
МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ВЕСТИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал
2025 **№ 98**

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский
Томский государственный университет»

**РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА
«ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»**

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменчиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), И.А. Колесников (отв. секретарь по разделу «Математика»), А.Д. Сидоров (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, В.Г. Бутов, А.Ю. Веснин, А.Н. Ищенко, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, Е.Л. Лобода, Г.О. Рябова, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Е. А. Тимошенко, М.А. Шеремет, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер.

**EDITORIAL COUNCIL
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics**

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

**EDITORIAL BOARD
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics**

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Ivan A. Kolesnikov (Executive Editor of the Mathematics Section), Aleksey D. Sidorov (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimatov, Aleksey M. Bubenchikov, Vladimir G. Butov, Igor M. Vasenin, Andrei Yu. Vesnin, Aleksandr N. Ishchenko, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Egor L. Loboda, Galina O. Ryabova, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Egor A. Timoshenko, Mikhail A. Sheremet, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесен в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферируется в MatSciNet.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36
Электронный адрес: <http://journals.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740
E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ**МАТЕМАТИКА**

Баженов Д.С. Кольца с ограниченным градуированным индексом нильпотентности	5
Бондарчук И.С., Герасимчук А.Л., Глухова Л.Б., Марченко Е.С., Кычкин А.А., Кычкин А.К. Исследование кинетических характеристик биоцидного воздействия наночастиц оксида меди при климатической деструкции и биокоррозии в экстремальных условиях холодного климата	13
Майер Ф.Ф., Тастанов М.Г., Утемисова А.А. Оценки аналитических функций, области значений которых содержатся в круговой лунечке	28
Сенашов В.И. Признак непростоты группы с конечным элементом	44

МЕХАНИКА

Азаров Д.А. Построение определяющих соотношений нелинейно-упругих сред с помощью механико-геометрической модели с диагональными связями	51
Архипов В.А., Басалаев С.А., Перфильева К.Г., Порязов В.А. Метод и результаты экспериментального исследования тепловых потерь в камере сгорания твердотопливной двигательной установки	62
Борзенко Е.И., Гарбузов Д.Н., Ефремов М.А. Численное моделирование течений неильтоновской жидкости в аппарате с лопастными мешалками	70
Валиуллина В.И., Галеев Р.Р., Зиннатуллин Р.Р., Мусин А.А., Ковалева Л.А. Влияние электромагнитного поля на характеристики пористых материалов, заполненных сложными коллоидными системами органических соединений	84
Валихов В.Д., Хрусталёв А.П., Жуков И.А., Ворожцов А.Б. Влияние базальтовых волокон на структуру и механические свойства алюминиевого сплава АК12	97
Ларкин Д.О., Еремин И.В. Исследование двухфазного течения в соплах РДТТ	108
Миньков Л.Л., Гимаева Н.Р., Диль Д.В. Численное исследование выхода на стационарный режим двигательной бессопловой установки с вязкоупругим зарядом цилиндрической формы	120
Павлов М.С., Павлюк Ю.А., Пышнограй Г.В. Влияние реологических характеристик полимерных расплавов на кинематику их течений в сходящихся каналах	136
Старченко А.В., Данилкин Е.А., Лещинский Д.В. Численное моделирование влияния солнечного излучения на аэродинамику, теплообмен и перенос примеси в уличном каньоне	151
Шабловский О.Н. Неустойчивые возмущения закрученного течения идеальной несжимаемой жидкости в областях с открытыми границами	166

CONTENTS

MATHEMATICS

Bazhenov D.S. Rings with a bounded graded index of nilpotency	5
Bondarchuk I.S., Gerasimchuk A.L., Glukhova L.B., Marchenko E.S., Kychkin A.A., Kychkin A.K. A study of kinetic characteristics of biocidal action of copper oxide nanoparticles during climatic destruction and biocorrosion under extreme conditions of cold climate	13
Maiyer F.F., Tastanov M.G., Utemissova A.A. Estimates of analytical functions whose ranges of values are contained in a circular lune	28
Senashov V.I. A criterion of nonsimplicity of a group with a finite element	44

MECHANICS

Azarov D.A. Formulation of constitutive relations for nonlinear elastic media using a mechanical–geometric model with diagonal bonds	51
Arkhipov V.A., Basalaev S.A., Perfil'eva K.G., Poryazov V.A. Method and results of an experimental study of heat losses in a combustion chamber of a solid-propellant propulsion system	62
Borzenko E.I., Garbuzov D.N., Efremov M.A. Numerical modeling of non-newtonian fluid flows in an apparatus with blade mixers	70
Valiullina V.I., Galeev R.R., Zinnatullin R.R., Musin A.A., Kovaleva L.A. Impact of the electromagnetic field on the properties of porous materials containing complex colloidal mixtures of organic compounds	84
Valikhov V.D., Khrustalyov A.P., Zhukov I.A., Vorozhtsov A.B. Effect of basalt fibers on the structure and mechanical properties of AK12 aluminum alloy	97
Larkin D.O., Eremin I.V. Investigation of a two-phase flow in the nozzles of solid-propellant rockets	108
Min'kov L.L., Gimaeva N.R., Dil' D.V. Numerical study of the transition to a steady-state operating mode of a nozzleless propulsion system with a viscoelastic cylindrical charge	120
Pavlov M.S., Pavlyuk Yu.A., Pyshnograi G.V. Effect of rheologocal properties of polymer melts on kinematics of their flows in converging channeles	136
Starchenko A.V., Danilkin E.A., Leshchinskij D.V. Numerical simulation of the solar radiation effect on the aerodynamics, heat exchange, and pollution transfer in a street canyon	151
Shablovskiy O.N. Unstable perturbations in a swirling flow of an ideal incompressible fluid in the regions with open boundaries	166

МАТЕМАТИКА**MATHEMATICS**

Научная статья

УДК 512.552.23

doi: 10.17223/19988621/98/1

MSC: 16W50

**Кольца с ограниченным градуированным
индексом нильпотентности**

Дмитрий Сергеевич Баженов

Московский государственный университет, Москва, Россия, trongsund@yandex.ru

Аннотация. Статья посвящена исследованию свойств градуированных колец с ограниченным градуированным индексом нильпотентности. Показано, что градуированный случай существенно отличается от неградуированного, за исключением gr-полупервичного случая

Ключевые слова: градуированные кольца, кольца с ограниченным индексом нильпотентности, полупервичные кольца, первичные кольца

Для цитирования: Баженов Д.С. Кольца с ограниченным градуированным индексом нильпотентности // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 98. С. 5–12. doi: 10.17223/19988621/98/1

Original article

Rings with a bounded graded index of nilpotency

Dmitry S. Bazhenov

Moscow State University, Moscow, Russian Federation, trongsund@yandex.ru

Abstract. This article is devoted to exploration of graded rings with a bounded graded index of nilpotency. It is shown that the graded case is drastically different from the non-graded one, except for gr-semiprime rings.

Graded ring is an algebraical object which is a generalization of such structures as polynomial rings and group algebras, and despite being quite obvious and straightforward, graded rings started being explored only in the middle of the 20th century. Construction of this object is based on two simple ideas: the first one is that any element of a ring is a sum of homogenous components, and the second one is that multiplication of homogenous elements induces a group (or a semigroup) structure on homogenous subgroups of the additive group of a ring.

In the theory of graded rings, a lot of graded analogues of classic concepts are introduced. For example, an ideal is called a graded ideal if it includes, with any of its elements, its homogenous components; a ring is called a gr-division ring (or a gr-field in the commutative case) if every its nonzero homogenous element is invertible, etc.

In this article we consider gr-prime rings (rings without graded nonzero ideals – divisors of zero), gr-semiprime rings (rings without graded nonzero nilpotent ideals), gr-reduced rings (rings without nonzero homogenous nilpotent elements) and, certainly, rings with bounded graded index of nilpotency (rings without nonzero homogenous nilpotent elements with nilpotency degree more than a certain natural n).

Keywords: graded rings, rings with bounded index of nilpotency, semiprime rings, prime rings

For citation: Bazhenov, D.S. (2025) Rings with a bounded graded index of nilpotency. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mehanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 98. pp. 5–12. doi: 10.17223/19988621/98/1

Введение

В статье кольца всюду предполагаются ассоциативными и с единицей.

Определение. Кольцо R называется *градуированным по группе G* или *G -градуированным*, если его группа по сложению распадается в прямую сумму слагаемых, индексированных элементами группы G :

$$R_+ = \bigoplus_{g \in G} R_g,$$

причем $\forall g, h \in G R_g R_h \subset R_{gh}$. Кольцо называется *градуированным*, если оно градуировано по некоторой группе G .

Определение. Элемент r градуированного кольца R называется *однородным*, если $\exists g \in G r \in R_g$. Множество всех однородных элементов кольца R обозначается как $h(R)$.

Определение. Кольцо R называется *редуцированным*, если оно не содержит ненулевыхnilпотентных элементов. Градуированное кольцо R называется *gr-редуцированным*, если в нем нет ненулевых nilпотентных однородных элементов.

Замечание. Не любое gr-редуцированное кольцо является редуцированным. Пример – кольцо $R = M_2(\mathbf{k})$ (здесь \mathbf{k} – поле, $\text{char } \mathbf{k} \neq 2$) со следующей $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$ -градуировкой:

$$R_{(0,0)} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \quad R_{(0,1)} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}, \quad R_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{pmatrix}, \quad R_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}.$$

Определение. Градуированное кольцо R называется *кольцом с градуированным индексом nilпотентности n* , если в нем существуют однородные nilпотентные элементы r такие, что $r^{n-1} \neq 0$, и для любого однородного nilпотентного элемента $r \in R$ $r^n = 0$. Если выполняется только последнее условие, говорят, что кольцо *имеет градуированный индекс nilпотентности $\leq n$* .

Gr-редуцированные кольца

Определение. Подмножество X градуированного кольца R называется *градуированным*, если вместе с любым элементом оно содержит все частичные суммы его однородных слагаемых.

Всюду далее $l(X)$ и $r(X)$ – соответственно левый и правый аннуляторы подмножества X кольца R . Легко заметить, что если X – градуированное подмножество, то $l(X)$ и $r(X)$ – соответственно, градуированные левые и правые идеалы кольца R .

Теорема. Пусть R — gr-редуцированное кольцо.

1) Если $a_1, \dots, a_n \in h(R)$ и $a_1 \dots a_n = 0$, то $Ra_{s(1)}R \dots Ra_{s(n)}R = 0$ для любой подстановки $s \in S_n$.

2) Если $x, y \in h(R)$, то $xy = 0 \Leftrightarrow yx = 0 \Leftrightarrow xRy = yRx = 0$.

3) $\mathrm{r}(a) = \mathrm{r}(a^n)$ для всех $a \in h(R)$ и $n \in \mathbb{N}$.

4) Для любого градуированного $B \subset R$ $\mathrm{r}(B)$ — градуированный идеал и $\mathrm{r}(B) = \mathrm{l}(B) = \mathrm{r}(RBR) = \mathrm{l}(RBR) = \{a \in R \mid RBR \cap RaR = 0\}$.

Доказательство. 1)–3) Произведение $a_{s(1)} \cdot \dots \cdot a_{s(n)}$ можно получить из $a_1 \cdot \dots \cdot a_n$ перестановками конечного числа соседних множителей. Если $x, y \in h(R)$ и $xy = 0$, то $\forall r \in h(R)$ $(yxr)^2 = yr(xy)rx = 0$, откуда по gr-редуцированности $\forall r \in h(R)$ $yxr = 0$, $yRx = 0$, $yx = 0$, $\forall r \in h(R)$ $(xry)^2 = xr(yx)ry = 0$, откуда по gr-редуцированности $\forall r \in h(R)$ $xry = 0$ и $xRy = 0$. Поэтому $Ra_{s(1)}R \dots Ra_{s(n)}R = 0$. Пусть $a \in h(R)$ и $b \in h(\mathrm{r}(a))$. Тогда $a^n b^n = 0$, откуда $(ab)^n = 0$, поэтому по gr-редуцированности $ab = 0$ и $\mathrm{r}(a^n) \subset \mathrm{r}(a) \subset \mathrm{r}(a^n)$.

4) Обозначим $D = \{a \in h(R) \mid RBR \cap RaR = 0\}$. Легко проверить, что $D \subset \mathrm{r}(RBR) \subset \mathrm{r}(B)$ и $D \subset \mathrm{l}(RBR) \subset \mathrm{l}(B)$. По 1) $\mathrm{r}(B) = \mathrm{l}(B) \subset \mathrm{r}(RBR)$. Пусть $a \in h(\mathrm{r}(RBR))$. Тогда $(RaR \cap RBR)^2 = 0$. Так как R gr-редуцировано, то $RaR \cap RBR = 0$ и $\mathrm{r}(RBR) \subset D$.

Кольца с градуированным ограниченным индексом нильпотентности

В теории колец с ограниченным индексом нильпотентности известны следующие утверждения.

Теорема [1. Теорема 6.38]. Пусть R — кольцо индекса нильпотентности $\leq n$.

1) Если X_1, \dots, X_n — такие подмножества R , что $X_i X_j = 0$ при $i \geq j$, то $X_1 X_2 \dots X_n = 0$.

2) Если B — нильподкольцо в R , то $(b^{n-1} \mathbf{Z} + Bb^{n-1}B)^2 = 0$ для всех $b \in B$.

3) Если B — нильподкольцо в R и $b \in B$, то b^{n-1} лежит в сумме всех нильпотентных идеалов нилькольца B .

4) Если B — конечно порожденное нильподкольцо в R , то нилькольцо B нильпотентно.

5) Если D — нильподкольцо в R , то D^n лежит в сумме всех нильпотентных идеалов кольца R , и поэтому D^n лежит в каждом полупервичном идеале кольца R .

6) Если e_1, e_2, \dots, e_{n+1} — ортогональные идеалы в R , то $e_1 Re_2 R \dots e_n Re_{n+1} = 0$.

7) $(X^n \mathrm{r}(X^{n+1}))^{n+1} = 0$ для любого подмножества X кольца R .

Нам предстоит выяснить справедливость градуированных аналогов этих фактов.

Теорема. Существует градуированное кольцо с градуированным индексом нильпотентности 2, и его градуированные подмножества X_1 и X_2 такие, что $X_1^2 = X_2^2 = X_2 X_1 = 0$, $X_1 X_2 \neq 0$.

Доказательство. Рассмотрим некоммутативную ассоциативную алгебру $R = \mathbf{k}[x, y]/(x^2, y^2, yx)$ с $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$ -градуировкой:

$$R_{(0,0)} = \mathbf{k}, \quad R_{(0,1)} = \mathbf{k}x, \quad R_{(1,0)} = \mathbf{k}y, \quad R_{(1,1)} = \mathbf{k}xy.$$

Можно заметить, что она изоморфна подалгебре $M_3(\mathbf{k})$, состоящей из матриц, представимых в виде суммы скалярной и верхней ниль треугольной, причем элементу $a + bx + cy + dxy$ соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} a & b & d \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь градуированные подмножества $X_1 = \{x\}$, $X_2 = \{y\}$. Тогда $X_1^2 = X_2^2 = X_2X_1 = 0$, но $X_1X_2 = \{xy\} \neq 0$.

Градуированный аналог к утверждению 2 также оказался неверен.

Теорема. Существуют градуированное кольцо R градуированного индекса нильпотентности 2, его gr-нильподкольцо B и его однородный элемент b такие, что $(bZ + BbB)^2 \neq 0$.

Доказательство. Рассмотрим некоммутативную ассоциативную алгебру R над полем \mathbf{k} вида $\mathbf{k}\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle / Y$, где Y – идеал, порожденный всеми выражениями вида y^2 , где

$$y = \prod_{i=1}^l x_{k_i}, \quad l \geq 1, \quad 1 \leq k_i \leq 4,$$

градуированную по группе $Z_2 * Z_2 * Z_2 * Z_2 = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4 \mid \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2 = e \rangle$, $R_e = \mathbf{k}$, $R_{\sigma_1 \dots \sigma_{k_n}} = \mathbf{k}x_{k_1} \dots x_{k_n}$. Нетрудно заметить, что если взять в качестве B все многочлены из R с нулевым свободным членом, а в качестве b взять x_1 , то $(bZ + BbB)^2 \neq 0$, поскольку, например, $x_1x_2x_1x_3 \neq 0$.

Те же самые кольцо и его gr-нильподкольцо оказываются контрпримером к аналогам утверждений 3 и 4, как показывает

Теорема. В кольце R gr-нильподкольцо B конечно порождено, но не нильпотенно и содержит элемент, не лежащий ни в одном нильпотентном градуированном идеале кольца B , а следовательно, и в их сумме.

Доказательство. Назовем слово в произвольном алфавите бесквадратным, если ни одно его конечное подслово не содержится в нем два раза подряд. Рассмотрим элемент $x_1 \in B$. Он не может лежать в сумме нильпотентных градуированных идеалов кольца R , поскольку иначе он лежал бы хотя бы в одном из градуированных нильпотентных идеалов, содержащихся в gr-нилькольце B , а значит, и сам идеал Bx_1B был бы нильпотентен, что неверно в силу следующего варианта теоремы Туз, доказательство которого можно найти в [2. С. 16].

Теорема. Существует бесконечное бесквадратное слово в алфавите $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, начинающееся с x_2 , и в котором между любыми двумя символами x_1 находится не менее двух других символов.

Заметим, что именно условие бесквадратности для конечного слова (m_1, \dots, m_k) , $1 \leq m_i \leq 4$, является критерием неравенства нулю произведения $\prod_{i=1}^k x_{m_k}$. Легко увидеть, что идеал $(Bx_1B)^m$ содержит моном, равный произведению элементов из начального подслова этого слова, заканчивающегося не на x_1 , но содержащего ровно m вхождений x_1 . Поскольку слово бесквадратное, этот моном не равен нулю; значит, ни при каком натуральном m идеал $(Bx_1B)^m$ не равен 0, то есть идеал Bx_1B ненильпотентен.

Контрпримером к градуированным аналогам утверждений 5, 6 и 7 будет градуированное кольцо $R = M_3(\mathbf{k})$, градуированное по группе Z^2 следующим образом:

$R_{(0,0)}$ состоит из диагональных матриц, $R_{(1,0)} = \mathbf{k}E_{12}$, $R_{(0,1)} = \mathbf{k}E_{23}$, $R_{(1,1)} = \mathbf{k}E_{13}$, $R_{(-1,0)} = \mathbf{k}E_{21}$, $R_{(0,-1)} = \mathbf{k}E_{32}$, $R_{(-1,-1)} = \mathbf{k}E_{31}$, $R_{(m,n)} = 0$ для остальных пар $(m, n) \in \mathbf{Z}$. Нетрудно заметить, что у этого кольца градуированный индекс нильпотентности равен 2.

Теорема. В кольце R существуют ортогональные идеалы e_1, e_2, e_3 такие, что $e_1Re_2Re_3 \neq 0$.

Доказательство. Возьмем $e_i = E_{ii}$ для $i = 1, 2, 3$. Тогда $e_1E_{12}e_2E_{23}e_3 = E_{13} \neq 0$.

Теорема. В кольце R существует градуированное подмножество X , для которого $(X^2r(X^3))^3 \neq 0$.

Доказательство. X – градуированное подмножество R , состоящее из верхних ниль треугольных матриц, которое не удовлетворяет градуированному аналогу утверждения (7) п. 1. В самом деле, $X^2 = \mathbf{k}E_{13}$, $X^3 = 0$, $r(X^3) = R$, $(X^2r(X^3))^3 = (X^2R)^3 = X^2R = \{a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + a_{13}E_{13} \mid a_{11}, a_{12}, a_{13} \in \mathbf{k}\} \neq 0$.

Gr-полупервичные кольца с ограниченным градуированным индексом нильпотентности

Сначала вспомним некоторые факты из теории полупервичных колец.

Теорема [1. Теорема 6.39]. Для полупервичного кольца R и любого натурального n равносильны следующие утверждения:

1) R – кольцо индекса $\leq n$;

2) $X_1X_2 \dots X_n = 0$ для любых таких подмножеств $X_1, \dots, X_n \subset R$, что $X_iX_j = 0$ при $i \geq j$;

3) $r(X^n) = r(X^{n+1})$ для любого подмножества $X \subset R$;

4) $r(x^n) = r(x^{n+1})$ для любого $x \in R$;

5) $r(Tx^n) = r(Tx^{n+1})$ для любого $x \subset R$ и для любого идеала $T \subset R$.

Сформулируем градуированные аналоги данных утверждений.

1') R – кольцо градуированного индекса $\leq n$.

2') $X_1X_2 \dots X_n = 0$ для любых таких градуированных подмножеств $X_1, \dots, X_n \subset R$, что $X_iX_j = 0$ при $i \geq j$;

3') $r(X^n) = r(X^{n+1})$ для любого градуированного подмножества $X \subset R$;

4') $r(x^n) = r(x^{n+1})$ для любого однородного $x \in R$;

5') $r(Tx^n) = r(Tx^{n+1})$ для любого однородного $x \subset R$ и для любого градуированного идеала $T \subset R$.

Нетрудно проверить, что для gr-полупервичного кольца из 1') не следует 2'), контрпримером может послужить все то же самое $M_3(\mathbf{k})$ с \mathbf{Z}^2 -градуировкой из предыдущего параграфа. Утверждения же 2')–5') для gr-полупервичного кольца равносильны, и, более того, имеет место

Теорема. Для gr-полупервичных колец с градуированным индексом нильпотентности $\leq n$ выполнено

$$(1') \Leftrightarrow (2') \Leftrightarrow (3') \Leftrightarrow (4') \Leftrightarrow (5').$$

Доказательство. Докажем сначала $2' \Rightarrow 3'$). Обозначим $X_k = r(X^k)X^k$, $k = 1, \dots, n$. Тогда при $k \geq l$ $X_kX_l = r(X^k)X^{k-l}X^l r(X^l) = 0$. По предположению $0 = X_1X_2\dots X_n = r(X)(Xr(x^2)) \dots (X^{n-1}r(X^n))X^n$. Поскольку правый градуированный идеал $X^n r(X^{n+1})$ лежит в $r(X) \cap Xr(x^2) \cap \dots \cap X^{n-1}r(X^n)$, имеем $(X^n r(X^{n+1}))^{n+1} = 0$. Но поскольку наше кольцо gr-полупервично, выполняется $X^n r(X^{n+1}) = 0$, откуда $r(X^{n+1}) \subset r(X^n) \subset r(X^{n+1})$ и $r(X^n) = r(X^{n+1})$.

3') \Rightarrow 4') Тривиально.

4') \Rightarrow 1') Пусть x – однородный нильпотентный элемент в R . Тогда $r(x^m) = R$ для некоторого натурального $m > n$. По 4') $r(x^n) = r(x^{n+1}) = \dots = r(x^m) = R$, $x^n = 0$.

2') \Rightarrow 5') Обозначим $X_k = r(Tx^k)Tx^k$, $k = 1, \dots, n$. Если $k \geq 1$, то $X_kX_l = r(Tx^k)Tx^{k-l}Tx^l$ $r(Tx^l) = 0$. По 2') $0 = X_1X_2 \dots X_n = TX_1X_2 \dots X_n = (Tr(Tx))(Tr(Tx^2)) \dots (Tr(Tx^{n-1})r(Tx^n))Tx^n$. Если $k \geq 0$, то $Tx^n r(Tx^{n+1}) = Tx^k x^{n-k} r(Tx^{n+1})$, $x^{n-k} r(Tx^{n+1}) \subset r(Tx^{n+1})$. Поэтому $Tx^n r(Tx^{n+1}) \subset Tx^k r(Tx^{k+1})$ для всех $k \geq 0$. Тогда $(Tx^n r(Tx^{n+1}))^{n+1} = 0$. Отсюда из gr-полупервичности R видим $Tx^n r(Tx^{n+1}) = 0$, а значит, $r(Tx^{n+1}) \subset r(Tx^n) \subset r(Tx^{n+1})$ и $r(Tx^n) = r(Tx^{n+1})$.

5') \Rightarrow 4') следует из того, что $r(x^n) = r(Rx^n) = r(Rx^{n+1}) = r(x^{n+1})$.

Gr-первичные кольца с градуированным ограниченным индексом нильпотентности

Определение. Кольцо называется *ортогонально (gr-)конечным*, если в нем не существует бесконечного подмножества попарно ортогональных (однородных) идемпотентов, и *ортогонально (gr-)n-конечным*, если в нем максимальное подмножество попарно ортогональных (однородных) идемпотентов состоит ровно из n элементов.

Теорема [1. Теорема 6.41]. Для первичного кольца R индекса $\leq n$ верны следующие утверждения:

1) R – ортогонально n -конечное кольцо.

2) Каждая строго возрастающая цепь правых (левых) аннуляторов имеет не более n собственных включений.

3) R – кольцо с условиями максимальности и минимальности для правых и левых аннуляторов.

4) Каждый существенный правый идеал L в R содержит такой элемент s , что $r(s) = 0$.

5) В R каждый ненулевой идеал содержит неделимый нуль.

Выпишем градуированные аналоги этих понятий и проверим, верны ли они для любого gr-первичного кольца R с градуированным индексом нильпотентности $\leq n$.

1') R – gr-ортогонально n -конечное кольцо.

2') Каждая строго возрастающая цепь нетривиальных правых (левых) градуированных аннуляторов имеет не более n собственных включений.

3') R – кольцо с условиями максимальности и минимальности для правых и левых градуированных аннуляторов.

4') Каждый gr-существенный правый идеал L в R содержит такой однородный элемент s , что $r(s) = 0$.

5') В R каждый ненулевой градуированный идеал содержит однородный неделимый нуль.

Утверждения 1') и 3'), а следовательно, и 2'), оказались неверны, как показывает

Теорема. Существует gr-первичное кольцо с градуированным индексом нильпотентности 2, не удовлетворяющее условию ни минимальности, ни максимальности ни для правых, ни для левых градуированных аннуляторов.

Доказательство. Рассмотрим кольцо R бесконечных вправо и вниз матриц с коэффициентами из поля \mathbf{k} , представимых в виде суммы скалярной и финитной

(т.е. такой, у которой лишь конечное число элементов отлично от нуля), градуированное по группе $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{Z}$ следующим образом: степень диагональной матрицы равна нулю,

$$\deg E_{ij} = \begin{cases} (0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, \overset{j-1}{1}, \dots, 0, \dots), & i < j, \\ (0, \dots, -1, \dots, -1, 0, \dots), & i > j. \end{cases}$$

Очевидно, градуированный индекс нильпотентности кольца равен 2. Это кольцо не gr-ортогонально конечно (и тем более не gr-ортогонально 2-конечно), поскольку имеется бесконечное множество ортогональных идемпотентов $\{E_{nn}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Единственным нетривиальным градуированным идеалом этого кольца является идеал F , состоящий из финитных матриц из R , и поскольку $F^2 = F$, кольцо R gr-первично; но имеется строго возрастающая цепь правых градуированных аннуляторов $A_1 \subsetneq A_2 \dots \subsetneq A_k \subsetneq \dots$, где A_k состоит из матриц, в которых ненулевые только первые k строк, а также строго убывающая цепь правых градуированных аннуляторов $B_1 \supseteq B_2 \dots \supseteq B_k \supseteq \dots$, где B_k состоит из матриц, у которых первые k строк ненулевые. Аналогично с левыми аннуляторами с заменой строк на столбцы.

Утверждения 4') и 5') также оказались неверны, как показывает

Теорема. Существует gr-первичное кольцо с градуированным индексом нильпотентности 2, в котором есть gr-существенный правый идеал L , у всех однородных элементов которого правый аннулятор ненулевой, и в котором есть ненулевой градуированный идеал, в котором все однородные элементы – делители нуля.

Доказательство. Пусть R – некоммутативная ассоциативная \mathbf{k} -алгебра $\langle x, z \mid xzx = 0, z^2 = 1 \rangle$, градуированная по группе $D_\infty \cong \langle r, s \mid rs = sr^{-1}, s^2 = e \rangle$,

$$R_\sigma = \begin{cases} \mathbf{k}x^n, & \sigma = r^n, \\ \mathbf{k}zx^n z, & \sigma = r^{-n}, \\ \mathbf{k}x^n z, & \sigma = r^n s, \\ \mathbf{k}zx^n, & \sigma = sr^n \end{cases}$$

(во всех четырех случаях $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$). Рассмотрим правый градуированный идеал $xR + zxR$ и заметим, что в нем есть все элементы вида x^k, zx^k, x^kz и zx^kz при $k > 1$, т.е. все необратимые однородные элементы; следовательно, этот правый идеал будет gr-существенным. Но у любого однородного элемента из этого идеала правый аннулятор будет содержать либо zx (для элементов вида x^k и zx^k), либо x (для элементов вида x^kz и zx^kz). По той же самой причине все однородные элементы любого градуированного идеала в R являются делителями нуля.

Список источников

1. Туганбаев А.А. Теория колец. Арифметические модули и кольца. М.: МЦНМО, 2009. 472 с.
2. Саломаа А. Жемчужины теории формальных языков. М.: Мир, 1986. 159 с.

References

1. Tuganbaev A.A. (2009) *Teoriya kolots. Arifmeticheskiye moduli i kol'tsa* [Theory of rings. Arithmetic modules and rings]. Moscow: Moscow Center for Continuous Mathematical Education.
2. Salomaa A. (1981) *Jewels of Formal Language Theory*. Computer Science Press.

Сведения об авторе:

Баженов Дмитрий Сергеевич – выпускник аспирантуры кафедры высшей алгебры Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. E-mail: trongsund@yandex.ru

Information about the author:

Bazhenov Dmitry S. (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation).
E-mail: trongsund@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 31.01.2025; принята к публикации 08.12.2025

The article was submitted 31.01.2025; accepted for publication 08.12.2025

Научная статья

УДК 51-76

doi: 10.17223/19988621/98/2

MSC: 92C45

Исследование кинетических характеристик биоцидного воздействия наночастиц оксида меди при климатической деструкции и биокоррозии в экстремальных условиях холодного климата

Бондарчук Иван Сергеевич¹, Герасимчук Анна Леонидовна²,

Глухова Любовь Борисовна³, Марченко Екатерина Сергеевна⁴,

Кычкян Айсен Анатольевич⁵, Кычкян Анатолий Константинович⁶

^{1, 2, 3, 4} Томский государственный университет, Томск, Россия

⁵ Федеральный исследовательский центр «Якутский научный центр»

Сибирского отделения Российской академии наук (ФИЦ ЯНЦ СО РАН), Якутск, Россия

⁶ Институт физико-технических проблем Сибирского отделения

Российской академии наук им. В.П. Ларионова ФИЦ ЯНЦ СО РАН, Якутск, Россия

¹ ivanich_91@mail.ru

² gerasimchuk_an@yandex.ru

³ glb122@yandex.ru

⁴ 89138641814@mail.ru

⁵ icen.kychkin@mail.ru

⁶ kychkinplasma@mail.ru

Аннотация. Исследованы кинетические характеристики биоцидного воздействия наночастиц оксида меди (II) на рост колоний грибов *Penicillium chrysogenum* в различных температурных условиях. Показано, что повышение концентрации наночастиц замедляет рост колоний микрорганизмов. Разработана математическая модель роста, позволяющая предсказывать динамику роста микроорганизмов при различных концентрациях CuO и температурах $T = 4, 15, 28^\circ\text{C}$. Предложено использование оптимального диапазона концентраций наночастиц (0.10–0.20%) для эффективной защиты полимерных композитов от биоповреждения, особенно в условиях холодного климата и вечной мерзлоты.

Ключевые слова: полимерные композиционные материалы, моделирование кинетики роста, численность микроорганизмов, биоцидное воздействие, наночастицы оксида меди (II), концентрация, температура, модель логистического роста, коэффициент детерминации R^2

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант РНФ № 25-69-00009, <https://rscf.ru/project/25-69-00009/>

Для цитирования: Бондарчук И.С., Герасимчук А.Л., Глухова Л.Б., Марченко Е.С., Кычкян А.А., Кычкян А.К. Исследование кинетических характеристик биоцидного воздействия наночастиц оксида меди при климатической деструкции и биокоррозии в экстремальных условиях холодного климата // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 98. С. 13–27. doi: 10.17223/19988621/98/2

Original article

A study of kinetic characteristics of biocidal action of copper oxide nanoparticles during climatic destruction and biocorrosion under extreme conditions of cold climate

Ivan S. Bondarchuk¹, Anna L. Gerasimchuk², Lyubov B. Glukhova³, Ekaterina S. Marchenko⁴, Aisen A. Kychkin⁵, Anatoly K. Kychkin⁶

^{1, 2, 3, 4} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

⁵ Federal Research Center “Yakutsk Scientific Center” of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Yakutsk, Russian Federation

⁶ Larionov Institute of Physical and Technical Problems of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences Federal Research Center Yakut Scientific Center, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Yakutsk, Russian Federation

¹ ivanich_91@mail.ru

² gerasimchuk_ann@mail.ru

³ glb122@yandex.ru

⁴ 89138641814@mail.ru

⁵ icen.kychkin@mail.ru

⁶ kychkinplasma@mail.ru

Abstract. This research investigates kinetic characteristics of biocidal effects induced by copper(II) oxide nanoparticles on the growth dynamics of *Penicillium chrysogenum* fungal colonies at different temperatures. The influence of varying concentrations of CuO nanoparticles at different temperatures (4°C, 15°C, and 28°C) on colony growth rates was evaluated. Mathematical models were developed to accurately predict the dynamics of growth curves at different CuO concentration levels and thermal regimes. Key findings include that higher concentrations of CuO significantly suppress fungal colony expansion. An optimal range of 0.10–0.20% CuO was identified as effective for protecting polymer composites against biological corrosion. At lower temperatures, slower growth rates and extended lag phases are observed, while elevated temperatures accelerate both growth rates and reduce lag times. The logistic growth model exhibited strong correlation with experimental data, achieving high coefficients of determination (R^2) in all tested scenarios. These results provide valuable insights into optimizing bioprotection strategies for polymer composite materials exposed to harsh environmental conditions such as permafrost regions.

Keywords: polymer composite materials, growth kinetics modeling, microbial population, biocidal effect, copper(II) oxide nanoparticles, concentration, temperature, logistic growth model, R^2 determination coefficient

Acknowledgments: This study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 25-69-00009), <https://rscf.ru/project/25-69-00009/>

For citation: Bondarchuk, I.S., Gerasimchuk, A.L., Glukhova, L.B., Marchenko, E.S., Kychkin, A.A., Kychkin A.K. (2025) A study of kinetic characteristics of biocidal action of copper oxide nanoparticles during climatic destruction and biocorrosion under extreme conditions of cold climate. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mehanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 98. pp. 13–27. doi: 10.17223/19988621/98/2

Введение

Полимерные композиты представляют собой новый класс перспективных материалов, значимость которых в технических системах постоянно увеличивается благодаря ряду важных преимуществ по сравнению с металлами [1, 2]. Современное материаловедение сталкивается с проблемой ограниченной изученности физических, механических и химических свойств недавно разработанных композитов. Острая необходимость в конструкционных полимерах становится причиной быстрого внедрения таких материалов в различные области промышленности и гражданского строительства, однако их широкое внедрение требует особого подхода к защите от негативных воздействий окружающей среды [3–6].

При разработке конструкций, рассчитанных на эксплуатацию в сложных природных условиях, крайне важно учитывать совокупное влияние целого ряда климатических факторов: температуры, влажности воздуха, солнечного света, радиоактивного фона, агрессивных сред и биологически активных микроорганизмов, негативно влияющих на прочность материала [7–10]. Необходимо также исследовать роль патогенных бактерий [11], способствующих деструкции полимеров и ухудшению их эксплуатационных свойств. При разработке современных полимерных композиционных материалов (ПКМ) с улучшенными прочностными характеристиками важно анализировать совместное воздействие бактериальной активности и неблагоприятных условий окружающей среды [12, 13]. Для повышения устойчивости композитов к бактериям целесообразно вводить специальные добавки, обладающие комплексом требуемых физико-химических свойств, как способствующих усилению механических свойств, так и обладающих эффектом биоцидного воздействия, например наночастиц металлов, таких как серебро, никель, медь и цинк [14–16]. Одной из важных задач в ходе таких исследований является разработка оценочных моделей сохранения свойств и характеристик ПКМ при натуральных испытаниях, что позволит прогнозировать срок службы ПКМ в экстремальных климатических условиях [17].

Применение кинетического подхода при изучении процессов биологической коррозии и климатической деструкции полимерных композиционных материалов особенно актуально, например, в условиях вечной мерзлоты ввиду специфических особенностей воздействия совокупности биотических и абиотических факторов [18–21]. Деструкция указанных материалов под воздействием микроорганизмов представляет собой динамический процесс, зависящий от многих переменных, среди которых ведущую роль играют условия окружающей среды, физические свойства поверхности материалов и химический состав самих биоцидных добавок. Использование стандартных методов микробиологических исследований часто ограничено только оценкой начальных и конечных результатов процесса воздействия без учета динамики изменения численности микроорганизмов, что затрудняет прогнозирование долгосрочной эффективности защитных покрытий и сроков службы изделий [22].

Исследование кинетики биоцидного воздействия включает построение зависимостей скорости роста микроорганизмов от концентраций соединений, ингибирующих рост микроорганизмов, продолжительности контакта и условий окружающей среды [23, 24]. Кинетический метод обладает существенными преимуществами перед традиционно используемыми методами микробиологического тестирования,

поскольку позволяет количественно определить скорость роста или снижения численности колоний микроорганизмов и исследовать динамику биоцидного воздействия во времени [25]. Моделирование кинетики является важным этапом при выборе оптимальной концентрации, химической формы и способа введения биоцидных компонентов в строительные материалы и конструкции [26–30]. Важнейшей задачей кинетического анализа является определение наиболее оптимальных концентраций и эффективных способов введения биоцидных агентов, обеспечивающих максимальную защиту материала в течение длительного срока эксплуатации. Цель данной работы – создание математической модели, оценка влияния концентрации наночастиц оксида меди (II) на скорость роста и жизнеспособность микроорганизмов при различных температурах и выбор оптимальной концентрации биоцидного компонента.

Методика исследования

Приготовление тестовых микроорганизмов и измерение диаметра колоний

Штамм *Penicillium chrysogenum* Рн-ПКМ-11 использовали в качестве тестового микроорганизма для определения минимальной антимикробной концентрации наночастиц оксида меди при разных температурах. Штамм культивировали на агаризованной среде Чапека–Докса с добавлением наночастиц оксида меди (II) с концентрацией 0,0, 0,05, 0,1, 0,2 и 0,25 мас. %. Споры культуры и фрагменты мицелия инокулировали в центр чашек Петри. Исследование динамики роста при различных концентрациях CuO и температурах $T = 4, 15, 28^\circ\text{C}$ проводили путем измерения диаметра колоний D_i от времени t на протяжении 28 суток. Для усреднения в ходе эксперимента по измерению диаметра колоний от времени для каждого значения концентрации CuO и фиксированного значения температуры T проводили 6 параллельных опытов. Для определения диаметра колоний использовали металлическую линейку с погрешностью измерения $\pm 0,05$ мм.

Математическое моделирование кривых роста колоний грибов

Математические модели широко применяются для описания динамики и получения соответствующих кинетических характеристик роста колоний микроорганизмов. Существует множество первичных моделей, описывающих рост клеток микробов с количественной точки зрения: модель Баараньи, модель Гомпертца, трехфазная линейная модель первичного роста и т.д. [31]. Математическая модель отражает ключевые особенности процесса роста, позволяет получить его количественную оценку и спрогнозировать его в различных условиях. Как правило, эти модели основаны на использовании в том или ином виде экспоненциальных функций в форме

$$y = a \cdot \exp[-\exp(b - c \cdot x)]. \quad (1)$$

В качестве примера можно привести уравнение Гомпертца

$$D = A \cdot \exp\left\{-\exp\left[\frac{\mu_m \cdot e}{A} \cdot (\lambda - t) + 1\right]\right\}, \quad (2)$$

где x представляет собой время роста, y обозначает степень роста. Степень роста y можно выразить через диаметр колонии D , мм, в логарифмической форме $\ln(D)$, отношение диаметров колоний, D/D_0 , где D_0 – начальное значение диаметра

колонии, или логарифмическое отношение диаметров колоний $\ln(D/D_0)$. Выбор между этими показателями для определения степени роста у зависит от конкретных условий роста и физиологических характеристик культивируемых микроорганизмов.

В уравнении (1) параметры a , b и c не имеют прямой биологической интерпретации. Однако кривую роста микроорганизмов обычно можно описать с помощью трех биологически значимых параметров. Это максимальная скорость роста (μ_m), представляющая собой точку перегиба кривой и показывающая максимальную скорость увеличения популяции микроорганизмов. Время задержки (λ), или лаг-фаза, определяется как точка пересечения касательной с осью Ох в точке перегиба и отражает период до начала экспоненциального роста численности. Максимальный диаметр (A) соответствует точке пересечения асимптоты и оси Оу, где численность популяции достигает своего предельного значения и стабилизируется. На рис. 1 представлена графическая интерпретация, характеризующая общий ход кривой биологического роста.

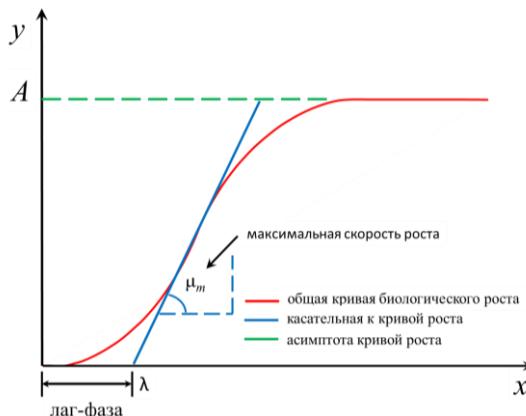


Рис. 1. Общий ход кривой биологического роста
Fig. 1. General trend of the biological growth curve

Помимо уравнения Гомпертца (2), математическая модель в виде логистической функции [31]

$$D = \frac{A}{1 + \exp\left[\frac{4 \cdot \mu_m}{A} \cdot (\lambda - t) + 2\right]}, \quad (3)$$

где t – время роста, ч; λ – период замедления роста, ч; A – максимальный диаметр колонии, мм; μ_m – максимальная скорость роста, мм/ч; D – средний диаметр в момент времени t , ч, также является одной из наиболее распространенных для описания связи между диаметром колонии D и временем роста t .

В качестве показателя, отражающего относительное изменение численности популяции во времени, используются экспериментально измеренные средние значения диаметра колоний D . Аппроксимация кривых роста и идентификация параметров математической модели были выполнены методом нелинейной регрессии в программе OriginPro 8.6 (OriginLab Corporation, Northampton, MA, USA).

Результаты экспериментальных исследований и их анализ

При исследовании роста штамма *Penicillium chrysogenum* Рн-ПКМ-11 колоний грибов было найдено среднее значение диаметра колоний D по 6 параллельным опытам и приведены зависимости среднего размера диаметра колоний D от времени роста t при различных значениях температуры: 4, 15, 28°C. В табл. 1 приведены зависимости среднего размера диаметра D от времени роста t колоний грибов на примере штамма *Penicillium chrysogenum* Рн-ПКМ-11 при различных массовых концентрациях наночастиц (CuO), %, при указанных температурах.

Таблица 1

Зависимости диаметра колоний D от времени роста t при различных массовых концентрациях наночастиц (CuO)

Время t , ч	Temperatura, $T = 4^\circ\text{C}$				
	(CuO) = 0.00% (контроль)	(CuO) = 0.05%	(CuO) = 0.10%	(CuO) = 0.20%	(CuO) = 0.25%
0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
72	1.3	0.0	0.0	0.0	0.0
96	1.5	0.0	0.0	0.0	0.0
120	2.2	1.3	0.0	0.0	0.0
144	3.0	2.0	0.0	0.0	0.0
168	5.0	3.0	0.0	0.0	0.0
336	19.7	10.2	7.2	3.8	3.0
504	32.3	12.3	10.0	4.2	5.2
672	45.3	13.3	10.2	4.2	5.8
Время t , ч	Temperatura, $T = 15^\circ\text{C}$				
	(CuO) = 0.00% (контроль)	(CuO) = 0.05%	(CuO) = 0.10%	(CuO) = 0.20%	(CuO) = 0.25%
0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
72	1.8	1.0	1.8	0.0	0.0
96	4.7	3.3	1.8	0.0	0.0
120	8.8	5.5	2.5	0.0	0.0
144	12.0	7.3	3.2	0.0	0.0
168	16.7	9.5	5.0	0.0	0.0
336	43.2	12.2	9.7	3.8	3.8
504	65.2	16.7	11.3	6.5	9.3
672	79.2	20.5	13.3	7.2	11.0
Время t , ч	Temperatura, $T = 28^\circ\text{C}$				
	(CuO) = 0.00% (контроль)	(CuO) = 0.05%	(CuO) = 0.10%	(CuO) = 0.20%	(CuO) = 0.25%
0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
72	7.0	4.7	2.3	2.5	0.0
96	11.0	8.3	5.5	3.5	1.0
120	16.7	12.0	8.0	5.0	1.0
144	20.2	14.2	10.2	6.5	4.0
168	24.2	16.7	11.3	7.0	5.0
336	49.2	29.8	17.3	20.0	16.8
504	69.5	44.0	23.0	28.5	25.3
672	76.2	55.8	32.7	31.8	33.0

Представленные данные показывают влияние массовой концентрации наночастиц CuO на рост колоний микроорганизмов при $T = 4^{\circ}\text{C}$. Контрольная группа (без добавления наночастиц CuO) демонстрирует самый высокий уровень роста колоний. Это видно по значительному увеличению диаметра колоний с течением времени, который достигает максимальных значений около 45 мм спустя 672 ч. По мере увеличения концентрации наночастиц CuO наблюдается значительное снижение скорости роста колоний. Например, при максимальной концентрации (CuO) = 0.25% диаметр колоний становится значительно меньше контрольной группы даже спустя длительное время. Приведенные при $T = 4^{\circ}\text{C}$ опытные данные ясно демонстрируют зависимость бактерицидного эффекта от концентрации: чем выше концентрация наночастиц, тем сильнее торможение роста колоний.

Экспериментальные данные показывают влияние массовой концентрации наночастиц (CuO) на рост колоний микроорганизмов при температуре $T = 15^{\circ}\text{C}$. При отсутствии наночастиц (CuO) = 0.0% последние растут наиболее интенсивно, демонстрируя максимальный диаметр среди всей серии кривых при температуре $T = 15^{\circ}\text{C}$. Начальная стадия роста протекает относительно быстро и продолжается равномерно вплоть до максимального значения примерно 79 мм спустя 672 ч. Даже добавление небольших концентраций наночастиц, в пределах (0.05–0.10%), оказывает заметное влияние на рост колоний микроорганизмов. Эти концентрации замедляют рост колоний, однако не останавливают его полностью. Особенно заметно замедление на начальной стадии, когда рост колоний протекает в лаг-фазе. Максимальный диаметр колоний стабилизируется на уровнях значительно ниже контрольного варианта: $D_{\max} = 20.5$ мм при (CuO) = 0.05%, $D_{\max} = 13.3$ мм при (CuO) = 0.10%. При средней концентрации (CuO) = 0.20% наблюдается сильное ингибирующее воздействие на рост колоний микроорганизмов. До момента времени 168 ч не было зафиксировано изменения диаметра колоний. При концентрации CuO = 0.25% рост колоний микроорганизмов практически отсутствует вплоть до 168 ч наблюдения, что свидетельствует о выраженном бактерицидном действии наночастиц CuO. Лишь спустя длительное время (более 336 ч) наблюдается незначительное увеличение диаметра колоний, однако этот показатель значительно ниже, чем в контроле и образцах с меньшими концентрациями CuO. Небольшим отличием в случае высокой концентрации (CuO) = 0.25% является лишь немного больший максимальный диаметр $D_{\max} = 11.0$ мм по сравнению с концентрацией (CuO) = 0.20%, где максимальный размер колоний достигает значения $D_{\max} = 7.2$ мм.

