

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.21

Е.Н. Беккерман, А.М. Горцев

ЭВРИСТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ ЧИСЛА СОСТОЯНИЙ АСИНХРОННОГО МС-ПОТОКА СОБЫТИЙ

Изучается асинхронный МС-поток событий, являющийся одной из адекватных математических моделей информационных потоков сообщений в цифровых сетях интегрального обслуживания. Поток функционирует в условиях априорной неопределённости, когда информация о параметрах и числе состояний отсутствует. Приводится эвристический алгоритм оценки числа состояний потока, основанный на свойстве одноэкстремальности огибающей гистограммы оценок простейшего потока событий.

Ключевые слова: асинхронный МС-поток событий; состояния потока; оценка; интервал стационарности; плотность вероятностей; гистограмма.

Математические модели теории массового обслуживания широко применяются при описании реальных физических, технических, экономических и других процессов и систем. В связи с развитием компьютерной техники и информационных технологий появилась важная сфера приложений теории массового обслуживания – проектирование и создание цифровых сетей интегрального обслуживания (ЦСИО).

Условия функционирования реальных объектов и систем таковы, что если в отношении параметров обслуживающих устройств можно сказать, что они известны и с течением времени не меняются, то в отношении интенсивностей входящих потоков этого сказать во многих случаях нельзя. Более того, интенсивности входящих потоков обычно меняются со временем, часто эти изменения носят случайный характер, что приводит к рассмотрению математических моделей дважды стохастических потоков событий. По-видимому, статьи [1, 2] являются одними из первых работ в этом направлении, где дважды стохастический поток определяется как поток, интенсивность которого есть случайный процесс. С другой стороны, функционирование систем массового обслуживания (СМО) зависит от параметров и состояний входящих потоков. В подобных ситуациях наиболее рациональным является применение адаптивных СМО, которые в процессе функционирования оценивают неизвестные параметры либо состояния входящих потоков и изменяют дисциплину обслуживания в соответствии с полученными оценками [3].

Дважды стохастические потоки можно разделить на два класса: к первому классу относятся потоки, интенсивность которых есть непрерывный случайный процесс; ко второму классу – потоки, интенсивность которых есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний. Подчеркнём, что потоки второго класса впервые введены в рассмотрение практически одновременно и независимо в 1979 г. в [4–6]. В [4, 5] введённые потоки названы МС (Markov Chain)-потоками; в [6] – MVP (Markov Versatile Processes)-потоками. С начала 1990-х гг. отечественные и зарубежные авторы называют в своих работах введённые потоки событий либо дважды стохастическими потоками, либо МАР-потоками, либо МС-потоками [7–13].

В свою очередь, в зависимости от того, каким образом происходит переход из состояния в состояние, МС-потоки событий можно разделить на три типа: 1) синхронные потоки [14, 15]; 2) асинхронные потоки [16, 17]; 3) полусинхронные потоки [18]. Здесь указаны ссылки на статьи, в

которых авторы впервые рассматривали МС-потоки событий в соответствии с приведённой классификацией. Наиболее полная литература по изучаемым типам МС-потоков событий приведена в [19].

Отметим, что синхронные, асинхронные и полусинхронные потоки возможно представить в виде моделей МАР-потоков событий первого либо второго порядков [20]. В [20] показано, что синхронный МС-поток является частным случаем МАР-потока первого порядка, асинхронный и полусинхронный МС-потоки являются частными случаями МАР-потока второго порядка. Как было отмечено выше, в реальных ситуациях интенсивность входящего потока событий изменяется со временем случайным образом, поэтому при реализации адаптивного управления СМО возникают, в частности, следующие задачи: 1) оценка состояний потока по наблюдениям за моментами наступления событий [21]; 2) оценка параметров потока по наблюдениям за моментами наступления событий [22].

В приведённой литературе [14–21] задачи по оценке состояний и параметров того или иного потока решаются в предположении, что число состояний потока известно и равно двум. В статьях [22–26] решены задачи по оценке параметров и состояний потоков событий, когда число состояний потока произвольно и конечно.

Однако на практике часто возникают ситуации, когда априорные данные о числе состояний потока отсутствуют. Вследствие этого для реализации адаптивного управления в СМО возникает задача об оценке числа состояний потока, которая решается в настоящей статье для асинхронного МС-потока событий (далее асинхронный поток либо просто поток).

1. Постановка задачи

Рассматривается асинхронный поток событий с произвольным конечным числом состояний. Интенсивность потока является кусочно-постоянным случайным процессом $\lambda(t)$ с n состояниями: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ($\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$). Процесс (поток) $\lambda(t)$ в момент времени t находится в i -м состоянии, если $\lambda(t) = \lambda_i$ ($i = \overline{1, n}$). В течение времени пребывания в i -м состоянии поток ведет себя, как пуассоновский с параметром λ_i ($i = \overline{1, n}$). Длительность пребывания в i -м состоянии есть экспоненциально распределённая случайная величина с функцией распределения $F_i(\tau) = 1 - e^{-\alpha_{ii}\tau}$, где $\alpha_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_{ij}$ ($i = \overline{1, n}$); $\alpha_{ij} > 0$ ($i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$) – интенсивность перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния i в состояние j . В сделанных предположениях $\lambda(t)$ – скрытый марковский процесс. Блочная матрица инфинитезимальных коэффициентов примет вид

$$D = \left\| \begin{array}{cccc|cccc} -\left(\lambda_1 + \sum_{j=2}^n \alpha_{1j}\right) & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & -\left(\lambda_2 + \sum_{j=1, j \neq 2}^n \alpha_{2j}\right) & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} & 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & -\left(\lambda_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj}\right) & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{array} \right\| = \|D_0 \mid D_1\|.$$

Элементами матрицы D_1 являются интенсивности перехода процесса $\lambda(t)$ из i -го состояния в i -е ($i = \overline{1, n}$) с наступлением события. Недиагональные элементы матрицы D_0 – интенсивности переходов из состояния i в состояние j ($i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$) без наступления события. Диагональные элементы матрицы D_0 – интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком.

