильной является только первая. В $(P(\{a, b, c\}), \subseteq)$ (совокупность всех подмножеств трёхэлементного множества с отношением включения) главных антицепей две: $\{a, b, c\}$ и $\{ab, ac, bc\}$, и обе они — правильные.

Конечное упорядоченное множество назовём шпернеровым, если среди его главных антицепей есть по крайней мере одна правильная. Упорядоченные множества $(\mathbb{N}_8, |)$ и $(P(\{a, b, c\}), \subseteq)$ являются шпернеровыми. Один из минимальных примеров упорядоченного множества, не обладающего свойством шпернеровости, образуют по включению пять подмножеств множества $S = \{a, b, c, d\}$, а именно $\{a\}$, $\{b\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{a, b, c\}$. В нём всего одна главная антицепь — $\{a, bc, bd\}$, и она не является правильной.

В 1928 г. Шпернер [1] доказал, что все конечные упорядоченные множества вида $(P(S), \subseteq)$ обладают обнаруженным им свойством. Свойство шпернеровости для конечных упорядоченных множеств находит содержательные интерпретации в различных разделах математики (см., например, [2–4]), в том числе и в теории графов [5, 6].

Под (ориентированным) графом понимается пара $G = (V, \alpha)$, где V — конечное непустое множество и $\alpha \subseteq V \times V$ — отношение на нём. Элементы множества V называются вершинами графа, а пары, входящие в α , — его дугами.

Вершины u и v , по определению, связаны, если существуют $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$, такие, что $(u, v_1) \in \alpha \cup \alpha^{-1}$, $(v_1, v_2) \in \alpha \cup \alpha^{-1}$, $\dots$, $(v_k, v) \in \alpha \cup \alpha^{-1}$, т. е. если u и v можно соединить последовательностью дуг без учёта их направлений. Граф, в котором любые две вершины связаны, называется связным.

Граф $H = (U, \beta)$ называется частью графа $G = (V, \alpha)$, если $U \subseteq V$ и $\beta \subseteq \alpha$, т. е. H состоит из некоторых вершин графа G и некоторых дуг, соединяющих в G эти вершины.

Контур длины $k \geq 2$ в графе G определяется как последовательность C_k его дуг вида $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{k-1}, v_k), (v_k, v_1)$, в которой все встречающиеся вершины различны. Граф, не содержащий контуров, называется бесконтурным.

Вершина v , по определению, достижима в графе G из вершины u , если существует последовательность примыкающих дуг $(u, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_k, v)$, соединяющая u с v . Отношение достижимости в графе обозначим через δ . В бесконтурном графе отношение достижимости является отношением порядка (о бесконтурных графах см. [7]). Очевидно, что минимальными элементами в упорядоченном множестве (V, δ) являются стоки графа G , т. е. те его вершины, из которых не исходит ни одна дуга в другие вершины. Максимальными элементами в (V, δ) являются источники графа G , т. е. те его вершины, в которые не входит ни одна дуга из других вершин.

Связный бесконтурный граф $G = (V, \alpha)$ назовём шпернеровым, если упорядоченное множество (V, δ) обладает шпернеровым свойством.

Пусть $n \geq 2$ — натуральное число. Под n -угольным графом будем понимать всякий граф, полученный из контура C_n переориентацией некоторого количества k его дуг. Будем считать, что $1 \leq k < n$. Следовательно, контуры исключаются из числа многоугольных графов, которые, таким образом, попадают в класс связных бесконтурных графов [8].

Для шестиугольного графа $M' : v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \leftarrow v_4 \rightarrow v_5 \leftarrow v_6 \leftarrow v_1$ δ -упорядоченное множество его вершин содержит одну главную антицепь — $\{2, 4, 6\}$. Она является правильной, так что M' — шпернеров граф. Аналогично, для шестиугольного графа

$M'' : v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \leftarrow v_4 \leftarrow v_5 \rightarrow v_6 \leftarrow v_1$ δ -упорядоченное множество вершин содержит тоже единственную главную антицепь — $\{2, 4, 6\}$, но здесь она не является правильной, так что M'' — не шпернеров граф.

Под цепью в многоугольном графе будем понимать его максимальную собственную связную часть, в которой 1) есть хотя бы одна вершина, не являющаяся ни источником, ни стоком, и 2) любые две соседние дуги одинаково направлены. Например, цепями в графе M' являются $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3$ и $v_1 \rightarrow v_6 \rightarrow v_5$, а в графе M'' — $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3$ и $v_5 \rightarrow v_4 \rightarrow v_3$. Всякая цепь начинается в источнике и завершается стоком. Зигзагом в многоугольном графе назовём его максимальную собственную связную часть, в которой 1) каждая вершина является источником или стоком и 2) любые две соседние дуги противоположно направлены. Зигзаги классифицируются по виду их концевых вершин: в ss -зигзаге оба конца являются источниками; в st -зигзаге один конец источник, другой сток; в tt -зигзаге оба конца стоки. Так, в графе M' есть tt -зигзаг $v_3 \leftarrow v_4 \rightarrow v_5$, а в графе M'' имеется ss -зигзаг $v_1 \rightarrow v_6 \leftarrow v_5$.

Теорема. Многоугольный граф тогда и только тогда является шпернеровым, когда в нём нет ss -зигзагов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sperner E.* Ein Satz uber Untermengen einer endlichen Menge // *Math. Zeitschrift.* 1928. V. 27. No. 1. S. 544–548.
2. *Мешалкин Л. Д.* Обобщение теоремы Шпернера о числе подмножеств конечного множества // *Теория вероятностей и её применения.* 1963. Т. 8. № 2. С. 219–220.
3. *Stanley E. P.* Weyl groups, the hard Lefschetz theorem and the Sperner property // *SIAM J. Alg. Discr. Math.* 1980. V. 1. No. 2. P. 168–184.
4. *Wang J.* Proof of a conjecture on the Sperner property of the subgroup lattice of an abelian p -group // *Annals Comb.* 1999. V. 2. No. 1. P. 85–101.
5. *Jacobson M. S., Kezdy A. E., and Seif S.* The poset of connected induced subgraphs of a graph need not be Sperner // *Order.* 1995. V. 12. No 3. P. 315–318.
6. *Maeno T. and Numata Y.* Sperner property, matroids and finite-dimensional Gorenstein algebras // *Contemp. Math.* 2012. V. 280. No. 1. P. 73–83.
7. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, 1997.
8. *Салий В. Н.* Упорядоченное множество связных частей многоугольного графа // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.* 2013. Т. 13. № 2 (ч. 2). С. 44–51.

УДК 519.7

ОБ ОЦЕНКАХ ЭКСПОНЕНТОВ ОРГРАФОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЧИСЕЛ ФРОБЕНИУСА

В. М. Фомичев

Для частных классов сильносвязных орграфов получены достаточные условия примитивности и оценки экспонентов, которые выражены через числа Фробениуса. Показано, что во многих случаях полученные оценки экспонента орграфа существенно лучше известных оценок.

Ключевые слова: число Фробениуса, примитивный граф, экспонент графа.