Полученные в результате проведения исследования экспериментальные данные также указывают на влияние концентрации наночастиц оксида меди (II) на рост колоний микроорганизмов при температуре $T = 28^{\circ}\text{C}$. По сравнению с образцами, изученными при температурах $T = 4$ и 15°C , общая картина кинетики роста в целом не претерпевает существенных изменений. Наиболее интенсивный рост колоний происходит в условиях отсутствия наночастиц (контрольный образец). Увеличение концентрации наночастиц приводит к постепенному снижению темпов роста вплоть до полной остановки роста при высоких концентрациях. Контрольный вариант (CuO) = 0.00% характеризуется интенсивным и равномерным ростом диаметра колоний, который достигает максимального значения примерно 76 мм спустя 672 ч. При низкой концентрации (CuO) = 0.05% рост несколько замедляется по сравнению с контролем, но протекает стабильно. Конечная точка кривой роста соответствует диаметру порядка 56 мм. При увеличении концен-

трации до $(\text{CuO}) = 0.10\%$ отмечается существенное уменьшение скорости роста при сопоставлении с контролем. На начальном этапе динамика роста замедляется: к моменту времени 168 ч диаметр колоний достигает лишь половины от значения в контроле. К концу эксперимента размер колоний составляет лишь треть от контрольного образца. При концентрациях $(\text{CuO}) = 0.20\%$ и $(\text{CuO}) = 0.25\%$ проявляется ярко выраженный тормозящий эффект на начальном участке кривой роста. Высокая концентрация $(\text{CuO}) = 0.25\%$ практически полностью подавляет рост колоний на начальном этапе. Тем не менее небольшая активация роста возможна после первоначального длительного периода лаг-фазы, вероятно, благодаря адаптации колоний микроорганизмов к бактерицидному воздействию.

Таким образом, полученные результаты подтверждают ярко выраженный бактерицидный эффект наночастиц CuO, особенно заметный при средних и высоких концентрациях. Ингибирующий эффект может быть обусловлен накоплением наночастиц CuO внутри клеток и нарушением внутриклеточных процессов, что отражается в замедлении скорости роста и наблюдаемом снижении диаметра колоний [32].

Таблица 2

Расчетные значения параметров в соответствии с математической моделью на основе логистической функции

Концентрация наночастиц (CuO), %	Температура, $T = 4^\circ\text{C}$			
	μ_m , мм/ч	λ , ч	A , мм	R^2
$(\text{CuO}) = 0.00$	0.11	187	48	0.98869
$(\text{CuO}) = 0.05$	0.05	135	13	0.99048
$(\text{CuO}) = 0.10$	0.12	272	10	0.99989
$(\text{CuO}) = 0.20$	0.12	296	4	0.99999
$(\text{CuO}) = 0.25$	0.03	243	6	0.99486
Концентрация наночастиц (CuO), %	Температура, $T = 15^\circ\text{C}$			
	μ_m , мм/ч	λ , ч	A , мм	R^2
$(\text{CuO}) = 0.00$	0.20	128	79	0.98929
$(\text{CuO}) = 0.05$	0.04	16	20	0.90653
$(\text{CuO}) = 0.10$	0.04	61	13	0.97896
$(\text{CuO}) = 0.20$	0.04	248	7	0.99647
$(\text{CuO}) = 0.25$	0.04	255	11	0.99674
Концентрация наночастиц (CuO), %	Температура, $T = 28^\circ\text{C}$			
	μ_m , мм/ч	λ , ч	A , мм	R^2
$(\text{CuO}) = 0.00$	0.19	62	77	0.98701
$(\text{CuO}) = 0.05$	0.11	58	59	0.97425
$(\text{CuO}) = 0.10$	0.06	28	36	0.92982
$(\text{CuO}) = 0.20$	0.09	99	32	0.99594
$(\text{CuO}) = 0.25$	0.09	162	33	0.98148

С использованием логистической модели (3) были рассчитаны численные значения параметров μ_m , λ и A путем аппроксимации экспериментальных с применением метода нелинейной регрессии. В табл. 2 приведены основные параметры роста, описывавшие влияние концентраций наночастиц CuO на рост колоний микроорганизмов при температуре $T = 4^\circ\text{C}$. Максимальная скорость роста μ_m характеризует наибольшую скорость увеличения численности популяции микроорганизмов. Из табл. 2 видно, что максимальная скорость роста варьирует от 0.03 до 0.12 мм/ч.

Наибольшие значения μ_m наблюдается при концентрациях $(\text{CuO}) = 0.10\%$ и $(\text{CuO}) = 0.20\%$, тогда как наименьшая скорость роста зафиксирована при $(\text{CuO}) = 0.25\%$. Время задержки роста λ показывает временной интервал перед началом фазы экспоненциального роста. При температуре $T = 4^\circ\text{C}$ значение параметра λ изменяется от 134 до 296 ч. Минимальное время задержки отмечается при концентрации $(\text{CuO}) = 0.05\%$, максимальное – при $(\text{CuO}) = 0.20\%$. Максимальный диаметр A отражает средний конечный размер колоний в стационарной фазе роста. При температуре $T = 4^\circ\text{C}$ средний диаметр колеблется от 4 до 48 мм, достигая максимума при отсутствии наночастиц $(\text{CuO}) = 0.00\%$ и минимального размера 4 мм при высокой концентрации наночастиц $(\text{CuO}) = 0.20\%$. Представленные расчетные данные характеризуются высокими значениями коэффициента детерминации R^2 .

Анализ зависимости параметров роста от концентрации наночастиц CuO показывает, что при низкой концентрации $(\text{CuO}) = 0.05\%$ время задержки роста λ существенно сокращается относительно контрольного образца. Максимальный диаметр колоний также значительно уменьшается по сравнению с контролем $(\text{CuO}) = 0.00\%$. Это свидетельствует об ингибирующем эффекте даже малых доз наночастиц на начальную стадию роста: $\lambda = 187$ ч для $(\text{CuO}) = 0.00\%$ и $\lambda = 135$ ч для $(\text{CuO}) = 0.05\%$; фазу экспоненциального роста: $\mu_m = 0.11$ мм/ч для $(\text{CuO}) = 0.00\%$ и $\mu_m = 0.05$ мм/ч для $(\text{CuO}) = 0.05\%$; итоговый диаметр колоний: $A = 48$ мм для $(\text{CuO}) = 0.00\%$ и $A = 13$ мм для $(\text{CuO}) = 0.05\%$. При средней концентрации $(\text{CuO}) = 0.10\%$ проявляется тенденция к увеличению времени задержки λ и незначительному уменьшению максимального диаметра A по сравнению с образцом $(\text{CuO}) = 0.05\%$, что указывает на постепенное усиление эффекта бактерицидного воздействия: $\lambda = 272$ ч и $A = 10$ мм для концентрации $(\text{CuO}) = 0.10\%$. В области высоких концентраций $(\text{CuO}) = 0.20 \div 0.25\%$ рост максимально замедляется, увеличивается время задержки и снижается максимальный диаметр. Несмотря на то, что время задержки роста λ для $(\text{CuO}) = 0.25\%$ несколько уменьшается до 243 ч по сравнению с образцом $(\text{CuO}) = 0.20\%$, для которого $\lambda = 296$ ч, максимальная скорость роста μ_m для $(\text{CuO}) = 0.25\%$ составляет всего 0.03 мм/ч, что заметно ниже значений при других концентрациях. Это свидетельствует о сильном ингибирующем воздействии высоких доз наночастиц на развитие микроорганизмов.

Результаты экспериментального исследования по влиянию различной концентрации наночастиц CuO на параметры роста микроорганизмов – максимальную скорость роста μ_m , время задержки роста λ и максимальный диаметр колоний A – и их изменение при температуре $T=15^\circ\text{C}$ представлены в табл. 2. Контрольный образец без добавок наночастиц $(\text{CuO})=0.00\%$ демонстрирует самую высокую скорость роста — 0.202 мм/ч. По мере повышения концентрации наночастиц скорость роста резко падает вплоть до уровня значений $\mu_m = 0.04$ мм/ч и находится на этом уровне при всех рассматриваемых концентрациях $(\text{CuO}) \geq 0.05\%$. Важно отметить, что разница в параметре максимальной скорости роста μ_m среди образцов с добавками практически отсутствует, несмотря на различия в содержании наночастиц. В контроле $(\text{CuO}) = 0.00\%$ время задержки λ минимально – 128 ч. После введения небольших количеств наночастиц $(\text{CuO}) = 0.05\%$ время задержки λ резко увеличивается почти в два раза, достигая значения 16 ч. При дальнейшем увеличении концентрации (CuO) до 0.10% и выше время задержки λ вновь возрастает до величин порядка 248 и 255 ч соответственно. Без добавления наночастиц $(\text{CuO}) = 0.00\%$ колонии достигают наибольшего среднего диаметра – 79 мм. Уже при небольшой

концентрации (CuO) = 0.05% диаметр существенно уменьшается до 20 мм. Дальнейшее увеличение концентрации (CuO) приводит к снижению диаметра колоний до низких значений: около 7 мм при концентрации (CuO) = 0.20% и 11 мм в случае (CuO) = 0.25%.

В табл. 2 рассматривается влияние различных концентраций наночастиц CuO на параметры роста микроорганизмов μ_m , λ и A и их изменение на основе экспериментальных данных при температуре $T=28^\circ\text{C}$. Контрольный образец без наночастиц (CuO) = 0.00% проявляет наибольшую скорость роста – 0.19 мм/ч. Добавление уже небольших количеств наночастиц CuO в количестве 0.05% вызывает резкое падение скорости роста – до 0.11 мм/ч. Дальнейшее увеличение концентрации (CuO) = 0.10% еще сильнее снижает скорость роста вплоть до 0.06 мм/ч. При более высоких концентрациях (CuO) = 0.20 и 0.25% скорость роста несколько возрастает до значения 0.09 мм/ч для каждого из образцов, хотя и остается значительно ниже контрольного значения, зафиксированного для образца (CuO) = 0.00%. В контрольном образце (CuO) = 0.00% время задержки равно 62 ч. Небольшие количества наночастиц (CuO) = 0.05% несколько снижают время задержки до 58 ч. Повышение концентрации до (CuO) = 0.10% значительно сокращает время задержки до 28 ч. Но при еще больших концентрациях (CuO) = 0.20% и (CuO) = 0.25% время задержки резко возрастает до 99 и 162 ч соответственно. При отсутствии наночастиц (CuO) = 0.00% колонии имеют наибольший диаметр – 77 мм. При низкой концентрации (CuO) = 0.05% диаметр немного снижается до 59 мм. Увеличение концентрации до среднего значения (CuO) = 0.10% приводит к уменьшению среднего диаметра колоний до 36 мм. Несмотря на некоторое увеличение скорости роста при более высоких концентрациях (CuO) = 0.20% и (CuO) = 0.25%, средний диаметр колоний изменяется незначительно: $A = 32$ мм для (CuO) = 0.20 и $A = 33$ мм для (CuO) = 0.25%.

Обобщив полученные результаты, можно сделать вывод, что низкотемпературные условия способствуют достижению минимально возможных скоростей роста и максимально возможных времен задержки роста. Наличие наночастиц в небольших количествах улучшает эти показатели, особенно при умеренных температурах. Однако дальнейшее увеличение концентрации наночастиц при высокой температуре не приводит к получению требуемых характеристик роста, что делает необходимым выбор некоторого оптимума между скоростью роста и временем задержки роста.

Заключение

Исследование зависимости скорости роста колоний микроорганизмов *Penicillium chrysogenum* от концентрации наночастиц оксида меди (II) и температуры окружающей среды проводилось с целью разработки эффективных методов защиты полимерных композиционных материалов от биологической коррозии. Результаты экспериментального исследования показали зависимость скорости роста колоний микроорганизмов *Penicillium chrysogenum* от концентрации наночастиц оксида меди (II) и температуры окружающей среды. Установлено, что увеличение концентрации наночастиц CuO ведет к сильному торможению роста колоний, особенно при средних и высоких концентрациях. Оптимизация концентраций наночастиц позволила выявить четкую тенденцию: при низких концентрациях (до 0.10%) рост

колоний существенно замедлялся, а при высоких концентрациях (более 0.20%) наблюдалось практически полное прекращение роста микроорганизмов. Температурный фактор оказывал существенное влияние на характеристики роста колоний. Низкая температура (4°C) приводила к замедлению роста и увеличению времени задержки роста, в то время как повышение температуры ускоряло рост и сокращало лаг-фазу.

Анализ экспериментальных данных показал хорошую корреляцию с математической моделью роста на основе логистической функции. Коэффициенты детерминации (R^2) имели высокие значения, подтверждающие точность предложенной модели. Установлено, что оптимальная концентрация наночастиц оксида меди(II) должна находиться в диапазоне 0.10–0.20%. По всей видимости, выбор значений концентрации на таком уровне позволит обеспечить эффективное предотвращение роста микроорганизмов и продлить сроки службы полимерных композиционных материалов. Проведенное исследование подтверждает целесообразность использования наночастиц оксида меди (II) в качестве эффективного биоцидного компонента борьбы с биокоррозией полимерных композитов, особенно в условиях холодного климата и вечной мерзлоты.

Список источников

1. *Bukvic M., Milojevic S., Gajevic S., Dordevic M., Stojanovic B.* Production technologies and application of polymer composites in engineering: A Review // *Polymers*. 2025. V. 17 (16). Art. 2187. doi: 10.3390/polym17162187
2. *Wang Y., Ding Y., Yu K., Dong G.* Innovative polymer-based composite materials in additive manufacturing: A review of methods, materials, and applications // *Polymer composites*. 2024. V. 45 (17). P. 15389–15420. doi: 10.1002/pc.28894
3. *Brebu M.* Environmental degradation of plastic composites with natural fillers – A Review // *Polymers*. 2020. V. 12 (1). Art. 166. doi: 10.3390/polym12010166
4. *Jawar V.* Designing composite materials for extreme environments: Aerospace and beyond // *Journal of Nanosciences: Current Research*. 2024. V. 9. Art. 261. doi: 10.37421/2572-0813.2024.9.261
5. *Korku M., İlhan R., Feyzullahoglu E.* Investigation of effects of environmental conditions on wear behaviors of glass fiber reinforced polyester composite materials // *Polymer Composites*. 2024. V. 46 (1). P. 355–371. doi: 10.1002/pc.28992
6. *Zhang X., Yin Z., Xiang S., Yan H., Tian H.* Degradation of Polymer Materials in the Environment and Its Impact on the Health of Experimental Animals: A Review // *Polymers*. 2024. V. 16 (19). Art. 2807. doi: 10.3390/polym16192807
7. *Lebedev M.P., Startsev O.V., Kychkin A.K., Polyakov V.V.* Effects of cold climates on polymer composite material properties // *Procedia Structural Integrity*. 2020. V. 30. P. 76–81. doi: 10.1016/j.prostr.2020.12.013
8. *Lukachevkaya I.G., Lebedev M.P., Struchkov N.F.* Effect of the Environment on the Properties of Polymer Composite Materials // *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 2021. V. 55. P. 1041–1044. doi: 10.1134/S0040579521050109
9. *Petrov M.G., Lebedev M.P., Startsev O.V., Kopyrin M.M.* Effect of Low Temperatures and Moisture on the Strength Performance of Carbon Fiber Reinforced Plastic // *Doklady Physical Chemistry*. 2021. V. 500. P. 85–91. doi: 10.1134/S0012501621090037
10. *Startsev O.V., Lebedev M.P., Kychkin A.K.* Aging of Basalt Plastics in Open Climatic Conditions // *Polymer Science. Series D*. 2022. V. 15. P. 101–109. doi: 10.1134/S1995421222010191
11. *Haktaniyan M., Bradley M.* Polymers showing intrinsic antimicrobial activity // *Chemical Society Reviews*. 2022. V. 51. P. 8584–8611. DOI: 10.1039/D2CS00558A

12. Chen A., Peng H., Blakey I., Whittaker A.K. Biocidal Polymers: A Mechanistic Overview // Polymer Reviews. 2016. V. 57 (2). P. 276–310. doi: 10.1080/15583724.2016.1223131
13. Glaser J.A. Biological Degradation of Polymers in the Environment // Plastics in the Environment / ed. by A. Gomiero. IntechOpen, 2019. doi: 10.5772/intechopen.85124. URL: <https://www.intechopen.com/chapters/66340>
14. Olmos D., Gonzalez-Benito J. Polymeric Materials with Antibacterial Activity: A Review // Polymers. 2021. V. 13 (4). Art. 613. doi: 10.3390/polym13040613
15. Bryaskova R., Philipova N., Bakov V., Georgiev N. Innovative Antibacterial Polymer Coatings // Applied Sciences. 2025. V. 15 (4). Art. 1780. doi: 10.3390/app15041780
16. Santos M.R.E., Fonseca A.C., Mendonca P.V., Branco R., Serra A.C., Morais P.V., Coelho J.F.J. Recent Developments in Antimicrobial Polymers: A Review // Materials. 2016. V. 9 (7). Art. 599. doi: 10.3390/ma9070599
17. Starkova O., Gagani A.I., Karl C.W., Rocha I.B.C.M., Burlakovs J., Krauklis A.E. Modelling of Environmental Ageing of Polymers and Polymer Composites—Durability Prediction Methods // Polymers. 2022. V. 14 (5). Art. 907. doi: 10.3390/polym14050907
18. Dintcheva N.T. Overview of polymers and biopolymers degradation and stabilization towards sustainability and materials circularity // Polymer. 2024. V. 306. Art. 127136. doi: 10.1016/j.polymer.2024.127136
19. Rossetti I., Conte F., Ramis G. Kinetic Modelling of Biodegradability Data of Commercial Polymers Obtained under Aerobic Composting Conditions // Eng. 2021. V. 2 (1). P. 54–68. doi: 10.3390/eng2010005
20. Baldera-Moreno Y., Pino V., Farres A., Banerjee A., Gordillo F., Andler R. Biotechnological Aspects and Mathematical Modeling of the Biodegradation of Plastics under Controlled Conditions // Polymers. 2022. V. 14 (3). Art. 375. doi: 10.3390/polym14030375
21. Andreia da Silva S., Faccin D.J.L., Cardozo N.S.M. A Kinetic-Based Criterion for Polymer Biodegradability Applicable to Both Accelerated and Standard Long-Term Composting Biodegradation Tests // ACS Sustainable Chemistry & Engineering. 2024. V. 12 (32). P. 11856–11865. doi: 10.1021/acssuschemeng.3c03837
22. Pedreira A., Vazquez J.A., Garcia M.R. Kinetics of Bacterial Adaptation, Growth, and Death at Didecyldimethylammonium Chloride sub-MIC Concentrations // Frontiers in Microbiology. 2022. V. 13. Art. 758237. doi: 10.3389/fmicb.2022.758237
23. Peleg M. Selected challenges to modeling the kinetics of microbial inactivation and chemical reactions during food preservation // Current Opinion in Food Science. 2023. V. 51. Art. 101029. doi: 10.1016/j.cofs.2023.101029
24. Peleg M. Modeling the dynamic kinetics of microbial disinfection with dissipating chemical agents – a theoretical investigation // Applied Microbiology and Biotechnology. 2021. V. 105. P. 539–549. doi: 10.1007/s00253-020-11042-8
25. Liu M., Bauman L., Nogueira C.L., Aucoin M.G., Anderson W.A., Zhao B. Antimicrobial polymeric composites for high-touch surfaces in healthcare applications // Current Opinion in Biomedical Engineering. 2022. V. 22. Art. 100395. doi: 10.1016/j.cobme.2022.100395
26. Sikora P., Augustyniak A., Cendrowski K., Nawrotek P., Mijowska E. Antimicrobial Activity of Al₂O₃, CuO, Fe₃O₄, and ZnO Nanoparticles in Scope of Their Further Application in Cement-Based Building Materials // Nanomaterials. 2018. V. 8. Art. 212. doi: 10.3390/nano8040212
27. Jedrzejczak P., Lawniczak L., Słosarczyk A., Kłapiszewski L. Physicomechanical and Antimicrobial Characteristics of Cement Composites with Selected Nano-Sized Oxides and Binary Oxide Systems // Materials. 2022. V. 15. Art. 661. doi: 10.3390/ma15020661
28. Słosarczyk A., Kłapiszewska I., Parus A., Balicki S., Kornaus K., Gapinski B., Wieczorowski M., Wilk K.A., Jesionowski T., Kłapiszewski L. Antimicrobial action and chemical and physical properties of CuO-doped engineered cementitious composites // Scientific Reports. 2023. V. 13. Art. 10404. doi: 10.1038/s41598-023-37673-1
29. Styszko K., Kupiec K. The rate of biocide leaching from porous renders // Chemical Engineering Research and Design. 2018. V. 132. P. 69–76. doi: 10.1016/j.cherd.2017.12.047

30. Erich S.J.F., Baukh V. Modelling biocide release based on coating properties // Progress in Organic Coatings. 2016. V. 90. P. 171–177. doi: 10.1016/j.porgcoat.2015.10.009
31. Zwietering M.H., Jongenburger I., Rombouts F.M., Van't Riet K. Modeling of the Bacterial Growth Curve // Applied and Environmental Microbiology. 1990. V. 56 (6). P. 1875–1881. doi: 10.1128/aem.56.6.1875-1881.1990
32. Gudkov S.V., Burmistrov D.E., Fomina P.A., Validov S.Z., Kozlov V.A. Antibacterial Properties of Copper Oxide Nanoparticles (Review) // International Journal of Molecular Sciences. 2024. V. 25 (21). Art. 11563. doi: 10.3390/ijms252111563

References

1. Bukvic M., Milojevic S., Gajevic S., Dordevic M., Stojanovic B. (2025) Production technologies and application of polymer composites in engineering: A Review. *Polymers*. 17(16). p. 2187. DOI: 10.3390/polym17162187.
2. Wang Y., Ding Y., Yu K., Dong G. (2024) Innovative polymer-based composite materials in additive manufacturing: A review of methods, materials, and applications. *Polymer Composites*. 45(17). pp. 15389–15420. DOI: 10.1002/pc.28854.
3. Brebu M. (2020) Environmental degradation of plastic composites with natural fillers – A Review. *Polymers*. 12(1). 166. DOI: 10.3390/polym12010166.
4. Jawar V. (2024) Designing composite materials for extreme environments: Aerospace and beyond. *Journal of Nanosciences: Current Research*. 9. 261. DOI: 10.37421/2572-0813.2024.9.261.
5. Korku M., Ilhan R., Feyzullahoglu E. (2024) Investigation of effects of environmental conditions on wear behaviors of glass fiber reinforced polyester composite materials. *Polymer Composites*. 46(1). pp. 355–371. DOI: 10.1002/pc.28992.
6. Zhang X., Yin Z., Xiang S., Yan H., Tian H. (2024) Degradation of polymer materials in the environment and its impact on the health of experimental animals: A Review. *Polymers*. 16(19). 2807. DOI: 10.3390/polym16192807.
7. Lebedev M.P., Startsev O.V., Kychkin A.K., Polyakov V.V. (2020) Effects of cold climates on polymer composite material properties. *Procedia Structural Integrity*. 30. pp. 76–81. DOI: 10.1016/j.prostr.2020.12.013.
8. Lukachevkaya I.G., Lebedev M.P., Struchkov N.F. (2021) Effect of the environment on the properties of polymer composite materials. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 55. pp. 1041–1044. DOI: 10.1134/S0040579521050109.
9. Petrov M.G., Lebedev M.P., Startsev O.V., Kopyrin M.M. (2021) Effect of low temperatures and moisture on the strength performance of carbon fiber reinforced plastic. *Doklady Physical Chemistry*. 500. pp. 85–91. DOI: 10.1134/S0012501621090037.
10. Startsev O.V., Lebedev M.P. Kychkin A.K. (2022) Aging of basalt plastics in open climatic conditions. *Polymer Science, Series D*. 15. pp. 101–109. DOI: 10.1134/S1995421222010191.
11. Haktaniyan M., Bradley M. (2022) Polymers showing intrinsic antimicrobial activity. *Chemical Society Reviews*. 51. pp. 8584–8611. DOI: 10.1039/D2CS00558A.
12. Chen A., Peng H., Blakey I., Whittaker A.K. (2016) Biocidal polymers: A mechanistic overview. *Polymer Reviews*. 57(2). pp. 276–310. DOI: 10.1080/15583724.2016.1223131.
13. Glaser J.A. (2019) Biological degradation of polymers in the environment. *Plastics in the Environment*: IntechOpen, DOI: 10.5772/intechopen.85124. URL: <https://www.intechopen.com/chapters/66340>.
14. Olmos D., Gonzalez-Benito J. (2021) Polymeric materials with antibacterial activity: A review. *Polymers*. 13(4). p. 613. DOI: 10.3390/polym13040613.
15. Bryaskova R., Philipova N., Bakov V., Georgiev N. (2025) Innovative antibacterial polymer coatings. *Applied Sciences*. 15(4). p. 1780. DOI: 10.3390/app15041780.

16. Santos M.R.E., Fonseca A.C., Mendonca P.V., Branco R., Serra A.C., Morais P.V., Coelho J.F.J. (2016) Recent developments in antimicrobial polymers: A review. *Materials*. 9(7). p. 599. DOI: 10.3390/ma9070599.
17. Starkova O., Gagani A.I., Karl C.W., Rocha I.B.C.M., Burlakovs J., Krauklis A.E. (2022) Modelling of environmental ageing of polymers and polymer composites—durability prediction methods. *Polymers*. 14(5). p. 907. DOI: 10.3390/polym14050907.
18. Dintcheva N.T. (2024) Overview of polymers and biopolymers degradation and stabilization towards sustainability and materials circularity. *Polymer*. 306. p. 127136. DOI: 10.1016/j.polymer.2024.127136.
19. Rossetti I., Conte F., Ramis G. (2021) Kinetic modelling of biodegradability data of commercial polymers obtained under aerobic composting conditions. *Eng.* 2(1). pp. 54–68. DOI: 10.3390/eng2010005.
20. Baldera-Moreno Y., Pino V., Farres A., Banerjee A., Gordillo F., Andler R. (2022) Biotechnological aspects and mathematical modeling of the biodegradation of plastics under controlled conditions. *Polymers*. 14. p. 375. DOI: 10.3390/polym14030375.
21. Andreia da Silva S., Faccin D.J.L., Cardozo N.S.M. (2024) A kinetic-based criterion for polymer biodegradability applicable to both accelerated and standard long-term composting biodegradation tests. *ACS Sustainable Chemistry & Engineering*. 12(32). pp. 11856–11865. DOI: 10.1021/acssuschemeng.3c03837.
22. Pedreira A., Vazquez J.A., Garcia M.R. (2022) Kinetics of bacterial adaptation, growth, and death at didecyldimethylammonium chloride sub-MIC concentrations. *Frontiers in Microbiology*. 13. p. 758237. DOI: 10.3389/fmicb.2022.758237.
23. Peleg M. (2023) Selected challenges to modeling the kinetics of microbial inactivation and chemical reactions during food preservation. *Current Opinion in Food Science*. 51. p. 101029. DOI: 10.1016/j.coofs.2023.101029.
24. Peleg M. (2021) Modeling the dynamic kinetics of microbial disinfection with dissipating chemical agents – a theoretical investigation. *Applied Microbiology and Biotechnology*. 105. pp. 539–549. DOI: 10.1007/s00253-020-11042-8.
25. Liu M., Bauman L., Nogueira C.L., Aucoin M.G., Anderson W.A., Zhao B. (2022) Antimicrobial polymeric composites for high-touch surfaces in healthcare applications. *Current Opinion in Biomedical Engineering*. 22. p. 100395. DOI: 10.1016/j.cobme.2022.100395.
26. Sikora P., Augustyniak A., Cendrowski K., Nawrotek P., Mijowska E. (2018) Antimicrobial activity of Al₂O₃, CuO, Fe₃O₄, and ZnO nanoparticles in scope of their further application in cement-based building materials. *Nanomaterials*. 8. p. 212. DOI: 10.3390/nano8040212.
27. Jędrzejczak P., Ławniczak Ł., Śłosarczyk A., Klapiszewski Ł. (2022) Physicomechanical and antimicrobial characteristics of cement composites with selected nano-sized oxides and binary oxide systems. *Materials*. 15. p. 661. DOI: 10.3390/ma15020661.
28. Śłosarczyk A., Klapiszewski I., Parus A., Balicki S., Kornaus K., Gapiński B., Wieczorowski M., Wilk K.A., Jesionowski T., Klapiszewski Ł. (2023) Antimicrobial action and chemical and physical properties of CuO-doped engineered cementitious composites. *Scientific Reports*. 13. p. 10404. DOI: 10.1038/s41598-023-37673-1.
29. Styszko K., Kupiec K. (2018) The rate of biocide leaching from porous renders. *Chemical Engineering Research and Design*. 132. pp. 69–76. DOI: 10.1016/j.cherd.2017.12.047.
30. Erich S.J.F., Baukh V. (2016) Modelling biocide release based on coating properties. *Progress in Organic Coatings*. 90. pp. 171–177. DOI: 10.1016/j.porgcoat.2015.10.009.
31. Zwietering M.H., Jongenburger I., Rombouts F.M., Van't Riet K. (1990) Modeling of the bacterial growth curve. *Applied and Environmental Microbiology*. 56(6). pp. 1875–1881. DOI: 10.1128/aem.56.6.1875-1881.1990.
32. Gudkov S.V., Burmistrov D.E., Fomina P.A., Validov S.Z., Kozlov V.A. (2024) Antibacterial properties of copper oxide nanoparticles (Review). *International Journal of Molecular Sciences*. V. 25(21). p. 11563. DOI: 10.3390/ijms252111563.

Сведения об авторах:

Бондарчук Иван Сергеевич – инженер лаборатории проблем опасных космических объектов физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: ivanich_91@mail.ru

Герасимчук Анна Леонидовна – заведующая лабораторией промышленной микробиологии Биологического института Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: gerasimchuk_ann@mail.ru

Глухова Любовь Борисовна – научный сотрудник лаборатории биохимии и молекулярной биологии Биологического института Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: glb122@yandex.ru

Марченко Екатерина Сергеевна – доктор физико-математических наук, заведующая лабораторией сверхэластичных биоинтерфейсов Научного управления Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: 89138641814@mail.ru

Кычкин Айсен Анатольевич – кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории композиционных материалов Арктики и Субарктики Федерального исследовательского центра «Якутский научный центр» Сибирского отделения Российской академии наук (ФИЦ ЯНЦ СО РАН) (Якутск, Россия). E-mail: icen.kychkin@mail.ru

Кычкин Анатолий Константинович – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник отдела № 40 Материаловедение Института физико-технических проблем СО РАН им. В.П. Ларионова ФИЦ ЯНЦ СО РАН (Якутск, Россия). E-mail: kychkinplasma@mail.ru

Information about the authors:

Bondarchuk Ivan S. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ivanich_91@mail.ru

Gerasimchuk Anna L. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: gerasimchuk_ann@mail.ru

Glukhova Lyubov B. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: glb122@yandex.ru

Marchenko Ekaterina S. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: 89138641814@mail.ru

Kychkin Aisen A. (Federal Research Center “Yakut Scientific Center” of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (FRC YaSC SB RAS), Yakutsk, Russian Federation). E-mail: icen.kychkin@mail.ru

Kychkin Anatoly K. (V.P. Larionov Institute of Physical and Technical Problems of the Federal Research Center “Yakut Scientific Center” of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (FRC YaSC SB RAS), Yakutsk, Russian Federation). E-mail: kychkinplasma@mail.ru

The article was submitted 21.10.2025; accepted for publication 08.12.2025

Статья поступила в редакцию 21.10.2025; принята к публикации 08.12.2025

Научная статья

УДК 517.54

doi: 10.17223/19988621/98/3

MSC: 30C80, 30C45

Оценки аналитических функций, области значений которых содержатся в круговой луночке

**Федор Федорович Майер¹, Мейрамбек Габдуалиевич Тастанов²,
Анар Алтаевна Утемисова³**

^{1, 2, 3} Костанайский региональный университет им. А. Байтурсынова, Костанай, Казахстан

¹maiyer@mail.ru

²tastao@mail.ru

³anar_utemisova@mail.ru

Аннотация. В классе аналитических функций, область значений которых содержится в круговой луночке, найдены точные оценки действительной части, модуля функции и модуля ее логарифмической производной, обобщающие известные результаты, используемые многими авторами на протяжении десятилетий. В качестве приложения получен радиус звездообразности класса дважды почти звездообразных функций, в частных случаях дающий ряд известных результатов.

Ключевые слова: оценки аналитических функций, почти звездообразные функции, радиусы звездообразности

Для цитирования: Майер Ф.Ф., Тастанов М.Г., Утемисова А.А. Оценки аналитических функций, области значений которых содержатся в круговой луночке // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 98. С. 28–43. doi: 10.17223/19988621/98/3

Original article

Estimates of analytical functions whose ranges of values are contained in a circular lune

Fedor F. Maiyer¹, Meyrambek G. Tastanov², Anar A. Utemissova³

^{1, 2, 3} Kostanay Regional University named after A. Baitursynuly, Kostanay, Kazakhstan

¹maiyer@mail.ru

²tastao@mail.ru

³anar_utemisova@mail.ru

Abstract. The article introduces a class of analytical functions in a unit circle that have missing terms in the power series expansion. Their range of values is contained in a circular lune located in the right half-plane relative to the imaginary axis and symmetric relative to the real axis, one of the vertices of which is located at point 0. In this class of functions, the problem of finding the exact upper boundary of the modulus of the logarithmic derivative

and the boundaries from below and above the real part and the modulus of the function is solved. Such results have always served as the basis for solving a number of extreme problems on subclasses of functions $f(z)$, analytical in the unit circle and normalized by the condition $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. Some particular cases, when a circular lune degenerates into a circle or angle, yield well-known estimates established by such authors as T.H. MacGregor, R.M. Goel, D.B. Shaffer, and G.M. Shah and used by many researchers for decades to solve extreme problems.

As an example of applications of the main result, the radius of starlikeness of one wide class of doubly close-to-starlike functions is obtained, which in particular cases gives a number of well-known results obtained in recent years.

Keywords: estimates of analytical functions, close-to-starlike functions, radii of starlikeness

For citation: Maiyer, F.F., Tastanov, M.G., Utemissova, A.A. (2025) Estimates of analytical functions whose ranges of values are contained in a circular lune. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mehanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 98. pp. 28–43. doi: 10.17223/19988621/98/3

Введение

Пусть \mathcal{A} – класс аналитических в круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функций φ , нормированных условием $\varphi(0) = 1$, \mathcal{A}_n – класс функций $\varphi \in \mathcal{A}$ с разложением вида $\varphi(z) = 1 + c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \dots$, $n \geq 1$, и пусть $\tilde{\mathcal{N}}_n$ – класс аналитических в E функций f вида $f(z) = z + a_{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} + \dots$, $n \geq 1$. Также будем считать, что если \mathcal{M}_n – некоторый подкласс класса \mathcal{A}_n , то $\mathcal{M} := \mathcal{M}_1$, и обратно, добавление нижнего индекса n у \mathcal{M} будет означать, что функции подкласса \mathcal{M}_n имеют разложение вида $\varphi(z) = 1 + c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \dots$, $n \geq 1$.

Пусть \mathcal{P} – класс Каратеодори, т.е. $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}$ и $\operatorname{Re} \varphi(z) > 0$, $z \in E$.

Хорошо известно, что многие экстремальные задачи для подклассов $\tilde{\mathcal{N}}_n$ класса \mathcal{N}_n могут быть сведены к задачам минимизации или максимизации при $|z| = r < 1$ функционалов

$$\operatorname{Re} \varphi(z), |\varphi(z)|, |\varphi'(z)|, \left| z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right|, \operatorname{Re} \left(\mu \varphi(z) + \eta z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right), \mu, \eta \geq 0,$$

на некоторых подклассах $\tilde{\mathcal{P}}_n$ класса \mathcal{P}_n , используемых при построении классов $\tilde{\mathcal{N}}_n$.

Впервые в статьях [1–3] границы $\operatorname{Re} \varphi(z)$, $|\varphi(z)|$, $|z\varphi'(z)/\varphi(z)|$ установлены в классе \mathcal{P}_n и его подклассе функций, удовлетворяющих условию $|\varphi(z) - 1| < 1$. Немногим позже обобщение этих результатов на класс функций $\varphi \in \mathcal{A}$, удовлетворяющих условию $|\varphi(z) - a| < a$, $a \geq 1/2$, $z \in E$, были получены в [4], а для случая, когда $\varphi \in \mathcal{A}_n$ при $n \geq 1$ – в [5]. Оценка $|z\varphi'(z)/\varphi(z)|$ в подклассе класса \mathcal{P}_n , когда $\operatorname{Re} \varphi(z) > \alpha$, $z \in E$, была получена в [6].

В статье [7] решена задача минимизации при $|z| = r < 1$ функционала $\operatorname{Re}(\mu\varphi(z) + \eta z\varphi'(z)/\varphi(z))$, $\mu, \eta \geq 0$, а также найдены границы для функционалов $\operatorname{Re} \varphi(z)$ и $|\varphi(z)|$ в классе

$$\mathcal{P}_n[A, B] = \left\{ \varphi \in \mathcal{A}_n : \varphi(E) \subset \varphi_0(E), \varphi_0(z) = (1 + Az)/(1 + Bz), -1 \leq B < A \leq 1 \right\}.$$

Описанные выше оценки на протяжении полувека, в том числе и в последние годы, применялись разными авторами (см., напр.: [8–12]) при решении экстремальных задач.

В [13] получены оценки $\operatorname{Re} \varphi(z)$, $|\varphi(z)|$, $|z\varphi'(z)/\varphi(z)|$ в классе \mathcal{A}_n функций φ , удовлетворяющих условию $|\varphi^2(z) - 1| < 1$, $z \in E$. Обобщение этих результатов, а также точная оценка снизу функционала $\operatorname{Re}(\mu\varphi(z) + \eta z\varphi'(z)/\varphi(z))$, $\mu, \eta \geq 0$, в классе \mathcal{A}_n функций, для которых $|(z\varphi'(z)/\varphi(z))^{1/\gamma} - a| < a$, $a \geq 1/2$, $0 < \gamma \leq 1$, $z \in E$, установлены в статье [14].

В настоящей статье вводится класс функций $\varphi \in \mathcal{A}_n$, множество значений которых содержится в круговой лунечке, расположенной в правой полуплоскости и симметричной относительно действительной оси. В данном классе решена задача определения точных границ $\operatorname{Re} \varphi(z)$, $|\varphi(z)|$, $|z\varphi'(z)/\varphi(z)|$ и минимизации функционала $\operatorname{Re}(\mu\varphi(z) + \eta z\varphi'(z)/\varphi(z))$, $\mu, \eta \geq 0$, при $|z| = r < 1$. Эти результаты могут быть применены для решения ряда новых экстремальных задач на подклассах класса \mathcal{N}_n . В качестве примера применения данных оценок найден радиус звездообразности одного класса дважды почти звездообразных функций. В некоторых частных случаях полученные оценки совпадают с оценками, полученными в вышеперечисленных результатах.

1. Подчиненность, симметризация и внутренний радиус области

Многие классы аналитических функций могут быть определены в терминах подчиненности функций. Функция $\varphi \in \mathcal{A}$ называется подчиненной функции $\varphi_0 \in \mathcal{A}$, если существует функция $\omega \in \mathcal{A}$ такая, что $|\omega(z)| < 1$ в круге E и $\omega(0) = 0$, для которой $\varphi(z) = \varphi_0(\omega(z))$. Факт подчиненности функций обозначается в виде $\varphi(z) \prec \varphi_0(z)$. В случае когда функция φ_0 является однолистной в E , факт подчиненности имеет простой геометрический смысл: $\varphi(E) \subset \varphi_0(E)$ и $\varphi(0) = \varphi_0(0)$.

Важное значение для приложений имеет тот факт, что если функция φ имеет разложение вида $\varphi(z) = c_0 + c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \dots$, $n \geq 1$, то из соотношения $\varphi(E) \subset \varphi_0(E)$ следует, что

$$\varphi(|z| \leq r) \subset \varphi_0(|z| \leq r^n) \text{ при любом } r, 0 \leq r < 1. \quad (1)$$

Используя геометрические характеристики области $\varphi_0(|z| < r)$, на основе соотношения (1) несложно получить точные оценки $\operatorname{Re} \varphi(z)$, $\operatorname{Im} \varphi(z)$, $|\varphi(z)|$, $|\arg \varphi(z)|$.

Для нахождения оценок $|\varphi'(z)|$ и $|z\varphi'(z)/\varphi(z)|$ эффективно применяется следующее утверждение [15], сформулированное в терминах внутреннего радиуса области [16].

Лемма 1 [15]. Пусть функция $\Phi(z) = c_0 + c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \dots$, $n \geq 1$, является аналитической в круге E и $\Phi(z) \prec \Phi_0(z)$, где функция Φ_0 однолистна в E . Тогда при $|z| = r < 1$ имеет место точная оценка

$$|\Phi'(z)| \leq \frac{nr^{n-1}}{1-r^{2n}} R(D_0, \Phi(z)), \quad (2)$$

где $D_0 = \Phi_0(E)$, $R(D_0, \Phi(z))$ – внутренний радиус области D_0 относительно точки $\Phi(z)$. Оценка (2) точная и достигается для функции $\Phi(z) = \Phi_0(e^{ia}z^n)$, где $a \in \mathbf{R}$ – произвольная постоянная.

Как показано в [16], если функция $w = \Phi_0(z)$ однолистна и конформно отображает круг E на область D_0 , то внутренний радиус $R(D_0, w)$ области $D_0 = \Phi_0(E)$ относительно точки $w = \Phi_0(z)$ вычисляется по формуле

$$R(D_0, \Phi_0(z)) = |\Phi'_0(z)| (1 - |z|^2). \quad (3)$$

Кроме этого, воспользуемся некоторыми элементами метода симметризации [17] области относительно прямой (симметризации Штейнера). Так как при расширении или симметризации области ее внутренний радиус не уменьшается, то из этого свойства вытекает следующая лемма.

Лемма 2. Пусть область D симметрична относительно действительной оси, и после осуществления симметризации области D относительно действительной оси получается область $D^* = D$. Тогда для любой точки $w \in D$ выполняется неравенство

$$R(D, w) \leq R(D, u), \text{ где } u = \operatorname{Re} w.$$

Из леммы 2 следует, что если область D не изменяется при ее симметризации относительно действительной оси и имеет ограниченный максимальный внутренний радиус, то его максимальное значение достигается в точке (в точках) области D , лежащих на действительной оси. То есть в этом случае для нахождения максимального внутреннего радиуса достаточно исследовать $R(D, w)$ в точках действительной оси, принадлежащих области D .

2. Класс функций $\mathcal{A}_n(a, \gamma)$ и его описание

Определение 1. Будем считать, что аналитическая в E функция φ принадлежит классу $\mathcal{A}_n(a, \gamma)$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in \mathcal{A}_n$ и выполняется условие

$$|\arg(\varphi^{-1}(z) - a)| < \gamma\pi/2, \quad 0 < \gamma \leq 1, \quad 0 \leq a < 1, \quad z \in E. \quad (4)$$

Лемма 3. Функция φ принадлежит классу $\mathcal{A}_n(a, \gamma)$ тогда и только тогда, когда

$$\varphi(z) \prec \varphi_0(z) = \frac{(1+z)^\gamma}{(1-a)(1-z)^\gamma + a(1+z)^\gamma}. \quad (5)$$

При этом область значений $\varphi(E)$ содержится в круговой лунечке $\varphi_0(E)$, расположенной в правой полуплоскости относительно мнимой оси и симметричной относительно действительной оси, с угловыми точками 0 и $1/a$ и внутренними углами, равными $\gamma\pi$.

Доказательство. Условие (4) равносильно неравенству

$$\left| \arg \frac{\varphi^{-1}(z)-a}{1-a} \right| \leq \frac{\gamma\pi}{2} \text{ или } \frac{\varphi^{-1}(z)-a}{1-a} \prec w_0(z) = \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^\gamma.$$

Поэтому существует функция ω , удовлетворяющая условию леммы Шварца и такая, что

$$\frac{\varphi^{-1}(z)-a}{1-a} = w_0(\omega(z)) \text{ или } \varphi(z) = \frac{1}{(1-a)w_0(\omega(z))+a} = \varphi_0(\omega(z)),$$

а это равносильно (5). Поскольку $\varphi^{-1}(z) = (1-a)w_0(\omega(z))+a$, то $\varphi^{-1}(z) \prec \varphi_0^{-1}(z) = (1-a)w_0(z)+a$, причем $\varphi_0^{-1}(E)$ есть угол $|\arg(w-a)| \leq \gamma\pi/2$ величины $\gamma\pi$ с вершиной в точке a , симметричный относительно действительной оси. Отсюда получается второе утверждение леммы 3.

Лемма 4. Пусть функция φ_0 определена в соотношении (5). Тогда

$$\max_{|z|=r} \operatorname{Re} \varphi_0(z) = \max_{|z|=r} |\varphi_0(z)| = \varphi_0(r), \quad (6)$$

$$\min_{|z|=r} \operatorname{Re} \varphi_0(z) = \min_{|z|=r} |\varphi_0(z)| = \varphi_0(-r). \quad (7)$$

Доказательство. Запишем функцию φ_0 в виде $\varphi_0(z) = \frac{1}{(1-a)w_0(z)+a}$, где

$w_0(z) = ((1-z)/(1+z))^\gamma$. Поскольку $|w_0(z)| \geq |w_0(r)| = ((1-r)/(1+r))^\gamma$ при $|z|=r < 1$, то с учетом геометрических свойств линейного отображения $w = (1-a)w_0 + a$ получаем, что $|\varphi_0(z)| \leq \frac{1}{(1-a)|w_0(r)|+a} = \varphi_0(r)$, причем знак равенства достигается в точке $z=r$. В силу этого $\max_{|z|=r} |\varphi_0(z)| = \varphi_0(r)$. Равенство $\min_{|z|=r} |\varphi_0(z)| = \varphi_0(-r)$ доказывается аналогично с учетом того, что $|w_0(z)| \leq |w_0(-r)| = ((1+r)/(1-r))^\gamma$.

Равенство $\max_{|z|=r} \operatorname{Re} \varphi_0(z) = \varphi_0(r)$ следует из того, что $\operatorname{Re} \varphi_0(z) \leq |\varphi_0(z)| \leq \varphi_0(r)$ и

$\max_{|z|=r} \operatorname{Re} \varphi_0(z)$ достигается в точке $z=r$. Чтобы доказать равенство $\min_{|z|=r} \operatorname{Re} \varphi_0(z) = \varphi_0(-r)$,

предположим противное. То есть предположим, что $\min_{|z|=r} \operatorname{Re} \varphi_0(z)$ достигается не

в точке $z=-r$, а в точке $z=re^{i\theta_0}$, $\theta_0 \in (0; \pi)$, и $\min_{|z|=r} \operatorname{Re} \varphi_0(z) < \varphi_0(-r)$. Тогда

в силу свойства симметрии функции φ_0 относительно действительной оси получим, что $\min_{|z|=r} \operatorname{Re} \varphi_0(z) = \operatorname{Re} \varphi_0(re^{\pm i\theta_0}) < \varphi_0(-r)$. Поэтому отрезок, соединяющий точки

$\varphi_0(re^{i\theta_0})$ и $\varphi_0(re^{-i\theta_0})$, целиком не будет принадлежать замкнутой области $\varphi_0(|z| \leq r)$, так как не содержит точек $\varphi_0(-r)$ этой области, что противоречит выпуклости области $\varphi_0(|z| < r)$ при любом r , $0 \leq r < 1$. Следовательно, $\min_{|z|=r} \operatorname{Re} \varphi_0(z) = \varphi_0(-r)$.

3. Оценки в классе $\mathcal{A}_n(a, \gamma)$

Теорема 1. Если $\varphi \in \mathcal{A}_n(a, \gamma)$, то при $|z| = r < 1$ имеют место оценки

$$\frac{(1-r^n)^\gamma}{(1-a)(1+r^n)^\gamma + a(1-r^n)^\gamma} \leq \operatorname{Re} \varphi(z) \leq |\varphi(z)| \leq \frac{(1+r^n)^\gamma}{(1-a)(1-r^n)^\gamma + a(1+r^n)^\gamma}, \quad (8)$$

$$\left| z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| \leq M(r^n; a, \gamma) \quad (9)$$

и для любых $\mu, \eta \geq 0$

$$\mu \operatorname{Re} \varphi(z) + \eta \operatorname{Re} \left(z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right) \geq \mu \frac{(1-r^n)^\gamma}{(1-a)(1+r^n)^\gamma + a(1-r^n)^\gamma} - \eta M(r^n; a, \gamma), \quad (10)$$

где

$$M(r; a, \gamma) = \frac{2\gamma(1-a)nr}{1-r^2} \frac{(1+r)^\gamma}{(1-a)(1+r)^\gamma + a(1-r)^\gamma}. \quad (11)$$

Оценки точные и достигаются для функции $\varphi(z) = \varphi_0(z^n)$, где функция φ_0 определена в (5).