Отметим, что определённый таким образом поток событий называется асинхронным, так как переходы процесса $\lambda(t)$ из i -го состояния в j -е ($i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$) не привязаны к моментам наступления событий пуассоновских потоков. Асинхронный поток также называют MMP (Markov Modulated Poisson)-потоком [27].

Предполагается, что на вход адаптивной СМО поступает асинхронный поток событий с заданными, но неизвестными параметрами, т.е. значения параметров λ_i, α_{ij} ($i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$) и значение числа состояний потока n неизвестны. Процесс $\lambda(t)$ является принципиально ненаблюдаемым, наблюдению доступны только временные моменты наступления событий потока. Рассматривается стационарный режим функционирования наблюдаемого потока событий, поэтому переходными процессами на отрезке наблюдения $[t_1, t_k]$, $k = 2, 3, \dots$, где t_1 – начало наблюдений (момент наступления первого события потока), t_k – окончание наблюдений (момент наступления k -го события потока), пренебрегаем. Общая задача заключается в следующем: необходимо по наблюдениям (моментам наступления событий $t_1, \dots, t_k$) оценить значения неизвестных параметров λ_i, α_{ij} ($i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$), n .

Замечание 1. Существенным является значение числа n : если n велико, то на отрезке наблюдения $[t_1, t_k]$, $k = 2, 3, \dots$, возможны ситуации, когда процесс $\lambda(t)$ не перейдёт во все возможные состояния, и принятое решение об оценке $\hat{n}$ числа состояний процесса $\lambda(t)$ будет в принципе неверным.

Замечание 2. Если тем или иным статистическим алгоритмом построена оценка $\hat{n}$ числа n , то тогда для оценки параметров λ_i, α_{ij} ($i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$) можно использовать алгоритм, разработанный в [26].

2. Свойство плотности вероятностей оценки интенсивности простейшего потока

В соответствии с определением потока реализация процесса $\lambda(t)$ имеет временные участки, где $\lambda(t) = \lambda_i$, $i = \overline{1, n}$, – так называемые интервалы стационарности. Если алгоритм обработки моментов наступления событий $t_1, \dots, t_k$ каким-либо образом оценит число таких интервалов стационарности, то тем самым будет осуществлена оценка $\hat{n}$.

Предположим, что последовательность моментов наступления событий $t_1, t_2, \dots, t_k$, $k = 2, 3, \dots$, целиком принадлежит некоторому интервалу стационарности, для которого $\lambda(t) = \lambda_i$, $i = \overline{1, n}$. Положим для конкретности $\lambda(t) = \lambda$, $\lambda \in (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, при этом конкретное значение λ неизвестно. Отметим, что число событий на этом интервале может быть равным нулю, единице и т.д. ($k = 0, 1, 2, \dots$). Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 1, 2, \dots$, – значение длительности k -го интервала между соседними событиями пуассоновского потока интенсивности λ . Обозначим $T_k = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_k$ – значение длительности отрезка $[t_1, t_{k+1}]$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда, так как длительность интервала (t_k, t_{k+1}) , $k = 1, 2, \dots$, между соседними событиями в пуассоновском потоке распределена по экспоненциальному закону с параметром λ , то плотность вероятностей суммы независимых экспоненциально распределённых случайных величин при фиксированном k есть [28]:

$$P(T_k) = \lambda \frac{(\lambda T_k)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda T_k}, \quad T_k \geq 0. \quad (1)$$

Как известно [29], оценка максимального правдоподобия $\hat{\lambda} = k/T_k$ интенсивности λ является смещённой оценкой. Будем рассматривать исправленную оценку

$$\hat{\lambda}^{(k)} = (k-1)/T_k, \quad k = 2, 3, \dots \quad (2)$$

Тогда, с учётом (1), математическое ожидание оценки (2), её дисперсия и количество информации о параметре λ в выборке $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$, $k = 1, 2, \dots$, примут вид

$$M_{\hat{\lambda}} = \lambda, \quad D_{\hat{\lambda}} = \lambda^2 / (k - 2), \quad I_k(\lambda) = k / \lambda^2.$$

Таким образом, оценка (2) является сильно состоятельной, несмещённой и асимптотически эффективной.

Плотность вероятности оценки $\hat{\lambda}^{(k)}$ при фиксированном k , с учётом (1), примет вид

$$P(\hat{\lambda}^{(k)}) = \lambda^k \frac{(k-1)^{k-1}}{(k-2)!} [\hat{\lambda}^{(k)}]^{-(k+1)} e^{-\lambda \frac{k-1}{\hat{\lambda}^{(k)}}}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (3)$$

Пусть на интервале стационарности, где $\lambda(t) = \lambda$, реализовалось $N+1$ событий пуассоновского потока интенсивности λ : $t_1, t_2, \dots, t_N, t_{N+1}$. Соответствующие значения длительностей интервалов между соседними событиями есть $\tau_j = t_{j+1} - t_j$, $j = \overline{1, N}$. Построим набор оценок для интенсивности λ с использованием (2) по следующему правилу:

$$\hat{\lambda}_j^{(k)} = (k-1) / \sum_{s=1}^k \tau_{j+s-1}, \quad k = \overline{2, N}; \quad j = \overline{1, N-k+1}. \quad (4)$$

Количество оценок набора (4) $N(N-1)/2$. Доля оценок $\hat{\lambda}^{(k)}$, полученных при фиксированном k ($k = \overline{2, N}$), в наборе (4) составляет величину

$$q_k^{(N)} = \frac{2(N-k+1)}{N(N-1)}, \quad k = \overline{2, N}; \quad \sum_{k=2}^N q_k^{(N)} = 1. \quad (5)$$

Вернёмся к формуле (2), которая даёт оценку интенсивности λ . Так как $\hat{\lambda}^{(k)}$ ($\hat{\lambda}^{(k)} > 0$), с одной стороны, является значением случайной величины (или просто случайной величиной) для каждого k ($k = \overline{2, N}$), с другой стороны, для каждого k определены плотности вероятностей (3), то в (3) число k можно рассматривать как параметр, принимающий значения $2, 3, \dots, N$. При этом величину $q_k^{(N)}$, определённую в (5), можно рассматривать как вероятность того, что параметр k принял некоторое значение из ряда чисел $2, 3, \dots, N$. Тогда в (3) переменную $\hat{\lambda}^{(k)}$ можно заменить на переменную $\hat{\lambda}$ и рассматривать смесь плотностей вероятностей (3) для $k = \overline{2, N}$:

$$P_N(\hat{\lambda}) = \sum_{k=2}^N q_k^{(N)} P_k(\hat{\lambda}), \quad P_k(\hat{\lambda}) = \lambda^k \frac{(k-1)^{k-1}}{(k-2)!} \left(\frac{1}{\hat{\lambda}}\right)^{k+1} e^{-\lambda \frac{k-1}{\hat{\lambda}}}, \quad (6)$$

где $q_k^{(N)}$ определена в (5). Таким образом, (6) является выпуклой линейной комбинацией функций $P_k(\hat{\lambda})$.

Исследуем функцию $P_N(\hat{\lambda})$ как функцию переменной $\hat{\lambda}$ ($\hat{\lambda} > 0$). Введём новую переменную $x = \lambda / \hat{\lambda}$ ($x > 0$). Из (6) вытекает

$$P_N(x) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=2}^N q_k^{(N)} \frac{(k-1)^{k-1}}{(k-2)!} x^{k+1} e^{-(k-1)x}, \quad x > 0. \quad (7)$$

Точки функции (7), подозрительные на экстремум, определяются уравнением

$$P_N'(x) = \frac{1}{\lambda} q_2^{(N)} x^2 e^{-x} \sum_{k=2}^N \frac{q_k^{(N)} (k-1)^{k-1}}{q_2^{(N)} (k-2)!} x^{k-2} e^{-(k-2)x} [(k+1) - (k-1)x] = 0, \quad (8)$$

где $(q_k^{(N)} / q_2^{(N)}) < 1$, $k = \overline{3, N}$. Тогда из (8) следует, что корни функции $P_N'(x)$ находятся из уравнения

$$F_N(x) = 0; \quad F_N(x) = \sum_{k=2}^N f_k^{(N)}(x); \quad (9)$$

$$f_k^{(N)}(x) = \frac{q_k^{(N)} (k-1)^{k-1}}{q_2^{(N)} (k-2)!} x^{k-2} e^{-(k-2)x} [(k+1) - (k-1)x].$$

Единственный ноль функции $f_k^{(N)}(x)$ есть $x_0^{(k)} = 1 + 2(k-1)^{-1}$, $k = \overline{2, N}$. Тогда имеем $F_N(x) > 0$ для $0 < x \leq 1 + 2(N-1)^{-1}$, $F_N(x) < 0$ для $x \geq 3$.

Таким образом, нули функции $F_N(x)$ (один или несколько) будут лежать в полуинтервале $(1 + 2(N-1)^{-1}; 3]$. Покажем, что функция $F_N(x)$ является строго монотонной на полуинтервале $(1 + 2(N-1)^{-1}; 3]$. Тогда $F_N(x)$ будет иметь на этом полуинтервале единственный ноль, а следовательно, функция (7) – единственный максимум. Производная $F_N'(x)$ выпишется в виде

$$F_N'(x) = \sum_{k=2}^N f_k^{(N)'}(x) = \sum_{k=2}^N \frac{q_k^{(N)} (k-1)^{k-1}}{q_2^{(N)} (k-2)!} x^{k-3} e^{-(k-2)x} z_k(x), \quad (10)$$

$$z_k(x) = (k-2)(k-1)x^2 - [(k-1)^2 + (k-2)(k+1)]x + (k-2)(k+1).$$

Отметим, что функция $z_k(x)$ в (10) определяет знак каждого слагаемого функции $F_N'(x)$; кроме того, $z_k(x)$ – выпуклая функция переменной x , её минимум достигается в точке $x_{0k} = 1 + (k-1)^{-1} + (2(k-1))^{-1}$, $k = \overline{3, N}$. Функция $z_k(x)$ отрицательна на интервале $(x_2^{(k)}, x_1^{(k)})$, $k = \overline{3, N}$, где

$$x_{1,2}^{(k)} = \left[1 + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{2(k-2)} \right] \pm \sqrt{\frac{1}{k-2} \left(\frac{1}{4(k-2)} + \frac{k^2-2}{(k-1)^2} \right)}, \quad x_2^{(k)} < x_1^{(k)} < 4; \quad x_2^{(k)} < 1. \quad (11)$$

Значение минимума функции $z_k(x)$ в точке x_{0k} равно

$$z_k(x_{0k}) = - \left[(k+1) + (k-3)^2 (4(k-2)(k-1))^{-1} \right], \quad k = \overline{3, N}.$$

Итак, при исследовании функции $F_N(x)$ на количество нулей правомочно рассматривать значения x , принадлежащие отрезку $[1, 3]$.

Предварительно рассмотрим граничный случай $N = 2$. Из (9) получаем $F_2(x) = f_2^{(2)}(x) = 3 - x$, т.е. $x_0^{(2)} = 3$. Из (10) находим $F_2'(x) = -1$. Таким образом, для $N = 2$ функция $P_2(x)$, определённая в (7), имеет единственный максимум в точке $x_0^{(2)} = 3$. Тогда плотность вероятностей $P_2(\hat{\lambda})$, определённая в (6), имеет также единственный максимум в точке $\hat{\lambda}_0 = \lambda/3$.

Теорема. Функция $F_N(x)$, определённая в (9), имеет единственный ноль.