Доказательство. Поскольку $\varphi \in \mathcal{A}_n(a, \gamma)$, то в силу леммы 3 имеет место подчиненность (5), и с учетом разложения $\varphi(z) = 1 + c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \dots$, $n \geq 1$, выполняется соотношение (1). Поэтому на основе (6)

$$\operatorname{Re} \varphi(z) \leq |\varphi(z)| \leq \max_{|z|=r^n} |\varphi_0(z)| = \varphi_0(r^n) = \frac{(1+r^n)^\gamma}{(1-a)(1-r^n)^\gamma + a(1+r^n)^\gamma},$$

т.е. получили правые оценки в (8). Аналогично с учетом (7) получаем левые оценки в (8):

$$|\varphi(z)| \geq \operatorname{Re} \varphi(z) \geq \min_{|z|=r^n} \operatorname{Re} \varphi_0(z) = \varphi_0(-r^n) = \frac{(1-r^n)^\gamma}{(1-a)(1+r^n)^\gamma + a(1-r^n)^\gamma}.$$

Докажем оценку (9). Поскольку в силу (5) $\Phi(z) = \ln \varphi(z) \prec \Phi_0(z) = \ln \varphi_0(z)$, то при $|z| = r < 1$ выполняется неравенство (2), в силу которого

$$\left| z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| = |z \Phi'(z)| \leq \frac{nr^n}{1-r^{2n}} R(D_0, \Phi(z)), \quad (12)$$

где $D_0 = \Phi_0(E)$. Поскольку

$$\Phi'_0(z) = \frac{\varphi'_0(z)}{\varphi_0(z)} = \frac{2\gamma(1-a)}{1-z^2} \frac{(1-z)^\gamma}{(1-a)(1-z)^\gamma + a(1+z)^\gamma}, \quad (13)$$

то по формуле (3) получаем

$$R(D_0, \Phi_0(z)) = \frac{2\gamma(1-a)}{|1-z^2|} \left| \frac{(1-z)^\gamma}{(1-a)(1-z)^\gamma + a(1+z)^\gamma} \right| \left(1 - |z|^2 \right). \quad (14)$$

Поскольку в силу леммы 3 область $\phi_0(E)$ является круговой луночкой, симметричной относительно действительной оси, с углами в угловых точках $w=0$ и $w=1/a$, равными $\gamma\pi$, $0 < \gamma \leq 1$, то пересечением области $\phi_0(E)$ с любой окружностью $|w|=\rho$, $0 < \rho < 1/a$, является дуга окружности, симметричная относительно вещественной оси и содержащая точку вещественной полуси.

Поскольку область $\phi_0(E)$ является выпуклой и симметричной относительно действительной оси, то при любом r , $0 \leq r < 1$, область $\phi_0(E_r)$, где $E_r = \{z : |z| < r\}$, $0 \leq r < 1$, также является выпуклой и симметричной относительно действительной оси. Если пересечение $\phi_0(E_r) \cap \{|w| = \rho\}$ не пусто, то оно также является дугой окружности (связным множеством), симметричной относительно действительной оси и содержащейся в дуге окружности $\phi_0(E) \cap \{|w| = \rho\}$. Если предположить противное, т.е. что множество $\phi_0(E_r) \cap \{|w| = \rho\}$ связным не является, то это приведет к тому, что пересечение области $\phi_0(E)$ с окружностью $|w| = \rho$ не будет связным множеством.

Поэтому область $\Phi_0(E_r)$ на плоскости $u + iv = \ln w$ является симметричной относительно действительной оси, и ее пересечением с любой прямой $u = \ln \rho$, $0 < \rho < 1/a$, является интервал, симметричный относительно вещественной оси. Следовательно, после осуществления симметризации Штейнера [17] области $\Phi_0(E_r)$ относительно вещественной оси получится область $(\Phi_0(E_r))^* = \Phi_0(E_r)$.

Поэтому в силу леммы 2

$$\max_{|z| \leq r} R(D_0, \Phi_0(z)) = \max_{-r \leq t \leq r} R(D_0, \Phi_0(t)) = \max_{-r \leq t \leq r} R_0(t), \quad (15)$$

где $R_0(t) = R(D_0, \Phi_0(t))$, $t \in (-1; 1)$. Тогда в силу (14)

$$R_0(t) = 2\gamma(1-a) \frac{(1-t)^\gamma}{(1-a)(1-t)^\gamma + a(1+t)^\gamma} = 2\gamma(1-a) \left(\frac{1-t}{1+t} \right)^\gamma \phi_0(t).$$

Покажем, что $R'_0(t) < 0$ для всех $t \in (-1; 1)$. После вычислений получаем

$$R'_0(t) = 2\gamma(1-a) \left(\frac{1-t}{1+t} \right)^\gamma \left(\frac{\phi'_0(t)}{\phi_0(t)} - \frac{2\gamma}{1-t^2} \right) \phi_0(t).$$

Отсюда, учитывая, что в силу (13) при $z = t$

$$\frac{\phi'_0(t)}{\phi_0(t)} - \frac{2\gamma}{1-t^2} = \frac{2\gamma}{1-t^2} \left(\frac{(1-a)(1-t)^\gamma}{(1-a)(1-t)^\gamma + a(1+t)^\gamma} - 1 \right) = -\frac{2\gamma a}{1-t^2} \phi_0(t),$$

окончательно получаем, что $R'_0(t) = -\frac{4\gamma^2 a(1-a)}{1-t^2} \left(\frac{1-t}{1+t} \right)^\gamma (\phi_0(t))^2$, $t \in (-1; 1)$.

Поэтому $R'_0(t) < 0$ для всех $t \in (-1; 1)$, и внутренний радиус $R_0(t)$ является убывающей функцией на $(-1; 1)$. В силу этого, с учетом (15)

$$\max_{|z| \leq r} R(D_0, \Phi_0(z)) = R_0(-r) = 2\gamma(1-a) \frac{(1+r)^\gamma}{(1-a)(1+r)^\gamma + a(1-r)^\gamma}. \quad (16)$$

Поскольку $\Phi(z) \prec \Phi_0(z)$ и $\Phi \in \mathcal{A}_n$, то с учетом разложения функции Φ в ряд получаем, что $\Phi(|z| \leq r) \subset \Phi_0(|z| \leq r^n)$ при любом $r, 0 \leq r < 1$. Поэтому

$$\max_{|z| \leq r} R(D_0, \Phi(z)) \leq \max_{|z| \leq r^n} R(D_0, \Phi_0(z)) = 2\gamma(1-a) \frac{(1+r^n)^\gamma}{(1-a)(1+r^n)^\gamma + a(1-r^n)^\gamma}.$$

Следовательно, в силу (12) окончательно получаем оценку (9):

$$\left| z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| = |z\varphi'(z)| \leq M(r^n; a, \gamma) = \frac{2\gamma(1-a)nr^n}{1-r^{2n}} \frac{(1+r^n)^\gamma}{(1-a)(1+r^n)^\gamma + a(1-r^n)^\gamma}.$$

Оценка (10) вытекает из левой оценки (8) и оценки (9) с учетом неравенства

$$\left| \operatorname{Re} \left(z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right) \right| \leq \left| z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| \leq M(r^n; a, \gamma).$$

Точность левой и правой оценок (8) следует из того, что для функции $\varphi(z) = \varphi_0(z^n)$, где φ_0 из (5), знаки равенства достигаются соответственно в точках $z = \sqrt[n]{-1}r$ и $z = r$. Точность оценок (9)–(10) следует из того, что для функции $\varphi(z) = \varphi_0(z^n)$ в силу (13)

$$z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{2\gamma(1-a)nz^n}{1-z^{2n}} \frac{(1-z^n)^\gamma}{(1-a)(1-z^n)^\gamma + a(1+z^n)^\gamma},$$

и в точке $z = \sqrt[n]{-1}r$ имеем $z\varphi'(z)/\varphi(z) = -M(r^n; a, \gamma)$.

Теорема 1 доказана.

Следствие 1. Пусть функция $\varphi \in \mathcal{A}_n(a, \gamma)$ и удовлетворяет условию

$$\left| \varphi(z) - \frac{1}{2a} \right| < \frac{1}{2a}, \quad 0 < a < 1, \quad z \in E. \quad (17)$$

Тогда при $|z| = r < 1$ имеют место оценки

$$\frac{1-r^n}{1+(1-2a)r^n} \leq \operatorname{Re} \varphi(z) \leq |\varphi(z)| \leq \frac{1+r^n}{1-(1-2a)r^n}, \quad (18)$$

$$\left| z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| \leq \frac{2(1-a)nr^n}{1-r^n} \frac{1}{1+(1-2a)r^n}. \quad (19)$$

Оценки точные и достигаются для функции $\varphi(z) = \varphi_0(z^n)$, где

$$\varphi_0(z) = (1+z^n)/(1-(1-2a)z^n).$$

Доказательство. Положим в теореме 1 $\gamma = 1$. Тогда условие (4) преобразуется в условие $\operatorname{Re} \varphi^{-1}(z) > a$ или (17), а луночка преобразуется в круг с центром в точке $1/(2a)$ радиуса $1/(2a)$. Поэтому все утверждения следствия 1 вытекают из теоремы 1.

При $n=1$ оценки (18)–(19) с учетом обозначений $c = 1/(2a)$ получены в [4], а при $n \geq 1$ – в статье [5]. Кроме того, случаи $a \rightarrow 0$ ($\operatorname{Re} \varphi(z) > 0$) и $a = 1/2$ ($|\varphi(z) - 1| < 1$) условия (17) приводят к оценкам из [1–3].

Учитывая, что $\arg \varphi^{-1}(z) = -\arg \varphi(z)$, при $a \rightarrow 0$ из теоремы 1 получаем

Следствие 2. Пусть функция $\varphi \in \mathcal{A}_n$ и удовлетворяет условию $|\arg \varphi(z)| \leq \gamma\pi/2$.

Тогда при $|z| = r < 1$ имеют место точные оценки

$$\left(\frac{1-r^n}{1+r^n} \right)^\gamma \leq \operatorname{Re} \varphi(z) \leq |\varphi(z)| \leq \left(\frac{1+r^n}{1-r^n} \right)^\gamma, \quad \left| z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| \leq \frac{2\gamma nr^n}{1-r^{2n}}.$$

Экстремальная функция имеет вид: $\varphi(z) = ((1+z^n)/(1-z^n))^\gamma$.

Наряду с классом $\mathcal{A}_n(a, \gamma)$ введем класс $\hat{\mathcal{A}}_n(a, \gamma)$ функций φ с разложением вида $\varphi(z) = 1 + c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \dots$, $n \geq 1$, удовлетворяющих условию

$$|\arg(\varphi(z) - a)| < \gamma\pi/2, \quad 0 < \gamma \leq 1, \quad 0 \leq a < 1, \quad z \in E.$$

Между классами $\mathcal{A}_n(a, \gamma)$ и $\hat{\mathcal{A}}_n(a, \gamma)$ имеется простая связь, выраженная соотношением

$$\varphi(z) \in \hat{\mathcal{A}}_n(a, \gamma) \Leftrightarrow \psi(z) = \frac{1}{\varphi(-z)} \in \mathcal{A}_n(a, \gamma).$$

При этом, $z\varphi'(z)/\varphi(z) = \zeta\psi'(\zeta)/\psi(\zeta)$, $\zeta = -z$. В силу этого прямым следствием теоремы 1 является

Следствие 3. Пусть $\varphi \in \hat{\mathcal{A}}_n(a, \gamma)$ и $M(r; a, \gamma)$ определено по формуле (11). Тогда при $|z| = r < 1$ имеют место точные оценки

$$(1-a)\left(\frac{1-r^n}{1+r^n}\right)^\gamma + a \leq \operatorname{Re} \varphi(z) \leq |\varphi(z)| \leq (1-a)\left(\frac{1+r^n}{1-r^n}\right)^\gamma + a,$$

$$\left| z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| \leq M(r^n; a, \gamma)$$

и для любых $\mu, \eta \geq 0$

$$\mu \operatorname{Re} \varphi(z) + \eta \operatorname{Re} \left(z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right) \leq \mu \left((1-a)\left(\frac{1+r^n}{1-r^n}\right)^\gamma + a \right) + \eta M(r^n; a, \gamma).$$

Экстремальная функция имеет вид $\varphi(z) = \varphi_0(z^n)$, где

$$\varphi_0(z) = (1-a)((1+z)/(1-z))^\gamma + a.$$

При $\gamma = 1$, $n \geq 1$, т.е. для случая, когда $\operatorname{Re} \varphi(z) > a$, $0 \leq a < 1$, следствие 3 приводит к результатам из [6], а при $a = 0$ – к результатам из [2]. При $\gamma = 1$, $n = 1$ получаем оценки из [18–20].

4. Радиусы звездообразности некоторых классов аналитических функций

Пусть S^* – класс функций $f \in \mathcal{N}$, звездообразных в круге E , и пусть $S_n^*(c, R) \subset S^*$ – класс звездообразных функций $f \in \mathcal{N}_n$ Якубовского [21], удовлетворяющих условию

$$\left| z \frac{f'(z)}{f(z)} - c \right| < R, \quad z \in E,$$

причем $c, R \in \mathbf{R}$, $|c-1| < R \leq c$.

Нетрудно установить, что $f \in S_n^*(a, b)$ тогда и только тогда, когда $f \in \mathcal{N}_n$ и выполняется условие

$$\varphi(z) = z \frac{f'(z)}{f(z)} \prec \psi_0(z) = \frac{R + (R^2 - c^2 + c)z}{R + (1-c)z}. \quad (20)$$

Если $c - R = \alpha - \text{const}$ и $R \rightarrow +\infty$, то получаем класс $S^*(\alpha) \subset S^*$ функций, удовлетворяющих условию $\operatorname{Re} \left(z \frac{f'(z)}{f(z)} \right) > \alpha$, $0 \leq \alpha < 1$, $z \in E$, и называемых звездообразными порядка α . Очевидно, что $S^*(\alpha) \subset S^*(0) = S^*$.

Если функция $g \in S^*$, то функция $f \in \mathcal{N}$, связанная с g некоторым неравенством, содержащим отношение $f(z)/g(z)$, называется почти звездообразной функцией. Если же в отношении $f(z)/g(z)$ функция g сама является почти звездообразной, то функцию f называют дважды почти звездообразной функцией.

Определение 2. Будем считать, что функция f из \mathcal{N}_n принадлежит классу $CCS_n^*(a, \gamma, b, \delta, c, R)$ дважды почти звездообразных функций тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\frac{f(z)}{g(z)} \in \mathcal{A}_n(a, \gamma), \quad \frac{g(z)}{h(z)} \in \mathcal{A}_n(b, \delta), \quad \text{где функция } h \in S_n^*(c, R).$$

Теорема 2. Пусть функция $M(r; a, \gamma)$ определена по формуле (11) и $M_1(r; c, R) = \frac{R - (R^2 - c^2 + c)r}{R - (1-c)r}$. Тогда радиус звездообразности $r^*(\alpha)$ порядка α

класса $CCS_n^*(a, \gamma, b, \delta, c, R)$ определяется как единственный на $(0; 1)$ корень уравнения

$$M_1(r^n; c, R) - M(r^n; a, \gamma) - M(r^n; b, \delta) - \alpha = 0. \quad (21)$$

Доказательство. Обозначим $\varphi(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$, $\psi(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$. Тогда $z \frac{f'(z)}{f(z)} = z \frac{h'(z)}{h(z)} + z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} + z \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$. Поэтому в круге $|z| \leq r$, $0 \leq r < 1$, получаем

$$\operatorname{Re} \left(z \frac{f'(z)}{f(z)} \right) \geq \min_{|z| \leq r} \operatorname{Re} \left(z \frac{h'(z)}{h(z)} \right) - \max_{|z| \leq r} \left| z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| - \max_{|z| \leq r} \left| z \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} \right|.$$

Поскольку $h \in S_n^*(c, R)$, то в силу подчиненности (20) в круге $|z| \leq r$ имеет место оценка

$$\operatorname{Re} \left(z \frac{h'(z)}{h(z)} \right) \geq \min_{|z| \leq r^n} \operatorname{Re} \psi_0(z) = \psi_0(-r^n) = M_1(r^n; c, R).$$

В силу этого и оценки (9), примененной к функциям $\varphi \in \mathcal{A}_n(a, \gamma)$ и $\psi \in \mathcal{A}_n(b, \delta)$, находим

$$\operatorname{Re} \left(z \frac{f'(z)}{f(z)} \right) \geq M_1(r^n; c, R) - M(r^n; a, \gamma) - M(r^n; b, \delta).$$

Если $r = r^*(\alpha)$ является корнем уравнения (21), то из последнего неравенства следует, что $\operatorname{Re} \left(z \frac{f'(z)}{f(z)} \right) \geq \alpha$, то есть $f(z)$ является звездообразной порядка α в круге $|z| \leq r^*(\alpha)$.

Средствами дифференциального исчисления нетрудно установить, что функции $M(r^n; a, \gamma)$, $M(r^n; b, \delta)$ возрастают по r на $[0; 1]$ от 0 до $+\infty$, а функция $M_1(r^n; c, R)$ убывает на $[0; 1]$ от $M_1(0; c, R) = 1$ до $M_1(1; c, R) = c - R \in [0; 1]$. Поэтому уравнение (21) на $(0; 1)$ имеет единственный корень $r^*(\alpha)$.

Покажем, что радиус звездообразности $r^*(\alpha)$ является точным. Для этого рассмотрим функцию $f_0(z) = h_0(z)\varphi_0(z^n)\psi_0(z^n)$, где

$$\varphi_0(z) = \frac{(1+z)^\gamma}{(1-a)(1-z)^\gamma + a(1+z)^\gamma}, \quad \psi_0(z) = \frac{(1+z)^\delta}{(1-b)(1-z)^\delta + b(1+z)^\delta},$$

а функция h_0 определяется из уравнения

$$z \frac{h'_0(z)}{h_0(z)} = \frac{R + (R^2 - c^2 + c)z^n}{R + (1-c)z^n}.$$

Тогда, обозначив $g_0(z) = h_0(z)\psi_0(z^n)$, получаем, что $\frac{f_0(z)}{g_0(z)} = \varphi_0(z^n) \in \mathcal{A}_n(a, \gamma)$,

$\frac{g_0(z)}{h_0(z)} = \psi_0(z^n) \in \mathcal{A}_n(b, \delta)$, где $h_0 \in S_n^*(c, R)$. Тогда $f_0 \in CCS_n^*(a, \gamma, b, \delta, c, R)$ и

$$z \frac{f'_0(z)}{f_0(z)} = \frac{R + (R^2 - c^2 + c)z^n}{R + (1-c)z^n} + nz^n \frac{\varphi'_0(z^n)}{\varphi_0(z^n)} + nz^n \frac{\psi'_0(z^n)}{\psi_0(z^n)},$$

где

$$nz^n \frac{\varphi'_0(z^n)}{\varphi_0(z^n)} = \frac{2\gamma(1-a)nz^n}{1-z^{2n}} \frac{(1-z^n)^\gamma}{(1-a)(1-z^n)^\gamma + a(1+z^n)^\gamma},$$

$$nz^n \frac{\psi'_0(z^n)}{\psi_0(z^n)} = \frac{2\delta(1-b)nz^n}{1-z^{2n}} \frac{(1-z^n)^\delta}{(1-b)(1-z^n)^\delta + b(1+z^n)^\delta}.$$

Поэтому в точке $z = \sqrt[n]{-1}r$, где $r = r^*(\alpha)$ – корень уравнения (21), имеем

$$\operatorname{Re} \left(z \frac{f'_0(z)}{f_0(z)} \right) \Big|_{z=\sqrt[n]{-1}r} = M_1(r^n; c, R) - M(r^n; a, \gamma) - M(r^n; b, \delta) = \alpha.$$

Следовательно, радиус звездообразности порядка α увеличить нельзя. Теорема 2 доказана.

Отметим, что при $\delta \rightarrow 0$ условие $\frac{g(z)}{h(z)} \in \mathcal{A}_n(b, \delta)$ становится тривиальным и приводит к тождеству $g(z) \equiv h(z)$. В этом случае класс $CCS_n^*(a, \gamma, b, \delta, c, R)$ преобразуется в класс почти звездообразных функций

$$CS_n^*(a, \gamma, c, R) = \left\{ f \in \mathcal{N}_n : \frac{f(z)}{h(z)} \in \mathcal{A}_n(a, \gamma), h(z) \in S_n^*(c, R) \right\}$$

и в теореме 2 выражение $M(r^n; b, \delta) = 0$.

Кроме того, при $\gamma = 1$, $a \rightarrow 0$ условие $\frac{f(z)}{g(z)} \in \mathcal{A}_n(a, \gamma)$ преобразуется в неравенство $\operatorname{Re} \frac{f(z)}{g(z)} > 0$, при $\gamma = 1$, $a = 1/2$ условие $\frac{f(z)}{g(z)} \in \mathcal{A}_n(a, \gamma)$ преобразуется в неравенство $\left| \frac{f(z)}{g(z)} - 1 \right| < 1$, а при $\delta = 1$, $b \rightarrow 0$ условие $\frac{g(z)}{h(z)} \in \mathcal{A}_n(b, \delta)$ – в неравенство $\operatorname{Re} \frac{g(z)}{h(z)} > 0$. С учетом этого, если в теореме 2 положить: 1) $\gamma = 1$, $a \rightarrow 0$, $\delta = 1$, $b \rightarrow 0$, или 2) $\gamma = 1$, $a = 1/2$, $\delta = 1$, $b \rightarrow 0$ или 3) $\gamma = 1$, $a \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$, то получаем

Следствие 4. Пусть $f \in \mathcal{N}_n$ и $h \in S_n^*(c, R)$. Тогда радиус звездообразности r^* (a) порядка a функции f определяется как единственный на $(0; 1)$ корень уравнения:

- 1) $\frac{R - (R^2 - c^2 + c)r^n}{R - (1 - c)r^n} - \frac{4nr^n}{1 - r^{2n}} - \alpha = 0$, если $\operatorname{Re} \frac{f(z)}{g(z)} > 0$ и $\operatorname{Re} \frac{g(z)}{h(z)} > 0$;
- 2) $\frac{R - (R^2 - c^2 + c)r^n}{R - (1 - c)r^n} - \frac{nr^n(3 + r^n)}{1 - r^{2n}} - \alpha = 0$, если $\left| \frac{f(z)}{g(z)} - 1 \right| < 1$ и $\operatorname{Re} \frac{g(z)}{h(z)} > 0$;
- 3) $\frac{R - (R^2 - c^2 + c)r^n}{R - (1 - c)r^n} - \frac{2nr^n}{1 - r^{2n}} - \alpha = 0$, если $\operatorname{Re} \frac{f(z)}{h(z)} > 0$.

При определенных значениях c и R , т.е. при конкретизации функции $h \in S_n^*(c, R)$, следствие 4 дает ряд известных классов функций $f \in \mathcal{N}$, описанным в статьях [3, 8–11].

Пусть $n = 1$.

Случай 1. $c = R$, $R \rightarrow \infty$. Тогда $\psi_0(z) = \frac{1+z}{1-z}$, $h(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ и получаем классы

$$\mathcal{F}_4 = \left\{ f : \operatorname{Re} \left(\frac{(1-z)^2}{z} f(z) \right) > 0 \right\} \text{ из [9] и } \Pi_1 = \left\{ f : \operatorname{Re} \frac{f(z)}{g(z)} > 0, \operatorname{Re} \left(\frac{(1-z)^2}{z} g(z) \right) > 0 \right\},$$

$$\Pi_2 = \left\{ f : \left| \frac{f(z)}{g(z)} - 1 \right| < 1, \operatorname{Re} \left(\frac{(1-z)^2}{z} g(z) \right) > 0 \right\} \text{ из [8].}$$

Случай 2. $c - R = \frac{1}{2}$, $R \rightarrow \infty$. Тогда $\psi_0(z) = \frac{1}{1-z}$, $h(z) = \frac{z}{1-z}$ и получаем классы $\mathcal{F}_1 = \left\{ f : \operatorname{Re} \frac{f(z)}{g(z)} > 0, \operatorname{Re} \left(\frac{1-z}{z} g(z) \right) > 0 \right\}$, $\mathcal{F}_2 = \left\{ f : \left| \frac{f(z)}{g(z)} - 1 \right| < 1, \operatorname{Re} \left(\frac{1-z}{z} g(z) \right) > 0 \right\}$, $\mathcal{F}_3 = \left\{ f : \operatorname{Re} \left(\frac{1-z}{z} f(z) \right) > 0 \right\}$ из [9].

Случай 3. $R^2 - c^2 + c = 2(1-c)$, $0 < c \leq 1$, т.е. $R^2 = (1-c)(2-c) \geq 0$. Тогда $\psi_0(z) = \frac{R+2(1-c)z}{R+(1-c)z}$ и $h(z) = z + \frac{1-c}{R} z^2$. Пусть $0 \leq \frac{1-c}{R} \leq \frac{1}{2}$. Тогда $\operatorname{Re} \left(z \frac{h'(z)}{h(z)} \right) \geq \min_{|z|=1} \operatorname{Re} \psi_0(z) = \psi_0(-1) = \frac{R+2(1-c)}{R+(1-c)} \geq 0$ и поэтому $h(z) = z + \frac{1-c}{R} z^2 \in S^*$.

Если $\frac{1-c}{R} = \frac{1}{2}$, то $\psi_0(z) = \frac{1+z}{1+z/2}$ и $h(z) = z + \frac{z^2}{2}$. В этом случае получаем классы из [10] $\mathcal{F}_1 = \left\{ f : \operatorname{Re} \frac{f(z)}{g(z)} > 0, \operatorname{Re} \frac{g(z)}{z + \frac{z^2}{2}} > 0 \right\}$, $\mathcal{F}_2 = \left\{ f : \left| \frac{f(z)}{g(z)} - 1 \right| < 1, \operatorname{Re} \frac{g(z)}{z + \frac{z^2}{2}} > 0 \right\}$, $\mathcal{F}_3 = \left\{ f : \operatorname{Re} \frac{g(z)}{z + \frac{z^2}{2}} > 0 \right\}$.

Если $c = 1$, то $\psi_0(z) \equiv 1$ и $h(z) = z$. В этом случае получаем классы из [11] $\mathcal{F}_1 = \left\{ f : \operatorname{Re} \frac{f(z)}{g(z)} > 0, \operatorname{Re} \frac{g(z)}{z} > 0 \right\}$, $\mathcal{F}_3 = \left\{ f : \left| \frac{f(z)}{g(z)} - 1 \right| < 1, \operatorname{Re} \frac{g(z)}{z} > 0 \right\}$.

Для каждого из классов, приведенных выше, радиусы звездообразности порядка α , полученные в статьях [3, 8–11], являются частными случаями радиуса $r^*(\alpha)$ из следствия 4.

Пусть $n = 2$. Положим $c = R$, $R \rightarrow \infty$. Тогда $\psi_0(z) = \frac{1+z^2}{1-z^2}$, $h(z) = \frac{z}{1-z^2}$ и получаем классы

$$\mathcal{K}_1 = \left\{ f : \operatorname{Re} \frac{f(z)}{g(z)} > 0, \operatorname{Re} \left(\frac{(1-z^2)f(z)}{z} \right) > 0 \right\},$$

$$\mathcal{K}_2 = \left\{ f : \left| \frac{f(z)}{g(z)} - 1 \right| \leq 1, \operatorname{Re} \left(\frac{(1-z^2)f(z)}{z} \right) > 0 \right\}, \quad \mathcal{K}_3 = \left\{ f : \operatorname{Re} \left(\frac{(1-z^2)f(z)}{z} \right) > 0 \right\},$$

исследованные в [12] для случая, когда $f \in \mathcal{N}$. При $n = 2$, $c = R$, $R \rightarrow \infty$ из следствия 4 получаем радиусы звездообразности порядка α классов \mathcal{K}_1 , \mathcal{K}_2 , \mathcal{K}_3 , уточняющие результаты из [4] на случай, когда $f''(0) = 0$. То есть если $f \in \mathcal{N}_2$, то

$$r^*(\alpha, \mathcal{K}_1) = \left(\frac{2(1-\alpha)}{5 + \sqrt{21 + 4\alpha^2}} \right)^{1/2}, \quad r^*(\alpha, \mathcal{K}_2) = \left(\frac{1-\alpha}{4 + \sqrt{17 - 2\alpha + \alpha^2}} \right)^{1/2},$$

$$r^*(\alpha, \mathcal{K}_3) = \left(\frac{1-\alpha}{3 + \sqrt{8 + \alpha^2}} \right)^{1/2}.$$

Список источников

1. MacGregor T.H. Functions whose derivative has a positive real part // Trans. Amer. Math. Soc. 1962. V. 104. P. 532–537. doi: 10.1090/s0002-9947-1962-0140674-7
2. MacGregor T.H. The radius of univalence of certain analytic functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1963. V. 14. P. 514–520.
3. MacGregor T.H. The radius of univalence of certain analytic functions, II // Proc. Am. Math. Soc. 1963. V. 14. P. 521–524. doi: 10.1090/s0002-9939-1963-0148892-5
4. Goel R.M. A class of close-to-convex functions // Czechoslovak Math. J. 1968. V. 18 (93). P. 104–116. doi: 10.21136/CMJ.1968.100815
5. Shaffer D.B. Distortion theorems for a special class of analytic functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1973. V. 39 (2). P. 281–287. doi: 10.2307/2039632
6. Shah G.M. On the univalence of some analytic functions // Pacific J. Math. 1972. V. 43 (1). P. 239–250. doi: 10.2140/pjm.1972.43.239
7. Anh V.V., Tuan P.D. Extremal problems for a class of functions of positive real part and applications // Austral. Math. Soc. (Series A). 1986. V. 41. P. 152–164. doi: 10.1017/S1446788700033577
8. El-Faqaer A.S.A., Mohd M.H., Ravichandran V., Supramaniam S. Starlikeness of certain analytic functions // arXiv preprint. arXiv:2006.11734. 2020. doi 10.48550/arXiv.2006.11734. URL: <https://arxiv.org/abs/2006.11734>
9. Sebastian A., Ravichandran V. Radius of starlikeness of certain analytic functions // Math. Slovaca. 2021. V. 71 (1). P. 83–104. doi: 10.1515/ms-2017-0454
10. Kanaga R., Ravichandran V. Starlikeness for certain close-to-star functions // Hacet. J. Math. Stat. 2021. V. 50 (2). P. 414–432. doi: 10.15672/hujms.702703
11. Ali R.M., Jain N.K., Ravichandran V. On the radius constants for classes of analytic functions // arXiv preprint. arXiv:1207.4529v1 [math.CV]. 2012. doi: 10.48550/arXiv.1207.4529. URL: <https://arxiv.org/abs/1207.4529>
12. Khatter K., Lee S.K., Ravichandran V. Radius of starlikeness for classes of analytic functions // arXiv preprint. arXiv: 2006.11744. 2020. doi: 10.48550/arXiv.2006.11744. URL: <https://arxiv.org/abs/2006.11744>
13. Rosihan M.A., Ravichandran V., Sharma K. Starlikeness of analytic functions with subordinate ratios // Hindawi J. of Math. 2021. V. 2021. Art. 8373209. P. 1–8. doi: 10.1155/2021/8373209
14. Майер Ф.Ф., Тасманов М.Г., Утемисова А.А., Ысмагул Р.С. Точные оценки регулярных функций и радиусы выпуклости и звездообразности некоторых классов звездообразных и почти звездообразных функций // Вестник Казахстанско-Британского технического университета. 2024. Т. 21, № 2. С. 127–138. doi: 10.55452/1998-6688-2024-21-2-127-138
15. Мимюк И.П. Оценки в некоторых классах аналитических функций // Метрические вопросы теории функций. Киев: Наукова думка, 1980. С. 90–99.
16. Haegi H.R. Extremalprobleme und Ungleichungen konformer Gebietsgrößen // Compositio Mathematica. 1951. V. 8. P. 81–111.
17. Поли Г., Сегё Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962. 336 с.
18. Shaffer D.B. On bounds for the derivative of analytic functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1973. V. 37. P. 517–520.

19. McCarty C.P. Functions with real part greater than α // Proc. Amer. Math. Soc. 1972. V. 35. P. 211–216.
20. Libera R.J. Some radius of convexity problems // Duke Math. J. 1964. V. 31. P. 143–158.
21. Jakubowski Z.J. On the coefficients of star-like functions of some classes // Ann. Polon. Math. 1972. V. 26/ P. 305–313.

References

1. MacGregor T.H. (1962) Functions whose derivative has a positive real part. *Transactions of the American Mathematical Society*. 104. pp. 532–537. DOI: 10.1090/s0002-9947-1962-0140674-7.
2. MacGregor T.H. (1963) The radius of univalence of certain analytic functions, *Proceedings of the American Mathematical Society*. 14. pp. 514–520.
3. MacGregor T.H. (1963) The radius of univalence of certain analytic functions, II. *Proc. Am. Math. Soc.* 14. pp. 521–524. doi: 10.1090/s0002-9939-1963-0148892-5
4. Goel R.M. (1968) A class of close-to-convex functions. *Czechoslovak Mathematical Journal*. 18(93). pp. 104–116. DOI: 10.21136/CMJ.1968.100815.
5. Shaffer D.B. (1973) Distortion theorems for a special class of analytic functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 39(2). pp. 281–287. DOI: 10.2307/2039632.
6. Shah G.M. (1972) On the univalence of some analytic functions. *Pacific Journal of Mathematics*. 43. pp. 239–250. DOI: 10.2140/pjm.1972.43.239.
7. Anh V.V., Tuan P.D. (1986) Extremal problems for a class of functions of positive real part and applications. *Journal of the Australian Mathematical Society. Series A*. 41. pp. 152–164. DOI: 10.1017/S1446788700033577.
8. El-Faqeer A.S.A., Mohd M.H., Ravichandran V., Supramaniam S. (2020) Starlikeness of certain analytic functions. *arXiv preprint arXiv:2006.11734*, 2020 arxiv.org DOI: 10.48550/arXiv.2006.11734.
9. Sebastian A., Ravichandran V. (2021) Radius of starlikeness of certain analytic functions. *Mathematica Slovaca*. 71(1). pp. 83–104. DOI: 10.1515/ms-2017-0454.
10. Kanaga R., Ravichandran V. (2021) Starlikeness for certain close-to-star functions. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*. 50(2). pp. 414–432. DOI: 10.15672/hujms.702703.
11. Ali R.M., Jain N.K., Ravichandran V. (2012) On the radius constants for classes of analytic functions. *arXiv:1207.4529v1 [math.CV] – 2012*. DOI: 10.48550/arXiv.1207.4529.
12. Khatter K., Lee S. K., Ravichandran V. (2020) Radius of starlikeness for classes of analytic functions. *arXiv preprint arXiv:2006.11744*. DOI: 10.48550/arXiv.2006.11744.
13. Rosihan M.A., Ravichandran V., Sharma K. (2021) Starlikeness of analytic functions with subordinate ratios. *Hindawi J. of Math.*, Article ID 8373209. 2021, pp. 1–8. DOI: 10.1155/2021/8373209
14. Maiyer F.F., Tastanov M.G., Utemissova A.A., Ysmagul R.S. (2024) Tochnyye otsenki reguljarnykh funktsiy i radiisy vypuklosti i zvezdoobraznosti nekotorykh klassov zvezdoobraznykh i pochti zvezdoobraznykh funktsiy. [Exact estimates of regular functions and radii of convexity and starlikeness of some classes of starlike and close-to-starlike functions]. *Herald of the Kazakh-British technical university*. 21(2). pp. 127–138. DOI: 10.55452/1998-6688-2024-21-2-127-138.
15. Mityuk I.P. (1980) Otsenki v nekotorykh klassakh analiticheskikh funktsiy [Estimates in some classes of analytic functions]. *Metricheskiye voprosy teorii funktsiy*. Kiev: Naukova dumka.
16. Haegi H.R. (1951) Extremalprobleme und Ungleichungen konformer Gebietsgrößen. *Compositio Mathematica*. 8. pp. 81–111.
17. Pólya G., Szegő G. (1951) *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*. Princeton: Princeton University Press.
18. Shaffer D.B. (1973) On bounds for the derivative of analytic functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 37. pp. 517–520.

19. McCarty C.P. (1972) Functions with real part greater than α . *Proceedings of the American Mathematical Society*. 35. pp. 211–216.
20. Libera R.J. (1964) Some radius of convexity problems. *Duke Mathematical Journal*. 31. pp. 143–158.
21. Jakubowski Z.J. (1972) On the coefficients of star-like functions of some classes. *Annales Polonici Mathematici*. 26. pp. 305–313.

Сведения об авторах:

Майер Федор Федорович – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики и физики Костанайского регионального университета им. А. Байтурсынова (Костанай, Казахстан). E-mail: maiyer@mail.ru

Тастанов Мейрамбек Габдуалиевич – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики и физики Костанайского регионального университета им. А. Байтурсынова (Костанай, Казахстан). E-mail: tastao@mail.ru

Утемисова Анар Алтаевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и физики Костанайского регионального университета им. А. Байтурсынова (Костанай, Казахстан). E-mail: anar_utemisova@mail.ru

Information about the authors:

Maiyer Fedor F. (Professor, Candidate of Physics and Mathematics, Kostanay Regional University named after A. Baitursynuly, Kostanay, Kazakhstan). E-mail: maiyer@mail.ru

Tastanov Meyrambek G. (Professor, Candidate of Physics and Mathematics, Kostanay Regional University named after A. Baitursynuly, Kostanay, Kazakhstan). E-mail: tastao@mail.ru

Utemissova Anar A. (Associate Professor, Candidate of Pedagogical Sciences, Kostanay Regional University named after A. Baitursynuly, Kostanay, Kazakhstan). E-mail: anar_utemisova@mail.ru

Статья поступила в редакцию 03.10.2024; принята к публикации 08.12.2025

The article was submitted 03.10.2024; accepted for publication 08.12.2025

Научная статья

УДК 512.54

doi: 10.17223/19988621/98/4

MSC: 20F99

Признак непростоты группы с конечным элементом**Владимир Иванович Сенашов**

*Институт вычислительного моделирования Сибирского отделения
Российской академии наук, Красноярск, Россия, sen1112home@mail.ru*

Аннотация. Изучаются бесконечные группы с условиями конечности для системы подгрупп. Доказано, что группа G без инволюций, не имеющая слойно конечной периодической части, с M -конечным элементом a простого порядка, где M – нормализатор максимальной слойно конечной подгруппы, содержащей периодическую часть группы $N_G(\langle a \rangle)$, в случае когда нормализатор любой конечной нетривиальной подгруппы обладает бесконечной слойно конечной периодической частью, имеет вид: $G = F \times N_G(a)$, и $F \times \langle a \rangle = \langle a^G \rangle$ – группа Фробениуса с ядром F и дополнением $\langle a \rangle$.

Ключевые слова: слойно конечная группа, конечный элемент, условия конечности, признак непростоты, группа Фробениуса

Благодарности: Работа выполнена в рамках госзадания ИВМ СО РАН (базовый проект FWES-2024-0025). Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (соглашение № 075-02-2025-1790).

Для цитирования: Сенашов В.И. Признак непростоты группы с конечным элементом // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 98. С. 44–50. doi: 10.17223/19988621/98/4

Original article

A criterion of nonsimplicity of a group with a finite element**Vladimir I. Senashov**

*Institute of Computing Modelling of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
Krasnoyarsk, Russian Federation, sen1112home@mail.ru*

Abstract. Infinite groups with finiteness conditions traditionally include periodic groups and locally finite groups. Later, in the Krasnoyarsk school on infinite groups, new finiteness conditions for a system of subgroups appeared: conjugately biprimitive finite groups, weakly conjugately biprimitive finite groups, biprimitive finite groups, weakly biprimitive finite groups, introduced by V.P. Shunkov, in which subgroups generated by pairs of elements (pairs of conjugate elements, pairs of elements of the same order, pairs of such elements in sections of the group by finite subgroups) were assumed to be finite. Infinite groups with finiteness conditions for a system of subgroups include groups with a finite element, introduced by A.I. Sozutov. An element a of a group G is called a finite element if groups of the form $\langle a, g^{-1}ag \rangle$, $g \in G$, are finite. It is proved that the group G without

involutions, not having a layer-finite periodic part, with M -finite element a of prime order, where M is the normalizer of a maximal layer-finite subgroup containing the periodic part of the group $N_G(\langle a \rangle)$, in the case when the normalizer of any finite non-trivial subgroup has an infinite layer-finite periodic part, has the form $G = F\lambda N_G(\langle a \rangle)$ and $F\lambda\langle a \rangle = \langle a^G \rangle$ is a Frobenius group with the kernel F and the complement $\langle a \rangle$.

Keywords: layer-finite group, finite element, finiteness conditions. sign of non-simplicity, Frobenius group

Acknowledgments: The work was performed in the framework of the state assignment of ICM SB RAS, project no. FWES-2024-0025. This work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement No. 075-02-2025-1790).

For citation: Senashov, V.I. (2025) A criterion of nonsimplicity of a group with a finite element. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mehanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 98. pp. 44–50. doi: 10.17223/19988621/98/4

Введение

Под условием конечности в теории групп понимается любое такое свойство, присущее всем конечным группам, что существуют бесконечные группы, которые этим свойствам не обладают. К бесконечным группам с условиями конечности традиционно относят периодические группы, локально конечные группы, локально нормальные группы, группы с конечными классами сопряженных элементов. Позднее в Красноярской школе по бесконечным группам появились новые классы групп с условиями конечности для системы подгрупп: сопряженно бипримитивно конечные группы, слабо сопряженно бипримитивно конечные группы, бипримитивно конечные группы, слабо бипримитивно конечные группы, введенные В.П. Шунковым [1], в которых конечными полагались подгруппы, порожденные парами элементов (парами сопряженных элементов, парами элементов одного порядка, парами таких элементов в сечениях группы по конечным подгруппам). К группам с такими условиями конечности относятся изучаемые нами группы с конечным элементом. Термин «конечный элемент» введен А.И. Созутовым в работе [2].

Напомним некоторые необходимые определения.

Элемент a группы G называется *конечным элементом*, если группы вида $\langle a, g^{-1}ag \rangle$, $g \in G$, конечны.

В произвольной периодической группе с инволюциями (элементами второго порядка) любая инволюция является конечным элементом, так как в периодической группе любые две инволюции порождают конечную подгруппу.

Элемент a группы G называется *H-конечным элементом*, если для некоторой подгруппы H группы G группы вида $\langle a, g^{-1}ag \rangle$ для $g \in G \setminus H$ конечны.

Если рассмотреть группу G , составляющую со своей собственной подгруппой H пару Фробениуса (G, H) , и выбрать из H элемент a конечного порядка, отличного от двух такой, что группы вида $\langle a, g^{-1}ag \rangle$ конечны для $g \in G \setminus H$ (т.е. a – H -конечный элемент), то А.И. Созутовым доказано [3. Теорема 2.11], что тогда группа G имеет строение $G = F \times H$, где F – периодическая группа, и $F \times \langle a \rangle$ – группа Фробениуса с ядром F и дополнением $\langle a \rangle$.

Слойно конечная группа – это группа, множество элементов любого заданного порядка которой конечно.

Слойно конечными группами являются все конечные группы, прямые произведения конечного числа квазициклических примарных групп по одному простому числу и прямые произведения бесконечного числа примарных квазициклических групп по разным простым числам. Строение слойно конечных групп может быть достаточно сложным. Наиболее полное описание свойств таких групп можно найти в монографии С.Н. Черникова [4. Глава 3].

Почти слойно конечная группа – это расширение слойно конечной группы при помощи конечной группы.

Напомним, что группа называется *черниковской*, если она является конечным расширением абелевой группы, удовлетворяющей условию минимальности. Легко указать пример черниковской группы, не являющейся слойно конечной. Почти слойно конечные группы имеют существенно более сложное строение, чем слойно конечные группы. В таких группах могут быть бесконечные слои элементов одного и того же порядка. В класс почти слойно конечных групп входят все черниковские группы. Примером почти слойно конечной нечерниковской группы служит расширение прямого произведения бесконечного числа квазициклических групп по разным простым числам при помощи циклической группы порядка два, инволюция из которой инвертирует все элементы из прямого произведения. В этой группе все слои элементов конечны, за исключением слоя элементов, состоящего из элементов порядка два. Более подробно свойства почти слойно конечных групп представлены в монографии автора [5].

Группа G называется *группой Фробениуса* с дополнением H и ядром F , если F и H – такие ее собственные подгруппы, что

- 1) $H \cap H^g = 1$ для любого элемента $g \in G \setminus H$;
- 2) $F = G \setminus \cup_{x \in G} (H \setminus \{1\})^x$;
- 3) $G = F \times H$.

Группа G и ее собственная подгруппа H называются *парой Фробениуса* (G, H) , если $H \cap H^g = 1$ для любого элемента $g \in G \setminus H$.

Пусть G – группа, H – ее собственная подгруппа, и a – нетривиальный элемент из H . Элемент a называется *циклически H -фробениусовым элементом* группы G , если для любого элемента a^g , где $g \in G \setminus H$, подгруппа $L_g = \langle a, g^{-1}ag \rangle$ – группа Фробениуса с дополнением $\langle a \rangle$.

Элемент второго порядка называется *инволюцией*.

Под *периодической частью* группы мы понимаем множество ее элементов конечного порядка, если последняя является группой [6].

В работе доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть G – группа без инволюций, не имеющая слойно конечной периодической части, с M -конечным элементом a простого порядка, где M – нормализатор максимальной слойно конечной подгруппы, содержащей периодическую часть группы $N_G(\langle a \rangle)$. Если нормализатор любой конечной нетривиальной подгруппы группы G обладает бесконечной слойно конечной периодической частью, то $G = F \times N_G(a)$ и $F \times \langle a \rangle = \langle a \rangle$ – группа Фробениуса с ядром F и дополнением $\langle a \rangle$.

Ранее автор изучал группы Шункова с нормализаторами конечных нетривиальных подгрупп, обладающими слойно конечной периодической частью. В част-

ности, доказал, что такая группа обладает слойно конечной периодической частью при условии, что любая периодическая локально разрешимая подгруппа слойно конечна [7].

Напомним, что группа G называется *группой Шункова*, если для любого простого числа p и для любой конечной подгруппы H из G любые два сопряженных элемента порядка p из фактор-группы $N_G(H)/H$ порождают конечную подгруппу.

Группы Шункова ранее назывались *сопряженно бипримитивно конечными группами*.

Группа G называется *слабо сопряженной бипримитивно конечной группой*, если любая пара сопряженных элементов простого порядка порождает конечную подгруппу.

Очевидно, что группа является слабо сопряженной бипримитивно конечной тогда и только тогда, когда все элементы простых порядков в ней конечны.

Доказательство основного результата

Для начала приведем некоторые результаты, используемые при доказательстве основного результата, которые мы будем называть предложениями с соответствующим номером.

1. **Теорема В.П. Шункова** [8. Теорема 1]. Локально конечная группа G тогда и только тогда почти слойно конечна, когда G удовлетворяет условию: нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы группы G является почти слойно конечной группой.

2. **Теорема Г. Фробениуса** [9]. Если в конечной группе G существует подгруппа H , совпадающая со своим нормализатором и взаимно простая со всеми сопряженными подгруппами, за исключением H , то множество элементов из G , не принадлежащих H и ни одной из подгрупп, сопряженных с H , вместе с единицей является инвариантной подгруппой группы G .

3. Пусть $G = F\lambda H$ – конечная группа Фробениуса, где F – ядро, а H – дополнение. Если $G = \langle a, k \rangle$, $a \in H$ и $|a| = |k| = p$ – простое число, то подгруппы $\langle a \rangle$, $\langle k \rangle$ сопряжены в G , причем если H не содержит инволюций, то $H = \langle a \rangle$ и $\langle k \rangle = \langle a^b \rangle$ для некоторого элемента $b \in F$ [3. Предложение 1.9].

4. **Теорема** [3. Теорема 3.1]. Пусть H – собственная подгруппа группы G , a – циклически H -фробениусовый элемент группы G и $a^2 \neq 1$. Тогда $G = F \times N_G(a)$ и $F \times \langle a \rangle = \langle a^G \rangle$ – группа Фробениуса с ядром F и дополнением $\langle a \rangle$.

5. **Теорема С.Н. Черникова** [10]. Если локально конечная p -группа G содержит лишь конечное множество элементов какого-нибудь порядка, отличного от единицы, то она является черниковской p -группой.

6. В произвольной группе всякая подгруппа конечного индекса в группе обладает нормальной подгруппой в группе и конечного индекса в ней [11. С. 69].

7. **Теорема В.П. Шункова** [12. Предложение 8]. Пусть T – группа, D – ее локально конечная подгруппа с черниковскими примарными подгруппами; A , C – некоторые подгруппы из T .

Если D обладает такими подгруппами F, R ($R \leq F$), что индекс $|D : R|$ конечен и $A, D < N_T(F)$; $C, D < N_T(R)$, то в D существует подгруппа X конечного индекса в D и $A, C, D < N_T(X)$.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы.