Доказательство. Докажем методом математической индукции. Пусть $N = 3$. Тогда $F_3(x) = (3-x) + 4x(2-x)e^{-x}$ и $F_3'(x) = -1 + 4(x^2 - 4x + 2)e^{-x}$. Отсюда получаем $F_3'(x) < 0$ для $2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$. Следовательно, функция $F_3(x)$ – строго монотонная (убывающая) на интервале $(1, x_1^{(3)}) = (1, 2 + \sqrt{2})$, где $x_1^{(3)}$ определена в (11), при этом $F_3(1) > 0$, $F_3(x_1^{(3)}) < 0$. Таким образом:

1) функция $F_3(x)$ имеет единственный ноль в точке $x_3^0 \in (1, x_1^{(3)})$:

$$1 + \frac{2}{k-1} \Big|_{k=3} < x_3^0 < \left[1 + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{2(k-2)} \right] + \sqrt{\frac{1}{k-2} \left(\frac{1}{4(k-2)} + \frac{k^2-2}{(k-1)^2} \right)} \Big|_{k=3};$$

2) функция $F_3(x)$ не достигает нуля для $x > x_3^0$.

Пусть $N = 4$. Тогда $F_4(x) = (3-x) + (16/3)(2-x)xe^{-x} + (9/2)(5-3x)x^2e^{-2x}$, $F_4'(x) = -1 + (16/3)(x^2 - 4x + 2)e^{-x} + (9/2)(6x^2 - 19x + 10)xe^{-2x}$. Представим $F_4(x)$ и $F_4'(x)$ в виде

$$\begin{aligned} F_4(x) &= F_3(x) + \varphi_4(x); \quad F_4'(x) = F_3'(x) + \varphi_4'(x), \\ \varphi_4(x) &= (4/3)[(2-x) + (27/8)(5-3x)]xe^{-x}, \\ \varphi_4'(x) &= (4/3)[(x^2 - 4x + 2) + (27/8)(6x^2 - 19x + 10)xe^{-x}]e^{-x}. \end{aligned} \quad (12)$$

Тогда имеем $\varphi_4'(x) < 0$ для $1 \leq x \leq x_1^{(4)}$ ($x_1^{(4)} = 2,5$). Так как $F_3'(x) < 0$ для $1 \leq x \leq 2,5$, то $F_4'(x) < 0$ для $1 \leq x \leq 2,5$, т.е. $F_4(x)$ – строго монотонная (убывающая) на отрезке $[1; 2,5]$ функция. Так как $\varphi_4(x)$ – строго монотонная (убывающая) на отрезке $[1; 2,5]$ функция, при этом $\varphi_4(x) > 0$ для $1 \leq x \leq 5/3$, $\varphi_4(x) < 0$ для $x \geq 2,5$, то в единственной точке x_4^* ($5/3 < x_4^* < 2,5$) имеет место $\varphi_4(x = x_4^*) = 0$. Тогда $\varphi_4(x) < 0$ для $x > x_4^*$: а) $\varphi_4(x) < 0$ для $x_4^* < x \leq 2,5$ в силу строгой монотонности функции $\varphi_4(x)$ на полуинтервале $(x_4^*; 2,5]$; б) $\varphi_4(x) < 0$ для $x > 2,5$ в силу определения функции $\varphi_4(x)$ в (12). Наконец, в точке $x_1^{(4)}$ имеет место $F_4(x = x_1^{(4)}) < 0$. Следовательно, функция $F_4(x)$ – строго монотонная (убывающая) на интервале $(1, x_1^{(4)}) = (1; 2,5)$, где $x_1^{(4)}$ определена в (11); при этом $F_4(1) > 0$, $F_4(x_1^{(4)}) < 0$. Таким образом: 1) функция $F_4(x)$ имеет единственный ноль в точке $x_4^0 \in (1, x_1^{(4)})$:

$$1 + \frac{2}{k-1} \Big|_{k=4} < x_4^0 < \left[1 + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{2(k-2)} \right] + \sqrt{\frac{1}{k-2} \left(\frac{1}{4(k-2)} + \frac{k^2-2}{(k-1)^2} \right)} \Big|_{k=4};$$

2) функция $F_4(x)$ не достигает нуля для $x > x_4^0$; 3) функция $\varphi_4(x)$ – строго монотонная (убывающая) для $1 \leq x \leq x_1^{(4)}$, имеющая единственный ноль в точке x_4^* ($5/3 < x_4^* < x_1^{(4)}$) и не достигающая нуля для $x > x_4^*$; $x_1^{(3)} > x_1^{(4)}$.

Рассмотрим произвольное $N + 1$. Имеем

$$\begin{aligned}
F_{N+1}(x) &= F_N(x) + \varphi_{N+1}(x), \quad F'_{N+1}(x) = F'_N(x) + \varphi'_{N+1}(x), \\
\varphi_{N+1}(x) &= \frac{1}{N(N-1)} \sum_{k=3}^{N+1} \frac{(k-1)^{k-1}}{(k-3)!} x^{k-2} e^{-(k-2)x} [(k+1) - (k-1)x], \\
\varphi'_{N+1}(x) &= \frac{1}{N(N-1)} \sum_{k=3}^{N+1} \frac{(k-1)^{k-1}}{(k-3)!} x^{k-3} e^{-(k-2)x} z_k(x), \quad N \geq 3,
\end{aligned}$$

где $z_k(x)$ определена в (10).

Сделаем предположение индукции для произвольного N :

1) функция $F_N(x)$ – строго монотонная (убывающая) на интервале $(1, x_1^{(N)})$, где $x_1^{(N)}$ определена в (11), при этом $F_N(1) > 0$, $F_N(x_1^{(N)}) < 0$;

2) функция $F_N(x)$ имеет единственный ноль в точке $x_N^0 \in (1, x_1^{(N)})$:

$$1 + \frac{2}{N-1} < x_N^0 < \left[1 + \frac{1}{N-1} + \frac{1}{2(N-2)} \right] + \sqrt{\frac{1}{N-2} \left(\frac{1}{4(N-2)} + \frac{N^2-2}{(N-1)^2} \right)}; \quad (13)$$

3) функция $F_N(x)$ не достигает нуля для $x > x_N^0$;

4) функция $\varphi_{N+1}(x)$ – строго монотонная (убывающая) для $1 \leq x \leq x_1^{(N+1)}$, имеющая единственный ноль в точке x_{N+1}^* ($1 + 2/N < x_{N+1}^* < x_1^{(N+1)}$) и не достигающая нуля для $x > x_{N+1}^*$; $x_1^{(N)} > x_1^{(N+1)}$.