Предположим, что G – группа без инволюций, не имеющая слойно конечной периодической части, и для любой нетривиальной конечной подгруппы X группы G ее нормализатор $N_G(X)$ обладает бесконечной слойно конечной периодической частью.

Любая локально конечная подгруппа группы G является слойно конечной группой.

Действительно, как следует из предложения 1, любая локально конечная подгруппа L группы G является почти слойно конечной. Тогда группа L содержит конечную нетривиальную нормальную подгруппу, и, следовательно, по условиям, наложенным на группу G , группа L является слойно конечной.

Любая слойно конечная подгруппа C группы G содержится в максимальной слойно конечной подгруппе группы G .

Действительно, пусть $C < H_1 < \dots < H_n < \dots$ – цепочка слойно конечных подгрупп группы G , содержащих C . Тогда объединение V этой цепи является локально конечной группой, а потому, как мы показали выше, она является слойно конечной подгруппой из группы G . Используя лемму Цорна, заключаем, что подгруппа C содержится в максимальной слойно конечной подгруппе группы G .

Пусть F, K – две различные бесконечные максимальные слойно конечные подгруппы группы G . Тогда F, K пересекаются по единичной подгруппе.

Для доказательства этого утверждения заметим, что в любой локально конечной подгруппе группы G по предложению 5 примарные подгруппы черниковские.

Теперь предположим противное. Пусть некоторый неединичный элемент $b \in F \cap K$. Если пересечение $F \cap K$ имеет конечные индексы в подгруппах F и K , то по предложению 6 $F \cap K$ содержит подгруппу X_F , нормальную и конечного индекса в группе F . В свою очередь, группа X_F снова по предложению 6 содержит подгруппу X_K , нормальную и конечного индекса в группе K .

По предложению 7 локально конечная подгруппа $F \cap K$ с черниковскими примарными подгруппами содержит подгруппу X нормальную конечного индекса в F и в K . По условиям теоремы получаем противоречие с максимальностью F (по лемме Дицмана в слойно конечной группе X всегда найдется конечная характеристическая подгруппа).

Пусть тогда для одной из подгрупп, например для K , индекс $|K : K \cap F|$ бесконечен. Ввиду слойной конечности группы K в ней найдется подгруппа B такая, что $F \cap K = F \cap B$, $|B : F \cap B| < \infty$, и B содержит некоторый элемент из $K \setminus F$.

По предложению 6 $F \cap K$ содержит подгруппу Z_F , нормальную и конечного индекса в F . В свою очередь, Z_F снова по предложению 6 содержит подгруппу Z_B , нормальную и конечного индекса в B .

Снова по предложению 7 в локально конечной подгруппе $F \cap K$ с черниковскими примарными подгруппами существует подгруппа $Z \leq B \cap F$, в нормализатор которой входят подгруппы F и B . Из-за максимальности подгруппы F получаем противоречие со слойной конечностью периодической части нормализатора $N_G(Z)$.

Таким образом, доказано, что различные бесконечные максимальные слойно конечные подгруппы группы G пересекаются по единичной подгруппе.

Обозначим через a M -конечный элемент простого порядка из группы G , где M – нормализатор максимальной слойно конечной подгруппы H , содержащей перио-

дическую часть группы $N_G(\langle a \rangle)$. (Периодическая часть группы $N_G(\langle a \rangle)$ является бесконечной слойно конечной группой и, как показано выше, существует максимальная слойно конечная подгруппа H группы G , содержащая эту периодическую часть.) Периодическая часть группы $M = N_G(H)$ является слойно конечной группой, так как в слойно конечной группе H всегда найдется конечная характеристическая подгруппа, нормализатор которой по условиям теоремы обладает слойно конечной периодической частью. Заметим, что ввиду максимальности группы H периодическая часть группы M совпадает с группой H .

Пусть некоторый элемент g взят из разности $G \setminus M$. Поскольку подгруппы $H, g^{-1}Hg$ являются различными максимальными слойно конечными подгруппами группы G , то пересечение $H \cap g^{-1}Hg = 1$. Следовательно, пересечение $M \cap g^{-1}Mg$ не содержит нетривиальных элементов конечного порядка для любого элемента $g \in G \setminus M$. Тогда в конечной группе $\langle a, a^g \rangle$ (она конечна, поскольку $a - M$ -конечный элемент группы G) собственная подгруппа $\langle a, a^g \rangle \cap H$ образует пару Фробениуса с $\langle a, a^g \rangle$, а сама группа $\langle a, a^g \rangle$ является группой Фробениуса по предложению 2.

По предложению 3 для любого элемента a^g , где $g \in G \setminus M$, подгруппа $L_g = \langle a, g^{-1}ag \rangle$ является группой Фробениуса с дополнением $\langle a \rangle$.

Таким образом, для собственной подгруппы M группы G элемент a является циклически M -фробениусовым элементом группы G .

Тогда по предложению 4 группа G имеет вид $G = F \times N_G(a)$ и $F \times \langle a \rangle = \langle a^G \rangle$ – группа Фробениуса с ядром F и дополнением $\langle a \rangle$.

Теорема доказана.

Список источников

1. Шунков В.П. Об одном классе p -групп // Алгебра и логика. 1970. Т. 9, № 4. С. 484–496.
2. Созутов А.И. О группах с классом фробениусо-абелевых элементов // Алгебра и логика. 1995. Т. 34. С. 531–549.
3. Попов А.М., Созутов А.И., Шунков В.П. Группы с системами фробениусовых подгрупп. Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2004. 211 с.
4. Черников С.Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп. М.: Наука, 1980. 384 с.
5. Сенашов В.И. Почти слойно конечные группы. Saarbrucken: Lap Lambert Academic Publishing, 2013. 106 с.
6. Курош А.Г. Теория групп. М.: Наука, 1967. 648 с.
7. Сенашов В.И. Группы со слойно конечной периодической частью // Сибирский математический журнал. 1997. Т. 38. С. 1374–1386.
8. Сенашов В.И., Шунков В.П. Почти слойная конечность периодической части группы без инволюций // Дискретная математика. 2003. Т. 15. С. 91–104.
9. Frobenius G. Über auflösbare Gruppen. IV // Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1901. S. 1216–1230.
10. Черников С.Н. О специальных p -группах // Математический сборник. 1950. Т. 27. С. 185–200.
11. Шунков В.П. О вложении примарных элементов в группе. Новосибирск: Наука, Сиб. изд. фирма, 1992. 133 с.
12. Шунков В.П. О локально конечных группах конечного ранга // Алгебра и логика. 1971. Т. 10. С. 199–225.

References

1. Shunkov V.P. (1970) On a class of p -groups. *Algebra and Logic*. 9(4). pp. 291–297.
2. Sozutov A.I. (1995) On groups with a class of Frobenius-Abelian elements. *Algebra and Logic*. 34(5). pp. 295–305.
3. Popov A.M., Sozutov A.I., Shunkov V.P. (2004) *Gruppy s sistemami podgrupp Frobeniusa* [Groups with systems of Frobenius subgroups]. Krasnoyarsk: Krasnoyarsk State Technical University.
4. Chernikov, S.N. (1980) *Gruppy s zadannymi svoystvami sistemy podgrupp* [Groups with Given Properties of a System of Subgroups]. Moscow: Nauka.
5. Senashov, V.I. (2013) *Pochti slayno konechnyye gruppy* [Almost Layer-Finite Groups]. Germany: Lap Lambert Academic Publishing.
6. Kurosh A.G. (1967) *Teoriya grupp* [Group Theory]. Moscow: Nauka.
7. Senashov V.I. (1997) Groups with layer-finite periodic part. *Siberian Mathematical Journal*. 38(6). pp. 1196–1205.
8. Senashov V.I., Shunkov V.P. (2003) Almost layer-finiteness of the periodic part of groups without involutions. *Discrete Mathematics and Applications*. 13(4). pp. 391–404.
9. Frobenius G. (1901) Über auflösbare Gruppen, IV. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*. pp. 1216–1230.
10. Chernikov S.N. (1950) On special p -groups. *Matematicheskiy Sbornik – Sbornik Mathematics*. 69(2). pp. 185–200.
11. Shunkov V.P. (1992) *O vlozhennii primarnykh elementov v gruppu* [On embedding of primary elements in a group]. Novosibirsk: Nauka.
12. Shunkov V.P. (1971) On locally finite groups of finite rank. *Algebra and Logic*. 10(2). pp. 127–142.

Сведения об авторе:

Сенашов Владимир Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института вычислительного моделирования Сибирского отделения Российской академии наук (Красноярск, Россия). E-mail: sen1112home@mail.ru

Information about the author:

Senashov Vladimir I. (Professor, Leader Researcher of the Institute of Computing Modelling of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Krasnoyarsk, Russian Federation). E-mail: sen1112home@mail.ru

Статья поступила в редакцию 24.02.2025; принята к публикации 08.12.2025

The article was submitted 24.02.2025; accepted for publication 08.12.2025

МЕХАНИКА**MECHANICS**

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/98/5

**Построение определяющих соотношений нелинейно-упругих
сред с помощью механико-геометрической модели
с диагональными связями****Даниил Анатольевич Азаров***Донской государственный технический университет,
Ростов-на-Дону, Россия, danila_az@mail.ru*

Аннотация. На основе механико-геометрической модели в виде параллелепипеда предлагаются новые определяющие соотношения для высокоэластичного сжимаемого материала. Механические свойства сплошной среды обеспечиваются составляющими элементами модели на этапе ее построения. Построены определяющие соотношения, связывающие инженерные напряжения с главными кратностями удлинений. Выведена функция удельной потенциальной энергии деформации сжимаемого нелинейно упругого материала. Получены формы функции энергии как для анизотропной, так и для изотропной сплошных сред. Построены графики функции энергии изотропной среды для трех случаев напряженно-деформированных состояний.

Ключевые слова: высокоэластичные материалы, определяющие соотношения, гиперупругость, удельная потенциальная энергия деформации, упругий потенциал, сплошная среда, механико-геометрическая модель, несжимаемость

Благодарности: Автор выражает благодарность доценту кафедры теории упругости Института механики, математики и компьютерных наук им. И.И. Воровица Южного федерального университета кандидату физико-математических наук А.М. Колесникову и заведующему лабораторией А.В. Попову за предоставленные результаты экспериментов.

Для цитирования: Азаров Д.А. Построение определяющих соотношений нелинейно-упругих сред с помощью механико-геометрической модели с диагональными связями // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 98. С. 51–61. doi: 10.17223/19988621/98/5

Original article

Formulation of constitutive relations for nonlinear elastic media using a mechanical–geometric model with diagonal bonds

Daniil A. Azarov

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation, danila_az@mail.ru

Abstract. The formulation of constitutive relations for hyperelastic materials is one of the important problems of nonlinear mechanics. A new approach—the method of mechanical–geometric modeling—is proposed. This method makes it possible to derive constitutive relations for a nonlinear medium based on a chosen geometry of the model and specified mechanical parameters. The properties embedded in the model at the construction stage are subsequently transferred to the simulated continuum. This enables the formulation of a strain energy density function of the continuum corresponding to the selected model.

This paper presents an algorithm for such construction using the model in the form of a rectangular parallelepiped as a case study. The initial stages of the model development are described, such as the selection of geometry and mechanical parameters that determine the properties of the model. The explicit constitutive relations connecting the nominal (engineering) stresses with the principal elongation ratios are obtained. The strain energy density function is then derived for a compressible nonlinear elastic material in terms of a symmetric dependence on three principal elongation ratios. Forms of the energy function are presented for both anisotropic and isotropic elastic media. Graphs of the strain energy function for an isotropic medium are plotted for several stress–strain states, i.e., uniaxial, biaxial, and equibiaxial tension, under the incompressibility constraint. References are given to the articles describing other initial geometric shapes and mechanical parameters of the model, which lead to different types of strain energy density functions. Possible directions for the further development of the mechanical–geometric modeling method are outlined.

Keywords: hyperelastic materials, constitutive relations, hyperelasticity, strain energy density, elastic potential, continuous medium, mechanical–geometric model, incompressibility

Acknowledgments: The author expresses gratitude to Associate Professor of the Department of Elasticity Theory at the I.I. Vorovich Institute of Mechanics, Mathematics and Computer Sciences of the Southern Federal University, A.M. Kolesnikov, and to the Head of the Laboratory, A.V. Popov, for providing the experimental results.

For citation: Azarov, D.A. (2025) Formulation of constitutive relations for nonlinear elastic media using a mechanical–geometric model with diagonal bonds. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mehanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 98. pp. 51–61. doi: 10.17223/19988621/98/5

Введение

Построение функции удельной потенциальной энергии деформации сплошной среды при больших деформациях – одна из важных задач нелинейной теории упругости.

Традиционно существует несколько способов построения потенциалов (удельной потенциальной энергии деформирования) нелинейно упругих тел. Начиная с середины XX в. основным способом является разложение функции энергии в ряд по степеням первого и второго инвариантов тензора деформации Коши–Грина \mathbf{G} .

Такому подходу дали начало работы Муни [1] и Ривлина [2], в которых впервые были предложены выражения для функции удельной потенциальной энергии деформации резин и каучуков. Впоследствии в этом направлении шли исследования Бидермана, Йео [3] и других авторов. Одновременно возникали формы потенциалов, основанные на выражении энергии через главные кратности удлинений $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Это обосновано тем, что главные кратности удлинений хорошо определяются по результатам простых экспериментов. Таковы, например, потенциалы Бартенева–Хазановича, Блейтца и Ко [4], Черных–Шубиной, Огдена [5]. Затем появились и другие способы построения потенциалов, уже связанные с внутренней структурой и строением высокоэластичных тел. Это потенциалы Аппруды–Бойс [6], Джента [7] и др. Существует также подход, основанный на моделировании экспериментальной кривой, например одноосного растяжения материала, с попыткой построить функцию, наиболее близко описывающую эту кривую. При этом каких бы то ни было физических и механических обоснований выбора, как правило, не приводится. В [8, 9] собран обзор основных потенциалов нелинейной теории упругости.

Вышеперечисленные подходы обладают существенным недостатком: полученные в результате выражения могут не удовлетворять важным свойствам, присущим удельной потенциальной энергии, таким как, например, выпуклость или сильная эллиптичность.

Эти свойства приходится доказывать дополнительно, что в большинстве случаев трудно, если вообще возможно [10]. Невыполнение для функции удельной потенциальной энергии таких свойств может привести к определенным проблемам при моделировании нелинейных материалов, поскольку эти материалы могут не демонстрировать эффекты, возникающие в реальных телах, такие как потеря устойчивости, эффект Пойнтинга [11] и т.д. В случае же с механико-геометрической моделью большинство этих свойств выполняется для нее априори в силу того, что они присущи изначально составляющим модель элементам.

В предлагаемой работе по методике, аналогичной [12, 13], изложен другой возможный вариант геометрической формы модели – в виде прямоугольного параллелепипеда.

Механико-геометрическое моделирование

Построение механико-геометрической модели состоит из нескольких этапов. На первом этапе задается геометрия модели. Рассмотрим элементарный объем сплошной среды совместно с механико-геометрической моделью (МГМ) в виде 3D графа, вершины которого – узлы модели – прикреплены к граням элементарного объема. При деформации элементарного объема под действием приложенной к нему по трем ортогональным направлениям системы сил происходит изменение его формы и будет изменяться взаимное расположение узлов МГМ. Модель позволяет связать изменение расстояний между узлами с приложенными внешними силами. В данной работе рассматривается расположение узлов в вершинах элементарного параллелепипеда. На рис. 1 узлы МГМ обозначены точками A, B, C, D. В работе [12] рассмотрена другая геометрия, когда узлы прикреплены к серединам граней элементарного объема.

Ребра графа рис. 1 будем называть связями модели. Связи соединяют узлы модели, которую можно представлять как стержневую фермоподобную конструкцию.

Сила, приложенная к узлу, передается на другие узлы только по направлениям связей, исходящих из этого узла. Узел модели может непосредственно взаимодействовать с другим узлом только при наличии связи между ними. Необходимым условием при этом должна быть односвязность (в смысле теории графов) модели. С точки зрения механики узлы модели являются шарнирами, через которые крутящий момент не передается.

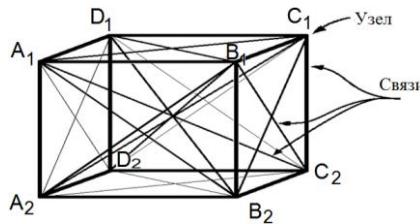


Рис. 1. Геометрия модели
Fig. 1. Geometry of the model

Пространственный трехмерный характер новой модели является основополагающим. Это дает возможность непосредственно получить зависимости, описывающие функцию поперечной деформации (зависимость поперечных удлинений от продольного – нелинейный аналог коэффициента Пуассона).

В выбранной геометрии модели имеется 8 узлов, 12 «продольных» связей и 16 «диагональных» связей. Продольные связи направлены вдоль ребер параллелепипеда, т.е. соединяют противолежащие грани, а диагональные связи соединяют остальные грани.

На втором этапе построения модели каждой связи придается определенное механическое свойство (способность деформироваться). Кроме рассмотренного ниже линейного закона упругости можно выбирать и нелинейные зависимости напряжения и деформации для отдельных связей, а также и неупругие случаи, такие как вязкость, пластичность или их сочетания. Потеря устойчивости связей, рассматриваемых как стержни (или пружины), при сжатии не рассматривается.

Для записи соотношений удобно ввести условные размеры (рис. 2): начальные длины связей, которые в определяющие соотношения войдут в виде отношений друг к другу. Основными изначально задаваемыми геометрическими параметрами являются длины продольных связей $2a$, $2b$, $2c$, через которые выражаются длины диагональных связей и все соответствующие углы между связями.

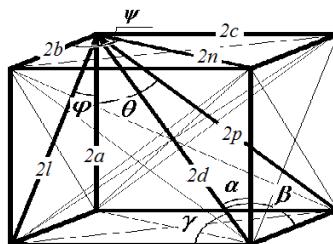


Рис. 2. Геометрические параметры МГМ: длины связей и углы
Fig. 2. Geometric parameters of the mechanical-geometric model (MGM): lengths of bonds and angles

Диагонали граней параллелепипеда равны $2l$, $2n$ и $2p$ и, а пространственная диагональ – $2d$. По ним рассчитываются α , β , γ – углы между диагональю $2d$ и продольными связями $2a$, $2b$, $2c$, φ – угол между $2a$ и $2l$, ψ – угол между $2b$ и $2n$, а θ – угол между $2a$ и $2p$. Значения длин связей не являются принципиальными, важно лишь их соотношение, т.е. углы между ними, задающие основную форму геометрии модели.

Рассмотрим деформацию элементарного объема с «заключенной» в него конструкцией модели силами разной величины по трем ортогональным направлениям. Силы F_a , F_b и F_c на каждой грани при трехосном растяжении–сжатии распределяются по узлам соответствующей грани: $F_a/4$, $F_b/4$ и $F_c/4$.

Составим уравнения равновесия внешних сил и реакций связей модели в каждом узле. Сила реакции каждой связи рассчитывается, исходя из постулируемых механических свойств, присущих этой связи. Как уже сказано выше, в данной работе принимается прямо-пропорциональная зависимость силы реакции связи R_i от удлинения этой же связи Δ_i :

$$R_i = k_i \Delta_i$$

где параметр k_i – коэффициент жесткости (упругости) связи, индекс i обозначает соответствующую связь $i = a, b, c, l, p, n, d$.

Построение определяющих соотношений

В уравнениях равновесия перейдем от зависимостей «сила–удлинение» к зависимостям в терминах «напряжение–деформация». Вместо абсолютных удлинений продольных связей модели Δ_i используем главные кратности удлинений:

$$\lambda_1 = \frac{a + \Delta_a}{a}, \quad \lambda_2 = \frac{b + \Delta_b}{b}, \quad \lambda_3 = \frac{c + \Delta_c}{c}.$$

Кроме этого, перейдем от сил к номиналь-

ным (инженерным) напряжениям на гранях элементарного объема $\sigma_1 = \frac{F_a}{s_1}$,

$$\sigma_2 = \frac{F_b}{s_2}, \quad \sigma_3 = \frac{F_c}{s_3},$$

где s_i – площадь соответствующей грани параллелепипеда

в начальном состоянии.

Получаемые уравнения связывают номинальные (инженерные) напряжения σ_1 , σ_2 , σ_3 и главные кратности удлинений λ_1 , λ_2 , λ_3 . Количество параметров МГМ в этих формулах равно 10, из них семь механических параметров – коэффициенты $k_a, k_b, k_c, k_l, k_n, k_p, k_d$ и три геометрических – начальные размеры модели a, b, c :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \frac{a}{bc} \left[\lambda_1(k_a + k_l + k_p + k_d) - \lambda_1 \left(\frac{lk_l}{\sqrt{a^2\lambda_1^2 + b^2\lambda_2^2}} + \frac{pk_p}{\sqrt{a^2\lambda_1^2 + c^2\lambda_3^2}} + \frac{dk_d}{\sqrt{a^2\lambda_1^2 + b^2\lambda_2^2 + c^2\lambda_3^2}} \right) - k_a \right], \\ \sigma_2 = \frac{b}{ac} \left[\lambda_2(k_b + k_l + k_n + k_d) - \lambda_2 \left(\frac{lk_l}{\sqrt{a^2\lambda_1^2 + b^2\lambda_2^2}} + \frac{nk_n}{\sqrt{b^2\lambda_2^2 + c^2\lambda_3^2}} + \frac{dk_d}{\sqrt{a^2\lambda_1^2 + b^2\lambda_2^2 + c^2\lambda_3^2}} \right) - k_b \right], \\ \sigma_3 = \frac{c}{ab} \left[\lambda_3(k_c + k_n + k_p + k_d) - \lambda_3 \left(\frac{nk_n}{\sqrt{b^2\lambda_2^2 + c^2\lambda_3^2}} + \frac{pk_p}{\sqrt{a^2\lambda_1^2 + c^2\lambda_3^2}} + \frac{dk_d}{\sqrt{a^2\lambda_1^2 + b^2\lambda_2^2 + c^2\lambda_3^2}} \right) - k_c \right]. \end{array} \right.$$

Такие определяющие соотношения отражают анизотропные свойства среды. Традиционно анизотропия достигается выбором различных механических свойств (жесткостей) связей по разным направлениям. Но в МГМ анизотропия возникает также и из-за выбранной начальной геометрии с разными значениями размеров $a \neq b \neq c$ по трем направлениям (и, следовательно, неравными углами между связями).

Таким образом, для описания анизотропных свойств высокоэластичных материалов в рамках МГМ использовано два механизма, которые приводят к различным откликам при деформировании по разным направлениям.

Геометрически изотропная модель определяется условиями равенства всех трех продольных связей $a = b = c = 1$ и тогда, соответственно, $l = p = n = \sqrt{2}$, $d = \sqrt{3}$. В этом случае первоначальная форма модели будет представлять собой куб. Механической изотропии соответствует выбор равных жесткостей трех продольных связей $k_a = k_b = k_c$ и трех диагональных связей граней $k_l = k_n = k_p$. Жесткость пространственной диагональной связи модели равна k_d .

Если принять одновременно условия геометрической и механической изотропии, то придем к соотношениям

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \lambda_1(k_a + 2k_l + k_d) - k_a - \lambda_1 \left(\frac{k_l \sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} + \frac{k_l \sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_3^2}} + \frac{k_d \sqrt{3}}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}} \right), \\ \sigma_2 = \lambda_2(k_a + 2k_l + k_d) - k_a - \lambda_2 \left(\frac{k_l \sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} + \frac{k_l \sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2}} + \frac{k_d \sqrt{3}}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}} \right), \\ \sigma_3 = \lambda_3(k_a + 2k_l + k_d) - k_a - \lambda_3 \left(\frac{k_l \sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2}} + \frac{k_l \sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_3^2}} + \frac{k_d \sqrt{3}}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}} \right). \end{array} \right.$$

Эти выражения являются определяющими соотношениями изотропного сжимаемого нелинейно упругого материала. Они связывают напряжения σ_1 , σ_2 , σ_3 (представляющие собой диагональные компоненты тензора напряжений Пиолы), с главными кратностями удлинений λ_1 , λ_2 , λ_3 . Количество параметров МГМ при выбранной геометрии равно трем: это коэффициенты упругости (жесткости) трех типов связей k_a , k_l и k_d .

Построение функции удельной потенциальной энергии деформации

На основании приведенных выше определяющих соотношений можно получить явное выражение для удельной потенциальной энергии упругой деформации среды, описываемой механико-геометрической моделью. Считая эту удельную энергию функцией кратностей удлинений $W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, восстановим ее в явном виде аналогично [13]. Напряжения σ_i являются частными производными от этой энергии по соответствующим главным кратностям удлинений. При выводе проверена выполнимость необходимых и достаточных условий существования полного дифференциала для функции энергии – попарного равенства смешанных производных второго порядка.

Удельная энергия для анизотропной среды имеет вид:

$$W_{aniz} = \frac{16}{V_0} (a^2(k_a + k_l + k_p + k_d)\lambda_1^2 + b^2(k_b + k_l + k_n + k_d)\lambda_2^2 + c^2(k_c + k_n + k_p + k_d)\lambda_3^2 - 2dk_d\sqrt{a^2 \cdot \lambda_1^2 + b^2 \cdot \lambda_2^2 + c^2 \cdot \lambda_3^2} - 2lk_l\sqrt{a^2 \cdot \lambda_1^2 + b^2 \cdot \lambda_2^2} - 2pk_p\sqrt{a^2 \cdot \lambda_1^2 + c^2 \cdot \lambda_3^2} - 2nk_n\sqrt{b^2 \cdot \lambda_2^2 + c^2 \cdot \lambda_3^2} - 2a^2k_d\lambda_1 - 2b^2k_b\lambda_2 - 2c^2k_c\lambda_3) + K_0$$

где $V_0 = 8abc$ – элементарный объем до деформации, а константа K_0 является постоянной интегрирования и может быть найдена из условия равенства нулю энергии при отсутствии деформации, т.е. при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$:

$$W_{aniz}(1,1,1) = 0 \Rightarrow K_0 = \frac{16}{V_0} (2d^2k_d + 2l^2k_l + 2p^2k_p + 2n^2k_n + a^2(k_a - k_l - k_p - k_d) + b^2(k_b - k_l - k_n - k_d) + c^2(k_c - k_n - k_p - k_d)).$$

Приняв условия геометрической и механической изотропии, получим упругий потенциал для полностью изотропной модели в виде:

$$W = 2(k_a + 2k_l + k_d)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) - 4\sqrt{3}k_d\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} - 4\sqrt{2}k_l(\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} + \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_3^2} + \sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2}) - 4k_a(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + 6(k_a + 2k_l + k_d).$$

Полученное выражение является симметричной функцией кратностей главных удлинений. Количество параметров модели равно 3. Это механические параметры k_a , k_l , k_d – жесткости связей.

Выражение для функции удельной потенциальной энергии деформации изотропного нелинейно-упругого тела, полученное на основе метода механико-геометрического моделирования, не встречалось в работах других авторов и является новым.

Графики энергии для некоторых случаев напряженно-деформированных состояний (НДС)

Продемонстрируем поведение полученного выражения удельной потенциальной энергии деформации для некоторых наиболее распространенных типов напряженно-деформированных состояний (НДС), которые обычно реализуются при испытаниях материалов.

При описании поведения высокоэластичных материалов чаще всего принимается допущение об их несжимаемости. Графики (рис. 3–5) построены при условии, обеспечивающем несжимаемость материала, которое можно записать через третий инвариант тензора деформации Коши–Грина как $I_3 = 1$, или в терминах кратностей удлинений $\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 = 1$.

Механические параметры предлагаемой механико-геометрической изотропной модели $k_a = 0,431$, $k_l = -0,445$, $k_d = 0,626$ определены по результатам обработки эксперимента на одноосное растяжение ленты из латексной резины. Диаграмма «деформация–напряжение» такого материала имеет характерную для высокоэластичных материалов так называемую s-образную форму. Испытания проведены на испытательной машине Shimadzu AGS-X на кафедре теории упругости Института механики, математики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного

федерального университета. Размеры образца: длина 150 мм, ширина 50 мм, толщина 0,5 мм. Максимальное удлинение 300%. Температура образца комнатная. Скорость деформации 1 000 мм/мин.

Для полученных параметров механико-геометрической модели построен график удельной потенциальной энергии деформации сплошной среды при одноосном (uniaxial) растяжении–сжатии в области деформаций $0,4 \leq \lambda \leq 3$ (см. рис. 3). Значение кратности удлинения $\lambda = 1$ соответствует отсутствию деформации.

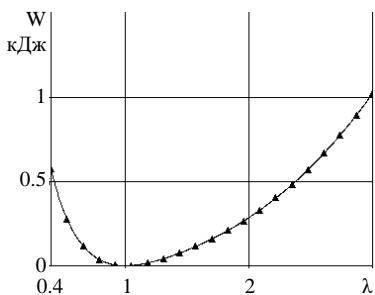


Рис. 3. Удельная потенциальная энергия при одноосном растяжении

Fig. 3. Strain energy density under uniaxial tension

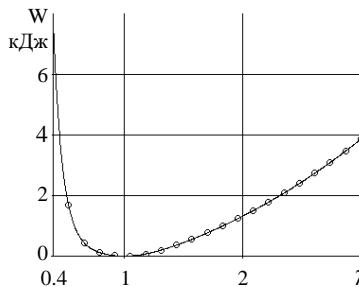


Рис. 4. Удельная потенциальная энергия при двухосном равномерном растяжении

Fig. 4. Strain energy density under uniform biaxial tension

В той же области деформаций и с теми же параметрами модели построен график функции потенциала при двухосном равномерном (equibiaxial) растяжении–сжатии (см. рис. 4). Полученная форма графика является характерной для такого вида НДС. Как известно, удельная потенциальная энергия деформации при двухосной деформации возрастает быстрее, чем при одноосной, что подтверждается на приведенных графиках.

Также получен трехмерный график и для двухосного (biaxial) растяжения–сжатия в том же диапазоне изменения деформаций по каждому направлению (см. рис. 5).

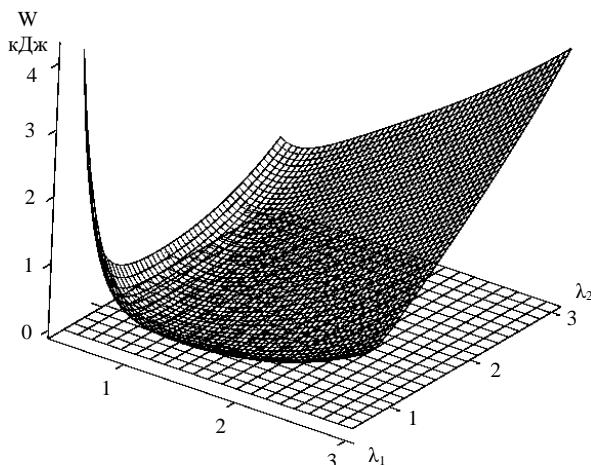


Рис. 5. Удельная потенциальная энергия при двухосном растяжении

Fig. 5. Strain energy density under biaxial tension

Все приведенные графики имеют характерную для потенциалов высокоэластичных нелинейно-упругих материалов форму. Они подтверждают физичность модели и соответствие полученного выражения для упругого потенциала требованиям механики сплошных сред. Графики являются выпуклыми функциями своих аргументов в приведенной области их изменения. Выражения для энергии являются неотрицательными функциями и единственное нулевое значение принимают при отсутствии деформации. Это является следствием соответствующих свойств одномерных элементов, составляющих трехмерную модель.

Перспективы развития метода

Метод механико-механического моделирования имеет широкие возможности для развития. Особый интерес представляет введение в свойства связей модели более сложных, нелинейных зависимостей для описания реакции связей на растягивающие и сжимающие нагрузки $R_i = f(\Delta_i)$. В работе [14] была построена модель с кубической зависимостью сил реакции связей от удлинения, которая продемонстрировала большую гибкость при описании деформаций нелинейных тел.

На этапе построения модели можно задавать широкий спектр требуемых параметров материала, которые влияют на поведение трехмерной структуры модели в целом и формируют свойства моделируемой среды. При этом механические параметры МГМ не обязательно должны быть только упругими. В работе [15] с помощью МГМ было проведено моделирование вязкоупругого материала, где в качестве механических характеристик связей выбрано вязкоупругое стандартное линейное тело Зинера. Оказалось, что полученная таким образом модель демонстрирует все присущие вязкоупругим средам свойства: ползучесть, релаксацию, гистерезис.

Заключение

Предложенная механико-геометрическая модель позволила получить новую форму потенциальной энергии деформации для нелинейно-упругих сред. Особенно интересны в смысле новизны полученных соотношений присутствующие в функции энергии квадратные корни из попарных сумм квадратов кратностей удлинений. Такие выражения в функциях нелинейно-упругих потенциалов в работах других авторов не встречались.

Полученные определяющие соотношения и функция упругой энергии адекватно отражают свойства нелинейно-упругих тел, а механические параметры модели однозначно идентифицируются по результатам основных опытов на одноосное растяжение, двухосное растяжение и простой сдвиг. Графики функции удельной потенциальной энергии деформации при разных типах НДС демонстрируют характерное для нелинейно-упругих потенциалов поведение и подобны аналогичным диаграммам для распространенных высокоэластичных материалов, например Муни–Ривлина и Йео [16].

Список источников

1. Mooney M. A theory of large elastic deformation. // Journal of Applied Physics. 1940. V. 11 (9). P. 582–592.
2. Rivlin R.S. Large Elastic Deformations of Isotropic Materials. III. Some Simple Problems in Cylindrical Polar Co-ordinates // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. 1948. V. 240 (823). P. 509–525.

3. Yeoh O.H. Some forms of the strain energy function for rubber // *Rubber Chemistry and technology*. 1993. V. 66, is. 5. P. 754–771.
4. Blatz P.J., Ko W.L. Application of finite elasticity to the deformation of rubbery materials // *Trans. Soc. Rheol.* 1962. V. 6. P. 223–251.
5. Ogden R.W. Large Deformation Isotropic Elasticity – On the Correlation of Theory and Experiment for Incompressible Rubberlike Solids // *Proc. Royal Soc. London. Series A*. 1972. V. 326 (1567). P. 565–584.
6. Arruda E.M., Boyce M.C. A three-dimensional model for the large stretch behavior of rubber elastic materials // *J. Mech. Phys. Solids*. 1993. V. 41 (2). P. 389–412.
7. Gent A.N. A new constitutive relation for rubber // *Rubber Chem. Technol.* 1996. V. 69. P. 59–61.
8. Bazkiae A.K., Shirazi K.H., Shishesaz M. A framework for model base hyper-elastic material simulation // *J. Rubber Res.* 2020. V. 23. P. 287–299. doi: 10.1007/s42464-020-00057-5
9. de Bortoli D., Wrubleski E.G.M., Marczak R.J., Gheller J. Jr. Hyperfit – curve fitting software for incompressible hyperelastic material models // *Proceedings of COBEM 2011*, 21st Brazilian Congress of Mechanical Engineering, October 24–28, Natal, RN, Brazil. 2011.
10. Зингерман К.М. Проверка условия сильной эллиптичности для материала Мурнагана при всестороннем растяжении или сжатии. // Вестник Тверского государственного университета. Сер. Прикладная математика. 2003. № 1. С. 65–70.
11. Poynting J.H. On the changes in the dimensions of a steel wire when twisted and on the pressure of distortional waves in steel // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*. 1912. V. 86. P. 534–561.
12. Азаров А.Д., Азаров Д.А. Трехмерная механическая модель для описания больших упругих деформаций при одноосном растяжении // Вестник Донского государственного технического университета. 2011. Т 11, № 2 (53). С. 147–156.
13. Азаров Д.А., Зубов Л.М. Механико-геометрическое моделирование в нелинейной теории упругости // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2016. № 3 (191). С. 5–12.
14. Азаров Д.А. Идентификация параметров механико-геометрической модели при одноосном растяжении высокоэластичного материала // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2017. № 1. С. 5–14.
15. Azarov A.D., Azarov D.A. Description of non-linear viscoelastic deformations by the 3D mechanical model // Chapter 49 in Proceedings of the 2015 International Conference on “Physics, Mechanics of New Materials and Their Applications”, devoted to the 100th Anniversary of the Southern Federal University / I.A. Parinov, Shun-Hsyung, V.Yu. Topolov (eds.). New York: Nova Science Publishers, 2015. P. 367–375.
16. Азаров А.Д., Азаров Д.А. Сравнительный анализ потенциалов, полученных методом механико-геометрического моделирования с потенциалами Муни-Ривлина и Йео // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сб. тр., Уфа, 19–24 авг. 2019 г. Уфа: Башкир. гос. ун-т, 2019. Т. 3. С. 42–44.

References

1. Mooney M. (1940) A theory of large elastic deformation. *Journal of Applied Physics*. 11(9). pp. 582–592. doi: 10.1063/1.1712836
2. Rivlin R.S. (1948) Large elastic deformations of isotropic materials. iii. some simple problems in cylindrical polar co-ordinates. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*. 240(823). pp. 509–525. doi: 10.1098/rsta.1948.0004
3. Yeoh O.H. (1993) Some forms of the strain energy function for rubber. *Rubber Chemistry and Technology*. 66(5). pp. 754–771. doi: 10.5254/1.3538343
4. Blatz P.J., Ko W.L. (1962) Application of finite elasticity to the deformation of rubbery materials. *Transaction of the Society of Rheology*. 6. pp. 223–251. doi: 10.1122/1.548937
5. Ogden R.W. (1972) Large deformation isotropic elasticity – on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*. 326(1567). pp. 565–584. doi: 10.1098/rspa.1972.0026

6. Arruda E.M., Boyce M.C. (1993) A three-dimensional model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* 41(2). pp. 389–412. doi: 10.1016/0022-5096(93)90013-6
7. Gent A.N. (1996) A new constitutive relation for rubber. *Rubber Chemistry & Technology Journal.* 69. pp. 59–61.
8. Bazkiae A.K., Shirazi K.H., Shishesaz M. (2020) A framework for model base hyper-elastic material simulation. *Journal of Rubber Research.* 23. pp. 287–299. doi: 10.1007/s42464-020-00057-5
9. De Bortoli D., Wrubleski E.G.M., Marczak R.J., Gheller J.Jr. (2011) Hyperfit – curve fitting software for incompressible hyperelastic material models. *Proceedings of COBEM 2011, 21st Brazilian Congress of Mechanical Engineering, Natal, Brazil.*
10. Zingerman K.M. (2003) Proverka usloviya sil'noy elliptichnosti dlya materiala Murnagana pri vsestoronnem rastyazhenii ili szhatii [Verification of the strong ellipticity condition for the Murnaghan material under uniform triaxial tension or compression]. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo universiteta, seriya Prikladnaya matematika – Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics.* 1. pp. 65–70.
11. Poynting J.H. (1912) On the changes in the dimensions of a steel wire when twisted and on the pressure of distortional waves in steel. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A.* 86. pp. 534–561.
12. Azarov A.D., Azarov D.A. (2011) Trekhmernaya mekhanicheskaya model' dlya opisaniya bol'sikh uprugikh deformatsiy pri odnoosnom rastyazhenii [A three-dimensional mechanical model for describing large elastic deformations under uniaxial tension]. *Vestnik DGTU – Vestnik of Don State Technical University.* 11(2(53)). pp. 147–156.
13. Azarov D.A., Zubov L.M. (2016) Mekhaniko-geometricheskoe modelirovaniye v nelineynoy teorii uprugosti [Mechanical-geometric modeling in the nonlinear theory of elasticity]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki – Bulletin of Higher Education Institutes. North Caucasus Region. Natural Sciences.* 3(191). pp. 5–12.
14. Azarov D.A. (2017) Identifikatsiya parametrov mekhaniko-geometricheskoy modeli pri odnoosnom rastyazhenii vysokoelastichnogo materiala [Identification of parameters of a mechanical-geometric model under uniaxial tension of a hyperelastic material]. *Ekologicheskiy Vestnik Nauchnykh Tsentr Chernomorskogo Ekonomicheskogo sotrudnichestva – Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation.* 1. pp. 5–14.
15. Azarov A.D., Azarov D.A. (2015) *Description of Non-linear Viscoelastic Deformations by the 3D Mechanical Model. Chapter 49.* In: Proceedings of the 2015 International Conference on “Physics, Mechanics of New Materials and Their Applications”, devoted to the 100th Anniversary of the Southern Federal University. New York: Nova Science Publishers. pp. 367–375.
16. Azarov A.D., Azarov D.A. (2019) Sravnitel'nyy analiz potentsialov, poluchennykh metodom mekhaniko-geometricheskogo modelirovaniya s potentsialami Muni-Rivlina i Yeo [Comparative analysis of potentials obtained by the method of mechanical-geometric modeling with the Mooney-Rivlin and Yeo potentials]. *Proceedings of the XII All-Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics, Ufa.* 3. pp. 42–44.

Сведения об авторе:

Азаров Даниил Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика» Донского государственного технического университета (Ростов-на-Дону, Россия). E-mail: danila_az@mail.ru

Information about the author:

Azarov Daniil A. (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation). E-mail: danila_az@mail.ru

Статья поступила в редакцию 14.10.2024; принята к публикации 08.12.2025

The article was submitted 14.10.2024; accepted for publication 08.12.2025

Научная статья

УДК 621.45.034, 536.46

doi: 10.17223/19988621/98/6

Метод и результаты экспериментального исследования тепловых потерь в камере сгорания твердотопливной двигательной установки

Владимир Афанасьевич Архипов¹,

Сергей Александрович Басалаев²,

Ксения Григорьевна Перфильева³, Василий Андреевич Порязов⁴

^{1, 2, 3, 4} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹leva@niipmt.tsu.ru

²tarm@niipmt.tsu.ru

³k.g.perfiljeva@yandex.ru

⁴poryazov@fft.tsu.ru

Аннотация. Представлен полуэмпирический метод определения коэффициента тепловых потерь в цилиндрической камере сгорания твердотопливной двигательной установки. Для подтверждения адекватности метода проведена его экспериментальная апробация для модельного твердотопливного ракетного двигателя (РДТТ) с вкладным зарядом трубчато-канальной формы. По измеренным зависимостям давления в камере от времени при адиабатическом истечении продуктов сгорания определены значения коэффициента расхода сопла и коэффициента тепловых потерь в камере сгорания.

Ключевые слова: модельный РДТТ, камера сгорания, сопловой блок, теплоизолирующее покрытие, твердотопливный заряд, коэффициент тепловых потерь, коэффициент расхода сопла

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке госзадания Министерства науки и высшего образования (проект № FSWM-2025-0012).

Для цитирования: Архипов В.А., Басалаев С.А., Перфильева К.Г., Порязов В.А. Метод и результаты экспериментального исследования тепловых потерь в камере сгорания твердотопливной двигательной установки // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 98. С. 62–69. doi: 10.17223/19988621/98/6

Original article

Method and results of an experimental study of heat losses in a combustion chamber of a solid-propellant propulsion system

Vladimir A. Arkhipov¹, Sergey A. Basalaev²,
Kseniya G. Perfil'eva³, Vasiliy A. Poryazov⁴

^{1, 2, 3, 4} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹leva@niipmm.tsu.ru

²tarm@niipmm.tsu.ru

³k.g.perfiljeva@yandex.ru

⁴poryazov@ftf.tsu.ru

Abstract. A semi-empirical method is proposed for determining one of the key performance characteristics of a solid-propellant rocket motor, i.e., the heat loss coefficient in a combustion chamber. Computational and theoretical determination of the heat loss coefficient typically requires three-dimensional modeling of the gas dynamics of combustion products within the engine flow passage with a charge of complex configuration, as well as the use of several empirical constants, which does not always ensure sufficient accuracy of calculations. The presented method is based on measuring the pressure–time dependence during the adiabatic gas outflow from the chamber after the propellant charge has burned out. The advantage of the method lies in the determination of the heat loss coefficient without thermocouple measurements, which are limited both in the range of measurable temperatures and in their operating time in a high-temperature environment. The relations are obtained for selecting the relaxation time of the free volume of the combustion chamber and the diameter of the nozzle throat that ensure the adiabaticity of the outflow.

The method was tested on a model solid-propellant rocket motor with a non-insulated cylindrical steel combustion chamber and an inserted tubular-channel charge of the N-type ballistite propellant. The obtained values of the discharge coefficient of a cylindrical nozzle with a sudden contraction ($\varphi = 0.85 \pm 0.03$) and the heat loss coefficient in the combustion chamber ($\chi = 0.61 \pm 0.02$) are consistent with known empirical formulas reported by other authors.

Keywords: model SPR, combustion chamber, nozzle assembly, heat-insulating coating, solid-propellant charge, coefficient of thermal losses, nozzle discharge coefficient

Acknowledgments: This work was carried out within the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (theme No. FSWM-2025-0012).

For citation: Arkhipov, V.A., Basalaev, S.A., Perfil'eva, K.G., Poryazov, V.A. (2025) Method and results of an experimental study of heat losses in a combustion chamber of a solid-propellant propulsion system. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mehanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 98. pp. 62–69. doi: 10.17223/19988621/98/6

Введение

Исследование процессов тепломассообмена в твердотопливных, ракетно-прямоточных и гибридных ракетных двигателях играет важную роль в их проектировании и оптимизации. Одним из ключевых параметров, определяющих расходно-тяговые характеристики РДТТ, является коэффициент тепловых потерь в камере сгорания [1]:

$$\chi = 1 - \frac{\int_0^{S_{cm}} \alpha(T_0 - T_{cm}) dS}{Q_+ \cdot G_+},$$

где S_{cm} – площадь внутренней поверхности стенок камеры сгорания; α – коэффициент теплоотдачи; T_0 – температура газа в камере сгорания; T_{cm} – температура внутренней поверхности стенок камеры сгорания, соприкасающихся с газами; Q_+ – теплота сгорания твердого топлива; G_+ – массовый секундный газоприход при горении заряда.

Коэффициент χ учитывает потери энергии горения твердотопливного заряда в камере за счет двух основных факторов – неполноты сгорания топлива и тепловых потерь в стенки камеры сгорания [2]. Расчетно-теоретическое определение коэффициента тепловых потерь связано с необходимостью трехмерного моделирования газодинамики продуктов сгорания в проточном тракте двигателя с зарядом сложной конфигурации [3, 4] и использования ряда эмпирических констант, что не всегда обеспечивает достаточную точность расчетов. Экспериментальное определение χ путем измерения температуры продуктов сгорания в камере затруднено из-за ограниченного ресурса работоспособности термопар при высоких температурах (более 2 500°C) и зашлаковывания спая термопары, что ведет к повышению погрешности измерений [5].

В настоящей работе представлены полуэмпирический метод и результаты экспериментального определения коэффициента тепловых потерь в цилиндрической камере сгорания твердотопливной двигательной установки.

Полуэмпирический метод определения коэффициента тепловых потерь

Для определения коэффициента тепловых потерь использовалась система уравнений адиабатического истечения продуктов сгорания в осредненных по объему камеры переменных [2]:

$$\begin{cases} V \frac{d\rho}{dt} = -\varphi S_{kp} p \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{RT}}, \\ \frac{p}{\rho^k} = \text{const}, \\ p = \rho RT, \end{cases}, \quad (1)$$

где V – свободный объем камеры сгорания; ρ, p – плотность и давление газа в камере сгорания; t – время; S_{kp} – площадь критического сечения сопла; k, R, T – показатель адиабаты, газовая постоянная и температура продуктов сгорания;

$$\Gamma(k) = \sqrt{k} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}.$$

Из системы уравнений (1) следует зависимость для определения изменения безразмерного давления $\pi(\tau) = p(t)/p_0$ от безразмерного времени $\tau = t/t_k$ в процессе адиабатического сброса давления:

$$\pi(\tau) = \left[1 + \frac{k-1}{2} \varphi \tau \sqrt{\chi} \right]^{\frac{2k}{1-k}}, \quad (2)$$

где $p(t)$ – зависимость давления в камере сгорания от времени в период свободного истечения продуктов сгорания; p_0 , T_0 – давление и температура в камере сгорания перед сбросом давления; $t_k = V / (S_{kp} \Gamma(k) \sqrt{RT_0})$ – время релаксации свободного объема камеры сгорания; φ – коэффициент расхода сопла.

Из (2) получены соотношения для определения среднего значения коэффициента тепловых потерь:

$$\chi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \chi_i(\tau_i), \quad \chi_i = \left[\frac{2 \left(\pi_i^{(1-k)/2k} - 1 \right)}{(k-1) \cdot \varphi \cdot \tau_i} \right]^2, \quad (3)$$

где n – количество экспериментальных точек $\chi_i(\tau_i)$, равномерно распределенных на участке сброса давления.

В соотношении (3) входит коэффициент расхода сопла φ . Для его определения проводится отдельный эксперимент по сбросу давления из камеры сгорания с теплоизолирующим покрытием и определением зависимости безразмерного давления $x(\tau) = p(t)/p_0$ от безразмерного времени τ . По результатам измерения $x(\tau)$ получены соотношения для определения среднего значения коэффициента расхода сопла:

$$\varphi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi_i(\tau_i), \quad \varphi_i = \frac{2}{(k-1) \cdot \tau_i} \cdot \left(x_i^{(1-k)/2k} - 1 \right). \quad (4)$$

Соотношения (3) и (4) получены применительно к адиабатичности процесса истечения после сгорания твердотопливного заряда. Для обеспечения адиабатичности процесса необходимо выполнение условия

$$Q_c \gg Q_{cm}, \quad (5)$$

где Q_c , Q_{cm} – количество теплоты, уходящей из камеры при истечении продуктов сгорания через сопло и через стенки камеры сгорания за время t_k соответственно.

Из условия (5) следует соотношение для выбора необходимого времени релаксации свободного объема камеры сгорания t_k и, соответственно, для определения площади критического сечения сопла S_{kp} , полученные при допущении $T_0 \gg T_{cm}$:

$$t_k \ll \frac{p_0}{T_0} \frac{k\Pi}{\alpha(k-1)}, \quad S_{kp} \gg \frac{(k-1)}{k\Gamma(k)} \cdot \frac{\alpha S_{cm}}{p_0} \cdot \sqrt{\frac{T_0}{R}}, \quad (6)$$

где $\Pi = V/S_{cm}$ – приведенная длина камеры сгорания [2].

Экспериментальная установка

Для подтверждения адекватности метода проведена его экспериментальная апробация для модельного РДТТ с вкладным зарядом трубчато-канальной формы. Экспериментальное исследование осуществлялось в два этапа. На первом этапе проводилось определение коэффициента расхода сопла в камере сгорания с теплоизолирующим покрытием, схема которой приведена на рис. 1, а. Камера сгорания состоит из корпуса 1 с внутренним диаметром 53 мм и длиной 200 мм, изготовленного из стали 45, свободный объем камеры сгорания 441 см³, площадь внутренней поверхности стенок 377 см². По внутренней поверхности камеры сгорания установлено теплоизолирующее покрытие 2. На торцевой стенке корпуса установлен сопловой блок 3 в виде цилиндрического сопла с внезапным сужением диаметром $D_{kp} = 7.6$ мм. Внезапное вскрытие сопла для реализации адиабатического процесса

истечения осуществлялось за счет вылета размешенной в сопле грибообразной пробки 4, изготовленной из пороха Н, после ее сгорания. В штуцерах, размещенных на боковой поверхности камеры 1, установлены датчики давления 5 (тензометрический датчик ЛХ-415) и температуры 6 (вольфрам–рениевая термопара ИС-470). В процессе эксперимента измерялась зависимость $x(t)$, с использованием которой определялся коэффициент расхода сопла по соотношению (4).

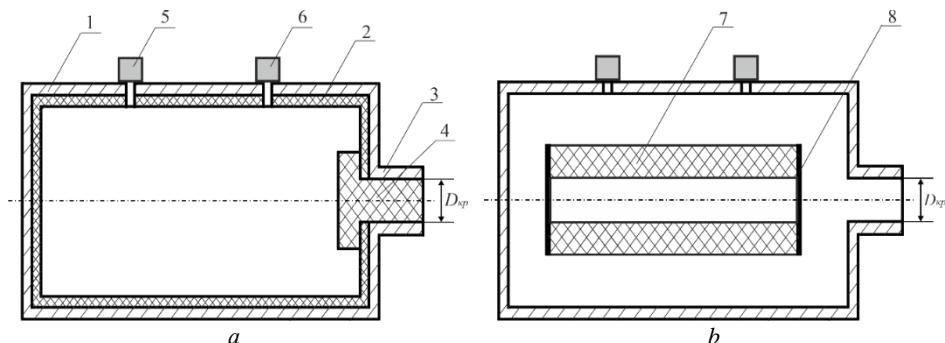


Рис. 1. Схема камеры сгорания с теплоизолирующим покрытием (a) и с вкладным твердотопливным зарядом (b): 1 – корпус; 2 – теплоизолирующее покрытие; 3 – сопловой блок; 4 – пробка; 5 – датчик давления; 6 – датчик температуры; 7 – трубчато-канальный заряд; 8 – бронировка

Fig. 1. Diagram of a combustion chamber with (a) a heat-insulating coating and (b) an insert solid-propellant charge: 1, casing; 2, heat-insulating coating; 3, nozzle; 4, stopper; 5, pressure sensor; 6, temperature sensor; 7, tubular-channel charge; and 8, armor

На втором этапе проводилось определение коэффициента тепловых потерь в идентичной камере сгорания, но без теплоизолирующего покрытия (рис. 1, b). В качестве твердого топлива использовался трубчато-канальный заряд 7 длиной 90 мм с наружным и внутренним диаметрами 40 и 10 мм, изготовленный из пороха Н, и с забронированными негорючим составом торцевыми поверхностями 8. Данный заряд обеспечивает постоянную поверхность горения за все время функционирования.

Результаты экспериментального исследования

Для определения коэффициента тепловых потерь по представленному методу использовались следующие теплофизические характеристики твердого топлива (порох Н): $R = 297$ Дж/(кг·К); $k = 1.25$; $T_0 = 2372$ К [6]. Время релаксации свободного объема камеры сгорания, используемое для обезразмеривания переменных, рассчитывалось по соотношению

$$t_k = V / \left(S_{kp} \Gamma(k) \sqrt{RT_0} \right)$$

и составляло $t_k = 0.0176$ с ≈ 18 мс.

По результатам обработки экспериментов, проведенных в камере сгорания с теплоизолирующим покрытием, по соотношению (4) получено среднее значение коэффициента расхода сопла

$$\varphi = 0.85 \pm 0.03.$$

Полученное значение хорошо согласуется с расчетом по эмпирической формуле [7] для цилиндрического сопла с внезапным сужением ($\varphi_{pac} = 0.86$).

Результаты измерения зависимости $\pi_i(\tau_i)$ и рассчитанные по соотношениям (3) значения коэффициента тепловых потерь $\chi_i(\tau_i)$ приведены в таблице.

Результаты измерения зависимости $\pi_i(\tau_i)$ и расчета значения коэффициента тепловых потерь $\chi_i(\tau_i)$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
τ_i	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00
π_i	0.81	0.67	0.54	0.44	0.38	0.32	0.25	0.21	0.19	0.15	0.13	0.11
χ_i	0.64	0.59	0.64	0.65	0.59	0.57	0.64	0.63	0.57	0.62	0.60	0.60

Среднее значение коэффициента тепловых потерь по всему времени сброса составило

$$\chi = 0.61 \pm 0.02.$$

На рис. 2 представлена измеренная зависимость $\pi(\tau)$, где точки – экспериментальные данные, линия 1 – расчет $\pi(\tau)$ по соотношению (2) для значений $\varphi = 0.85$, $\chi = 0.61$. Для сравнения на рис. 2 приведена расчетная зависимость $\pi(\tau)$ (линия 2) для значений $\varphi = 0.85$, $\chi = 1$.

Требуемые значения времени релаксации свободного объема камеры сгорания и диаметра критического сечения сопла для условий проведенных экспериментов, рассчитанные по соотношениям (6), составляют

$$t_k << 236 \text{ мс}, S_{kp} >> 3.8 \text{ мм}^2 (D_{kp} >> 2.2 \text{ мм}).$$

В расчетах учитывались значение давления в камере сгорания для проведенных экспериментов $p_0 = 4.2 \text{ МПа}$ и типичное значение коэффициента теплоотдачи в камерах сгорания двигательных установок $\alpha = 500 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ К})$ [8].

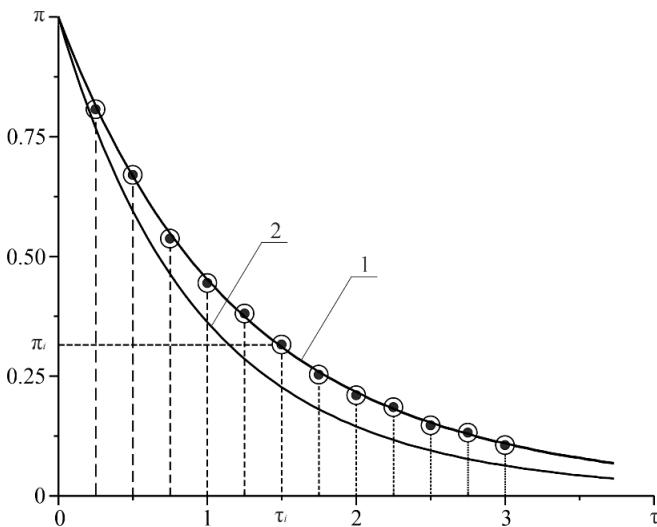


Рис. 2. Зависимость $\pi(\tau)$ при свободном истечении газа после сгорания твердотопливного заряда в камере без теплоизолирующего покрытия: ◉ – экспериментальные данные;

1 – расчетная зависимость $\pi(\tau)$ при $\varphi = 0.85$, $\chi = 0.61$;

2 – расчетная зависимость $\pi(\tau)$ при $\varphi = 0.85$, $\chi = 1$

Fig. 2. $\pi(\tau)$ dependence for a free outflow of gas after combustion of a solid-propellant charge in a chamber without heat-insulating coating: ◉ – experimental data; calculated results at (1) $\varphi = 0.85$, $\chi = 0.61$ and (2) $\varphi = 0.85$, $\chi = 1$

Заключение

1. Предложен полуэмпирический метод определения коэффициента тепловых потерь и коэффициента расхода сопла в камере сгорания энергоустановок с твердотопливным зарядом, основанный на измерении зависимости давления от времени адиабатическом истечении газа из камеры после сгорания заряда.
2. Представлены соотношения для выбора параметров эксперимента (времени релаксации свободного объема камеры сгорания и диаметра критического сечения сопла), обеспечивающих адиабатичность процесса истечения.
3. Проведена экспериментальная апробация метода для модельного РДТТ с вкладным зарядом трубчато-канальной формы, изготовленным из пороха Н.
4. Получены значения коэффициента расхода для сопла с внезапным сужением ($\varphi = 0.85 \pm 0.03$) и коэффициента тепловых потерь для стальной цилиндрической нетеплоизолированной камеры сгорания с вкладным трубчато-канальным зарядом ($\chi = 0.61 \pm 0.02$), хорошо согласующиеся с эмпирическими формулами Я.М. Шапиро [1] и А.А. Шишкова [7].
5. Рассмотренный метод позволяет определить коэффициент тепловых потерь без использования термопарных измерений и может быть рекомендован для исследования процессов тепломассообмена в твердотопливных, ракетно-прямоточных и гибридных ракетных двигателях.

Список источников

1. Шапиро Я.М., Мазинг Г.Ю., Прудников Н.Е. Теория ракетного двигателя на твердом топливе. М.: Военное изд-во МО СССР, 1966.
2. Райзберг Б.А., Ерохин Б.Т., Самсонов К.П. Основы теории рабочих процессов в ракетных системах на твердом топливе. М.: Машиностроение, 1972.
3. Кирюшкин А.Е., Миньков Л.Л. Моделирование внутрикамерных процессов в ракетном двигателе на твердом топливе с учетом движения поверхности горения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 71. С. 90–105. doi: 10.17223/19988621/71/8
4. Бондарчук С.С., Жуков А.С., Заатдинов М.Х., Дубкова Я.А., Миньков Л.Л., Крайнов А.Ю. Моделирование внутрибаллистических процессов в РДТТ для зарядов с неизвлекаемой формаобразующей оснасткой // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 92. С. 89–100. doi: 10.17223/19988621/92/8
5. Геращенко О.А., Гордов А.Н., Еремена А.К. Температурные измерения: справочник. Киев: Наукова думка, 1989.
6. Зельдович Я.Б., Лейтунский О.И., Либрович В.Б. Теория нестационарного горения пороха. М.: Наука, 1975.
7. Шишков А.А., Панин С.Д., Румянцев Б.В. Рабочие процессы в ракетных двигателях твердого топлива. М.: Машиностроение, 1988.
8. Sutton G.P., Biblarz O. Rocket propulsion elements. John Wiley & Sons, 2011.

References

1. Shapiro Ya.M., Mazing G.Yu., Prudnikov N.E. (1966) *Teoriya raketnogo dvigatelya na tverdom toplive* [Theory of solid-propellant rocket engines]. Moscow: Voenizdat MO SSSR.
2. Rayzberg B.A., Erokhin B.T., Samsonov K.P. (1972) *Osnovy teorii rabochikh protsessov v raketnykh sistemakh na tverdom toplive* [Fundamentals of the theory of working processes in solid-propellant rocket systems]. Moscow: Mashinostroenie.

3. Kiryushkin A.E., Min'kov L.L. (2021) Modelirovaniye vnutrikamernykh protsessov v raketnom dvigatele na tverdom toplive s uchetom dvizheniya poverkhnosti gorenija [Numerical simulation of intra-chamber processes in a solid rocket motor with account for burning surface motion]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mehanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 71. pp. 90–105. doi: 10.17223/19988621/71/8
4. Bondarchuk S.S., Zhukov A.S., Ziatdinov M.Kh., Dubkova Ya.A., Min'kov L.L., Kraynov A.Yu. (2024) Modelirovaniye vnutriballisticeskikh protsessov v RDTT dlya zaryadov s neizvlekaemoy formoobrazuyushchey osnastkoj [Modeling of intra-ballistic processes in solid rocket motors for charges with non-removable forming rig]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mehanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 92. pp. 89–100. doi: 10.17223/19988621/92/8
5. Gerashchenko O.A., Gordov A.N., Eremena A.K. (1989) *Temperaturnye izmereniya. Spravochnik* [Temperature measurements. Handbook]. Kyiv: Naukova Dumka.
6. Zel'dovich Ya.B., Leypunskiy, O.I. Librovich V.B. (1975) *Teoriya nestatsionarnogo gorenija porokha* [Theory of unsteady combustion of gunpowder]. Moscow: Nauka.
7. Shishkov A.A., Panin S.D., Rumyantsev B.V. (1988) *Rabochie protsessy v raketykh dvigatelyakh tverdogo topliva* [Working processes in solid-propellant rocket engines]. Moscow: Mashinostroenie.
8. Sutton G.P., Biblarz O. (2011) *Rocket Propulsion Elements*. John Wiley & Sons.

Сведения об авторах:

Архипов Владимир Афанасьевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: leva@niipmm.tsu.ru

Басалаев Сергей Александрович – кандидат физико-математических наук, инженер-исследователь Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: tarm@niipmm.tsu.ru

Перфильева Ксения Григорьевна – кандидат физико-математических наук, инженер-исследователь Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: k.g.perfiljeva@yandex.ru

Порязов Василий Андреевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории проблем опасных космических объектов физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: poryazov@ftf.tsu.ru

Information about the authors:

Arkhipov Vladimir A. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: leva@niipmm.tsu.ru

Basalaev Sergey A. (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tarm@niipmm.tsu.ru

Perfil'eva Kseniya G. (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: k.g.perfiljeva@yandex.ru

Poryazov Vasiliy A. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: poryazov@ftf.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 29.10.2025; принята к публикации 08.12.2025

The article was submitted 29.10.2025; accepted for publication 08.12.2025

Научная статья

УДК 532.517.2, 66.063.8

doi: 10.17223/19988621/98/7

Численное моделирование течений неньютоновской жидкости в аппарате с лопастными мешалками

Евгений Иванович Борзенко¹, Дмитрий Николаевич Гарбузов²,
Максим Андреевич Ефремов³

1, 2, 3 Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ borzenko@ftf.tsu.ru

² dmitrij.garbuзов.98@mail.ru

³ 33murman@gmail.com

Аннотация. Проведено численное моделирование течения неньютоновской жидкости в смесительном аппарате лопастного типа. В основе численного решения задачи лежат метод контрольного объема и корректирующая процедура SIMPLE. Продемонстрирована кинематика потока в аппаратах с одно-, двух- и четырехлопастной мешалкой. Дополнительно решена задача о перераспределении ансамбля маркерных частиц с течением времени. Количественно смешение исследовалось с помощью числа мощности и оригинальной характеристики неоднородности. Выполнены параметрические исследования зависимости рассматриваемого течения от основных безразмерных параметров задачи.

Ключевые слова: смешение, модель Шведова–Бингама, неньютоновская жидкость, анализ качества смешения

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-29-00594).

Для цитирования: Борзенко Е.И., Гарбузов Д.Н., Ефремов М.А. Численное моделирование течений неньютоновской жидкости в аппарате с лопастными мешалками // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 98. С. 70–83. doi: 10.17223/19988621/98/7

Original article

Numerical modeling of non-newtonian fluid flows in an apparatus with blade mixers

Evgeniy I. Borzenko¹, Dmitriy N. Garbuзов², Maksim A. Efremov³

1, 2, 3 Tomsk State University, Tomsk, Tomsk, Russian Federation

¹ borzenko@ftf.tsu.ru

² dmitrij.garbuзов.98@mail.ru

³ 33murman@gmail.com

Abstract. A numerical simulation of the non-Newtonian fluid flow in a paddle-type mixer is performed in a two-dimensional approximation. The rheological behavior of the medium is described using the Shvedov-Bingham model. The numerical solution is based on the finite volume method and the SIMPLE correction procedure implemented on an orthogonal grid. The singularity of the rheological law associated with the infinite viscosity in the regions with zero strain rates is eliminated using Papanastasiou regularization. The flow kinematics in mixers with one, two, and four blades is demonstrated, characterized by the formation of unyielded regions and stagnant zones near the mixer boundaries and the vessel walls. In addition, the problem of marker-particle redistribution over time is solved, allowing for a qualitative assessment of the mixing dynamics. The characteristic mixing modes of the markers are determined. The mixing process is quantitatively analyzed using the power number and a unique heterogeneity characteristics. Parametric studies of the flow are performed with respect to the main dimensionless parameters of the problem.

Keywords: mixing, Shvedov-Bingham model, non-Newtonian fluids, mixing quality analysis

Acknowledgments: This work was partially supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-79-10028), <https://rscf.ru/project/24-29-00594/>

For citation: Borzenko, E.I., Garbuzov, D.N., Efremov, M.A. (2025) Numerical modeling of non-newtonian fluid flows in an apparatus with blade mixers. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mehanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 98. pp. 70–83. doi: 10.17223/19988621/98/7

Введение

Смесительные аппараты играют большую роль в различных технологических процессах в химической, пищевой, строительной и других индустриях [1] на этапах смешения исходных компонентов и диспергирования твердых частиц и газовых пузырьков, при этом жидкие среды часто демонстрируют сложное реологическое поведение. Вязкопластичные жидкости характеризуются формированием в потоке квазитвердых ядер или застойных зон в областях малых скоростей деформации [2], которые существенно влияют на качество и скорость процесса смешения.

В литературе существует достаточно большое число экспериментальных исследований течений вязкопластичных жидкостей в аппаратах с мешалками, например [3–5]. Однако такой подход зачастую является дорогостоящим и сложным в реализации и не позволяет получать полную информацию о распределении изучаемых характеристик по объему. Теоретические методы исследования с использованием аппарата вычислительной гидродинамики, наоборот, дают эту информацию, но при этом требуют экспериментальной верификации. Характерной особенностью большинства численных методов является регуляризация реологического закона [6, 7], связанная с преодолением особенности бесконечных значений вязкости в квазитвердых ядрах. Численное моделирование процесса течения жидкости в смесителях якорного типа выполнено в работах [8–10] с использованием коммерческих пакетов, а процесс смешения оценивается с использованием числа мощности.

Исследования процесса перемешивания неильтоновской среды с пределом текучести и высокой вязкостью с использованием якорных мешалок представлены в [10, 11].

Цель настоящей работы – численное моделирование двумерного течения вязкоупругой жидкости в смесительном аппарате лопастного типа и исследование кинематики потока, распределения областей квазивердого движения и застойных зон, а также анализ структуры течения посредством решения задачи о перераспределении ансамбля маркерных частиц со временем.

Постановка задачи

Движение высоковязких сред в смесительных аппаратах можно разложить на три составляющие: радиальную, тангенциальную и осевую, количественное соотношение которых зависит от геометрических, реологических и технологических параметров. При низких значениях числа Рейнольдса в исследуемой области преобладают радиальная и тангенциальная составляющие [12, 13], что оправдывает допущение о двумерной постановке. Рассматривается плоское течение Бингамовской жидкости в смесительном аппарате, имеющем форму круга радиуса R (м), на оси которого расположена врачающаяся с постоянной угловой скоростью ω (с^{-1}) одно-, двух- или четырехлопастная мешалка (рис. 1).

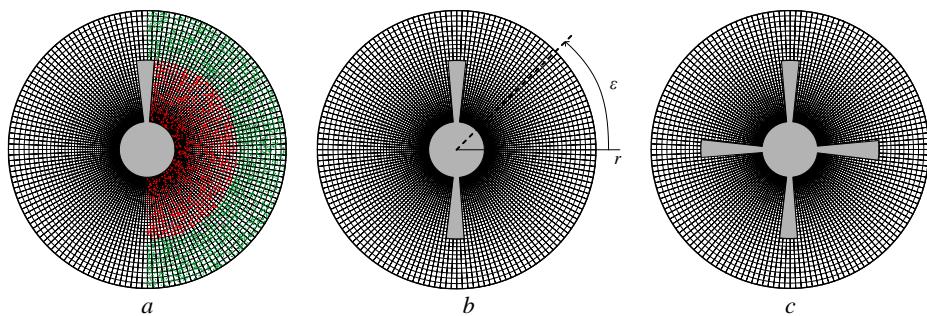


Рис. 1. Область течения и расчетная сетка: однолопастной (a), двухлопастной (b), четырехлопастной (c) смеситель

Fig. 1. Flow area and calculation grid: single-bladed (a), two-bladed (b), four-bladed (c) mixer

Математическая постановка задачи включает уравнения движения и неразрывности, записанные в безразмерном виде, с использованием следующих масштабов: длины R , времени ω^{-1} , скорости ωR , давления $\rho \omega^2 R$, вязкости μ_0 . Здесь μ_0 (Па с) – параметр реологической модели, ρ ($\text{кг}/\text{м}^3$) – плотность жидкости. Для упрощения реализации численной методики выполняется переход в систему отсчета, связанную с мешалкой, который обеспечивает неподвижность границы области решения. В итоге система уравнений записывается в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \nabla \cdot \left(-p \mathbf{I} + \frac{2}{Re} \mu(I_2) \mathbf{E} \right) - 2\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0.$$

Здесь \mathbf{V} – вектор скорости, p – гидродинамическое давление, t – время, \mathbf{I} – единичный тензор, \mathbf{E} – тензор скоростей деформаций, $\boldsymbol{\omega}_0$ – безразмерный вектор угловой

скорости, $Re = \rho \omega R^2 / \mu_0$ – число Рейнольдса. Последние два слагаемых в уравнении движения связаны с неинерциальностью используемой системы отсчета.

Система замыкается реологическим уравнением Шведова–Бингама, согласно которому безразмерная эффективная вязкость μ определяется формулой

$$\mu = \frac{Bn + I_2}{I_2}, \quad (2)$$

где I_2 – второй инвариант тензора скоростей деформации, $Bn = \tau_0 / \mu_0 \omega$ – число Бингама, τ_0 (Па) – предел текучести. В качестве граничных условий на твердых стенках используются условия прилипания. При реализации численной методики уравнения (1) проектируются на оси полярной системы координат (r, ε) , представленные на рис. 1, b.

Процесс смешения анализируется с помощью ансамбля маркерных частиц двух сортов (отмечены красным и зеленым цветом на рис. 1, a), которые в начальный момент времени располагаются в выделенной области ($\pi/2 \leq \varepsilon \leq \pi/2$) случайным образом. Число частиц в ансамбле бралось равным 5 000. Уравнения движения маркеров записаны с учетом предположения, что их скорость совпадает со скоростью жидкости, и частицы не оказывают на течение никакого влияния и не взаимодействуют друг с другом:

$$\frac{dr_p}{dt} = V(r_p, \varepsilon_p), \quad r_p \frac{d\varepsilon_p}{dt} = U(r_p, \varepsilon_p), \quad (3)$$

где r_p, ε_p – полярные координаты маркерной частицы, V, U – радиальная и тангенциальная составляющие вектора скорости. В начальный момент времени скорости как для красных, так и для зеленых частиц задавались равными скоростями жидкости в данной точке пространства. Данное предположение адекватно описывает процесс диспергирования твердых частиц субмиллиметровых размеров с небольшими значениями объемной концентрации [14].

Используемые в работе значения безразмерных критериев Re и Bn соответствуют случаям ламинарных течений полимерных жидкостей в промышленных и лабораторных смесительных аппаратах с умеренными скоростями вращения мешалки.

Решение задачи заключается в отыскании установившихся полей скорости и давления, а также построении областей квазиверного движения, в которых уровень напряжений не превышает предела текучести. Оценка качества смешения выполняется по картине перераспределения маркеров по всей области течения.

Метод решения

Поставленная задача решается численно. Область решения дискретизируется с помощью ортогональной разнесенной сетки с неравномерным шагом по радиусу и равномерным шагом по углу для сохранения пропорциональных размеров контрольного объема по мере роста радиальной координаты (см. рис. 1). В данной работе используется сетка, состоящая из 12 500 контрольных объемов. Дифференциальные уравнения (1) дискретизируются с помощью метода контрольного объема. Уравнение неразрывности удовлетворяется с использованием корректирующей процедуры SIMPLE [15]. Для определения стационарных полей скорости и давления применяется метод установления. С целью устранения сингулярных значений

эффективной вязкости в областях малой интенсивности используется регуляризация, заключающаяся в введении в реологическое уравнение малого параметра δ . Данная методика позволяет организовать сквозной счет без явного выделения границы квазитвердого движения. В настоящей работе используется следующая регуляризация [7]:

$$\mu = 1 + \frac{Bn}{I_2} \left(1 - \exp(-I_2 / \delta) \right),$$

Интегрирование уравнений (3) выполнялось с использованием схемы Рунге–Кутты второго порядка точности.

Проверка аппроксимационной сходимости разработанной программы расчета производилась на последовательности сеток для тестовой задачи о течении в смесительном аппарате без лопастей с внутренним радиусом r_0 (коаксиальный зазор).

Дополнительно сформулирована задача об одномерном течении в коаксиальном зазоре:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \mu \left(\frac{dU}{dr} - \frac{U}{r} \right) \right) &= 0, \\ U(r_0) = 0, \quad U(1) &= 1, \end{aligned} \tag{4}$$

которая имеет следующее аналитическое решение:

$$U = \begin{cases} \frac{Bn \cdot r_1^2}{2} r \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) - Bn \cdot r \cdot \ln \frac{r}{r_0}, & r \leq r_1; \\ r, & r > r_1. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь r_1 – координата границы квазитвердого ядра, примыкающего к внешней стенке, значение которой находится из решения следующего нелинейного уравнения:

$$\frac{Bn}{2} \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^2 - Bn \cdot \ln \frac{r_1}{r_0} - \frac{Bn}{2} - 1 = 0. \tag{6}$$

В качестве характеристики оценки сходимости использовалось значение расхода через поперечное сечение (табл. 1). Порядок сходимости можно оценить по формуле

$$\log_2 \left(\left| \frac{Q_{40} - Q_{20}}{Q_{80} - Q_{40}} \right| \right) = 1.572.$$

Здесь Q_{20} , Q_{40} и Q_{80} – расход, полученный на сетке с 20, 40 и 80 контрольными объемами на ширину зазора соответственно.

Таблица 1

Расход через радиальное сечение в зависимости от количества узлов сетки (Bn = 5, δ = 0.01)

N	20 × 78	40 × 156	80 × 313	Одномерная задача
Q	0.474751	0.473981	0.473722	0.473589
r ₁	0.291275	0.296053	0.297578	0.295212

На рис. 2 представлены результаты расчета безлопастной и однолопастной мешалок при различных значениях параметра регуляризации на сетке 80 × 313, за контрольный параметр выбрана тангенциальная составляющая скорости U . Видно,

что кривые, полученные при $\delta = 0.01$ и 0.005 , практически совпадают. Последующее уменьшение параметра регуляризации приводит к ухудшению устойчивости счета. Все дальнейшие расчеты получены при $\delta = 0.01$ на сетках с 80 контрольными объемами на ширину зазора. Сравнение численных результатов, полученных с помощью предложенной методики, с данными других авторов представлено в [16].

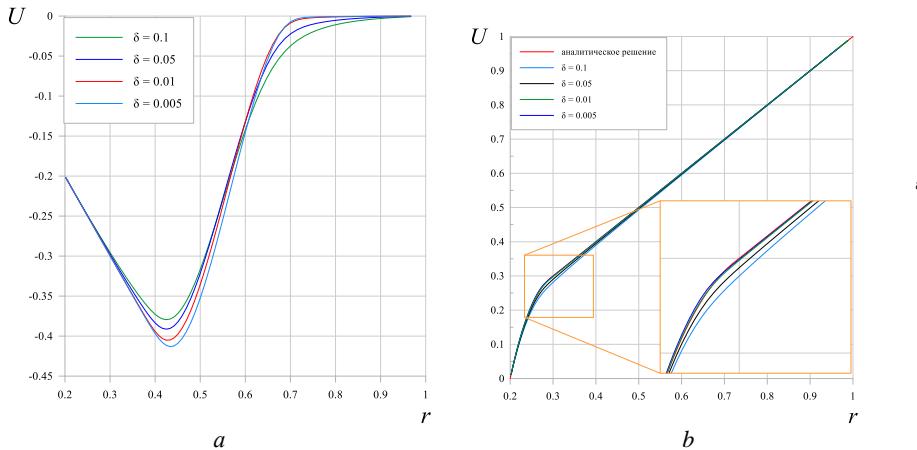


Рис. 2. Распределение угловой компоненты вектора скорости: *a* – для коаксиального зазора при $Bn = 5$; *b* – для однолопастного смесителя в сечении $\epsilon = 45^\circ$ при $Bn = 20$ и $Re = 1$

Fig. 2. Distribution of the angular component of the velocity vector (*a*) for the coaxial gap at $Bn = 5$, (*b*) for a single-bladed mixer in section $\epsilon = 45$ at $Bn = 20$ and $Re = 1$

Результаты

Характерным для Бингамовских жидкостей является формирование областей, в которых уровень напряжений не превышает предела текучести, и жидкость ведет себя как твердое тело. Эти зоны, называемые квазивердыми ядрами, оказывают существенное влияние на структуру потока и качество смешения. Применительно к данной задаче геометрия границ ядер существенно зависит от конфигурации смесителя и безразмерных чисел Бингама и Рейнольдса. Количественное условие выделения квазивердых ядер в безразмерной форме записывается следующим образом:

$$\mu J_2 < Bn \quad (7)$$

и является аналогом условия выделение областей с уровнем напряжения, меньшим предела текучести.

Распределения квазивердых ядер и полей эффективной вязкости для установленного случая течения с ростом Бингама представлены на рис 3. Штриховкой выделены области квазивердого движения. Сплошными линиями показаны линии тока. Видно, что при малых значениях числа Бингама ($Bn = 1$) формируются одно внутреннее ядро вокруг лопасти и три локальных ядра, два из которых расположены симметрично на внешней стенке и еще одно – на некотором удалении над кромкой лопасти. При увеличении числа Бингама происходит симметричный рост ядер на внешних стенках, и при $Bn = 10$ они смыкаются вдоль стенки. При этом во всех случаях наблюдается небольшая зона квазивердого течения над лопастью.

Дальнейшее увеличение числа Бингама сопровождается ростом ядер. Область минимальной вязкости, соответствующая области высокointенсивного течения, с ростом числа Бингама локализуется в окрестности верхней кромки лопасти.

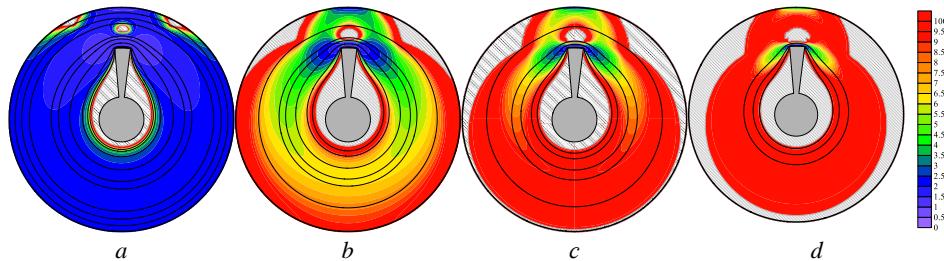


Рис. 3. Эволюция ядер и поля эффективной вязкости с ростом числа Бингама при $Re = 1$ и $Bn = 1, 5, 10, 20$ (a–d)

Fig. 3 Evolution of core and effective viscosity fields with increasing Bingham number at $Re = 1$ and (a), (b), (c), (d) – $Bn = 1, 5, 10, 20$

С ростом числа Рейнольдса нарушается симметрия в расположении ядер наряду с уменьшением их размеров (рис. 4). При $Re = 100$ ядро вокруг внешней стенки уже не сплошное, «надлопастное» ядро полностью разрушается.

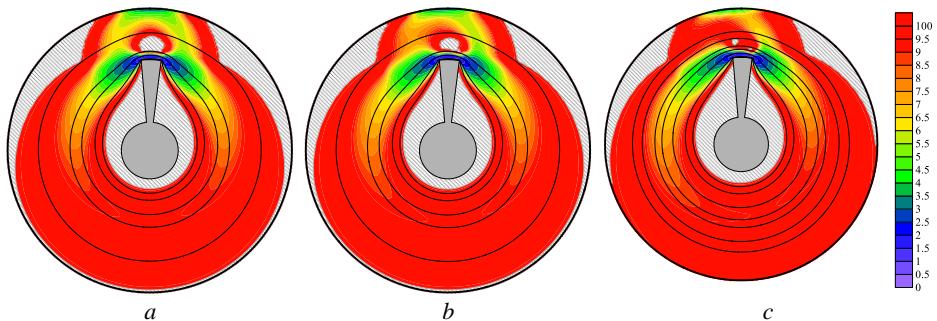


Рис. 4. Эволюция ядер и поля эффективной вязкости с ростом числа Рейнольдса при $Bn = 10$ и $Re = 10, 40, 100$ (a–c)

Fig. 4. Evolution of core and effective viscosity fields with increasing Reynolds number at $Bn = 10$ and (a), (b), (c) – $Re = 10, 40, 100$

Влияние конфигурации смесителя на структуру потока показано на рис. 5 для $Bn = 5$. Характерным отличием двух- и четырехлопастных смесителей от однолопастного является образование единого ядра над лопастями. При этом для четырехлопастного смесителя наблюдается образование сплошного ядра вдоль внешней стенки. Отметим, что образование такого же ядра для однолопастного смесителя происходит только при $Bn = 10$. В областях сдвигового течения значения эффективной вязкости меньше для двух- и четырехлопастных мешалок, что говорит о более интенсивном течении по сравнению с однолопастной. Однако так как перемешивания внутри квазивердых ядер не происходит, использование четырехлопастного смесителя менее эффективно из-за больших ядер.

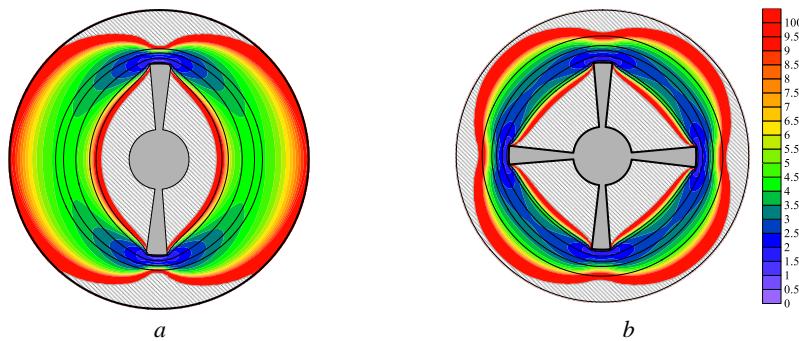


Рис. 5. Ядра для двухлопастного (*a*) и четырехлопастного (*b*) смесителя при $Bn = 5$ и $Re = 1$

Fig. 5. Cores for (*a*) – two-bladed and (*b*) – four-bladed mixer at $Bn = 5$ and $Re = 1$

Параметрические исследования показали, что процесс перемешивания маркеров по объему существенно зависит от геометрии ядер. Так, для $Bn = 10$ в однолопастном смесителе (рис. 6) маркеры, находящиеся во внутреннем ядре, в процессе движения практически не перераспределяются по объему, образуется локальная неоднородность. Картина распределения маркеров вне области внутреннего ядра характеризуется слоистой структурой, масштаб которой уменьшается с течением времени. В зоне внешнего ядра маркеры перемещаются, только когда под ними проходит лопасть, это происходит благодаря области текучести над лопастью. Как следствие, в слое, примыкающем к внешней стенке, формируется структура с высокой неоднородностью. Таким образом, структуру потока можно условно разделить на три зоны: зона неоднородности в квазивердом ядре, примыкающая к лопасти; зона неоднородности вдоль твердой стенки, в которой можно добиться равномерного распределения маркеров при достаточно высоком числе оборотов; зона сдвигового потока, расположенная между двумя предыдущими, с однородным распределением маркеров. Анализ показывает, что в рамках используемых конфигураций мешалок перемешивание маркеров различных сортов (красного и зеленого) друг с другом не происходит.

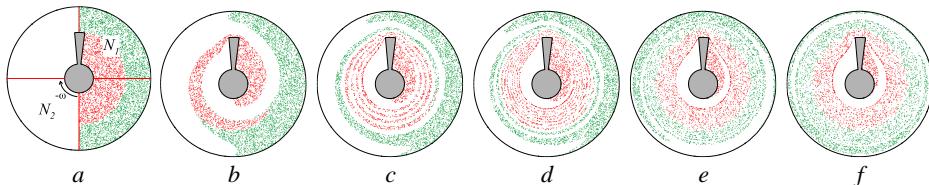


Рис. 6. Эволюция распределения маркерных частиц при $Bn = 10$, $Re = 1$ и (a) – 0, (b) – 1, (c) – 5, (d) – 10, (e) – 40, (f) – 80 оборотах

Fig. 6. Evolution of the distribution of marker particles in $Bn = 10$, $Re = 1$ and (a) – 0, (b) – 1, (c) – 5, (d) – 10, (e) – 40, (f) - 80 revolutions

Картина распределения маркеров после 80 оборотов мешалки для разных чисел Бингама демонстрируется на рис. 7. Так как для $Bn = 1$ размеры внешнего ядра малы, то течение во внешней области носит сдвиговой характер, соответственно,

маркеры в этой области формируют слоистую структуру, которая к концу смешения размывается. При $Bn = 5$ влияние внешнего ядра уже присутствует, благодаря чему к 80 оборотам еще наблюдается небольшая неоднородность в тонком слое на внешней стенке. При $Bn = 20$ из-за большего внешнего ядра слоистая маркерная структура вдоль стенки сохраняется после 80 оборотов, и на ее размывание требуется дополнительное время.

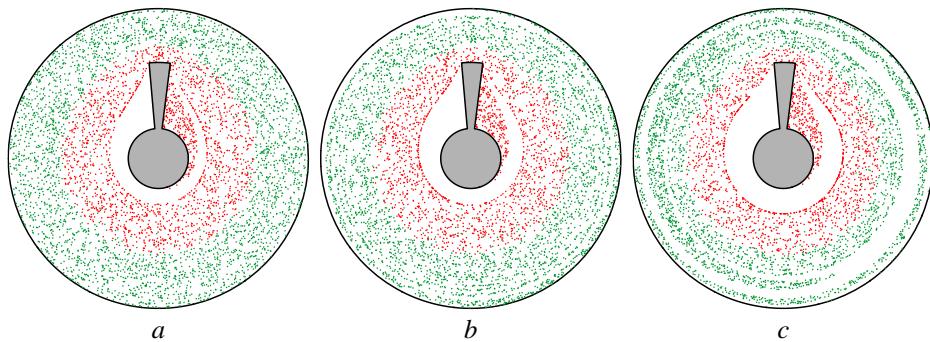


Рис. 7. Эволюция распределения частиц после 80 оборотов для $Re = 1$ и (a), (b), (c) – $Bn = 1, 5, 20$

Fig. 7. Evolution of the marker particle distribution after 80 revolutions for $Re = 1$ and (a), (b), (c) – $Bn = 1, 5, 20$

С увеличением числа лопастей изменяется структура потока. Для двух- или четырехлопастной мешалки зона примыкающего к ней квазиверного ядра значительно увеличивается в размерах, что приводит к формированию больших областей неоднородности (рис. 8, 9). Картина перераспределения маркеров в пристенном слое аналогична рассмотренному ранее случаю однолопастной мешалки. При этом время для достижения однородности распределения маркеров в зоне сдвигового потока уменьшается с ростом числа лопастей.

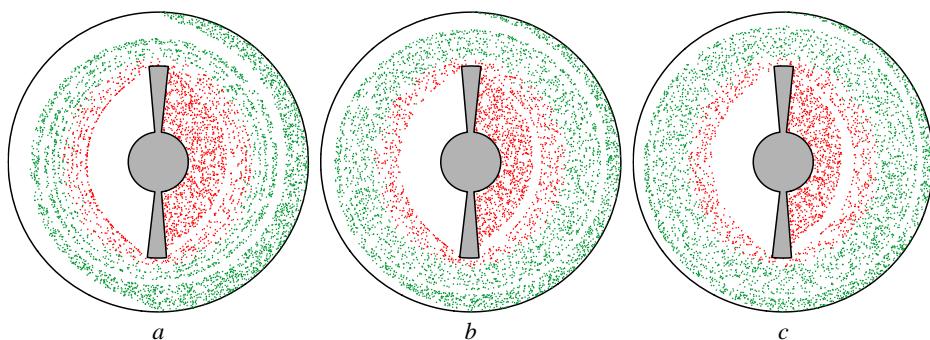


Рис. 8. Эволюция распределения маркерных частиц для двухлопастного смесителя при $Bn = 10$, $Re = 1$ и (a) – 10, (b) – 40, (c) – 80 оборотах

Fig. 8. Evolution of the marker particle distribution for a two-blade mixer at $Bn = 10$, $Re = 1$ and (a) – 10, (b) – 40, (c) – 80 revolutions

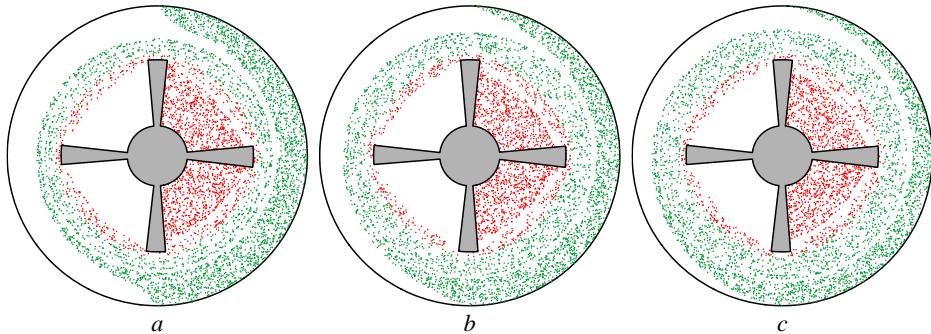


Рис. 9. Эволюция распределения маркерных частиц для четырехлопастного смесителя при $Bn = 10$, $Re = 1$ и (a) – 10, (b) – 40, (c) – 80 оборотах

Fig. 9. Evolution of the marker particle distribution for a four-bladed mixer at $Bn = 10$, $Re = 1$ and (a) – 10, (b) – 40, (c) – 80 revolutions

Дальнейшие исследования были посвящены количественному анализу смешения. В качестве характеристики процесса смешения используется безразмерное число мощности [17], которое широко применяют на практике в технических приложениях:

$$N_p = \frac{P}{\rho \omega^3 (2R)^5} = \frac{\Phi}{32 Re}, \quad (8)$$

где P и Φ – размерное и безразмерное значения интеграла от диссипативной функции по области течения Ω :

$$\Phi = \iint_{\Omega} \mu(I_2^2) \left\{ 2 \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} + \frac{V}{r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r} \right)^2 \right\} r dr d\varepsilon. \quad (9)$$

Величина N_p в стационарном режиме показывает потери на вязкое трение и характеризует энергетические затраты на организацию течения. В табл. 2 приведены значения N_p в зависимости от числа Бингама и числа Рейнольдса для случая установившегося течения в однолопастном смесителе. Видно, что наибольшее значение числа мощности реализуется при высоких числах Бингама. Однако структура течения при больших Bn характеризуется формированием больших зон неоднородности распределения маркеров, и использование данной характеристики для оценки качества неадекватно.

Таблица 2

Число мощности для различных Bn и Re

N_p	$Bn = 1$	$Bn = 5$	$Bn = 10$	$Bn = 20$
$Re = 1$	4 577.2	11 831.9	20 475.8	37 021.9
$Re = 40$	116.1	296.8	512.8	926.0
$Re = 100$	48.2	120.1	206.3	371.8

На основе процесса распределения маркеров был рассчитан оригинальный параметр неоднородности, который позволяет оценить качество смешения с течением времени:

$$v = \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} \quad (10)$$

Здесь N_1 и N_2 – количество маркерных частиц в I и III четвертях области смешения в текущий момент времени (см. рис. 6, a), M – количество оборотов, пройденных мешалкой. Поведение характеристики v в зависимости от числа оборотов для однолопастного смесителя при $Bn = 1, 10, 20$ и $Re = 1$ проиллюстрировано на рис. 10. Во всех случаях наблюдается колебательная составляющая с частотой, соответствующей частоте вращения мешалки, вызванная движением маркеров, находящихся во внутреннем ядре. Для $Bn = 1$ амплитуда колебаний слабо меняется с течением времени. С ростом Bn появляется еще одна низкочастотная мода, амплитуда которой затухает в процессе смешения. При этом чем больше Bn , тем выше частота этой составляющей. Появление этой моды связано с медленным перераспределением маркеров вдоль внешней стенки.

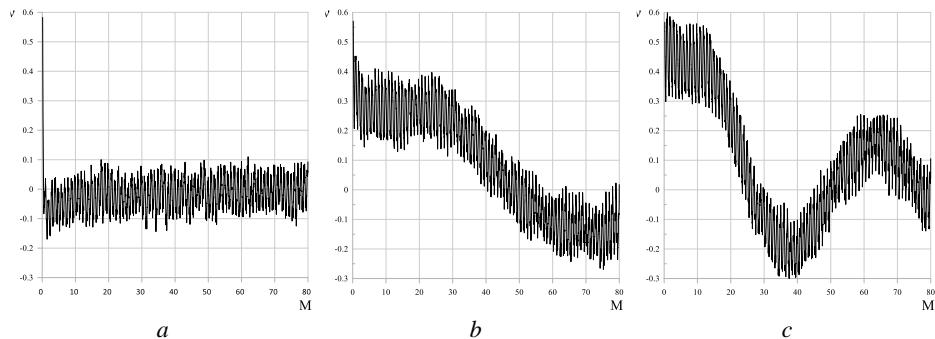


Рис. 10. Характеристики неоднородности при $Re = 1$ и $Bn = 1, 10, 20$ (a–c)
Fig. 10. Characteristics of heterogeneity at $Re = 1$ and (a), (b), (c) – $Bn = 1, 10, 20$

При $Re = 100$ (рис. 11) низкочастотная мода образуется при больших Бингамах, так как увеличение Re препятствует образованию внешнего ядра. При этом ее частота уменьшается по сравнению с меньшим Рейнольдсом при одинаковых Bn .

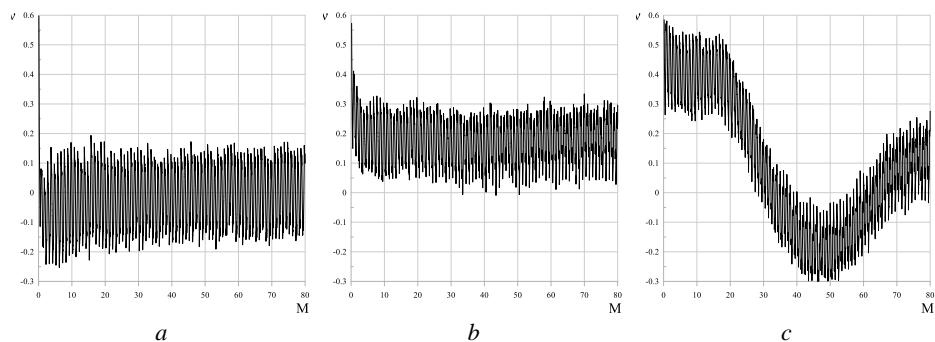


Рис. 11. Характеристики неоднородности при $Re = 100$ и $Bn = 1, 10, 20$ (a–c)
Fig. 11. Characteristics of heterogeneity at $Re = 100$ and (a), (b), (c) – $Bn = 1, 10, 20$

Сравнение графиков характеристики неоднородности для разных конфигураций смесителя (рис. 12), показывает низкую эффективность перемешивания для смесителя с более чем одной лопастью, это отражается на значительном росте амплитуды за счет увеличившейся внутренней неоднородности.