Имеем $F_{N+1}(1) > 0$. Так как $\varphi'_{N+1}(x) < 0$ для $1 \leq x \leq x_1^{(N+1)}$ и $F'_N(x) < 0$ для $1 \leq x \leq x_1^{(N)}$ ($x_1^{(N)} > x_1^{(N+1)}$), то $F_{N+1}(x)$ строго монотонна (убывает) на отрезке $[1, x_1^{(N+1)}]$. В точке $x = x_1^{(N+1)}$ функция $F_{N+1}(x = x_1^{(N+1)})$ есть функция дискретного переменного N ($N \geq 3$). Численные расчёты показывают, что $F_{N+1}(x = x_1^{(N+1)}) < 0$ для $N = \overline{3, 10}$. Таким образом, на отрезке $[1, x_1^{(N+1)}]$ функция $F_{N+1}(x)$ имеет единственный ноль в точке x_{N+1}^0 ($1 < x_{N+1}^0 < x_1^{(N+1)}$). Имеем далее $\varphi_{N+1}(x)$ – строго монотонная (убывающая) функция для $1 \leq x \leq x_1^{(N+1)}$. По предположению индукции $\varphi_{N+1}(x)$ имеет единственный ноль в точке $x_{N+1}^* \in (1 + 2/N, x_1^{(N+1)})$ и не достигает нуля для $x > x_{N+1}^*$. Тогда имеем $F_{N+1}(x_{N+1}^*) = F_N(x_{N+1}^*)$, $F_{N+1}(x) > F_N(x)$ для $1 \leq x < x_{N+1}^*$, $F_{N+1}(x) < F_N(x)$ для $x > x_{N+1}^*$. По предположению индукции $F_N(x)$ не достигает нуля для $x > x_N^0$. Так как $x_{N+1}^* < x_{N+1}^0 < x_1^{(N)}$, то $F_{N+1}(x)$ не достигает нуля для $x > x_{N+1}^0$.

Чтобы замкнуть доказательство, нужно доказать, что функция $\varphi_{N+1}(x)$ не достигает нуля для $x > x_{N+1}^*$ и $1 < x_{N+1}^* < x_1^{(N+1)}$. Имеем $\varphi_{N+1}(x) = F_{N+1}(x) - F_N(x)$, $N \geq 3$. В точке $x = x_1^{(N+1)}$ выполняется $F_{N+1}(x_1^{(N+1)}) < 0$. Тогда: 1) если $F_N(x_1^{(N+1)}) < 0$ и $|F_{N+1}(x_1^{(N+1)})| > -F_N(x_1^{(N+1)})$, то $\varphi_{N+1}(x_1^{(N+1)}) < 0$ и $\varphi_{N+1}(x)$ имеет единственный ноль $x_{N+1}^* \in (1, x_1^{(N+1)})$; 2) если $F_N(x_1^{(N+1)}) < 0$ и $|F_{N+1}(x_1^{(N+1)})| < -F_N(x_1^{(N+1)})$,

$< -F_N(x_1^{(N+1)})$, то $\varphi_{N+1}(x_1^{(N+1)}) > 0$, т.е. $F_{N+1}(x) > F_N(x)$ для $1 \leq x \leq x_1^{(N+1)}$ и точка x_{N+1}^* , определяющая ноль функции $\varphi_{N+1}(x)$ на интервале $(1; x_1^{(N+1)})$, отсутствует, что противоречит рассмотренным случаям $N=3$ и $N=4$; 3) если $F_N(x_1^{(N+1)}) > 0$, то $\varphi_{N+1}(x_1^{(N+1)}) < 0$ и $\varphi_{N+1}(x)$ имеет единственный ноль в точке $x_{N+1}^* \in (1; x_1^{(N+1)})$. Таким образом, $\varphi_{N+1}(x^{(N+1)}) < 0$ и $1 < x_{N+1}^* < x_1^{(N+1)}$.

Представим $\varphi_{N+1}(x)$ в виде

$$\varphi_{N+1}(x) = \frac{1}{N(N-1)} x e^{-x} \Phi_{N+1}(x), \quad \Phi_{N+1}(x) = \sum_{k=2}^N \frac{k^{k+1}}{(k-2)!} x^{k-2} e^{-(k-2)x} \left(\frac{k+2}{k} - x \right).$$

Знак функции $\varphi_{N+1}(x)$ определяется знаком функции $\Phi_{N+1}(x)$, при этом точка нуля этих функций есть x_{N+1}^* . Точки $x_k = (k+2)/k$ образуют интервалы $(1 + 2/(k+1); 1 + 2/k)$, $k = \overline{2, N}$, в один из которых попадает точка $x_1^{(N+1)}$, в которой $\Phi_{N+1}(x_1^{(N+1)}) < 0$, при этом $x_1^{(N+1)} > x_{N+1}^*$. Точка $x_1^{(N+1)}$ разбивает слагаемые в $\Phi_{N+1}(x)$ на положительные и отрицательные. При изменении x от $x_1^{(N+1)}$ до 2 количество положительных слагаемых уменьшается (для $x \geq 2$ положительных слагаемых нет). Тогда $\Phi_{N+1}(x) < 0$ для $x > x_1^{(N+1)}$. Таким образом, функция $\varphi_{N+1}(x)$ не достигает нуля для $x > x_{N+1}^*$. Доказательство завершено.

Следствие 1. Функция $P_N(x)$ ($x > 0$), определённая формулой (7), имеет единственный максимум в точке x_N^0 , лежащей в границах (13).

Следствие 2. Плотность вероятностей $P_N(\hat{\lambda})$, определённая в (6), имеет единственный максимум в точке $\hat{\lambda}_0 = \lambda/x_N^0$.

Следствие 3. В силу неравенства (13) при $N \rightarrow \infty$ точка нуля функции (7) $x_N^0 \rightarrow 1$, т.е. $\hat{\lambda}_0 \rightarrow \lambda$.