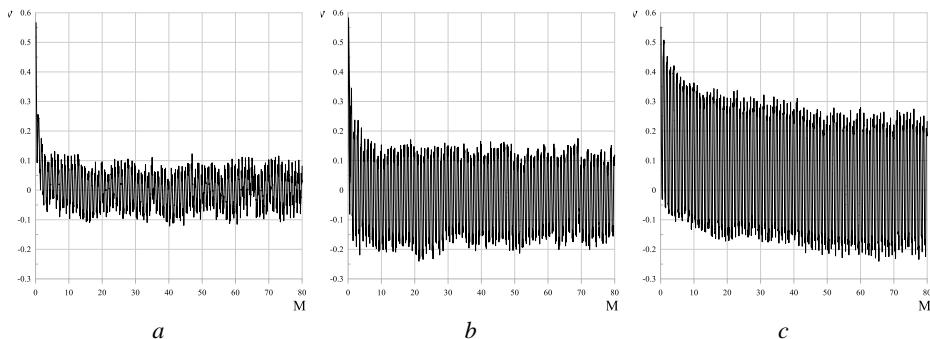


Рис. 12. Характеристики неоднородности при $Re = 1$ и $Bn = 5$
для (a), (b), (c) – однолопастного, двухлопастного и четырехлопастного смесителя

Fig. 12. Characteristics of heterogeneity at $Re = 1$ and $Bn = 5$
for (a), (b), (c) – single-bladed, two-bladed and four-bladed mixer

Заключение

Выполнены параметрические исследования плоских течений Бингамовской жидкости для различных конфигураций мешалок, отличающихся количеством лопастей, для чисел Bn и Re , изменяющихся в диапазоне от 1 до 20 и от 1 до 100 соответственно. Проанализировано изменение геометрии ядер в зависимости от конфигурации мешалки и безразмерных чисел. Для иллюстрации и анализа качества смещения решена задача о движении ансамбля маркерных частиц. Выявлено три характерных режима поведения маркерных частиц. Первый режим, реализующийся во внутреннем ядре, соответствует отсутствию движения маркеров относительно лопасти. Второй осуществляется в зоне между ядрами, для него характерна слоистая структура потока маркеров. Наконец, третий реализуется во внешнем ядре, где маркеры образуют сильно неоднородную структуру. Количественно оценка процесса перемешивания осуществлялась с помощью характеристик неоднородности распределения маркерных частиц и интеграла диссипативной функции. Проведенный сравнительный анализ показал более качественное перемешивание для однолопастных мешалок.

Список источников

1. Барабаш В.М., Абиеев Р.Ш., Кулов Н.Н. Обзор работ по теории и практике перемешивания // Теоретические основы химической технологии. 2018. V. 52 (4). P. 367–383. doi: 10.1134/S0040357118040024
2. Balmforth N.J., Frigaard I.A., Ovarlez G. Yielding to Stress: Recent Developments in Viscoelastic Fluid Mechanics // Annu. Rev. Fluid Mech. 2014. V. 46 (1). P. 121–146. doi: 10.1146/annurev-fluid-010313-141424
3. Russell A.W., Patrick M.P., Paul F.L., Konstantin S.P., Christos N.M. An experimental study of the mixing characteristics of viscoplastic fluids in dual-impeller agitation systems // Chem. Eng. Res. Des. 2025. V. 216. P. 216–229. doi: 10.1016/j.cherd.2025.02.032
4. Curran S.J., Hayes R.E., Afacan A., Williams M.C., Tanguy P.A. Experimental Mixing Study of a Yield Stress Fluid in a Laminar Stirred Tank // Ind. Eng. Chem. Res. 2000. V. 39 (1). P. 195–202. doi: 10.1021/IE990468E

5. Pakzad L., Ein-Mozaffari F., Upreti S.R., Lohi A. Experimental and numerical studies on mixing of yield-pseudoplastic fluids with a coaxial mixer // *Chem. Eng. Commun.* 2013. V. 200 (12). P. 1553–1577. doi: 10.1080/00986445.2012.751380
6. Bercovier M., Engelman M. A finite-element method for incompressible non-Newtonian flows // *J. Comput. Phys.* 1980. V. 36 (3). P. 313–326. doi: 10.1016/0021-9991(80)90163-1
7. Papapanastasiou T.C. Flows of Materials with Yield // *J. Rheol. (N. Y. N. Y.)*. The Society of Rheology. 1987. V. 31 (5). P. 385–404. doi: 10.1122/1.549926
8. Benmoussa A., Páscoa J.C. A Chamfered Anchor Impeller Design for Enhanced Efficiency in Agitating Viscoplastic Fluids // *Fluids.* 2024. V. 9 (12). Art. 288. doi: 10.3390/fluids9120288
9. Kada B., Lakhdar R., Brahim M., Ameur H. Agitation of Complex Fluids in Cylindrical Vessels by Newly Designed Anchor Impellers // *Period. Polytech. Mech. Eng.* 2022. V. 66 (2). P. 109–119. doi: 10.3311/PPme.18438
10. Alraddadi I., Yang D., Katbar N.M., Benhanifia K., Rahmani L., Mebarki B., Ameur H. Effect of curved anchor impellers on power consumption and hydrodynamic parameters of yield stress fluids (Bingham–Papanastasiou model) in stirred tanks // *Rev. Adv. Mater. Sci.* 2023. V. 62. Art. 20230156. P. 1–18. doi: 10.1515/rams-2023-0156
11. Mokhefi A. Hydrodynamic and thermal performance analysis of an inclined anchor impeller designed for yield stress food mixing applications // *Food Bioprod. Process.* 2024. V. 143. P. 255–270. doi: 10.1016/j.fbp.2023.12.006
12. Komoda Y., Date T. Enhancement of laminar mixing by an anchor impeller with rotationally reciprocating motion // *AIP Adv.* 2022. V. 12 (1). doi: 10.1063/5.0075750
13. Benhanifia K., Redouane F., Lakhdar R., Brahim M., Al-Farhanu K., Jamshed W., Eid M.R., El Din S.M., Raizah Z. Investigation of mixing viscoplastic fluid with a modified anchor impeller inside a cylindrical stirred vessel using Casson–Papanastasiou model // *Sci. Rep.* 2022. V. 12 (1). Art. 17534. doi: 10.1038/s41598-022-22415-6
14. Брагинский Л.Н., Бегачев В.И., Барбаш В.М. Перемешивание в жидкых средах: физические основы и инженерные методы расчета. Л.: Химия, 1984. 336 р.
15. Патанкар С.В. Численные методы решения задач теплообмена и механики жидкости. М.: Энергоиздат, 1988. 526 р.
16. Борзенко Е.И., Гарбузов Д.Н. Течение ньютоновской жидкости в смесителях различных конфигураций // *Comput. Contin. Mech.* 2025. V. 17 (4). P. 486–495. doi: 10.7242/1999-6691/2024.17.4.39
17. Brown D.A.R., Jones P.N., Middleton J.C. Experimental Methods // *Handbook of Industrial Mixing.* New Jersey: Wiley, 2003. P. 145–256.

References

1. Barabash V.M., Abiev R.S., Kulov N.N. (2018) Theory and practice of mixing: a review. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering.* 52. pp. 367–383. doi: 10.1134/S0040357118040024
2. Balmforth N.J., Frigaard I.A., Ovarlez G. (2014) Yielding to stress: recent developments in viscoplastic fluid mechanics. *Annual Review of Fluid Mechanics.* 46. pp. 121–146. doi: 10.1146/annurev-fluid-010313-141424
3. Russell A.W., Patrick M.P., Paul F.L., Konstantin S.P., Christos N.M. (2025) An experimental study of the mixing characteristics of viscoplastic fluids in dual-impeller agitation systems. *Chemical Engineering Research and Design.* 216. pp. 216–229. doi: 10.1016/j.cherd.2025.02.032
4. Curran S.J., Hayes R.E., Afacan A., Williams M.C., Tanguy P.A. (2000) Experimental mixing study of a yield stress fluid in a laminar stirred tank. *Industrial & Engineering Chemistry Research.* 39. pp. 195–202. doi: 10.1021/IE990468E
5. Pakzad L. Ein-Mozaffari F., Upreti S.R., Lohi A. (2013) Experimental and numerical studies on mixing of yield-pseudoplastic fluids with a coaxial mixer. *Chemical Engineering Communications.* 200. pp. 1553–1577. doi: 10.1080/00986445.2012.751380

6. Bercovier M., Engelman M. (1980) A finite-element method for incompressible non-Newtonian flows. *Journal of Computational Physics*. 36. pp. 313–326. doi: 10.1016/0021-9991(80)90163-1
7. Papanastasiou T.C. (1987) Flows of materials with yield. *Journal of Rheology*. 31. pp. 385–404. doi: 10.1122/1.549926
8. Benmoussa A., Páscoa J.C. (2024) A chamfered anchor impeller design for enhanced efficiency in agitating viscoplastic fluids. *Fluids*. 9. P. 288. doi: 10.3390/fluids9120288
9. Kada B., Lakhdar R., Brahim M., Ameur H. (2022) Agitation of complex fluids in cylindrical vessels by newly designed anchor impellers. *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering*. 66. pp. 109–119. doi: 10.3311/PPme.18438
10. Alraddadi I., Yang D., Katbar N.M., Benhanifia K., Rahmani L., Mebarki B., Ameur H. (2023) Effect of curved anchor impellers on power consumption and hydrodynamic parameters of yield stress fluids (Bingham–Papanastasiou model) in stirred tanks. *Reviews on Advanced Materials Science*. 62. pp. 1–18. doi: 10.1515/rams-2023-0156
11. Mokhefi A. (2024) Hydrodynamic and thermal performance analysis of an inclined anchor impeller designed for yield stress food mixing applications. *Food and Bioproducts Processing*. 143. pp. 255–270. doi: 10.1016/j.fbp.2023.12.006
12. Komoda Y., Date T. (2022) Enhancement of laminar mixing by an anchor impeller with rotationally reciprocating motion. *AIP Advances*. 12. Article 015013. doi: 10.1063/5.0075750
13. Benhanifia K., Redouane F., Lakhdar R., Brahim M., Al-Farhanu K., Jamshed W., Eid M.R., El Din S.M., Raizah Z. (2022) Investigation of mixing viscoplastic fluid with a modified anchor impeller inside a cylindrical stirred vessel using Casson–Papanastasiou model. *Scientific Reports*. 12. Article 17534. doi: 10.1038/s41598-022-22415-6
14. Braginsky L.N., Begachev V.I., Barabash V.M. (1984) *Peremeshivanie v zhidkikh sredakh: Fizicheskie osnovy i inzhenernye prilozheniya* [Mixing in liquid media: Physical fundamentals and engineering calculation methods]. Leningrad: Khimiya.
15. Patankar S.V. (1988) *Chislennye metody resheniya zadach teploobmena i mekhaniki zhidkosti* [Numerical heat transfer and fluid flow]. Moscow: Energoizdat.
16. Borzenko Y.I., Garbuzov D.N. (2025) Flow of a Newtonian fluid in agitators of different configurations. *Computational Continuum Mechanics*. 17. pp. 486–495. doi: 10.7242/1999-6691/2024.17.4.39
17. Brown D.A.R., Jones P.N., Middleton J.C. (2003) *Experimental Methods. Handbook of Industrial Mixing*. New Jersey: Wiley.

Сведения об авторах:

Борзенко Евгений Иванович – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой автоматизации технологических процессов Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: borzenko@ftf.tsu.ru

Гарбузов Дмитрий Николаевич – аспирант физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: dmitrij.garbuzov.98@mail.ru

Ефремов Максим Андреевич – студент физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: 33murman@gmail.com

Information about the authors:

Borzenko Evgeniy I. (Doctor of Physics and Mathematics, Head of Department, Department of Automation of Technological Processes, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: borzenko@ftf.tsu.ru

Garbuzov Dmitriy N. (Tomsk State University Tomsk, Russian Federation). E-mail: dmitrij.garbuzov.98@mail.ru

Efremov Maksim A. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: 33murman@gmail.com

Статья поступила в редакцию 29.09.2025; принята к публикации 08.12.2025

The article was submitted 29.09.2025; accepted for publication 08.12.2025

Научная статья

УДК 532

doi: 10.17223/19988621/98/8

Влияние электромагнитного поля на характеристики пористых материалов, заполненных сложными коллоидными системами органических соединений

Виленна Ильшатовна Валиуллина¹, Рушан Ринатович Галеев²,
Расул Рашитович Зиннатуллин³, Айрат Ахматович Мусин⁴,
Лиана Ароновна Ковалева⁵

^{1, 2, 3, 4, 5} Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия

¹ valiullina.vilena@mail.ru

² galeevr93@gmail.com

³ rasulz@yandex.ru

⁴ mus-airat@yandex.ru

⁵ liana-kovaleva@yandex.ru

Аннотация. Рассматриваются процессы влияния электромагнитного поля на фильтрационные характеристики пористой среды. Обнаружено, что вязкость нефти после электромагнитного воздействия при малых мощностях поля возрастает из-за структурных преобразований. Замечено, что при поперечном расположении электродов эффективная проницаемость по нефти снижается более чем на 20%, в отличие от продольного расположения электродов, когда проницаемость практически не меняется. Это объясняется возникновением эффекта запирания на локальных участках, наиболее приближенных к электродам, где формируется наибольший градиент напряженности ЭМП.

Ключевые слова: фильтрация, эффективная проницаемость, коэффициент динамической вязкости, переменное электромагнитное поле

Благодарности: Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 22-11-20042.

Для цитирования: Валиуллина В.И., Галеев Р.Р., Зиннатуллин Р.Р., Мусин А.А., Ковалева Л.А. Влияние электромагнитного поля на характеристики пористых материалов, заполненных сложными коллоидными системами органических соединений // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 98. С. 84–96. doi: 10.17223/19988621/98/8

Original article

Impact of the electromagnetic field on the properties of porous materials containing complex colloidal mixtures of organic compounds

**Vilena I. Valiullina¹, Rushan R. Galeev², Rasul R. Zinnatullin³,
Ayrat A. Musin⁴, Liana A. Kovaleva⁵**

^{1, 2, 3, 4, 5} Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russian Federation

¹ valiullina.vilena@mail.ru

² galeevr93@gmail.com

³ rasulz@yandex.ru

⁴ mus-airat@yandex.ru

⁵ liana-kovaleva@yandex.ru

Abstract. A number of studies have examined the influence of electromagnetic fields (EMFs) on petroleum liquids. An interesting problem is to investigate the behavior of these liquids in porous media due to the presence of complex hydrocarbons. This paper investigates the features of the viscous oil flow in porous-medium models under EMF exposure. The main component of the experimental setup was a cell with electrodes positioned both across and along the flow direction. It was found that the maximum value of the dielectric loss tangent was reached at a frequency of 5 MHz. The dynamic viscosity coefficient increased after EMF exposure, indicating structural changes in the oil. The fluid flow rate was measured as a function of temperature at different pressure levels. The application of the field led to a decrease in the flow rate compared to filtration without exposure. Considering the design features of the micromodel and the measured dynamic viscosity coefficient, it was assumed that the effect was caused by the dielectrophoretic forces acting on the polar components of the oil and their structural transformation. Such a reduction of the flow rate can be explained by the increased dynamic viscosity and deterioration of the filtration characteristics of the porous medium, which results in a blocking effect in the local areas closest to the electrodes, where the highest electric-field-strength gradient is formed.

Keywords: filtration, permeability, dynamic viscosity coefficient, alternating electromagnetic field

Acknowledgments: The reported study was financially supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-11-20042).

For citation: Valiullina, V.I., Galeev, R.R., Zinnatullin, R.R., Musin, A.A., Kovaleva, L.A. (2025) Impact of the electromagnetic field on the properties of porous materials containing complex colloidal mixtures of organic compounds. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mehanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 98. pp. 84–96. doi: 10.17223/19988621/98/8

Введение

В настоящее время нефть является одним из важнейших источников энергии. Добыча высоковязкой нефти – важная практическая задача, поскольку запасы таких месторождений значительны, а их роль в общих запасах органического сырья постоянно возрастает. Такая нефть представляет собой суспензию асфальтеновых

коллоидов, стабилизированных смолами [1–3], что приводит к необычному поведению тяжелой нефти, протекающей по трубам и пористым средам [4–7], а при изменении внешних условий зачастую демонстрирует аномальное изменение свойств [8]. Как правило, тяжелая нефть представляет собой разновидность неьютоновской жидкости и относится к бингамовской жидкости. Это мнение подтверждено многими экспериментальными данными [9]. Но реологические характеристики тяжелой нефти зависят от температуры окружающей среды, – это может быть ньютоновская жидкость с более высокой температурой [10].

Из-за высокой вязкости нефти, а также из-за частого засорения призабойной зоны скважины отложениями коллоидных поверхностно-активных компонентов добыча нефти становится возможной только после предварительной термической обработки пласта. Так, в статье [11] с помощью экспериментов были изучены характеристики протекания через капиллярную и пористую среду различных видов тяжелой нефти при различных температурах. Показано, что тяжелая нефть, содержащая асфальтеновые коллоиды, обладает реологическими свойствами предела текучести (жидкости Бингама). Но обработка горячим паром или горячей жидкостью не всегда эффективна. Более того, их широкое применение может привести к серьезным экологическим последствиям в виде нарушений гидрогеологической обстановки. Одним из перспективных методов термической обработки является электромагнитный нагрев продуктивных пластов [12]. Благодаря глубокому проникновению и объемному тепловыделению, а также отсутствию теплоносителя электромагнитное излучение может обеспечить по сравнению с традиционными методами высокую скорость и равномерность нагрева, возможность оптимального управления и автоматизации технологических процессов, практически исключить вредное воздействие на окружающую среду [13].

В [14] обнаружено, что основные изменения в микроструктуре эмульсии происходят за доли секунды, независимо от частоты и напряжения приложенного поля. Увеличение напряжения и частоты приложенного электрического поля усиливает эффект коалесценции, а концентрация капель приводит к повышению эффективности соединения капель эмульсии. В работе [15] рассматривается влияние высокочастотных электромагнитных полей и электрического нагрева на процессы массо- и теплопередачи в многокомпонентной углеводородной системе, протекающей в пористых средах. Были выявлены критические параметры, такие как снижение вязкости, которые влияют на извлечение тяжелой нефти под воздействием этих вариантов нагрева. Замечено, что высокочастотное электромагнитное поле воздействует на полярные компоненты нефти, десорбируя их с поверхности породы и увеличивая добычу. Эта важнейшая роль высокочастотного поля в процессе адсорбции при вытеснении высоковязких нефтей в конечном итоге привела к меньшему осаждению асфальтенов и закупориванию пор.

В сырой нефти содержатся различные углеводородные соединения, такие как асфальтены, смолы, ароматические вещества и воски; самым тяжелым компонентом сырой нефти со сложной структурой молекул являются асфальтены, поэтому их молекулярная структура до конца не изучена [16, 17]. Отложение асфальтенов на поверхности пород-коллекторов пагубно оказывается на продуктивности углеводородов. Это объясняется тем, что молекулы асфальтенов имеют тенденцию к образованию огромных скоплений. Асфальтены накапливаются на границах раздела твердое вещество–жидкость или жидкость–жидкость в процессе

химического заводнения, в результате чего из-за уменьшения межфазного натяжения и изменения смачиваемости твердой поверхности образуются микроэмульсии [18]. Несмотря на то, что изучение взаимодействия асфальтенов с солевым раствором, который закачивают в пласт для увеличения нефтеотдачи, все еще продолжается, в некоторых исследованиях были высказаны разные мнения, согласно которым одни исследователи утверждали, что присутствие водных микроэмульсий не оказывает существенного влияния на осаждение асфальтенов [19, 20], в то время как другие, наоборот, высказывались о негативном влиянии [21, 22]. В [23] подтвержден механизм адсорбции анионных поверхностно-активных веществ на поверхности слюды в присутствии катионов в растворе. Сравнение изображений адсорбированного вещества, полученных при контакте с микроэмульсией из разных областей фазовой диаграммы, показало корреляцию между морфологическими характеристиками изображений и структурными особенностями микроэмульсий.

Существует ряд исследований, посвященных изучению влияния электромагнитных полей различного диапазона частот на физико-химические свойства нефтяных жидкостей. Так, в работе [24] обнаружено, что электромагнитная обработка демонстрирует свою максимальную эффективность сразу после воздействия электромагнитного поля. То есть после воздействия электромагнитного поля (ЭМП) на нефть ее вязкость снижается, но через определенный промежуток времени свойства нефти возвращаются к изначальным, как до воздействия. В статье [25] повышение вязкости было вызвано образованием цепочечных микроструктур диспергированных капель. Между тем снижение вязкости тесно связано с вращением диспергированных капель, вызванным электрическим полем, что подтверждено электрогидродинамикой отдельной проводящей капли в более проводящей окружающей жидкости. Были рассмотрены реологические характеристики модельных эмульсий при динамическом колебательном сдвиге малой амплитуды в сочетании с эволюцией морфологии под действием электрического поля и поля течения. Результаты показали, что вклад поверхности раздела в реологический отклик проявляется совершенно по-разному в зависимости от соотношения электропроводности двух соприкасающихся жидкостей.

Цель настоящей работы – исследование особенностей фильтрации нефти, вязкость которой зависит от температуры, в модели пористой среды при наличии электромагнитного воздействия для выявления степени изменения эффективной проницаемости по нефти под действием ЭМП.

Методика экспериментального исследования фильтрации нефти при воздействии ЭМП

Объектом исследования являлась модель пористой среды, насыщенная нефтью. В табл. 1 приведено содержание в ней асфальтенов, смол и парафинов (АСП).

Таблица 1

Содержание АСП в используемой нефти

Наименование параметра	Содержание, %
Асфальтены	0.67
Смолы	6.2
Парафины	5.1

Предварительно перед началом эксперимента были проведены исследования частотных зависимостей тангенса угла диэлектрических потерь $\operatorname{tg}\delta$ нефти для определения частоты воздействия из области поляризации полярных компонент нефти (рис. 1).

При воздействии на нефть электромагнитным излучением частотой из области диэлектрической поляризации полярных компонент нефти происходит ориентационная поляризация этих компонент, приводящая к структурным изменениям асфальто-смоло-парафиновых соединений. Область поляризации определяется индивидуально для каждой нефти по частотным зависимостям тангенса угла диэлектрических потерь $\operatorname{tg}\delta$. Измерения $\operatorname{tg}\delta$ нефти проводились на измерителе добродатности ВМ-560 в диапазоне частот 50 кГц – 35 МГц и при температуре 22°C. Из рис. 1 видно, что при частоте $f = 5$ МГц достигается максимум потерь, и при такой частоте электромагнитного поля следует ожидать максимального эффекта от действия поля, поэтому данная частота была использована как рабочая.

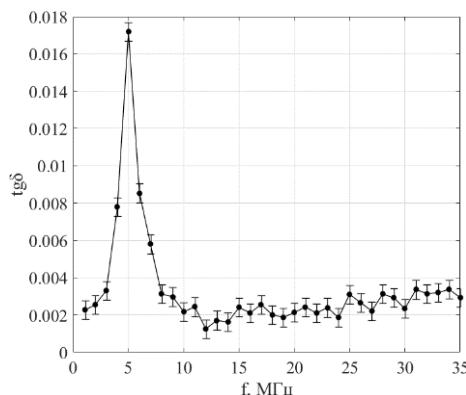


Рис. 1. Зависимость тангенса угла диэлектрических потерь нефти от частоты ЭМП
Fig. 1. Dependence of the dielectric loss tangent of oil on the EMF frequency

Экспериментальная установка состояла из: компрессора Fubag OL231/24, создающего давление воздуха, подключенного к нему контроллера давления Parker для поддержания постоянного давления в емкости с исследуемой жидкостью, экспериментальной ячейки, дренажной емкости, аналитических весов AND GR-200 с выводом информации и графиков на ПК, генератора высокочастотного поля Tabor 9100 amplifier (Tabor Electronics Ltd.) и терmostата LIOP LT-117b, в который помещались экспериментальная ячейка и емкость с исследуемой жидкостью для поддержания определенной температуры во время проведения эксперимента (рис. 2).

Основным элементом установки была экспериментальная ячейка, которая представляла собой насыпную модель пористой среды (рис. 3). Она была изготовлена из оргстекла. Было изготовлено две ячейки с разным расположением электродов:

- электроды расположены поперек фильтрации жидкости (см. рис. 3, a), при этом вектор напряженности электрического поля направлен вдоль вектора скорости фильтрации жидкости;

- электроды расположены вдоль потока фильтрации жидкости (см. рис. 3, b), вектор напряженности электрического поля направлен перпендикулярно вектору скорости фильтрации.

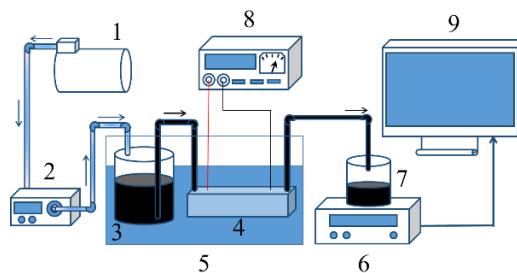


Рис. 2. Схема экспериментальной установки: 1 – компрессор; 2 – контроллер давления; 3 – емкость для исследуемой жидкости; 4 – экспериментальная ячейка; 5 – терmostат; 6 – аналитические весы; 7 – дренажная емкость; 8 – генератор ВЧ-сигналов; 9 – ПК

Fig. 2. Scheme of the experimental installation: 1, compressor; 2, pressure controller; 3, tank for liquid; 4, experimental cell; 5, thermostat; 6, analytical scales; 7, drainage tank; 8, RF signal generator; and 9, PC

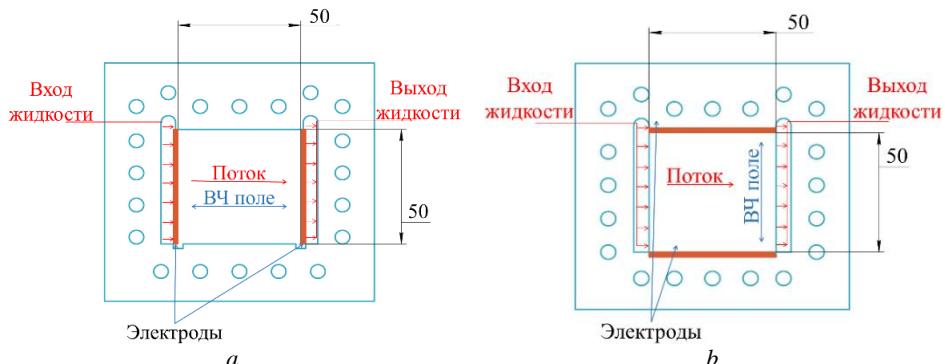


Рис. 3. Схема расположения электродов в модели пористой среды вдоль (а) и поперек потока (б)

Fig. 3. Arrangement of the electrodes in a porous medium model (a) along and (b) across the flow

Размер исследуемой области составил $50 \times 50 \times 5$ мм в обоих случаях. Рассматривается среда, которая моделирует терригенную породу. Для создания насыпной модели были использованы стеклянные сферы. Проведен анализ дисперсности стеклянных сфер посредством цифровой обработки фотографий, снятых через микроскоп Olympus IX71. Разброс размеров стеклянных сфер составил от 55 до 85 мкм, а среднечисленное значение равно 69.8 мкм. Пористость модели (а) составила 20%, модели (б) – 22%. Проницаемости моделей определялись по керосину и равны соответственно для модели (а) 58 Д, для модели (б) – 73 Д.

Методика проведения экспериментов была следующей. В емкость для жидкости 3 (см. рис. 2) заливалась исследуемая нефть, затем емкость 3 погружалась вместе с экспериментальной ячейкой 4 в терmostat 5. Эксперимент проводился при температурах $t = 20 \div 60^{\circ}\text{C}$ с шагом 10°C . В емкость 3 от компрессора 1 через регулятор давления 2 подавался воздух. Эксперименты проводились при трех перепадах давления $\Delta p = 5, 10$ и 15 кПа. Воздух вытеснял жидкость из емкости 3, и она фильтровалась через ячейку 4 в дренажный стакан 7, который был установлен на

весы 6. В момент начала эксперимента также включался генератор частот 8 на частоте $f = 5$ кГц, который был подключен к электродам ячейки. Напряженность электрического поля составила 1 В/мм.

Результаты

В ходе эксперимента были определены температурные зависимости коэффициента динамической вязкости исходной нефти и проб нефти, полученной после электромагнитного воздействия (рис. 4).

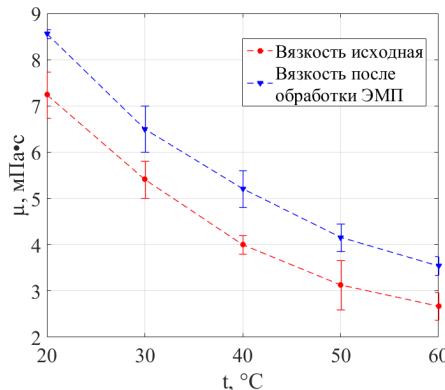


Рис. 4. Зависимость коэффициента динамической вязкости нефти от температуры до и после воздействия ЭМП

Fig. 4. Dependence of the dynamic viscosity coefficient of oil on temperature before and after EMF exposure

Эксперименты по определению вязкости были проведены на ротационном вискозиметре Brookfield DV II+Pro. Коэффициент динамической вязкости определялся по экспериментальным зависимостям напряжения сдвига от скорости сдвига в диапазоне температур $20 \div 60^\circ\text{C}$. В табл. 2 приведены значения изменения коэффициента динамической вязкости при разных температурах.

Таблица 2

Изменение коэффициента динамической вязкости после обработки ЭМП

t , °C	μ до обработки, мПа·с	μ после обработки, мПа·с	$\Delta\mu$, %
20	7.24 ± 0.554	8.56 ± 0.356	18
30	5.41 ± 0.627	6.5 ± 0.487	20
40	4.0 ± 0.5129	5.21 ± 0.5421	30
50	3.13 ± 0.441	4.16 ± 0.4385	33
60	2.67 ± 0.3978	3.54 ± 0.387	35

Зависимость вязкости нефти от температуры описывается следующей экспоненциальной кривой:

$$\mu = \mu_0 e^{-\gamma(T-T_0)}, \quad (1)$$

где μ – динамическая вязкость нефти при температуре T ; μ_0 – динамическая вязкость нефти при температуре T_0 ; γ – температурный коэффициент вязкости; T, T_0 – текущая и начальная температуры нефти.

Получено, что до воздействия ЭМП $\mu_0 = 6.9 \text{ Па}\cdot\text{с}$, $\gamma = 0.025$, а после воздействия $\mu_0 = 8.2 \text{ Па}\cdot\text{с}$, $\gamma = 0.022$, т.е. коэффициент μ_0 после воздействия увеличился на 18%.

Результаты исследования коэффициента динамической вязкости нефти до и после ЭМ-воздействия малой мощности показали, что вязкость после воздействия повышается. Увеличение вязкости может быть следствием взаимодействия ассоциатов с образованием более крупных структур как было показано в работе [26].

При заданных перепадах давления ($\Delta p = 5, 10, 15 \text{ кПа}$) была проведена фильтрация жидкости через каждую из ячеек. Выбор рабочего диапазона перепадов давлений обоснован техническими параметрами контроллера давления, что обеспечивает необходимые скорости фильтрации и достаточные времена обработки нефти электромагнитным полем для исследования эффектов действия поля на фильтрационные процессы нефти. В процессе экспериментов замерялся расход жидкости в зависимости от температуры в термостате при различных давлениях нагнетания. Проанализировано также влияние высокочастотного поля (RF; расположение электродов поперек и вдоль фильтрации) на изменение фильтрационных характеристик пористой среды (эффективный коэффициент проницаемости) до и после фильтрации через нее нефти с содержанием асфальтенов. На рис. 5 приведены кривые зависимости расхода жидкости от температуры, полученные при фильтрации жидкости без внешнего воздействия (сплошные линии) и под действием ЭМП (пунктирные линии) при разных конфигурациях электродов. Оценка эффективной проницаемости проводилась согласно закону Дарси по формуле

$$k = \frac{\mu(T)Lq}{\Delta p S \rho} \quad (2)$$

где L – длина фильтрационной области в модели пористой среды; S – площадь поперечного сечения фильтрационной области; ρ – плотность жидкости; q – массовый расход жидкости. Результаты приведены в табл. 3.

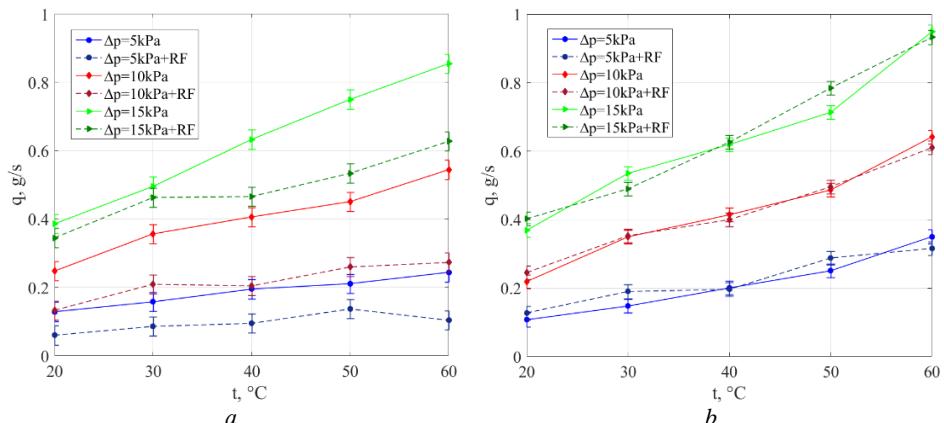


Рис. 5. Изменение расхода жидкости от температуры: сплошные линии – без воздействия; пунктирные линии – в присутствии ЭМП при расположении электродов поперек (a) и вдоль фильтрации (b)

Fig. 5. Variation of liquid flow rate with temperature: without exposure (solid lines) and in the presence of EMF (dashed lines) when the electrodes are positioned (a) across and (b) along filtration

Таблица 3

Изменение эффективной проницаемости после обработки ЭМП

$t, ^\circ\text{C}$	k (при $q = 15 \text{ кПа}$, 10^{-11} м^2)	k (при $q = 15 \text{ кПа} + \text{RF}$, 10^{-11} м^2)	$\Delta k, \%$
20	5.04 ± 0.005	3.38 ± 0.022	32
30	4.83 ± 0.119	3.75 ± 0.117	22
40	4.56 ± 0.040	3.19 ± 0.075	30
50	4.23 ± 0.011	2.95 ± 0.05	30
60	4.11 ± 0.079	2.91 ± 0.076	29

Из рис. 5, а видно, что воздействие поля привело к снижению расхода жидкости в сравнении с фильтрацией без поля. Принимая во внимание конструктивные особенности микромодели и результаты измерения коэффициента динамической вязкости (см. рис. 4), можно предположить, что причинами стали действие диэлектрофоретических сил на полярные компоненты нефти и изменение структуры АСП. Также можно увидеть, что при увеличении перепада давления в диапазоне температур от 40 до 60°C значения расхода под воздействием поля значительно уменьшаются по сравнению с расходом без воздействия поля. Снижение расхода объясняется увеличением динамической вязкости и ухудшением фильтрационных характеристик пористой среды вплоть до возникновения эффекта запирания на локальных участках, наиболее приближенных к электродам, где формируется наибольший градиент напряженности электрического поля. Оценка изменения эффективной проницаемости после обработки ЭМП (см. табл. 3) показала, что при расположении электродов поперек фильтрации эффективная проницаемость снижается более чем на 20%, тогда как при продольном расположении электродов эффективная проницаемость не меняется.

Заключение

В ходе эксперимента фильтрации нефти с содержанием АСП через модель пористой среды при наличии электромагнитного поля обнаружено, что при расположении электродов, когда вектор напряженности электрического поля направлен вдоль направления вектора скорости фильтрации, наблюдается снижение расхода относительно фильтрации без ЭМП. Этот факт объясняется увеличением коэффициента динамической вязкости и возникновением диэлектрофоретических сил, приводящих к снижению эффективной проницаемости по нефти. При этом на локальных участках, наиболее приближенных к электродам, могут проявляться эффекты запирания.

Также при перепадах давления свыше 10 кПа и температурах $40\text{--}60^\circ\text{C}$ наблюдается увеличение роста фильтрационного сопротивления, что объясняется изменением структуры АСП под действием ЭМП. Помимо этого, установлено, что при расположении электродов поперек фильтрации эффективная проницаемость снижается более чем на 20%, чего не наблюдается при расположении электродов вдоль фильтрации.

Список источников

1. Asphaltenes and Asphalts / G.V. Chilingarian, T.F. Yen (eds.). Amsterdam: Elsevier, 1994. V. 1. 451 p.

2. Yakubov M.R., Abilova G.R., Yakubova S.G., Milordov D.V. Mironov N.A. Heavy oil resin composition and their influence on asphaltene stability // The Chemistry of Oil and Petroleum Products. Berlin: De Gruyter: 2022. P. 177–202. doi: 10.1515/9783110694529-004
3. Wong G.K., Yen T.F. An electron spin resonance probe method for the understanding of petroleum asphaltene macrostructure // Journal of Petroleum Science and Engineering. 2000. V. 28 (1-2). P. 55–64. doi: 10.1016/S0920-4105(00)00067-X
4. Steinborn R., Flock D.L. The rheology of heavy crude oils and their emulsions // Journal of Canadian Petroleum Technology. 1983. V. 22 (05). doi: 10.2118/83-05-03
5. Hasan S.W., Ghannam M.T., Esmail N. Heavy crude oil viscosity reduction and rheology for pipeline transportation // Fuel. 2010. V. 89 (5). P. 1095–1100. doi: 10.1016/j.fuel.2009.12.021
6. Luo P., Gu Y. Characterization of a heavy oil–propane system in the presence or absence of asphaltene precipitation // Fluid Phase Equilibria. 2009. V. 277 (1). P. 1–8 doi: 10.1016/j.fluid.2008.10.019
7. Рахимов А.А., Валиев А.А. Особенности экспериментального изучения устойчивого и неустойчивого вытеснения в ячейке Хеле-Шоу, заполненной стеклянными шариками // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 77. С. 140–157. doi: 10.17223/19988621/77/11
8. Пивоварова Н.А. Особенности межмолекулярного взаимодействия в нефтяных дисперсных системах // Нефтегазовые технологии и экологическая безопасность. 2023. № 2. С. 23–33. doi: 10.24143/1812-9498-2023-2-23-33
9. Evdokimov I.N., Eliseev N.Y., Eliseev D.Y. Rheological evidence of structural phase transitions in asphaltene-containing petroleum fluids // Journal of Petroleum Science and Engineering. 2001. V. 30 (3-4). P. 199–211. doi: 10.1016/S0920-4105(01)00132-2
10. Wang S., Huang Y., Civan F. Experimental and theoretical investigation of the Zaoyuan field heavy oil flow through porous media // Journal of Petroleum Science and Engineering. 2006. V. 50 (2). P. 83–101 doi: 10.1016/j.petrol.2005.06.015
11. Liu H., Wang J., Xie Y., Ma D., Shi X. Flow characteristics of heavy oil through porous media // Energy Sources. Part A: Recovery, Utilization, and Environmental Effects. 2011. V. 34 (4). P. 347–359. doi: 10.1080/15567036.2011.609868
12. Mukhametshina A., Martynova E. Electromagnetic heating of heavy oil and bitumen: a review of experimental studies and field applications // Journal of Petroleum Engineering. 2013. V. 2013 (1). Art. 476519. doi: 10.1155/2013/476519
13. Sysoev S., Kislytsin A. Modeling of microwave heating and oil filtration in stratum // Numerical Simulations – Applications, Examples and Theory / L. Angermann (ed.). IntechOpen, 2011. P. 237–250
14. Mullayanov A.I., Musin A.A., Valiullina V.I., Kovaleva L.A. The features of the microemulsion structure changes under the nonhomogeneous alternating electric field impact // Letters on Materials. 2024. V. 14 (1). P. 57–61. doi: 10.48612/letters/2024-1-57-61
15. Kovaleva L., Davletbaev A., Babadagli T., Stepanova Z. Effects of electrical and radio-frequency electromagnetic heating on the mass-transfer process during miscible injection for heavy-oil recovery // Energy & Fuels. 2011. V. 25 (2). P. 482–486. doi: 10.1021/ef1009428
16. Zanganeh P., Ayatollahi S., Alamdar A., Zolghadr A., Dashti H., Kord S. Asphaltene Deposition during CO₂ Injection and Pressure Depletion: A Visual Study // Energy Fuels. 2012. V. 26. P. 1412–1419. doi: 10.1021/ef2012744
17. Joonaki E., Buckman J., Burgass R., Tohidi B. Water versus Asphaltenes; Liquid–Liquid and Solid–Liquid Molecular Interactions Unravel the Mechanisms behind an Improved Oil Recovery Methodology // Sci. Rep. 2019. V. 9. P. 1–13
18. Kazemzadeh Y., Parsaei R., Riazi M. Experimental study of asphaltene precipitation prediction during gas injection to oil reservoirs by interfacial tension measurement. // Colloids Surfaces A Physicochem. Eng. Asp. 2015. V. 466. P. 138–146. doi: 10.1016/j.colsurfa.2014.10.053
19. Tharanivasan A.K., Yarranton H.W., Taylor S.D. Asphaltene Precipitation from Crude Oils in the Presence of Emulsified Water. // Energy Fuels. 2012. V. 26. P. 6869–6875 doi: 10.1021/ef301200v

20. Tavakkoli M., Chen A., Sung C.-A., Kidder K.M., Lee J.J., Alhassan S.M., Vargas F.M. Effect of Emulsified Water on Asphaltene Instability in Crude Oils. // Energy Fuels. 2016. V. 30. P. 3676–3686. doi: 10.1021/acs.energyfuels.5b02180
21. Aslan S., Firoozabadi A. Effect of Water on Deposition, Aggregate Size, and Viscosity of Asphaltenes // Langmuir. 2014. V. 30. P. 3658–3664. doi: 10.1021/la404064t
22. Hu C., Sabio J.C., Yen A., Joshi N., Hartman R.L. Role of Water on the Precipitation and Deposition of Asphaltenes in Packed-Bed Microreactors. // Ind. Eng. Chem. Res. 2015. V. 54. P. 4103–4112. doi: 10.1021/ie5038775
23. Zamula Y.S., Afanasyev M.O., Batirshin E.S. Characterization of microemulsion structure using atomic force microscopy. // Letters on Materials. 2023. V. 13 (4). C. 286–291. doi: 10.22226/2410-3535-2023-4-286-291
24. Kovaleva L.A., Mukharyanova G.I. Effects of electromagnetic treatment on rheological properties of oil: experiment and application // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2021. V. 94 (3). P. 714–719. doi: 10.1007/s10891-021-02348-z
25. Ha J.W., Yang S.M. Rheological responses of oil-in-oil emulsions in an electric field // Journal of Rheology. 2000. V. 44 (2). P. 235–256. doi: 10.1122/1.551084
26. Лоскутова Ю.В., Юдина Н.В. Влияние магнитного поля на структурно-реологические свойства нефей // Известия Томского политехнического университета. 2006. Т. 309, № 4. С. 104–109

References

1. Chilingarian G.V., Yen T.F. (Eds.) (1994) *Asphaltenes and Asphalts*. 1. Elsevier.
2. Yakubov M.R., Abilova G.R., Yakubova S.G., Milordov D.V., Mironov N.A. (2022) Heavy oil resin composition and their influence on asphaltene stability. *The Chemistry of Oil and Petroleum Products; De Gruyter: Berlin, Germany*. pp. 177–202. doi: 10.1515/9783110694529-004
3. Wong G.K., Yen T.F. (2000) An electron spin resonance probe method for the understanding of petroleum asphaltene macrostructure. *Journal of Petroleum Science and Engineering*. 28(1-2). pp. 55–64. doi: 10.1016/S0920-4105(00)00067-X
4. Steinborn R., Flock D.L. (1983) The rheology of heavy crude oils and their emulsions. *Journal of Canadian Petroleum Technology*. 22(05). doi: 10.2118/83-05-03
5. Hasan S.W., Ghannam M.T., Esmail N. (2010) Heavy crude oil viscosity reduction and rheology for pipeline transportation. *Fuel*. 89(5). pp. 1095–1100. doi: 10.1016/j.fuel.2009.12.021
6. Luo P., Gu Y. (2009) Characterization of a heavy oil–propane system in the presence or absence of asphaltene precipitation. *Fluid Phase Equilibria*. 277(1). pp. 1–8. doi: 10.1016/j.fluid.2008.10.019
7. Rakhimov A.A., Valiev A.A. (2022) Osobennosti eksperimental'nogo izucheniya ustoychivogo i neustoychivogo vytessneniya v yacheyke Khele-Shou, zapolnenoj steklyannymi sharikami [Features of an experimental study of the stable and unstable displacement in the Hele-Shaw cell filled with glass balls]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mehanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 77. pp. 140–157. doi: 10.17223/19988621/77/11
8. Pivovarova N.A. (2023) Osobennosti mezhmolekulyarnogo vzaimodeystviya v neftyanykh dispersnykh sistemakh [Features of intermolecular interaction in petroleum dispersed systems]. *Neftegazovye tekhnologii i ekologicheskaya bezopasnost' Oil and Gas Technologies and Environmental Safety*. 2. pp. 23–33. doi: 10.24143/1812-9498-2023-2-23-33
9. Evdokimov I.N., Eliseev N.Y., Eliseev D.Y. (2001) Rheological evidence of structural phase transitions in asphaltene-containing petroleum fluids. *Journal of Petroleum Science and Engineering*. 30(3-4). pp. 199–211. doi: 10.1016/S0920-4105(01)00132-2
10. Wang S., Huang Y., Civan F. (2006) Experimental and theoretical investigation of the Zaoyuan field heavy oil flow through porous media. *Journal of Petroleum Science and Engineering*. 50(2). pp. 83–101. doi: 10.1016/j.petrol.2005.06.015

11. Liu H., Wang J., Xie Y., Ma D., Shi X. (2011) Flow characteristics of heavy oil through porous media. *Energy Sources, Part A: Recovery, Utilization, and Environmental Effects.* 34(4). pp. 347–359. doi: 10.1080/15567036.2011.609868
12. Mukhametshina A., Martynova E. (2013) Electromagnetic heating of heavy oil and bitumen: a review of experimental studies and field applications. *Journal of Petroleum Engineering.* 2013(1). Article 476519. doi: 10.1155/2013/476519
13. Sysoev S., Kislytsin A. (2011) Modeling of microwave heating and oil filtration in stratum. *Numerical Simulations—Applications, Examples and Theory.* pp. 237–250.
14. Mullanayev A.I., Musin A.A., Valiullina V.I., Kovaleva L.A. (2024) The features of the microemulsion structure changes under the nonhomogeneous alternating electric field impact. *Letters on Materials.* 14(1). pp. 57–61. doi: 10.48612/letters/2024-1-57-61
15. Kovaleva L., Davletbaev A., Babadagli T., Stepanova Z. (2011) Effects of electrical and radio-frequency electromagnetic heating on the mass-transfer process during miscible injection for heavy-oil recovery. *Energy & Fuels.* 25(2). pp. 482–486. doi: 10.1021/ef1009428
16. Zanganeh P., Ayatollahi S., Alamdar A., Zolghadr A., Dashti H., Kord S. (2012) Asphaltene deposition during CO₂ injection and pressure depletion: a visual study. *Energy & Fuels.* 26(2). pp. 1412–1419. doi: 10.1021/ef2012744
17. Joonaki E., Buckman J., Burgass R., Tohidi B. (2019) Water versus asphaltenes; liquid–liquid and solid–liquid molecular interactions unravel the mechanisms behind an improved oil recovery methodology. *Scientific Reports.* 9(1). Article 11369.
18. Kazemzadeh Y., Parsaei R., Riazi M. (2015) Experimental study of asphaltene precipitation prediction during gas injection to oil reservoirs by interfacial tension measurement. *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects.* 466. pp. 138–146. doi: 10.1016/j.colsurfa.2014.10.053
19. Tharanivasan A.K., Yarranton H.W., Taylor S.D. (2012) Asphaltene precipitation from crude oils in the presence of emulsified water. *Energy & Fuels.* 26(11). pp. 6869–6875. doi: 10.1021/ef301200v
20. Tavakkoli M., Chen A., Sung C.A., Kidder K.M., Lee J.J., Alhassan S.M., Vargas F.M. (2016) Effect of emulsified water on asphaltene instability in crude oils. *Energy & Fuels.* 30(5). pp. 3676–3686. doi: 10.1021/acs.energyfuels.5b02180
21. Aslan S., Firoozabadi A. (2014) Effect of water on deposition, aggregate size, and viscosity of asphaltenes. *Langmuir.* 30(13). pp. 3658–3664. doi: 10.1021/la404064t
22. Hu C., Sabio J.C., Yen A., Joshi N., Hartman R.L. (2015) Role of water on the precipitation and deposition of asphaltenes in packed-bed microreactors. *Industrial & Engineering Chemistry Research.* 54(16). pp. 4103–4112. doi: 10.1021/ie5038775
23. Zamula Y.S., Afanasyev M.O., Batirshin E.S. (2023) Characterization of microemulsion structure using atomic force microscopy. *Letters on Materials.* 13(4). pp. 286–291. doi: 10.22226/2410-3535-2023-4-286-291
24. Kovaleva L.A., Mukharyamova G.I. (2021) Effects of electromagnetic treatment on rheological properties of oil: experiment and application. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics.* 94(3). pp. 714–719. doi: 10.1007/s10891-021-02348-z
25. Ha J.W., Yang S.M. (2000) Rheological responses of oil-in-oil emulsions in an electric field. *Journal of Rheology.* 44(2). pp. 235–256. doi: 10.1122/1.551084
26. Loskutova Yu.V., Yudina N.V. (2006) Vliyanie magnitnogo polya na strukturno-reologicheskie svoystva neftey [Influence of the magnetic field on the structural and rheological properties of oils]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta Bulletin of the Tomsk Polytechnic University.* 309(4). pp. 104–109.