3. Оценивание числа состояний асинхронного потока

Результатом процесса наблюдения за пуассоновским потоком является последовательность оценок (2), которая позволяет построить гистограмму оценок, являющуюся, в свою очередь, оценкой плотности вероятностей $P_N(\hat{\lambda})$. В силу этого корректно построенная огибающая гистограммы будет иметь единственный максимум. Если на временной оси в течение достаточно большого временного интервала функционирует пуассоновский поток интенсивности λ_1 , а затем на таком же достаточно большом интервале времени – пуассоновский поток интенсивности λ_2 ($\lambda_1 \gg \lambda_2$), то построенная по результатам наблюдений гистограмма оценок будет иметь два максимума. Корректно построенная огибающая первой гистограммы ($\lambda = \lambda_1$) и огибающая второй гистограммы ($\lambda = \lambda_2$) будут иметь общую точку пересечения, которая делит ось оценок на две части: в одной части будет иметь место гипотеза $\hat{\lambda} = \lambda_1$, в другой – гипотеза $\hat{\lambda} = \lambda_2$. Так как асинхронный поток имеет n состояний: $\lambda(t) = \lambda_i$, $i = \overline{1, n}$, то в процессе наблюдения за потоком при построении оценок (2) одна часть оценок будет относиться к оценкам, построенным на участках стационарности, другая часть – к оценкам, построенным на временных интервалах, одна часть которых относится к одному участку стационарности ($\lambda(t) = \lambda_i$, $i = \overline{1, n}$) процесса $\lambda(t)$, другая часть – к другому участку стационарности ($\lambda(t) = \lambda_j$, $j = \overline{1, n}$,

$i \neq j$) процесса $\lambda(t)$. Построенная при этом гистограмма оценок при достаточно больших длительностях участков стационарности будет иметь несколько максимумов. Число этих максимумов $\hat{n}$ и будет оценкой числа состояний n асинхронного потока событий.

Оценки $\hat{\lambda}_i$, $i = \overline{1, \hat{n}}$, определяются как точки максимума огибающей гистограммы оценок. Другой путь определения оценок $\hat{\lambda}_i$, $i = \overline{1, \hat{n}}$, заключается в построении $\hat{n}$ функций правдоподобия и решении $\hat{n}$ оптимизационных задач на максимизацию по переменной λ функций правдоподобия.

Заключение

Полученные результаты делают возможным в процессе наблюдения за потоком оценивание неизвестного числа состояний асинхронного МС-потока событий. Кроме того, предложенный эвристический подход позволяет осуществлять оценку $\hat{\lambda}_i$, $i = \overline{1, \hat{n}}$, величин λ_i , соответствующих тому или иному участку стационарности процесса $\lambda(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cox D.R. The analysis of non-Markovian stochastic processes // Proceedings of Cambridge Philosophical Society. 1955. V. 51, No. 3. P. 433–441.
2. Kingman J.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proceedings of Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60, No. 4. P. 923–930.
3. Горцев А.М., Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Управление и адаптация в системах массового обслуживания. Томск: Изд-во ТГУ, 1978. 208 с.
4. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
5. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
6. Neuts M.F. A versatile Markov point process // J. Appl. Probab. 1979. V. 16. P. 764–779.
7. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process // Communications in Statistics Stochastic Models. 1991. V. 7. P. 1–46.
8. Lucantoni D.M., Neuts M.F. Some steady-state distributions for the MAP/SM/1 queue // Communications in Statistics Stochastic Models. 1994. V. 10. P. 575–598.
9. Card H.C. Doubly stochastic Poisson processes in artificial neural learning // Neural Networks, IEEE Transaction. 1998. V. 9. Issue 1. P. 229–231.
10. Breuer L. An EM algorithm for batch Markovian arrival processes and its comparison to a simpler estimation procedure // Annals of Operations Research. 2002. V. 112. P. 123–138.
11. Telek M., Horvath G. A minimal representation of Markov arrival processes and a moments matching method // Performance Evaluation. 2007. V. 64. P. 1153–1168.
12. Okamura H., Dohi T., Trivedi K.S. Markovian arrival process parameter estimation with group data // IEEE/ACM Transactions on Networking. 2009. V. 17. P. 1326–1339.
13. Horvath A., Horvath G., Telek M. A joint moments based analysis of networks of MAP/MAP/1 queues // Performance Evaluation. 2010. V. 67. P. 759–788.
14. Нежелская Л.А. Нелинейная оптимальная фильтрация дважды стохастического потока с инициативными событиями // Тезисы докладов научно-технической конференции «Микросистема–91». Суздаль. М.: Всесоюз. общество информатики и вычислительной техники, 1991. С. 26–28.
15. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценка параметров синхронного МС-потока событий // Сети связи и сети ЭВМ: тез. докл. Восьмой Белорус. зимней школы-семинара по теории массового обслуживания. Минск: Изд-во БГУ, 1992. С. 33.
16. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оптимизация параметров адаптера при наблюдении за МС-потоком // Стохастические и детерминированные модели сложных систем. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1988. С. 20–32.
17. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оптимальная нелинейная фильтрация марковского потока событий с переключениями // Техника средств связи. Сер. Системы связи. 1989. Вып. 7. С. 46–54.
18. Нежелская Л.А. Алгоритм оценивания состояний полусинхронного потока событий с учётом мёртвого времени // Массовое обслуживание: потоки, системы, сети: материалы Четырнадцатой Белорус. зимней школы-семинара по теории массового обслуживания. Минск: Изд-во БГУ, 1998. С. 18–21.

19. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2(11). С. 66–81.
20. Горцев А.М., Нежелская Л.А. О связи МС-потоков и МАР-потоков событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 1(14). С. 13–21.
21. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A., Solov'ev A.A. Optimal State Estimation in MAP Event flows with Unextendable Dead Time // Automation and Remote Control. 2012. V. 73, No. 8. P. 1316–1326.
22. Bushlanov I.V., Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimating parameters of the synchronous towfold-stochastic flow of events // Automation and Remote Control. 2008. V. 69, No. 9. P. 1517–1533.
23. Bushlanov I.V., Gortsev A.M. Optimal estimation of the state of a synchronous double stochastic flow of events // Automation and Remote Control. 2004. V. 65, No. 9. P. 1389–1399.
24. Горцев А.М., Зуевич В.Л. Оптимальная оценка состояний асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным числом состояний // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2(11). С. 44–65.
25. Горцев А.М., Зуевич В.Л. Оптимальная оценка состояний асинхронного потока событий с конечным числом состояний в условиях непродлевающегося мертвого времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 3(12). С. 41–53.
26. Горцев А.М., Зуевич В.Л. Оптимальная оценка параметров асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным числом состояний // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 4(17). С. 25–40.
27. Наумов В.А. Марковские модели потоков требований // Системы массового обслуживания и информатика. М. : Изд-во УДН, 1987. С. 67–72.
28. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. М. : Мир, 1967. Т. 2. 752 с.
29. Шуленин В.П. Математическая статистика. Томск : Изд-во НТЛ, 2012. Ч. 1. 540 с.

Беккерман Екатерина Николаевна. E-mail: bekkermankn@tspu.edu.ru

Горцев Александр Михайлович, д-р техн. наук, профессор. E-mail: gam@mail.fpmk.tsu.ru

Томский государственный университет

Поступила в редакцию 12 апреля 2014 г.

Bekkerman Ekaterina A., Gortsev Alexander M. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

Heuristic algorithm for estimating the number of states of asynchronous MC-flow events.

Keywords: non-synchronous Markov chain flow of events; flow state; estimation; stationary state interval; probability density; histogram.

The non-synchronous MC-flow of events, which is a mathematical model employed in Integrated Services Digital Networks (ISDNs), is considered.

The flow intensity is a piecewise constant stationary random process $\lambda(t)$ with n states $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ($\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$). Process $\lambda(t)$ at a moment t is in the state i if $\lambda(t) = \lambda_i$ ($i = \overline{1, n}$). During stationary state interval there is a Poisson flow of events with state rate λ_i . Duration of staying in the i -th state is an exponentially distributed random value with the distribution function

$F_i(\tau) = 1 - e^{-\alpha_{ii}\tau}$, $\alpha_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_{ij}$ ($i = \overline{1, n}$), where $\alpha_{ij} > 0$ ($i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$) is the transition rate from state i to state j .

A flow occurs under conditions of uncertainty when information about the parameters and the number of states is not available. The problem is to estimate the values of unknown parameters λ_i , α_{ij} ($i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$), and n , using information from the moments $t_1, \dots, t_k$.

According to the definition of a flow, trace includes time intervals with $\lambda(t) = \lambda_i$ (the stationary state intervals), where the flow behaves like a Poisson flow. We consider the histogram of all possible rate estimates of some stationary state interval, on which $N+1$ events of a Poisson flow with rate λ were realized: $t_1, t_2, \dots, t_{N+1}$ ($\lambda \in \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$). This histogram is an estimate of the mixture of distribution densities:

$$P_N(\hat{\lambda}) = \sum_{k=2}^N q_k^{(N)} P_k(\hat{\lambda}), \quad P_k(\hat{\lambda}) = \lambda^k \frac{(k-1)^{k-1}}{(k-2)!} \left(\frac{1}{\hat{\lambda}}\right)^{k+1} e^{-\lambda \frac{k-1}{\hat{\lambda}}},$$

$$q_k^{(N)} = \frac{2(N-k+1)}{N(N-1)}, \quad k = \overline{2, N}; \quad \sum_{k=2}^N q_k^{(N)} = 1.$$

It is proved that $P_N(\hat{\lambda})$ is an unimodal function, and $\arg \max \left(P_N(\hat{\lambda}) \right) = \hat{\lambda}_0 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \lambda$.

So, the histogram of all possible rate estimates of a Poisson process has the only maximum. The maximum value indicates the flow rate. Each stationary state interval in the trace of MC-flow is a Poisson flow segment of constant intensity. The histogram, based on this trace, has several maxima in the condition of large duration of stationary state intervals. The number of these maxima is the estimate of the number of states n .

The estimates $\hat{\lambda}_i, i = \overline{1, \hat{n}}$ are defined as the maximum points of histogram envelope curve of all possible rate estimates. Another way to determine the estimates $\hat{\lambda}_i, i = \overline{1, \hat{n}}$ is to build $\hat{n}$ likelihood functions and to solve $\hat{n}$ optimization problems on maximization of the likelihood functions by the variable λ .