Сведения об авторах:

Валиуллина Вилены Ильшатовна – аспирант кафедры прикладной физики физико-технического факультета Уфимского университета науки и технологий (Уфа, Россия). E-mail: valiullina.vilena@mail.ru

Галеев Рушан Ринатович – аспирант кафедры прикладной физики физико-технического факультета Уфимского университета науки и технологий (Уфа, Россия). E-mail: galeevr93@gmail.com

Зиннатуллин Расул Рашитович – кандидат технических наук, ведущий инженер кафедры прикладной физики физико-технического факультета Уфимского университета науки и технологий (Уфа, Россия). E-mail: rasulz@yandex.ru

Мусин Айрат Ахматович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной физики физико-технического факультета Уфимского университета науки и технологий (Уфа, Россия). E-mail: mus-airat@yandex.ru

Ковалева Лиана Ароновна – доктор технических наук, профессор, заведующая кафедрой прикладной физики физико-технического факультета Уфимского университета науки и технологий (Уфа, Россия). E-mail: liana-kovaleva@yandex.ru

Information about the authors:

Valiullina Vilena I. (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russian Federation). E-mail: valiullina.vilena@mail.ru

Galeev Rushan R. (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russian Federation). E-mail: galeevr93@gmail.com

Zinnatullin Rasul R. (Candidate of Technical Sciences, Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russian Federation). E-mail: rasulz@yandex.ru

Musin Ayrat A. (Candidate of Physics and Mathematics, Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russian Federation). E-mail: mus-airat@yandex.ru

Kovaleva Liana A. (Doctor of Technical Sciences, Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russian Federation). E-mail: liana-kovaleva@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 09.12.2024; принята к публикации 08.12.2025

The article was submitted 09.12.2024; accepted for publication 08.12.2025

Научная статья

УДК 539.3+669-1

doi: 10.17223/19988621/98/9

Влияние базальтовых волокон на структуру и механические свойства алюминиевого сплава АК12

**Владимир Данилович Валихов¹, Антон Павлович Хрусталёв²,
Илья Александрович Жуков³, Александр Борисович Ворожцов⁴**

1, 2, 3, 4 Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ valihov.snobls@yandex.ru

² tofik0014@gmail.com

³ gofra930@gmail.com

⁴ abv1953@mail.ru

Аннотация. Исследование посвящено повышению прочностных свойств литейного алюминиевого сплава АК12 (Al–Si–Mg) путем армирования его базальтовыми волокнами. Введение 1 мас. % волокон с последующей ультразвуковой обработкой (18–22 кГц) и вибрационным литьем (50 Гц) обеспечило равномерное распределение армирующих частиц и измельчение структуры. Микроструктурный анализ выявил уменьшение размера дендритных ячеек и снижение содержания β -Al₅FeSi. Композиционный сплав показал увеличение твердости и предела прочности за счет армирования и измельчения зерна.

Ключевые слова: композиционный материал, алюминиевый сплав, базальтовое волокно, АК12, упрочнение

Благодарности: Исследование проводилось при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-15-2025-607 от 01/07/2025).

Для цитирования: Валихов В.Д., Хрусталёв А.П., Жуков И.А., Ворожцов А.Б. Влияние базальтовых волокон на структуру и механические свойства алюминиевого сплава АК12 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 98. С. 97–107. doi: 10.17223/19988621/98/9

Original article

Effect of basalt fibers on the structure and mechanical properties of AK12 aluminum alloy

**Vladimir D. Valikhov¹, Anton P. Khrustalyov²,
Il'ya A. Zhukov³, Aleksandr B. Vorozhtsov⁴**

1, 2, 3, 4 Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ valihov.snobls@yandex.ru

² *tofik0014@gmail.com*

³ *gofra930@gmail.com*

⁴ *abv1953@mail.ru*

Abstract. In this paper, a study of the effect of basalt fibers on the structure and mechanical properties of AK12 (Al–Si–Mg) cast aluminum alloy is performed. The main purpose is to increase the strength characteristics of the alloy using dispersed reinforcement and intensification of crystallization. The composite material was obtained by introducing 1 wt.% of basalt fibers followed by ultrasonic treatment of the melt (17–22 kHz) and vibration casting (60 Hz), which ensured the uniform distribution of the reinforcing particles and modification of the microstructure.

Metallographic analysis showed a decrease of defectiveness and variation in the morphology of the intermetallic phases, as well as the formation of the hexagonal phase $\text{Al}_{12}(\text{Fe},\text{Mn})\text{Si}$ instead of the skeletal $\text{Al}_{15}(\text{Fe},\text{Mn})_3\text{Si}_2$ due to the presence of calcium in the composition of the fibers. At the same time, the average size of dendritic cells was $38 \pm 3 \mu\text{m}$. Mechanical tests revealed an increase in tensile strength from 186 to 232 MPa and in elongation from 2.8 to 3.5 %, as well as an increase in Brinell hardness and Vickers microhardness by 15–20 %.

Fractographic analysis confirmed the transition from a purely brittle to a quasi-brittle-plastic fracture mechanism. The obtained results indicated the efficiency of basalt fibers as a strengthening additive and their promise for the development of aluminum composite materials with improved performance properties.

Keywords: composite materials, aluminum alloy, basalt fibers, AK12, reinforcement

Acknowledgments: This research was financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement No. 075-15-2025-607).

For citation: Valikhov, V.D., Khrustalyov, A.P., Zhukov, I.A., Vorozhtsov, A.B. (2025) Effect of basalt fibers on the structure and mechanical properties of AK12 aluminum alloy. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mehanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 98. pp. 97–107. doi: 10.17223/19988621/98/9

Введение

Алюминиевые сплавы эвтектического типа, в частности силумины, широко применяются в автомобилестроении, авиации и других отраслях благодаря высокому соотношению прочности к массе, хорошей литейной способности и коррозионной стойкости [1]. Одним из типичных представителей является сплав AK12, содержащий 10–13% кремния, а также примесные элементы Fe и Mn, образующие интерметаллидные фазы типа Al_5FeSi и $\text{Al}_{15}(\text{Fe},\text{Mn})_3\text{Si}_2$. Однако наличие хрупких игольчатых интерметаллидов и пористости в структуре ограничивает пластичность и надежность изделий. Повышение прочностных характеристик таких сплавов без ущерба для литейных свойств остается актуальной задачей.

Один из перспективных путей модификации алюминиевых сплавов – дисперсное армирование неметаллическими волокнами. В последние годы растет интерес к базальтовым волокнам, отличающимся высокой жесткостью, термостойкостью и химической инертностью при сравнительно низкой стоимости [2]. Известно, что введение базальтовых волокон в алюминиевую матрицу улучшает механические свойства композитов, однако взаимодействие волокон с расплавом и их влияние на структуру в сплавах типа AK12 изучены недостаточно.

Настоящая работа направлена на изучение влияния 1 мас. % базальтовых волокон на структуру и механические свойства сплава АК12. Проведены комплексные металлографические, фрактографические и механические исследования, а также применены методы интенсификации кристаллизации – ультразвуковая и вибрационная обработка расплава. Полученные результаты показывают, что введение базальтовых волокон способствует модификации микроструктуры и увеличению прочности, микротвердости и пластичности композита. Исследование демонстрирует потенциал базальтового армирования как эффективного подхода к управлению фазовым составом и улучшению эксплуатационных характеристик силуминов.

Материалы и методы

Подготовка алюминиевого сплава марки АК12 осуществлялась следующим образом: слиток нарезался на куски размером 50×30 мм, обезжиривался от остатков смазывающе-охлаждающей жидкости, просушивался. После полного высыхания куски алюминия складывались в графитовый тигель, который помещался в печь и нагревался до температуры 800°C до полного расплавления алюминия (рис. 1).

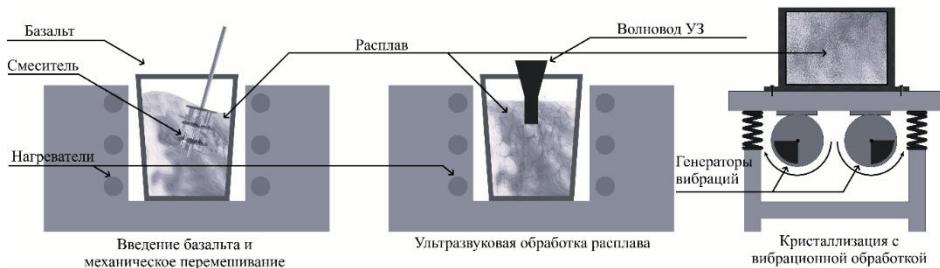


Рис. 1. Принципиальная схема литья
Fig. 1. Casting scheme

Базальтовые волокна в количестве 1 мас. % упаковывались в алюминиевый контейнер из алюминиевой фольги. Полученный контейнер помещался в печь и нагревался до 200°C для избегания чрезмерного переохлаждения расплава алюминия.

Расплавленный алюминиевый сплав помещался нагретую до 780°C открытую печь, после чего осуществлялось перемешивание расплава алюминия механическим смесителем, изготовленным из стали марки Ст3, который покрывался копильной краской СТАВРОЛ-700 марки К (ТУ 4191-005-21168034-2005) во избежание насыщения расплава железом. Смеситель состоит из трех пластин, каждая из которых выполнена в форме четырехлопастной конструкции, неподвижно зафиксированных на штифте таким образом, что расстояние между ними одинаково и составляет угол 90° относительно друг друга. Конец каждой лопасти оснащен двумя жестко закрепленными соосными цилиндрическими стержнями, расположенными перпендикулярно плоскости самой лопасти [3]. Предварительно нагретый контейнер с измельченными базальтовыми волокнами вводился в зону механического перемешивания, после чего перемешивание осуществлялось в течение 20 с. Скорость вращения смесителя составляла 500 об./мин. После окончания перемешивания производился замер температуры расплава.

Обработка расплава ультразвуком осуществлялась путем опускания предварительно прогретого волновода из ниобия в объем расплава. Частота ультразвуковых колебаний была равна 17 кГц. Время обработки ультразвуком составляло 2 мин.

Разливка расплава производилась в цилиндрический стальной кокиль, обработанный кокильной краской и прогретый до температуры 200°C. За несколько секунд до разливки расплава производилось включение вибрационного стола, на котором был жестко закреплен кокиль. Выключение вибрационного стола производилось после заполнения кокиля и усадки расплава в течение 5 с. Частота работы вибрационного стола составляла 60 Гц.

Исходный сплав АК12 был получен в аналогичных условиях без добавления базальтовых волокон, а также без использования ультразвуковой обработки расплава.

Образцы для металлографических исследований вырезались из центра цилиндрической отливки. Подготовка металлографических шлифов осуществлялась с использованием карбид-кремниевой шлифовальной бумаги. Полировка металлографических шлифов производилась с применением алмазных водно-гликоловых суспензий. Исследование структуры сплава методом оптической микроскопии осуществлялось с применением инвертированного оптического микроскопа Axio-Vert 40 MAT (Carl Zeiss, Германия).

Исследование поверхности образцов сплавов и фрактография осуществлялись методом растровой электронной микроскопии с применением электронного микроскопа Axia ChemiSEM Thermo Scientific (FEI, США) с использованием BSD анализатора.

Исследование механических свойств образцов производилось на универсальной испытательной электромеханической машине Tinius Olsen 50 ST (Tinius Olsen, Великобритания). Образцы на растяжение вырезались из центральной части отливки по направлению вдоль отливки методом электроэррозионной резки со следующими размерами ($Ш \times Т \times Д$) – 6 × 3 × 25 мм. Испытания производились со скоростью подвижной траверсы 0.2 мм/мин согласно ГОСТ 1497–2023.

Твердость по Бринеллю образцов измерялась на универсальном твердомере Метолаб 703 с нагрузкой 62.5 кг на индентор в виде твердосплавного шарика диаметром 2.5 мм в течение 20 с. Микротвердость по Виккерсу измерялась на микротвердомере Метолаб 502 с нагрузкой на алмазный индентор 50 г в течение 20 с. Для каждого испытания производилось 10 замеров.

Результаты

Микроструктура сплава АК12 без базальтовых волокон, полученного в результате исследования, представляет собой характерную для эвтектических силуминов макро- и микроструктуру. На рис. 2, демонстрирующем общий план, видны основные фазы: первичные дендриты твердого раствора алюминия (светлые области) и темные (междендритные) области – эвтектика и интерметаллидные включения.

Анализ среднего размера дендритной ячейки (SDAS), имеющего прямую зависимость с механическими свойствами, был проведен прямым измерением характерных срезов дендритов алюминия. Выборка составляла не менее 100 измерений ячеек. Средний размер дендритной ячейки составил 32 ± 3 мкм, что сопоставимо с размером дендритных ячеек для сплавов с естественной скоростью кристаллизации [4].

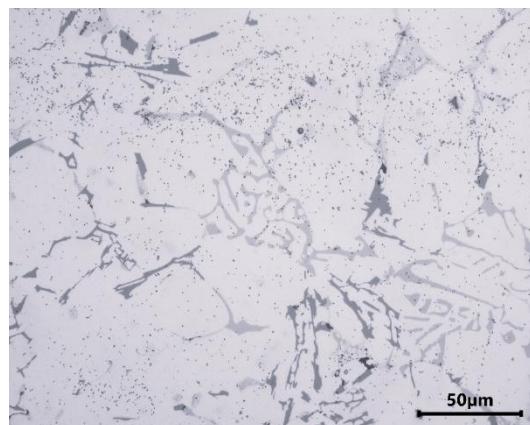


Рис. 2. Микроструктура сплава AK12 без базальтовых волокон
Fig. 2. Microstructure of AK12 alloy without basalt fibers

Результаты исследования поверхности методом электронной микроскопии в совокупности с элементным анализом методом энергодисперсионной спектроскопии свидетельствуют, что эвтектика в междендритных областях состоит из тонких образований кремния и алюминиевой матрицы. Кремний представлен удлиненной игольчатой, иногда пластиначатой нерегулярной формой, что характерно для немодифицированного сплава. Множество образований кремния пересекаются или имеют взаимосвязи. Интерметаллидные фазы в микроструктуре сплава представлены на рис. 3.

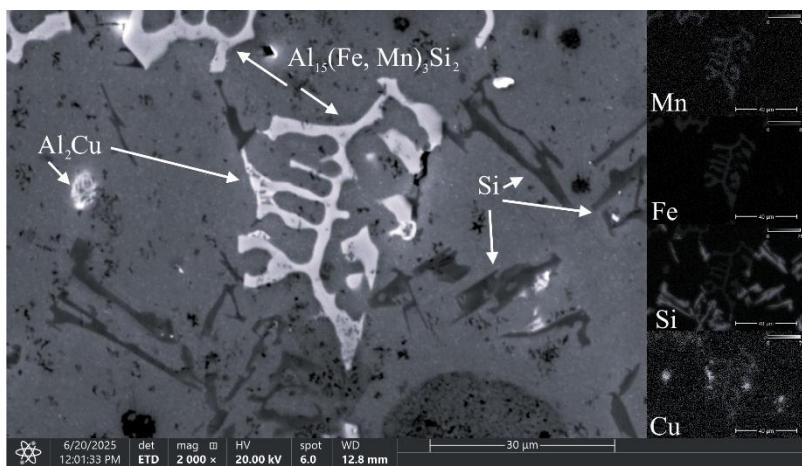


Рис. 3. ЭДС-анализ поверхности сплава AK12
Fig. 3. EDS-analysis of AK12 alloy surface

Основными интерметаллидными фазами являются железистомарганцевистая фаза Al₁₅(Fe, Mn)₃Si₂ в виде скелетообразных образований и сфероидальная Al₂Cu. Негативной особенностью микроструктуры полученного сплава AK12 являются дефекты в виде мелких пор по всей площади шлифа.

На рис. 4 представлено оптическое изображение микроструктуры композиционного сплава AK12 + 1 мас. % базальтовых волокон.

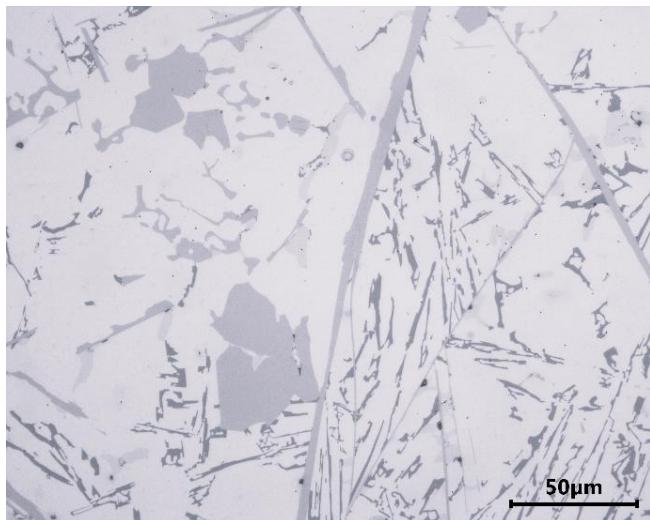


Рис. 4. Микроструктура композита AK12 + 1 мас. % базальтовых волокон
Fig. 4. Microstructure of the composite AK12 + 1 wt.% basalt fibers

Композиционный материал на основе силумина AK12 с добавлением базальтовых волокон обладает схожими структурными элементами по сравнению с полученным сплавом без волокон (см. рис. 2): микроструктура материала представлена светлыми областями твердого раствора алюминия, темными вытянутыми или плоскими пластинчатыми включениями кремния, а также интерметаллидными фазами (см. рис. 3). Анализ среднего размера дендритной ячейки композиционного материала на основе AK12 показал, что средний размер зерна дендритной ячейки составляет 38 ± 3 мкм.

Интерметаллидные фазы представлены игольчатой Al_5FeSi , скелетообразной $\text{Al}_{15}(\text{Fe}, \text{Mn})_3\text{Si}_2$ и фазой Al_2Cu . Наличие игольчатых образований Al_5FeSi , являющихся сечениями пластинчатых образований, потенциально негативно влияет на пластичность композиционного материала, так как они могут выступать концентриаторами напряжений и служить эпицентрами трещин. Их образование в данном сплаве, в противоположность исходному сплаву AK12, предположительно, связано с процессом получения данного сплава и контактом с поверхностями из железа, несмотря на то что все оборудование было обработано защитными покрытиями.

Стоит отметить, что в полученном материале с добавлением базальтовых волокон происходят превращения железистомарганцевистой фазы. На рис. 5 представлена разновидность данной фазы с весовым соотношением элементов: Al – 60%, Fe – 27%, Si – 8%, Mn – 5%. Данная фаза может быть идентифицирована как гексагональная разновидность фазы $\text{Al}_{12}(\text{Fe}, \text{Mn})_3\text{Si}$ [5–7]. Изменение состава фазы и ее морфологии может происходить из-за влияния кальция, входящего в состав базальтовых волокон. Взаимодействие расплава алюминия с волокнами приводит к росту новых интерметаллидных фаз, что сдвигает термодинамическое равновесие в пользу фазы $\text{Al}_{12}(\text{Fe}, \text{Mn})_3\text{Si}$ [8–10].

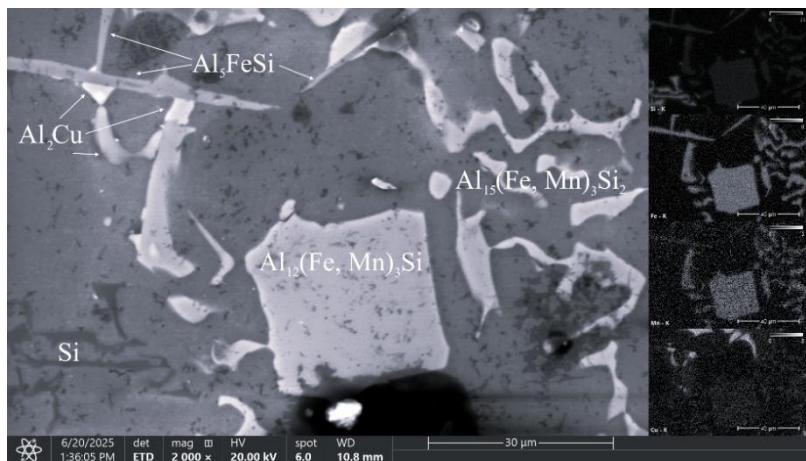


Рис. 5. ЭДС-анализ поверхности композита AK12 + 1 мас. % базальтовых волокон

Fig. 5. EDS-analysis of the surface of the composite AK12+1 wt.% basalt fibers

Результаты испытаний на растяжение представлены в таблице и на рис. 6, из которого следует, что условный предел текучести сплава AK12 при введении в него базальтовых волокон не изменяется.

Механические свойства сплава AK12 и композита AK12 + 1 мас. % БВ

Образцы	Предел текучести, МПа	Предел прочности, МПа	Деформация, %	Микротвердость по методу Виккерса, HV	Твердость по методу Бринелля, HB
AK12 + 1 мас. % БВ	66 ± 3	232 ± 15	3.54 ± 0.05	137 ± 14	117 ± 4
AK12 исходный	69 ± 3	186 ± 11	2.79 ± 0.05	114 ± 8	102 ± 4

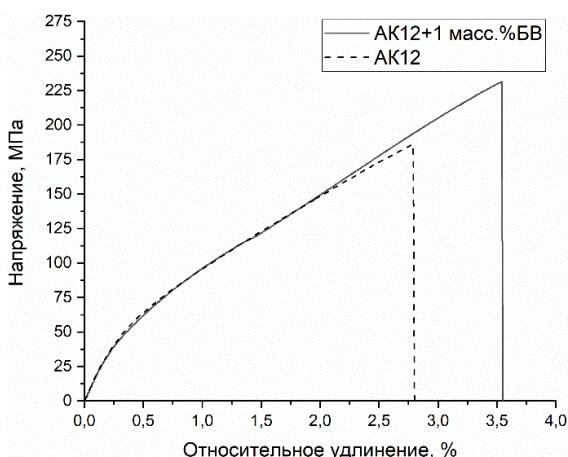


Рис. 6. Диаграмма растяжения сплава AK12 и композита материала AK12 + 1 мас. % базальтовых волокон

Fig. 6. Stress-strain diagrams for AK12 alloy and composite AK12 + 1 wt. % basalt fibers

Однако введение 1 мас. % базальтовых волокон приводит к увеличению предела прочности на 25%. Повышение предела прочности может быть осуществимо благодаря некоторым механизмам упрочнения: разности коэффициентов теплового расширения (КТР) и модулей упругости между алюминиевым сплавом AK12 и базальтовыми волокнами [11]. КТР алюминия и базальтовых волокон различаются практически в 4 раза (см. таблицу) [12], что в соответствии с данным механизмом упрочнения вызывает образование напряжений на границе раздела фаз алюминий–базальтовое волокно. Возникшие напряжения порождают дислокации, скопления которых и способствуют упрочнению. Увеличение относительного удлинения с 2.8 до 3.54% может быть следствием перераспределения нагрузки с матрицы, которой выступает алюминиевый сплав AK12, на базальтовое волокно, чья способности к удлинению значительно превышают возможности силуминов.

Введение волокон базальта в сплав AK12 также приводит к увеличению твердость по Бринеллю с 102 до 117 единиц твердости (НВ) и микротвердости по Виккерсу с 114 до 137 HV. Увеличение твердости и микротвердости может быть связано с увеличившимся количеством интерметалличидных фаз, преимущественно твердых, но хрупких по сравнению с алюминием, что видно из рис. 3 и 4.

На рис. 7 представлено изображение поверхности разрушения сплава AK12 после одноосного растяжения.

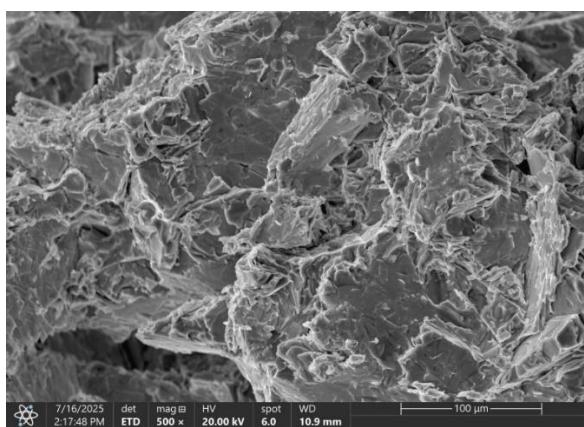


Рис. 7. Поверхность разрушения композиционного материала AK12 + 1 мас. % базальтовых волокон

Fig. 7. Failure surface of the composite AK12 + 1 wt. % basalt fibers

Фрактографический анализ поверхности разрушения показал, что при разрушении исходного сплава AK12 и композита с добавлением 1 мас. % базальтовых волокон основным механизмом разрушения является транскристаллитное квазихрупкое разрушение [13–15]. В пользу этого говорит наличие элементов поверхности с четким границами – фасеток скола, которые образуются при хрупком разрушении по определенным кристаллографическим плоскостям. Однако в некоторых редко встречающихся областях поверхности разрушения обнаружены «ямки» – особенности морфологии поверхности разрушения, характерные для пластического разрушения. Ямки могут быть сформированы в областях с локальными скоплениями матрицы алюминия без других фаз или структур.

Заключение

В настоящей работе осуществлен комплексный анализ влияния базальтовых волокон на макроструктуру и микроструктуру сплава АК12, проведена оценка вклада базальтовых волокон в повышение предела прочности, относительного удлинения, твердости и микротвердости данного сплава. Результаты, полученные в ходе исследования, подтверждают, что введение 1 мас. % базальтовых волокон в алюминиевый сплав АК12 в сочетании с ультразвуковой и вибрационной обработкой расплава приводит к модификации микроструктуры, изменению морфологии интерметаллидных фаз и улучшению механических свойств полученного композиционного материала.

Установлено, что в результате взаимодействия базальтовых волокон с алюминиевым расплавом в структуре образуется гексагональная фаза $\text{Al}_{12}(\text{Fe},\text{Mn})_3\text{Si}$, замещающая исходную скелетообразную фазу $\text{Al}_{15}(\text{Fe},\text{Mn})_3\text{Si}_2$. Предположительно, данный фазовый переход обусловлен наличием кальция в составе базальтовых волокон, который влияет на термодинамическое равновесие формирования интерметаллических соединений. Анализ структуры показал, что, несмотря на увеличение среднего размера дендритной ячейки (с 32 ± 3 до 38 ± 3 мкм), композитный сплав сохраняет равномерное распределение кремния и интерметаллидных фаз.

Механические испытания выявили значительное увеличение предела прочности на разрыв (с 186 ± 11 до 232 ± 15 МПа) и относительного удлинения (с 2.79 до 3.54%) при сопоставимом уровне текучести. Также зафиксировано повышение твердости по Бринеллю и микротвердости по Виккерсу. Эти изменения обусловлены как упрочняющим эффектом самих волокон, так и перераспределением напряжений на границе волокно–матрица. Фрактографический анализ подтвердил, что основным механизмом разрушения остается транскристаллитное квазихрупкое разрушение, однако локальные области пластической деформации свидетельствуют об улучшении пластичности материала.

Таким образом, добавление базальтовых волокон является эффективным способом модификации литейного сплава АК12 и может быть использовано в технологиях получения алюминиевых композиционных материалов с повышенными эксплуатационными характеристиками.

Список источников

1. Белов Н.Н., Савченко С.В., Белов В.Д. Атлас микроструктур промышленных силуминов. М.: Изд. Дом МИСиС, 2009. 204 с.
2. Chen C., Ding Y., Wang X., Bao L. Recent advances to engineer tough basalt fiber reinforced composites: A review // Polym. Compos. 2024. V. 45 (14). P. 12559–12574. doi: 10.1002/polc.28711
3. Пат. РФ № 2758953. Устройство для смешивания расплавов легких металлов с микропорошками тугоплавких частиц и волокон.
4. Химухин С.Н., Черномас В.В., Хосен Ри, Ри Э.Х. Структура и свойства алюминиевого сплава АК12Ч при совмещенном процессе литья и деформации // Цветные металлы. 2015. № 3. С. 69–73. doi: 10.17580/tsm.2015.03.14
5. Orozco-Gonzalez P., Castro-Roman M., López-Rueda J., Hernández-Rodríguez A., Muñiz-Valdez R., Luna-Álvarez S., Ortiz-Cuellar C. Effect of iron addition on the crystal structure of the α - AlFeMnSi phase formed in the quaternary Al-Fe-Mn-Si system // Revista de Metalurgia. 2011. V. 47 (6). P. 453. doi: 10.3989/revmetalm.1068

6. Yang W., Ji S., Zhou X., Stone I., Scamans G., Thompson G.E., Fan Z. Heterogeneous nucleation of α -Al grain on primary α -AlFeMnSi intermetallic investigated using 3D SEM ultramicrotomy and HRTEM // Metall. Mater. Trans. A. 2014. V. 45. P. 3971–3980. doi: 10.1007/s11661-014-2346-6.
7. Zhang X., Wang D., Nagaumi H., Zhou Y., Yu W., Chong X., Li X., Zhang H. Morphology, thermal stability, electronic structure and mechanical properties of α -AlFeMnSi phases with varying Mn/Fe atomic ratios: Experimental studies and DFT calculations // J. Alloys Compd. 2022. V. 901. Art. 163523. doi: 10.1016/j.jallcom.2021.163523
8. Adole O., Barekar N., Anguilano L., Minton T., Novytskyi A., McKay B. Fibre/matrix intermetallic phase formation in novel aluminium-basalt composites // Mater. Lett. 2019. V. 239. P. 128–131. doi: 10.1016/j.matlet.2018.12.079
9. Wang M., Guo Y., Wang H., Zhao S. Characterization of Refining the Morphology of Al–Fe–Si in A380 Aluminum Alloy due to Ca Addition // Processes. 2022. V. 10 (4). Art. 672. doi: 10.3390/pr10040672
10. Валихов В.Д., Жуков И.А., Кахицзе Н.И., Ткачёв Д.А. Исследование влияния базальтовых волокон на структуру и физико-механические свойства алюминиевого сплава АК9. // Цветные металлы. 2023. №. 1. С. 70–76. doi: 10.17580/tsm.2023.01.09
11. Malaki M., Xu W., Kasar K.A., Menezes L.P., Dieringa H., Varma S.R., Gupta M. Advanced metal matrix nanocomposites // Metals (Basel). 2019. V. 9 (3). Art. 330. doi: 10.3390/met9030330
12. Dai L.H., Ling Z., Bai Y.L. Size-dependent inelastic behavior of particle-reinforced metal-matrix composites // Compos. Sci. Technol. 2001. V. 61 (8). P. 1057–1063. doi: 10.1016/S0266-3538(00)00235-9
13. Haque M.M., Syahriah N.I., Ismail A.F. Effect of silicon on strength and fracture surfaces of aluminium–silicon casting and Heat Treated Alloys // Key Eng. Mater. 2006. V. 306. P. 893–898. doi: 10.4028/www.scientific.net/KEM.306-308.893
14. Derro R.D. Fractography Handbook of Spaceflight Metals. National Aeronautics and Space Administration, Office of Management, 1993. 127 p.
15. Choudhary C., Sahoo K.L., Mandal D. Processing and characterization of modified strain-induced melt activation processed Al–Si alloys // Mater. Sci. Technol. 2020. V. 36 (2). P. 181–193. doi: 10.1080/02670836.2019.16865

References

1. Belov N.N., Savchenko S.V., Belov V.D. (2009) *Atlas mikrostruktur promyshlennykh siluminov* [Atlas of microstructures of industrial silumins]. Moscow: Dom MISiS.
2. Chen C., Ding Y., Wang X., Bao L. (2024) Recent advances to engineer tough basalt fiber reinforced composites: A review. *Polymer Composites*. 45(14). pp. 12559–12574. doi: 10.1002/pc.28711
3. Устройство для смешивания расплавов легких металлов с микропорошками тугоплавких чашитов и волокон [Device for mixing light metal melts with micropowders of refractory particles and fibers]. RF Patent 2758953.
4. Khimukhin S.N., Chernomas V.V., Khosen Ri., Ri Kh.E. (2015) Struktura i svoystva aluminievogo splava AK12ch pri sovmeshchennom protsesse lit'ya i deformatsii [Structure and properties of aluminum alloy AK12ch (AK12ч) in the time of combined processes of casting and deformation]. *Tsvetnye metally – Non-Ferrous Metals Journal*. 3. pp. 69–73. doi: 10.17580/tsm.2015.03.14
5. Orozco-Gonzalez P., Castro-Roman M., López-Rueda J., Hernández-Rodríguez A., Muñiz-Valdez R., Luna-Alvarez S., Ortiz-Cuellar C. (2011) Effect of iron addition on the crystal structure of the α -AlFeMnSi phase formed in the quaternary Al-Fe-Mn-Si system. *Revista de Metalurgia*. 47(6). P. 453. doi: 10.3989/revmetalm.1068
6. Yang W., Ji S., Zhou X., Stone I., Scamans G., Thompson G. E., Fan Z. (2014) Heterogeneous nucleation of α -Al grain on primary α -AlFeMnSi intermetallic investigated using 3D SEM ultramicrotomy and HRTEM. *Metallurgical and Materials Transactions A*. 45. pp. 3971–3980. doi: 10.1007/s11661-014-2346-6

7. Zhang X., Wang D., Nagaumi H., Zhou Y., Yu W., Chong X., Li X., Zhang H. (2022) Morphology, thermal stability, electronic structure and mechanical properties of α -AlFeMnSi phases with varying Mn/Fe atomic ratios: Experimental studies and DFT calculations. *Journal of Alloys and Compounds*. 901. Article 163523. doi: 10.1016/j.jallcom.2021.163523
8. Adole O., Barekar N., Anguilano L., Minton T., Novytskyi A., McKay B. (2019) Fibre/matrix intermetallic phase formation in novel aluminium-basalt composites. *Materials Letters*. 239. pp. 128–131. doi: 10.1016/j.matlet.2018.12.079
9. Wang M., Guo Y., Wang H., Zhao S. (2022) Characterization of refining the morphology of Al–Fe–Si in A380 aluminum alloy due to Ca addition. *Processes*. 10(4). P. 672. doi: 10.3390/pr10040672
10. Valikhov V.D., Zhukov I.A., Kakhidze N.I., Tkachyov D.A. (2023) Issledovanie vliyaniya bazal'tovykh volokon na strukturu i fiziko-mekhanicheskie svoystva alyuminievogo splava AK9 [Understanding the effect of basalt fibres on the structure and physical and mechanical properties of aluminium alloy AK9]. *Tsvetnye metally – Non-Ferrous Metals Journal*. 1. pp. 70–76. doi: 10.17580/tsm.2023.01.09
11. Malaki M., Xu W., Kasar K.A., Menezes L.P., Dieringa H., Varma S.R., Gupta M. (2019) Advanced metal matrix nanocomposites. *Metals*. 9(3). P. 330. doi: 10.3390/met9030330
12. Dai L.H., Ling Z., Bai Y.L. (2001) Size-dependent inelastic behavior of particle-reinforced metal–matrix composites. *Composites Science and Technology*. 61(8). pp. 1057–1063. doi: 10.1016/S0266-3538(00)00235-9
13. Haque M.M., Syahriah N.I., Ismail A.F. (2006) Effect of silicon on strength and fracture surfaces of aluminium–silicon casting and heat treated alloys. *Key Engineering Materials*. 306. pp. 893–898. doi: 10.4028/www.scientific.net/KEM.306-308.893
14. Derro R.D. (1993) *Fractography Handbook of Spaceflight Metals*. National Aeronautics and Space Administration, Office of Management.
15. Choudhary C., Sahoo K.L., Mandal D. (2020) Processing and characterisation of modified strain-induced melt activation processed Al–Si alloys. *Materials Science and Technology*. 36(2). pp. 181–193. doi: 10.1080/02670836.2019.16865

Сведения об авторах:

Валихов Владимир Данилович – младший научный сотрудник лаборатории нанотехнологий metallurgii Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: valihov.snobls@yandex.ru

Хрусталёв Антон Павлович – старший научный сотрудник лаборатории нанотехнологий metallurgii Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: tofik0014@gmail.com

Жуков Илья Александрович – заведующий лабораторией нанотехнологий metallurgii Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: gofra930@gmail.com

Ворожцов Александр Борисович – заведующий лабораторией высоконергетических и специальных материалов Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: abv1953@mail.ru

Information about the authors:

Valikhov Vladimir D. (Junior Researcher, Laboratory of Nanotechnology in Metallurgy, Tomsk State University Tomsk, Russian Federation). E-mail: valihov.snobls@gmail.com

Khrustalyov Anton P. (Senior Researcher, Laboratory of Nanotechnology in Metallurgy, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tofik0014@gmail.com

Zhukov Il'ya A. (Head of Laboratory of Nanotechnology in Metallurgy, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: gofra930@gmail.com

Vorozhtsov Aleksandr B. (Head of Laboratory of High Energy and Special Materials, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: abv1953@mail.ru

Статья поступила в редакцию 29.08.2025; принята к публикации 08.12.2025

The article was submitted 29.08.2025; accepted for publication 08.12.2025

Научная статья

УДК 532.529

doi: 10.17223/19988621/98/10

Исследование двухфазного течения в соплах РДТТ

Дмитрий Олегович Ларкин¹, Иван Владимирович Еремин²

^{1, 2} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ d.m.i.t.r.y.l.a.r.k.i.n@mail.ru

² iveremin@niipmm.tsu.ru

Аннотация. Представлены результаты исследования двухфазного стационарного квазиодномерного течения в сопле Лаваля с учетом процессов коагуляции, дробления и вращения капель конденсированной фазы. Математическая модель основана на использовании многожидкостной модели сплошной среды и метода квазистабилизации. Проведены численные исследования характеристик двухфазной среды. Проанализированы зависимости двухфазных потерь от различных функций распределения конденсированной фазы во входном сечении сопла. Показано, что для ряда течений использование распределений, отличных от нормально-логарифмических, оказывает заметное влияние на структуру потока.

Ключевые слова: сопло Лаваля, двухфазное квазиодномерное течение, функция распределения, двухфазные потери, математическое моделирование

Благодарности: Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России, проект № FSWM-2025-0004.

Для цитирования: Ларкин Д.О., Еремин И.В. Исследование двухфазного течения в соплах РДТТ // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 98. С. 108–119. doi: 10.17223/19988621/98/10

Original article

Investigation of a two-phase flow in the nozzles of solid-propellant rockets

Dmitriy O. Larkin¹, Ivan V. Eremin²

^{1, 2} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ d.m.i.t.r.y.l.a.r.k.i.n@mail.ru

² iveremin@niipmm.tsu.ru

Abstract. This study presents numerical results for a steady quasi-one-dimensional two-phase flow in a Laval nozzle, accounting for the coagulation, breakup, and rotation of droplets in the condensed phase. The mathematical model is based on a multicomponent continuum approach combined with a quasi-steady solution method; second-order numerical schemes are used for spatial integration. Several inlet droplet-size distributions obtained

from an intrachamber combustion simulation are examined to assess their impact on the two-phase losses and flow structure. Comparisons with the lognormal and truncated logarithmic laws show that, for some flow regimes, deviations from the classical lognormal distribution have little effect on thrust characteristics, whereas in other cases the influence is significant. The results show that both the mass fraction of the condensed phase and the choice of inlet distribution shape can noticeably affect the reduction of the specific impulse. The study illustrates the evolution of droplet sizes along the nozzle and identifies the conditions under which the impact of the distribution shape becomes important. Future work will extend the proposed approach to the entire internal flow path of a solid-propellant rocket motor.

Keywords: Laval nozzle, two-phase quasi-one-dimensional flow, distribution function, two-phase losses, mathematical modeling

Acknowledgments: This work was carried out within the framework of the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No. FSWM-2025-0004).

For citation: Larkin, D.O., Eremin, I.V. (2025) Investigation of a two-phase flow in the nozzles of solid-propellant rockets. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mehanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 98. pp. 108–119. doi: 10.17223/19988621/98/10

Введение

Широкое применение ракетных двигателей на твердом топливе (РДТТ) в космических исследованиях обусловливают их дальнейшее совершенствование. Для определения энерго-тяговых характеристик у разрабатываемого двигателя необходимо знать распределение газодинамических параметров во всем его тракте. Из исследований двухфазных течений в подобных установках следует, что на энерго-тяговые характеристики двигателя существенное влияние оказывает распределение конденсированной фазы (к-фазы) продуктов сгорания на входе в сопловой блок. Для большинства применяемых смесевых твердых топлив (СТТ) принято задавать распределение частиц на входе в сопло на основе нормально-логарифмического закона [1]. Такое распределение формируется, исходя из начальной функции распределения на поверхности горения топлива и ее дальнейшей эволюции в камере сгорания. Это весьма сложная многофакторная задача, которая зависит от состава топлива, условий горения, времени пребывания продуктов сгорания в камере сгорания и других факторов. Решению этой задачи посвящено много экспериментальных и теоретических исследований [2–7]. К настоящему времени такие исследования продолжаются, так как пока многие процессы изучены не полностью и возникает ряд противоречивых данных. Так, в работе [8] показано, что нормально-логарифмический закон распределения не соответствует распределению на входе в сопло для рассматриваемых авторами СТТ. Отмечено, что использование подхода случайных блоков и новых моделей агломерации позволяет получать более качественную информацию о распределении частиц на входе в сопло.

В работе [9] выполнено исследование распределения по размерам впрыскивающих капель на картину двухфазного течения в камере сгорания. Показано, в частности, влияние этих распределений на параметры потока на входе в сопло. Приведены как гистограммы состава алюминия, так и распределения параметров потока в поперечном сечении на входе в сопло.

Поскольку начальное распределение по размерам у поверхности топлива существенно влияет на распределение на входе в сопло, был выполнен ряд исследований по их определению. Можно отметить работу [10] в которой выполнено экспериментальное изучение распределения по размерам конденсируемых частиц в зависимости от геометрии образца, интервала времени закалки и уровня давления на основе бомбы закалки. Получено, что частицы имеют размеры от 0.1 до 300 мкм и их распределение трехмодальное. Аппроксимация полного распределения описана как сумма нормально-логарифмических распределений для каждой моды. С учетом изменения распределения частиц в газодинамическом тракте двигателя получена одномодальная функция на срезе сопла.

В работе [11] предложена динамическая модель агломерации, которая позволяет получить функцию распределения агломератов по размерам для разных начальных спектров частиц. Так же можно отметить работу [12], где была разработана и реализована комплексная физико-математическая модель двухфазного течения продуктов сгорания СТТ во всем газодинамическом тракте РДТТ. В данную модель включен ряд подмоделей, описывающих такие физические процессы, происходящие в продуктах сгорания двигателя, как агломерация, их газофазное горение и конденсация продуктов горения на частицы высокодисперсного оксида и на сами агломераты, динамика изменения параметров газовой фазы, агломератов и оксидов, химическое взаимодействие между Al и Al_2O_3 в агломератах и ряд других процессов. В работах для модельных двигателей и условных составов топлива получены распределения основных параметров двухфазного течения в РДТТ. В частности, приведены распределения массовой функции плотности распределения агломератов как у поверхности топлива, так и на входе в сопло.

Следует отметить, что в этих работах для исследования течений продуктов сгорания, как правило, заложены модели, учитывающие основные физические процессы в камере сгорания. При расчете течений в сопле необходимо также учесть специфические процессы, происходящие в нем, и, как показывают исследования, они вносят существенный вклад в уровень двухфазных потерь удельного импульса.

Цель настоящей работы состоит анализе влияния отличия функции распределения конденсированных частиц от общепринятого нормально-логарифмического закона на распределения параметров в сопле и на величину потерь удельного импульса на двухфазность.

Физико-математическая постановка задачи

Рассматривается стационарное течение двухфазной среды, представляющей собой смесь газа и полидисперсной конденсированной фазы, являющейся жидкими каплями оксида алюминия, в сопле Лаваля. В сопловом блоке важными процессами являются процессы коагуляции и дробления капель, приводящие к перераспределению фракций частиц по размерам. Процессы коагуляции смещают спектр по размерам в сторону более крупных фракций, увеличивая инерционное отставание капель относительно газовой фазы, и, как следствие, приводят к увеличению потерь удельного импульса. Одновременно с этим возрастает влияние аэродинамических сил, действующих на капли и приводящих к их деформации и дроблению. Дополнительным фактором, влияющим на развитие к-фазы, является вращение частиц, которое возникает при нецентральных столкновениях между каплями. При

больших угловых скоростях вращения капель возможно их разрушение за счет воздействия центробежных сил.

В настоящей работе используется многожидкостная модель полидисперсной среды [13]. В рамках этой модели стационарное квазидномерное течение двухфазной среды с учетом коагуляции, дробления и вращения жидких капель описывается системой уравнений вида [14, 15]:

$$\frac{d\rho_i u F}{dx} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d\rho_i u^2 F}{dx} = -F \frac{dp}{dx} + F \sum_{i=1}^N \varphi_i^v \rho_i (u_i - u), \quad (2)$$

$$\frac{d\rho_i u H F}{dx} = F \sum_{i=1}^N \rho_i \left[\varphi_i^0 c_p (T_i - T) + \varphi_i^v u_i (u_i - u) \right], \quad (3)$$

$$\frac{d}{dx} (\rho_i u_i F) = Q_{li}, \quad (4)$$

$$\frac{d}{dx} (\rho_i u_i^2 F) = F Q_{2i} + F \varphi_i^v \rho_i (u - u_i), \quad (5)$$

$$\frac{d}{dx} (\rho_i u_i T_i F) = F Q_{3i} + F \varphi_i^0 \rho_i (T - T_i) \frac{c_p}{c_s}, \quad (6)$$

$$\frac{d}{dx} (n_i u_i F) = F Q_{4i}, \quad (7)$$

$$\frac{d}{dx} (n_i u_i M_i^2 F) = F Q_{5i} + F \varphi_i^M n_i M_i^2, \quad (8)$$

$$p = \rho \frac{R}{c_p} \left(H - \frac{u^2}{2} \right). \quad (9)$$

Расчет процесса взаимодействия частиц друг с другом производился в рамках непрерывного подхода методом «меченых частиц» [15]. С учетом полидисперсной модели осколков А.А. Шрайбера коагуляционные члены в уравнениях (5)–(8) имеют вид:

$$Q_{li} = n_i \sum_{r_j < i} K_{ji} \Phi_{ji} \rho_j - \rho_i \sum_{r_j > i} K_{ij} n_j + \sum_{r_j > i} n_j \sum_{n_k < r_j} \alpha_{kji} K_{kj} P_k (1 - \Phi_{kj}), \quad (10)$$

$$Q_{2i} = n_i \sum_{r_j < i} K_{ji} P_j [u_j - (1 - \Phi_{ji}) u_{jik}] - \rho_i u_i \sum_{r_j > i} K_{ij} n_j + \sum_{r_j > i} n_j \sum_{n_k < r_j} \alpha_{kji} K_{kj} P_k (1 - \Phi_{kj}) u_{kji}, \quad (11)$$

$$Q_{3i} = \left[n_i \sum_{r_j < i} K_{ji} \rho_j [E_j - (1 - \Phi_{ji}) E_{jik}] - \rho_i E_i \sum_{r_j > i} K_{ij} n_j + \sum_{r_j > i} n_j \sum_{n_k < r_j} \alpha_{kji} K_{kj} P_k (1 - \Phi_{kj}) E_{kji} + \frac{q_i^2}{2} Q_{li} - u_i Q_{2i} - v_i Q_{3i} - w_i Q_{4i} \right] \frac{1}{c_s}, \quad (12)$$

$$Q_{4i} = -n_i \sum_{r_j > i} K_{ij} n_j + \frac{n_i}{\rho_i} \sum_{r_j > i} n_j \sum_{n_k < r_j} \alpha_{kji} K_{kj} P_k (1 - \Phi_{kj}), \quad (13)$$

$$Q_{5i} = n_i \left(\sum_{r_j < i} 0,058 M_j^2 K_{ij} n_j - \sum_{r_j > i} K_{ij} n_j \Phi_{ij} M_i^2 \right), \quad (14)$$

где параметры с индексом i относятся к номерам фракций конденсированной фазы, а величины без индекса относятся к газовой фазе. u, p, T, ρ, H – скорость, давление, температура, плотность и энталпия, c_s – теплоемкость вещества частиц, c_p – теплоемкость газа при постоянном давлении, n_i – количество частиц i -й фракции в единице объема, m – масса частицы, E – полная энергия, K_{ji} – константа взаимодействия, Q_i – коагуляционные члены, Φ_{ji} – математическое ожидание отношения изменения массы крупной частицы к общей массе столкнувшихся с ней мелких частиц, α_{kji} – массовая нормированная функция распределения по размерам осколов i , образовавшихся при столкновении частицы k -й фракции с j -й, $\varphi_i^v, \varphi_i^\theta, \varphi_i^M$ – коэффициенты силового, теплового и вращательного взаимодействия между газовой фазой и частицами i -й фракции, F – сечение сопла;

Метод решения

В большинстве работ для численного решения системы (1)–(9) применяется подход, основанный на решении обратной задачи [16]. Однако при использовании сопел сложной геометрии задание начального распределения параметра (например, давления), обеспечивающего соответствие восстановленного профиля с базовым, является затруднительным.