REFERENCES

1. Cox D.R. The analysis of non-Markovian stochastic processes. *Proceedings of Cambridge Philosophical Society*, 1955, vol. 51, no. 3, pp. 433-441.
2. Kingman J.F.C. On doubly stochastic Poisson process. *Proceedings of Cambridge Philosophical Society*, 1964, vol. 60, no. 4, pp. 923-930. (1964).
3. Gortsev A.M., Nazarov A.A., Terpugov A.F. *Upravlenie i adaptatsiya v sistemakh massovogo obsluzhivaniya* [Control and adaptation in queueing systems]. Tomsk: Tomsk State University Publ., 1978. 208 p.
4. Basharin G.P., Kokotushkin V.A., Naumov V.A. O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi [On a method of equivalent substitutions for communications network fragments calculation]. *Izv. AN SSSR. Tekhn. Kibernetika*, 1979, no. 6, pp. 92-99.
5. Basharin G.P., Kokotushkin V.A., Naumov V.A. O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi [On a method of equivalent substitutions for communications network fragments calculation]. *Izv. AN SSSR. Tekhn. kibernetika*. 1980, no. 1, pp. 55-61.
6. Neuts M.F. A versatile Markov point process. *Journal of Applied Probability*, 1979, vol. 16, pp. 764-779.
7. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process. *Communications in Statistics Stochastic Models*, 1991, vol. 7, pp. 1-46. DOI: 10.1080/15326349108807174.
8. Lucantoni D.M., Neuts M.F. Some steady-state distributions for the MAP/SM/1 queue. *Communications in Statistics Stochastic Models*. 1994, vol. 10, pp. 575-598. DOI: 10.1080/15326349408807311.
9. Card H.C. Doubly stochastic Poisson processes in artificial neural learning. *Neural Networks, IEEE Transaction*. 1998, vol. 9, is. 1, pp. 229-231. DOI: 10.1109/72.655046.
10. Breuer L. An EM algorithm for batch Markovian arrival processes and its comparison to a simpler estimation procedure. *Annals of Operations Research*. 2002, vol. 112, pp. 123-138. DOI: 10.1023/A:1020981005544.
11. Telek M., Horvath G. A minimal representation of Markov arrival processes and a moments matching method. *Performance Evaluation*. 2007, vol. 64, pp. 1153-1168. DOI: 10.1016/j.peva.2007.06.001.
12. Okamura H., Dohi T., Trivedi K.S. Markovian arrival process parameter estimation with group data. *IEEE/ACM Transactions on Networking*. 2009, vol. 17, pp. 1326-1339. DOI: 10.1109/TNET.2008.2008750.
13. Horvath A., Horvath G., Telek M. A joint moments based analysis of networks of MAP/MAP/1 queues. *Performance Evaluation*. 2010, vol. 67, pp. 759-788. DOI: 10.1109/QEST.2008.26.
14. Nezhe'skaya L.A. Nonlinear optimal filtration of double stochastic flow with enterprising events. *Tezisy dokladov nauchno-tekhnicheskoy konferentsii "Mikrosistema-91"* [Theses of scientific and technical conference "Microsystem-91"]. Suzdal', Moscow: Vsesoyuz. obshchestvo informatiki i vychislitel'noy tekhniki Publ., 1991, pp. 26-28. (In Russian).
15. Gortsev A.M., Nezhe'skaya L.A. [Parameters estimation of synchronous Markov chain (MC) flow of events]. *Seti svyazi i seti EVM : tez. dokl. Vos'moy Belorusskoy zimney shkoly-seminara po teorii massovogo obsluzhivaniya* [Telecommunications and computer networks: theses of eighth Belarusian winter workshop on queueing theory]. Minsk: Belarusian State University Publ., 1992, p. 33. (In Russian).
16. Gortsev A.M., Nezhe'skaya L.A. *Optimizatsiya parametrov adaptera pri nablyudenii za MC-potokom* [Parameters optimization in monitoring the Markov chain (MC) flow]. In: Topchiy V.A. (ed.). *Stokhasticheskie i determinirovannye modeli slozhnykh sistem* [Stochastic and deterministic models of complex systems]. Novosibirsk: VTs SO AN SSSR Publ., 1988, pp. 20-32.
17. Gortsev A.M., Nezhe'skaya L.A. Optimal'naya nelineynaya fil'tratsiya markovskogo potoka sobyitiy s pereklyucheniymi [The optimal nonlinear filtration of Markovian flow of events with commutation]. *Tekhnika sredstv svyazi. Ser. Sistemy svyazi*, 1989. Vyp. 7, pp. 46-54.
18. Nezhe'skaya L.A. [Algorithm of states evaluation of semisynchronous flow of events in consideration of dead, time]. *Massovoe obsluzhivanie: potoki, sistemy, seti : materialy Chetyrnadtsatoy Belorusskoy zimney shkoly-seminara po teorii massovogo obsluzhivaniya* [Queueing theory: flows, systems and networks: materials of 14th Belarusian winter workshop on queueing theory]. Minsk: Belarusian State University Publ., 1998, pp. 18-21. (In Russian).
19. Gortsev A.M., Kalyagin A.A., Nezhe'skaya L.A. Optimal states estimation of integrated semisynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika - Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2010, no. 2(11), pp. 66-81. (In Russian).

20. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. On connection of MC flows and MAP flows of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika - Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2011, no. 1(14), pp. 13-21. (In Russian).
21. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A., Solov'ev A.A. Optimal state estimation in MAP event flows with unextendable dead time. *Automation and Remote Control*, 2012, vol. 73, no. 8, pp. 1316-1326. DOI: 10.1134/S000511791208005X.
22. Bushlanov I.V., Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A. Estimating parameters of the synchronous twofold-stochastic flow of events. *Automation and Remote Control*, 2008, no. 9, pp. 1517-1533. DOI: 10.1134/S0005117908090075.
23. Bushlanov I.V., Gortsev A.M. Optimal estimation of the state of a synchronous double stochastic flow of events. *Automation and Remote Control*, 2004, vol. 65, no. 9, pp. 1389-1399. DOI: 10.1023/B:AURC.0000041418.09187.63.
24. Gortsev A.M., Zuevich V.L. Optimal state estimation of nonsynchronous doubly stochastic finite state flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika - Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2010, no. 2(11), pp. 44-65. (In Russian).
25. Gortsev A.M., Zuevich V.L. Optimal state estimation of nonsynchronous finite state flow of events in conditions of constant dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika - Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2010, no. 3(12), pp. 41-53. (In Russian).
26. Gortsev A.M., Zuevich V.L. Optimal parameter estimation of nonsynchronous doubly stochastic finite state flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika - Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2011, no. 4(17), pp. 25-40. (In Russian).
27. Naumov V.A. *Markovskiye modeli potokov trebovaniy. Sistemy massovogo obsluzhivaniya I informatika* [Markovian models of arrival processes. Queuing systems and computer science]. Moscow: Peoples' Friendship University (PFU) Publ., 1987, pp. 67-72.
28. Feller W. *Vvedeniye v teoriyu veroyatnostey i eye prilozheniya* T.2 [An Introduction to Probability Theory and its applications. Vol. II]. Translated from English by Yu.A. Prokhorov. Moscow: Mir Publ., 1967. 752 p.
29. Shulenin V.P. *Matematicheskaya statistika. Chast' 1* [Mathematical statistics. Vol. 1]. Tomsk: NTL Publ., 2012. 540 p.