В настоящей работе применен *метод квазистабилизации*, широко используемый при расчете осесимметричных и пространственных течений в соплах [17]. Суть метода заключается в использовании итерационного процесса, в котором общее стационарное решение формируется путем решения нестационарных уравнений газовой фазы в сочетании со стационарными уравнениями для фракций жидких капель. В связи с этим для газовой фазы на входе в сопло задается два граничных условия (энтропия и энталпия), а на срезе сопла течение считается сверхзвуковым и граничные условия не задаются. Начальные поля газодинамических параметров определяются с использованием газодинамических функций в равновесном приближении.

Для численного интегрирования системы уравнений газовой фазы применялась схема Годунова второго порядка точности, а уравнения к-фазы интегрировались неявной разностной схемой также второго порядка точности [14, 15]. Итерации по временным шагам повторяются до достижения заданного критерия сходимости.

Реализация описанного метода квазидномерного течения легла в основу разработанного специализированного программного обеспечения на языке C++ с использованием объектно-ориентированного подхода и многофайловой структуры проекта, обеспечивающей гибкость, расширяемость и удобство поддержки кода. Расчеты проводятся на основе отдельного файла-задания, в котором указываются все необходимые параметры моделирования, включая геометрию сопла, параметры газа и частиц, численные схемы, критерии сходимости и т.д. В программу интегрирована обширная база данных, позволяющая генерировать разно-

образные геометрии сопел, применять различные формы коэффициентов сопротивления, моделей дробления частиц и другие физические характеристики, что обеспечивает универсальность и адаптивность численной модели к различным задачам многофазных течений. Такой подход обеспечивает возможность дальнейшей модернизации разрабатываемого программного комплекса на задачи многомерных течений и моделирования процессов в камерах сгорания без необходимости кардинальной переработки его архитектуры.

Численные исследования

При проведении численных исследований влияния функции распределения капель во входном сечении сопла рассматривались распределения, полученные в результате моделирования процессов горения, выполненные в работах [9, 12]. Во всех вариантах использовалась сетка, состоящая из $N_x = 2\,000$ узлов и число фракций $N = 25$.

В работе [12] авторы провели численное моделирование течения многофазной среды и эволюции к-фазы в камере сгорания твердотопливного ракетного двигателя. Распределение формировалось на основе расчета траекторий частиц от поверхности горения до входного сечения сопла с учетом процессов горения, коагуляции (бронновской и турбулентной) и окисления алюминия.

На рис. 1 показано сравнение нормально-логарифмической функции с распределением, полученным в работе [12] при одинаковом среднемассовом диаметре капель $d_{43} = 2.4$ мкм. Видно, что функция [12] характеризуется одинаково малым массовым содержанием к-фазы в асимптотических областях, в то время как в нормально-логарифмическом распределении характерна концентрация к-фазы вблизи моды распределения.

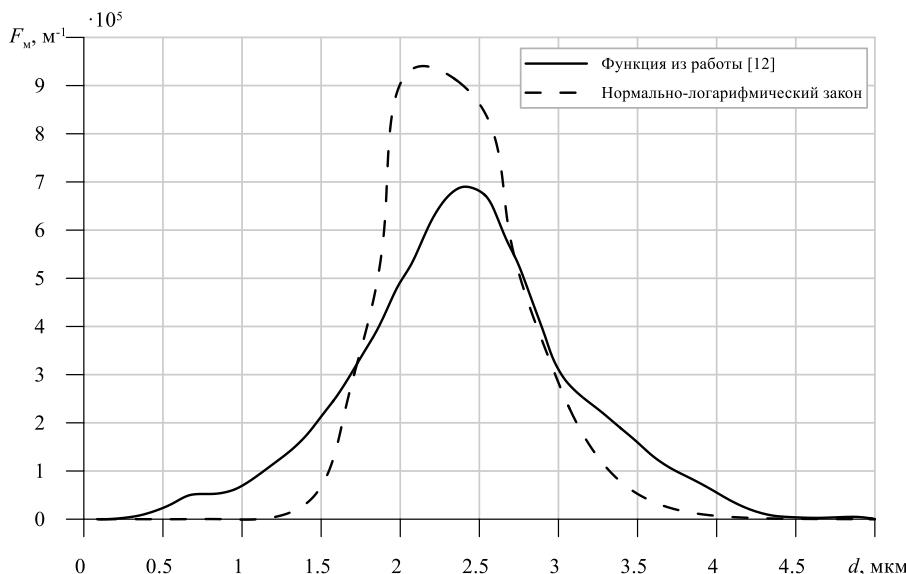


Рис. 1. Сравнение функций распределения к-фазы
Fig. 1. Comparison of condensed-phase distribution functions

Проведены расчеты с использованием данных функций в качестве начального распределения во входном сечении сопла. На рис. 2 изображено сравнение распределений среднемассового диаметра капель вдоль сопла. Как показали расчеты, различие в форме распределения между функциями для рассматриваемого течения не оказывает большого влияния на структуру течения и энерго-тяговые характеристики потока. Двухфазные потери составили 1.95% для распределения [12] и 1.91% для нормально-логарифмического закона.

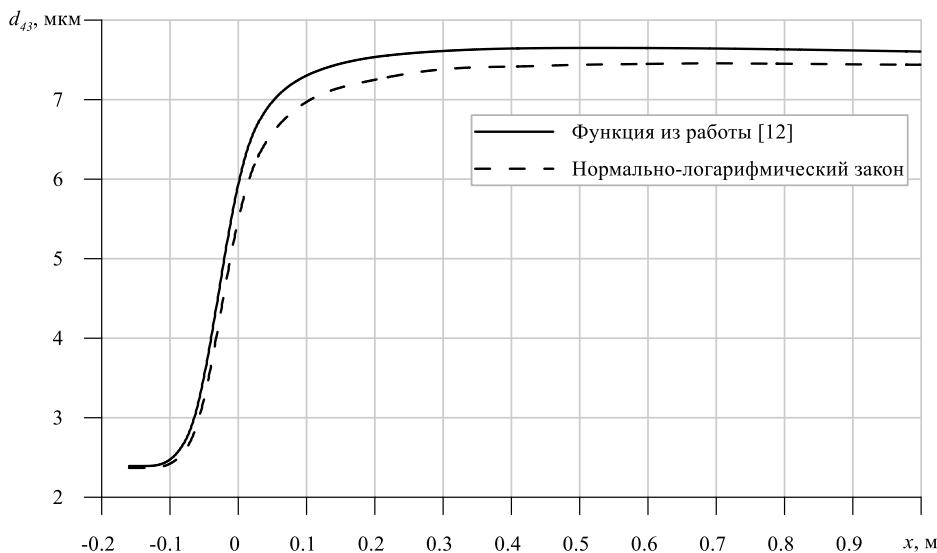


Рис. 2. Сравнение распределения d_{43} вдоль сопла
Fig. 2. Comparison of d_{43} distribution along the nozzle

В работе [9] рассматривается эволюция распределения к-фазы в камере сгорания в зависимости от начальной функции распределения частиц алюминия в топливе. На рис. 3 показаны графики распределения капель на поверхности горения и на входе в сопло, при использовании усеченного (1, 3) и нормального (2, 4) логарифмических законов, полученные авторами [9].

Для проведения численных исследований в качестве входных данных для расчета течения в сопле использовались распределения к-фазы, советующие графикам 3 и 4 (см. рис. 3). Массовая доля составляла $z = 0.18$, а контур сопла взят из работы [9]. На рис. 4 показано распределение среднемассового диаметра d_{43} вдоль сопла. Поскольку авторы [9] использовали топливо с весьма крупными включениями частиц алюминия, то к-фаза во входном сечении сопла имеет значительно увеличенный среднемассовый диаметр по сравнению с работой [12]. В выходном сечении сопла d_{43} для обеих моделей практически совпадают. Такое поведение может быть частично обусловлено тем, что в настоящей работе не учитывается скользящее движение в сопле. В этих вариантах начальные функции распределения оказывают существенное влияние на двухфазные потери, которые составляют $\xi = 3\%$ для усеченного логарифмического распределения и $\xi = 3.5\%$ для нормально-логарифмического закона. Следует отметить, что из-за большого

начального размера капель активные процессы взаимодействия между к-фазой и газовой фазой происходят в дозвуковой части сопла. При увеличении массовой доли до $z = 0.4$ качественная картина изменяется. В этом случае при использовании нормально-логарифмического закона двухфазные потери будут меньше, чем при усеченном логарифмическом распределении.

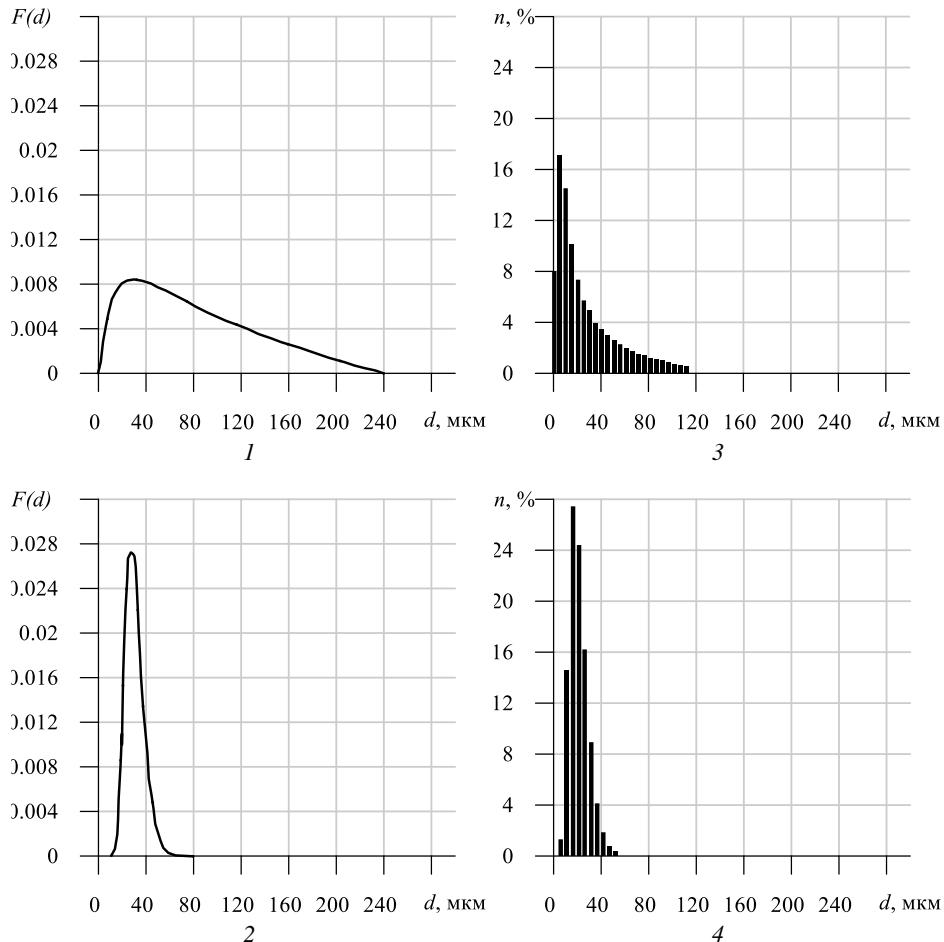


Рис. 3. Эволюция к-фазы: 1, 2 – на поверхности горения; 3, 4 – во входном сечении сопла [9]

Fig. 3. Evolution of the condensed phase: (1, 2) on the burning surface
and (3, 4) in the nozzle inlet section [9]

В настоящей работе численное исследование выполнено для усеченного логарифмического закона распределения. Профиль сопла остается неизменным, массовая доля принимается равной $z = 0.3$. На рис. 5 показано изменение среднемассового диаметра вдоль оси сопла при различных d_{43} на входе в сопло. Видно, что с увеличением d_{43} возрастает интенсивность взаимодействия к-фазы в области минимального сечения, что приводит к увеличению двухфазных потерь (таблица).

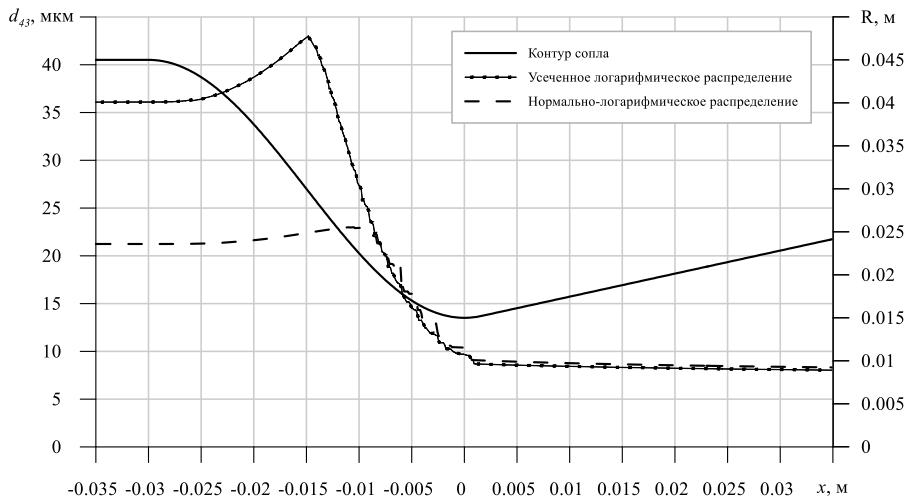


Рис. 4. Сравнение распределения d_{43} вдоль сопла
Fig. 4. Comparison of d_{43} distribution along the nozzle

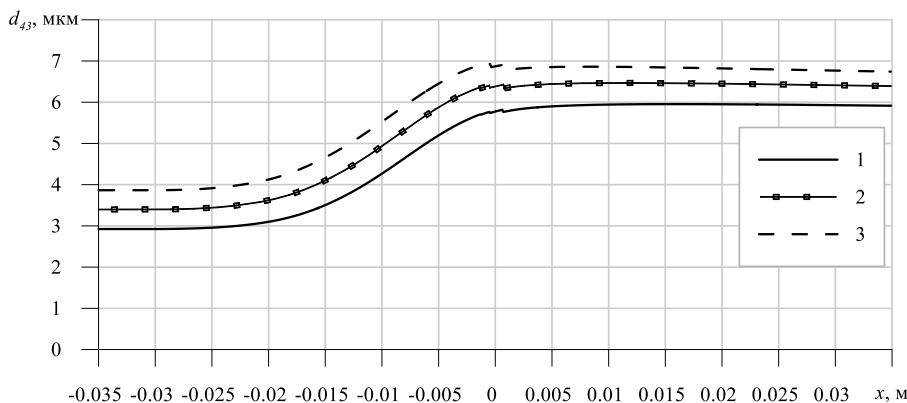


Рис. 5. Сравнение распределения d_{43} вдоль сопла
Fig. 5. Comparison of d_{43} distribution along the nozzle

Варианты расчетов

№	1	2	3
$d_{43\text{вх}}$, мкм	2.9	3.4	3.86
$d_{43\text{вых}}$, мкм	5.9	6.4	6.74
ξ , %	3.8	4.2	4.5

Заключение

В работе выполнено математическое моделирование течения двухфазной полидисперсной среды в сопле с учетом процессов коагуляции, дробления и вращения капель к-фазы в стационарной квазиодномерной постановке. Для решения системы уравнений использовался метод квазистабилизации. Получены зависимости

характеристик двухфазного течения для различных начальных функций распределения капель во входном сечении сопла. Проведенный анализ показал, что форма распределения к-фазы может оказывать существенное влияние на величину двухфазных потерь в зависимости от режима течения. В некоторых течениях различия между функциями малы, тогда как в других их влияние становится выраженным. Кроме того, выявлено, что массовая доля к-фазы с учетом выбора функции распределения оказывает заметное влияние на двухфазные потери удельного импульса.

Проведено численное исследование с использованием усеченного логарифмического закона распределения к-фазы во входном сечении сопла. Показано, что для данного течения при увеличении среднемассового диаметра на входе в сопло двухфазные потери возрастают.

В дальнейшем планируется распространить данный подход для расчета течения во всем газодинамическом тракте РДТТ.

Список источников

1. Стернин Л.Е. Основы газодинамики двухфазных течений в соплах. М.: Машиностроение, 1974. 212 с.
2. Attili A., Favini B., Di Giacinto M. Numerical Simulation of Multiphase Flows in Solid Rocket Motors // 45th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit 2–5 August 2009, Denver, Colorado, AIAA Paper. 2009. P. 1–19.
3. Dupays J., Fabignon Y., Villedieu P., Lavergne G., Estivalezes J.L. Some Aspects of Two-Phase Flows in Solid-Propellant Rocket Motors // Progress in Astronautics and Aeronautics. AIAA Reston, VA. 2000. V. 185. P. 859–883.
4. Де Лука Л.Т., Галфетти Л., Северный Ф., Меда Л., Марра Ж., Ворожцов А.Б., Седой В.С., Бабук В.А. Горение смесевых твердых топлив с наноразмерным алюминием // Физика горения и взрыва. 2005. Т. 41, № 6. С. 80–94. doi: 10.1007/s10573-005-0080-5
5. Hunter S.C., Cherry J.P., Kligel J.P., Waldman C.H. Gas-particle nozzle flows with reaction and particle size change. Lecture notes in physics. // AIAA Paper. 1981. № 37. P. 1–14. doi: 10.2514/6.1981-37
6. Глотов О.Г. Конденсированные продукты горения алюминизированных топлив. II. Эволюция частиц при удалении от поверхности горения // Физика горения и взрыва. 2000. Т. 36, № 4. С. 66–78. doi: 10.1007/BF02699478
7. Глотов О.Г., Ягодников Д.А., Воробьев В.С., Зарко В.Е., Симоненко В.Н. Воспламенение, горение и агломерация капсулированных частиц алюминия в составе смесевого твердого топлива. II. Экспериментальные исследования агломерации // Физика горения и взрыва. 2007. Т. 43, № 3. С. 83–97. doi: 10.1007/s10573-007-0045-y
8. Jackson T.L., Najjar F.M., Buckmaster J. New Aluminum Agglomeration Models and Their Use in Solid-Propellant-Rocket Simulations // J. Propul. Power. 2005. V 21 (5). P. 925–936. doi: 10.2514/1.11888
9. Najjar F.M., Ferry J.P., Haselbacher A., Balachandar S. Simulations of Solid-Propellant Rockets: Effects of Aluminum Droplet Size Distribution // Journal of Spacecraft and Rockets. 2006. V. 43 (6). P. 1258–1270. doi: 10.2514/1.17326
10. Jeenu R., Pinumalla K., Deepak D. Size distribution of particles in combustion products of aluminized composite propellant // J. Propul Powe. 2010. V 26 (4). P. 715–723. doi: 10.2514/1.43482
11. Раицковский С.А. Модель нестационарного горения твердых топлив с накоплением конденсированных продуктов на поверхности горения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 86. С. 104–119. doi: 10.17223/19988621/86/8

12. Бабук В.А., Будный Н.Л., Куклин Д.И., Низяев А.А. Модель эволюции многофазного потока продуктов сгорания в камере двигательной установки и результаты ее численного анализа // Известия российской академии ракетных и артиллерийских наук. 2020. № 1 (111). С. 53–60.
13. Крайко А.Н., Нигматулин Р.И., Старков В.К., Стернин Л.Е. Механика многофазных сред // Итоги науки и техники. Гидромеханика. М.: ВИНТИ, 1972. № 6. С. 93–174.
14. Васенин И.М., Архипов В.А., Бутов В.Г., Глазунов А.А., Трофимов В.Ф. Газовая динамика двухфазных течений в соплах. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1986. 264 с.
15. Рычков А.Д. Математическое моделирование газодинамических процессов в каналах и соплах. Новосибирск: Наука, 1988. 222 с.
16. Пиругов У.Г. Обратная задача теории сопла. М.: Машиностроение, 1988. 240 с.
17. Ворожцов А.Б., Глазунов А.А., Де Лука Л.Т., Кувшинов Н.Е., Еремин И.В., Тырышкин И.М., Фассина М. Влияние применения наноалюминия на газодинамику высокоэнергетических установок // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 2 (28). С. 45–57.

References

1. Sternin L.E. (1974) *Osnovy gazodinamiki dvukhfaznykh tcheniy v soplakh* [Fundamentals of gas dynamics of two-phase flows in nozzles]. Moscow: Mashinostroenie.
2. Attili A., Favini B., Di Giacinto M. (2009) Numerical simulation of multiphase flows in solid rocket motors. *Proceedings of the 45th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, Denver, Colorado*. pp. 1–19.
3. Dupays J., Fabignon Y., Villedieu P., Lavergne G., Estivalezes J.L. (2000) Some aspects of two-phase flows in solid-propellant rocket motors. *Progress in Astronautics and Aeronautics. AIAA Reston*. 185. pp. 859–883. doi: 10.2514/5.9781600866562.0859.0883
4. De Luka L.T., Galfetti L., Severnyj F., Meda L., Marra ZH., Vorozhcov A.B., Sedoj B.C., Babuk V.A. (2005) Combustion of mixed solid fuels with nanoscale aluminum. *Physics of Combustion and Explosion*. 41(6). pp. 80–94. doi: 10.1007/s10573-005-0080-5
5. Hunter S.C., Cherry J.P., Kligel J.P., Waldman C.H. (1981) Gas-particle nozzle flows with reaction and particle size change. *Lecture Notes in Physics. AIAA Paper*. 37. pp. 1–14. doi: 10.2514/6.1981-37
6. Glotov O.G. (2000) Condensed combustion products of aluminized propellants. II. Evolution of particles with distance from the burning surface. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 36(4). pp. 476–487. doi: 10.1007/bf02699478
7. Glotov O.G., Yagodnikov D.A., Vorobev V.S., Zarko V.E., Simonenko V.N. (2007) Ignition, combustion, and agglomeration of encapsulated aluminum particles in a composite solid propellant. II. Experimental studies of agglomeration. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 43(3). pp. 320–333. doi: 10.1007/s10573-007-0045-y
8. Jackson T.L., Najjar F.M., Buckmaster J. (2005) New aluminum agglomeration models and their use in solid-propellant-rocket simulations. *Journal of Propulsion and Power*. 21(5). pp. 925–936. doi: 10.2514/1.11888
9. Najjar F.M., Ferry J.P., Haselbacher A., Balachandar S. (2006) Simulations of solid-propellant rockets: effects of aluminum droplet size distribution. *Journal of Spacecraft and Rockets*. 43(6). pp. 1258–1270. doi: 10.2514/1.17326
10. Jeenu R., Pinumalla K., Deepak D. (2010) Size distribution of particles in combustion products of aluminized composite propellant. *Journal of Propulsion and Power*. 26(4). pp. 715–723. doi: 10.2514/1.43482
11. Rashkovskiy S.A. (2023) Model' nestatsionarnogo goreniya tverdykh topliv s nakopleniem kondensirovannykh produktov na poverkhnosti goreniya [Model of non-stationary combustion of solid energetic materials with accumulation of condensed products on the burning surface]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mehanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 86. pp. 104–119. doi: 10.17223/19988621/86/8

12. Babuk V.A., Budny N.L., Kuklin D.I., Nizyaev A.A. (2020) Model' evolyutsii mnogofaznogo potoka produktov sgoraniya v kamere dvigatel'noy ustanovki i rezul'taty ee chislennogo analiza [A model of the evolution of a multiphase flow of combustion products in a propulsion system chamber and the results of its numerical analysis]. *Izvestiya rossiyskoy akademii raketnykh i artilleriyskikh nauk – Proceedings of the Russian Academy of Rocket and Artillery Sciences.* 1 (111). pp. 53–60.
13. Krayko A.N., Nigmatulin R.I., Starkov V.K., Sternin L.E. (1972) Mekhanika mnogofaznykh sred [Mechanics of multiphase media]. *Gidromekhanika – Hydromechanics.* 6. pp. 93–174.
14. Vasenin I.M., Arkhipov V.A., Butov V.G., Glazunov A.A., Trofimov V.F. (1986) *Gazovaya dinamika dvukhfaznykh techeniy v soplakh* [Gas dynamics of two-phase flows in nozzles]. Tomsk: Tomsk State University.
15. Rychkov A.D. (1988) *Matematicheskoe modelirovaniye gazodinamicheskikh protsessov v kanalakh i soplakh* [Mathematical modeling of gas dynamic processes in channels and nozzles]. Novosibirsk: Nauka.
16. Pirumov U.G. (1988) *Obratnaya zadacha teorii sopla* [The inverse problem of nozzle theory]. Moscow: Mashinostroenie.
17. Vorozhtsov A.B., Glazunov A.A., De Luka L.T., Kuvshinov N.E., Eremin I.V., Tyryshkin I.M., Fassina M. (2014) Vliyanie primeneniya nanoalyuminiya na gazodinamiku vysokoenergeticheskikh ustanovok [The impact of application of nanoaluminum on gas dynamics of high-energy systems]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mehanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 2(28). pp. 45–57.

Сведения об авторах:

Ларкин Дмитрий Олегович – инженер-исследователь лаборатории 101 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: d.m.i.t.r.y.l.a.r.k.i.n@mail.ru

Еремин Иван Владимирович – кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией 101 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: iveremin@niipmm.tsu.ru

Information about the authors:

Larkin Dmitriy O. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: d.m.i.t.r.y.l.a.r.k.i.n@mail.ru

Eremin Ivan V. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: iveremin@niipmm.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 24.11.2025; принята к публикации 08.12.2025

The article was submitted 24.11.2025; accepted for publication 08.12.2025

Научная статья

УДК 533.697, 519.63

doi: 10.17223/19988621/98/11

Численное исследование выхода на стационарный режим двигательной бессопловой установки с вязкоупругим зарядом цилиндрической формы

Леонид Леонидович Миньков¹, Наталья Радиковна Гимаева²,
Диана Викторовна Диль³

^{1, 2, 3} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ lminkov@tfu.tsu.ru

² natalia.gimaeva@inbox.ru

³ dil.dianochka@mail.ru

Аннотация. Представлены результаты численного моделирования в двумерном осесимметричном приближении процесса взаимодействия продуктов горения твердого топлива с деформируемым вязкоупругим зарядом в период выхода бессопловой двигательной установки на стационарный режим работы. Получены зависимости перемещения точек поверхности заряда от времени для трех значений начального модуля сдвига ТТ. Определено влияние вязкоупругого поведения заряда на зависимость максимального давления в камере горения от времени и на положение звуковой линии в канале заряда.

Ключевые слова: бессопловая двигательная установка, вязкоупругость, напряженно-деформированное состояние, внутренняя баллистика, взаимодействие газа с деформируемым телом

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке госзадания Министерства науки и высшего образования (проект № FSWM-2025-0012).

Для цитирования: Миньков Л.Л., Гимаева Н.Р., Диль Д.В. Численное исследование выхода на стационарный режим двигательной бессопловой установки с вязкоупругим зарядом цилиндрической формы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 98. С. 120–135. doi: 10.17223/19988621/98/11

Original article

Numerical study of the transition to a steady-state operating mode of a nozzleless propulsion system with a viscoelastic cylindrical charge

Leonid L. Min'kov¹, Nataliya R. Gimaeva², Diana V. Dil³

^{1, 2, 3} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ lminkov@tfu.tsu.ru

² natalia.gimaeva@inbox.ru

³ dil.dianochka@mail.ru

Abstract. This article presents the results of numerical modeling in a two-dimensional axisymmetric approximation of the interaction between solid propellant (SP) combustion products and a deformable viscoelastic charge during the transition to a steady-state operating mode of a nozzleless propulsion system. The turbulent flow of a viscous compressible gas in the combustion chamber is described by the Navier–Stokes equations using the $k-\omega$ SST turbulence model. The viscoelastic behavior of the charge is described using the relaxation moduli of elasticity, which are approximated by the Prony series, and the Williams-Landel-Ferry time–temperature shift function. Displacements of the points on the charge surface are obtained as functions of time for three values of the initial shear modulus. The influence of the viscoelastic behavior of the charge on the time variation of maximum pressure in the combustion chamber and on the position of the sonic line in the charge channel is determined. It is shown that the time dependence of the maximum pressure in the combustion chamber has a characteristic maximum that coincides with the characteristic relaxation time of the relative shear modulus. A decrease of the initial shear modulus of the SP leads to an elongation of the sonic line into the channel.

Keywords: nozzleless propulsion system, viscoelasticity, stress–strain state, internal ballistics, fluid–deformable body interaction

Acknowledgments: This work was financially supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (state assignment No. FSWM-2025-0012).

For citation: Min'kov, L.L., Gimaeva, N.R., Dil', D.V. (2025) Numerical study of the transition to a steady-state operating mode of a nozzleless propulsion system with a viscoelastic cylindrical charge. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mehanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 98. pp. 120–135. doi: 10.17223/19988621/98/11

Введение

Особенностью современных конструкций разгонно-стартовых ступеней интегральных ракетно-прямоточных двигателей (РПД) является отсутствие соплового блока. Простота, надежность, отсутствие отделяемого соплового оборудования и уменьшение требований теплозащиты делают привлекательными бесспловые двигательные установки (БДУ) для применения в стартовых ступенях интегральных РПД [1–3].

История эволюции РПД описана в статье [4]. Впервые концепция прямоточных воздушно-реактивных двигательных установок была предложена французским ученым Рене Лорин в 1913 г. Начиная с 1930-х гг. французские инженеры успешно разрабатывали и демонстрировали воздушно-реактивные двигатели для самолетов и ракет. С развитием технологий и опыта отработки к 1970-м гг. сформировалась концепция использования твердотопливных зарядов в ступенях РПД. В середине 1980-х гг. прошли летные испытания тактической ракеты на интегральном твердотопливном воздушно-реактивном двигателе, стартовая ступень которой представляла собой твердотопливную БДУ.

В работе [5] предложена упрощенная физико-математическая модель для теоретического анализа основных внутрикамерных процессов БДУ. Показано, что при цилиндрической форме выходного участка потери импульса по сравнению

с классической ДУ составляют порядка 14%. Формирование конусообразного выходного участка канала заряда может увеличить эффективность БДУ только при относительно небольшом уменьшении площади поверхности активного участка горения заряда.

В работе [6] представлен метод совместного решения газодинамической и геометрической задач при физико-математическом моделировании внутrikамерных процессов в БДУ. Расчет параметров у переднего днища заряда проводился в нестационарной нульмерной постановке, а для канала заряда применялись одномерные газодинамические уравнения в квазистационарной постановке. Для изменения геометрии канала заряда в процессе его выгорания использовался метод направленных отрезков. Локальная скорость горения определялась по эмпирическому закону в зависимости от давления и скорости газового потока, т.е. с учетом эрозионной составляющей. В результате численных исследований по предложенной методике получены оценки потерь удельного импульса тяги по сравнению с классической ДУ на уровне 3–3.5%. Также высказано предположение, что твердые ракетные топлива (ТТ) с высокой чувствительностью скорости горения к давлению имеют преимущества для реализации удельного импульса в БДУ.

В работах [7–9] развивается направление математического моделирования внутrikамерных процессов БДУ на полный цикл работы двигателя. Решается совместная задача, включающая срабатывание воспламенителя, движение заглушки, выгорание заряда твердого топлива и нестационарное осесимметричное течение газовой смеси в камере сгорания. Численное моделирование проводится методом Давыдова (методом крупных частиц). Результаты численных экспериментов показали неплохую сходимость с опытными данными по давлению у переднего дна и силе тяги в выходном сечении. Полученное расчетами распределение газодинамических параметров по тракту в разные моменты времени работы ДУ позволяет наблюдать переход от вихревых нестационарных течений к практически ламинарным потокам продуктов сгорания по мере выгорания заряда твердого топлива.

В работах [10–11] расчет внутрибаллистических характеристик в ДУ с зарядом, имеющим особенность в форме «зонтика», и БДУ на твердом топливе на полный период работы проводился в осесимметричном приближении. Отслеживание горящей поверхности топлива осуществлено неявным образом с помощью метода уровней на декартовой структурированной вычислительной сетке. Газодинамические параметры определялись с использованием разностных схем третьего порядка аппроксимации по пространству. Показано, что для БДУ квазидономерная модель занижает значения давления на 20% по сравнению с двумерной осесимметричной моделью.

Таким образом, в перечисленных выше работах поднимались и частично были решены вопросы определения газодинамических и энергетических параметров БДУ на твердом топливе с учетом постепенного воспламенения заряда, вскрытия заглушки, квазистационарного и нестационарного режимов течения газовой смеси по тракту в процессе выгорания заряда.

Однако, как показывает практика, существует серьезная проблема деформирования твердотопливного заряда за счет высоких перепадов давления по каналу в начале работы ДУ. Взаимное влияние деформационных и газодинамических процессов при определенных условиях может привести к нестабильности работы ДУ. Поэтому для оценки работоспособности конструкции целесообразно ставить

и решать совместные задачи газовой динамики и напряженно-деформированного состояния.

В работах [12–13] предлагается алгоритм численного решения сопряженной задачи взаимодействия между нестационарным потоком газа и деформируемым упругим твердым телом на основе метода конечных элементов. Показано, что в случае заряда ТТ с особенностью типа «зонтик» для ДУ с утопленным соплом в период выхода на режим наблюдаются осцилляции поверхности заряда как в продольном, так и поперечном направлениях, что влияет на зависимость давления от времени.

Анализ гиперупругого поведения заряда твердого топлива БДУ под действием газодинамической нагрузки в начальный период его работы проведен в работе [14] в рамках решения сопряженной задачи газовой динамики для проточного тракта и механики деформируемого твердого тела для заряда. Показано, что в БДУ с зарядом ТТ, имеющим низкий модуль Юнга, может возникнуть явление резонанса.

Анализ выхода на режим двухимпульсного твердотопливного ракетного двигателя выполнен в работах [15–17] на основе совместного решения системы трехмерных нестационарных уравнений для вязкого теплопроводного газа, системы уравнений МДТТ и уравнения теплопроводности для определения температуры поверхности топлива. Предполагалось, что модуль упругости топлива постоянен. Показано, что для заряда длиной 0.9 м и диаметром канала 0.08 м в случае жесткого соплового блока при возрастании давления от 0.1 до 23.6 МПа амплитуда продольных колебаний поверхности заряда может достигать 10 мм, а поперечных – 3 мм.

Современные смесевые ТТ обладают вязкоупругими свойствами, когда модули сдвига и упругости зависят от времени, и неучет этого факта может приводить к существенным различиям в оценке напряженно-деформированного состояния заряда. Так, в работе [18] проводилось моделирование динамического отклика заряда ДУ на нагрузку, вызванную повышением давления в начальный период работы двигателя, на основе квазистатического упругого анализа и нестационарного анализа, учитывающего вязкоупругие свойства топлива НТРВ. Показано, что первый случай дает завышенные значения отклика по сравнению со вторым.

В работе [19] проведен вязкоупругий структурный анализ для определения влияния свойств вставки на напряжение и деформацию вдоль границы раздела вставка / топливо в твердотопливной ДУ на основе упрощенной 2D осесимметричной модели с привлечением пакета Ansys. Показано, что под действием нагрузки за счет повышения давления на начальном участке работы двигателя напряжения вдоль границы раздела вставка / топливо возрастают с увеличением начального модуля и уменьшаются с увеличением коэффициента Пуассона гильзы.

В работе [20] проводится исследование вязкоупругого поведения заряда ТТ при акустической неустойчивости рабочего процесса в камере сгорания ДУ. Показано, что динамический отклик ТТ относительно максимальных осевых перемещений сжатия при выходе ДУ на основной режим работы практически полностью соответствует уровню осевых перемещений сжатия при статическом нагружении, что объясняется генерацией высокочастотной малоамплитудной газодинамической неустойчивости в камере сгорания ДУ, а также низкой энергетикой самого топлива.

Целью настоящей работы – исследование взаимовлияния газодинамической нагрузки и напряженно-деформированного состояния (НДС) заряда вязкоупругого ТТ в период выхода БДУ на стационарный режим в различных условиях термостатирования заряда.

Постановка задачи

Рассматриваются процессы, происходящие в модельном бессопловом двигателе, разрез которого показан на рис. 1, в начальный период его работы. Двигатель состоит из цилиндрического заряда ТТ 1, прикрепленного к корпусу 2, и камеры сгорания 3. Левая торцевая поверхность и цилиндрическая поверхность 4 заряда являются поверхностями горения. Правая торцевая поверхность 5 забронирована. Продуты сгорания, поступающие с поверхности горения, вытекают наружу через границу 6. Заряд ТТ под действием возникающей со стороны продуктов сгорания газодинамической нагрузки деформируется, изменяя поверхность горения, что, в свою очередь, влечет за собой изменение давления в камере сгорания, которое ведет к изменению напряженно-деформированного состояния заряда.

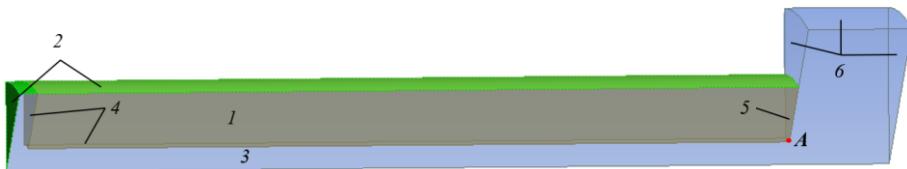


Рис. 1. Разрез модельного бессопловового двигателя:

1 – корпус, 2 – заряд ТТ, 3 – камера сгорания, 4 – поверхность горения, 5 – инертная поверхность, 6 – выходная граница; А – контрольная точка

Fig. 1. Sectional view of a nozzleless engine model:

1, housing; 2, solid propellant charge; 3, combustion chamber; 4, combustion surface; 5, inert surface; and 6, outlet boundary; A is the control point

Будем предполагать, что в начальный момент времени поверхность топлива зажигается мгновенно, продукты сгорания представляют собой вязкий сжимаемый газ, течение является нестационарным, турбулентным. Материал заряда ТТ обладает вязко-гиперупругими свойствами [18–20].

Для описания НДС заряда используются уравнение сохранения массы и уравнение движения. Связь между напряжениями и деформациями для вязко-гиперупругого тела записывается через энергию деформации по модели Нео-Гука с использованием релаксационных модулей упругости.

Зависимость релаксационного модуля сдвига и объемного модуля упругости от времени аппроксимируется рядами Прони [21]:

$$G(t) = G_0 g(t), \quad K(t) = \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} G_0 g(t), \quad g(t) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \exp\left(-\frac{t}{a(T)\tau_i}\right),$$

где a_i и τ_i – коэффициенты ряда Прони; $a(T)$ – функция температурно-временного сдвига; G_0 – начальный модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона, $g(t)$ – относительный релаксационный модуль.

Функция температурно-временного сдвига $a(T)$ согласно модели Williams–Landel–Ferry [22] имеет вид:

$$\log a(T) = \frac{a_1(T - T_0)}{a_2 + T - T_0}. \quad (1)$$

Для описания течения продуктов сгорания используются уравнение неразрывности, уравнение сохранения количества движения, уравнение сохранения энергии,

уравнение состояния, уравнение турбулентной энергии и уравнение удельной скорости диссипации турбулентной энергии.

Границные условия задаются следующим образом. Для заряда на плоскости симметрии задается равенство нулю нормальных перемещений, в месте крепления заряда к корпусу задается условие равенства нулю перемещений во всех направлениях. Для газа на твердой стенке задается условие прилипания. Стенки предполагаются теплоизолированными. Границное условие для удельной скорости диссипации турбулентной энергии на стенке реализуется через пристеночные функции, а для турбулентной энергии задается равенство нулю ее нормальной производной. На выходе из канала при дозвуковом истечении задается давление, равное давлению окружающей среды. На плоскости симметрии задаются условия симметрии. На границе раздела поверхность деформируемого твердого тела – газ задается условие равенства нормальных напряжений в топливе и газе и равенство касательных напряжения в топливе и газе, а также равенство скоростей перемещения газа и точек поверхности топлива.

Метод решения

Вычислительная область представляет собой сектор цилиндрической области (см. рис. 1), в которой угол между плоскостями сечения, проведенными вдоль оси, равен 5° .

Для численного решения системы уравнений НДС использовался метод конечных элементов с линейными функциями формы для восьмиточечных гексагональных элементов. Численное решение системы уравнений, описывающих течение продуктов сгорания, выполнялось по методу Патанкара на сетке с шестигранными ячейками с использованием неявной противопоточной схемы второго порядка точности по пространственным переменным для конвективных членов уравнений и первым порядком точности по времени. Реализация указанных методов была выполнена в вычислительном комплексе Ansys в среде Workbench с привлечением соответственно модулей Transient Structural и Fluent, обмен данными между которыми осуществлялся с помощью модуля System Coupling. На каждом шаге по времени при решении системы газодинамических уравнений выполнялось 20 итераций. На каждом этапе сопряжения нагрузка–перемещение выполнялось 5 итераций.

В данной постановке горящая поверхность заменена твердой стенкой, а приход массы и энергии газов моделируется через источниковые члены в соответствующих уравнениях [23].

Обсуждение результатов численного решения

Для численного решения поставленной задачи были приняты следующие значения параметров. Длина заряда – 125 см, толщина свода заряда – 7 см, радиус канала заряда – 4 см, ширина зазора между левыми торцами камеры сгорания и заряда – 1 см, ширина и высота области справа от заряда соответственно 19 и 21 см. Теплофизические параметры продуктов сгорания приведены в табл. 1, характеристики твердого топлива – в табл. 2, коэффициенты ряда Прони для модельного топлива – в табл. 3 [24], начальные модули сдвига в зависимости от температуры и коэффициент Пуассона – в табл. 4, коэффициенты функции температурно-временного сдвига – в табл. 5 [25].

Таблица 1

**Теплофизические параметры
продуктов сгорания**

Теплоемкость, Дж/(кг·К)	1 006
Молярная масса, кг/кмоль	29
Динамическая вязкость, Па·с	$1.79 \cdot 10^{-5}$
Теплопроводность, Вт/(м·К)	0.0242

Таблица 2

Характеристики твердого топлива

Скорость горения при 1 атм, u_{01} , мм/с	6.4
Показатель степени в законе горения, v_1	0.41
Температура горения, К	2 960
Плотность топлива, кг/м ³	1 710

Таблица 3

Коэффициенты ряды Прони для топлива

i	α_i	τ_i , с
0	0.0486666	
1	0.0114570	$5 \cdot 10^{-6}$
2	0.0055763	$5 \cdot 10^{-5}$
3	0.2436390	$1 \cdot 10^{-4}$
4	0.2486060	$2.5 \cdot 10^{-4}$
5	0.1022000	$5 \cdot 10^{-4}$
6	0.1285610	$1 \cdot 10^{-3}$
7	0.0833416	$2.5 \cdot 10^{-3}$
8	0.0551554	$5 \cdot 10^{-3}$
9	0.0537361	$1.5 \cdot 10^{-2}$
10	0.0190610	$5 \cdot 10^{-2}$

Таблица 4

**Начальные значения модуля сдвига
и коэффициент Пуассона**

$T, ^\circ\text{C}$	$G_0, \text{МПа}$	ν
-45	90	0.4999
20	50	
71	30	

Таблица 5

**Коэффициенты функции $a(T)$,
уравнение (1)**

$a_1, [-]$	-5.4
a_2, K	770.27
T_0, K	293

На рис. 2. показано влияние температуры ТТ на поведение относительного модуля сдвига $g(t)$ от времени. К моменту времени 0.1 с относительный модуль сдвига достигает наименьшего значения ~ 0.0487 , которое не зависит от температуры топлива в диапазоне от -45 до $+70^\circ\text{C}$. Более высокие температуры топлива ведут к более быстрому снижению относительного модуля сдвига в начальный период нагрузки ($t < 10^{-5}$ с) и более медленному снижению в конечный период нагрузки ($t > 10^{-3}$ с).

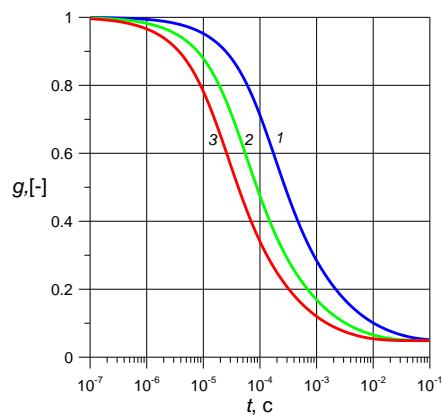


Рис. 2. Зависимость относительного релаксационного модуля от времени нагрузки:
 $1 - T = -45^\circ\text{C}, 2 - +20^\circ\text{C}, 3 - +70^\circ\text{C}$

Fig. 2. Dependence of the relative relaxation modulus on the loading time at $T = (1) -45$, (2) $+20$, and (3) $+70^\circ\text{C}$

Для исследования численного решения на сходимость были проведены расчеты на трех сетках, параметры которых приведены в табл. 6. Количество элементов и ячеек в окружном направлении равнялось 1, что соответствует осесимметричному приближению.

Расчеты, проведенные на сетке № 1, выполнялись с шагом по времени, равным $5 \cdot 10^{-6}$ с, на сетке № 2 – $2.5 \cdot 10^{-6}$ с, на сетке № 3 – $1.25 \cdot 10^{-6}$ с.

Таблица 6

Параметры сетки для исследования на сходимость

Название сетки	Размер ячеек по оси x и по оси y , мм	Число ячеек в области газа	Число элементов в области заряда
Сетка № 1	10	1 074	875
Сетка № 2	5	4 296	3 500
Сетка № 3	2.5	17 184	14 000

На рис. 3 показано влияние разностной сетки на осевое перемещение (*a*) и радиальное перемещение (*b*) правой нижней угловой точки *A* (см. рис. 1) от времени для топлива с начальным модулем сдвига 90 МПа. Если принять, что кривые 3, полученные на самой мелкой сетке, соответствуют «точному» решению, то видно, что выполняются условия

$$|\Delta x_3(t) - \Delta x_2(t)| < |\Delta x_3(t) - \Delta x_1(t)|, \quad |\Delta y_3(t) - \Delta y_2(t)| < |\Delta y_3(t) - \Delta y_1(t)|,$$

где индекс 1 соответствует решению, полученному на сетке № 1, индекс 2 – на сетке № 2, индекс 3 – на сетке № 3. Начиная с момента времени 0.05 мс измельчение разностной сетки практически не влияет на зависимости $\Delta x(t)$ и $\Delta y(t)$.

Отсутствие влияния разностной сетки на распределение давления вдоль оси камеры сгорания на момент времени 10 мс показано на рис. 4.

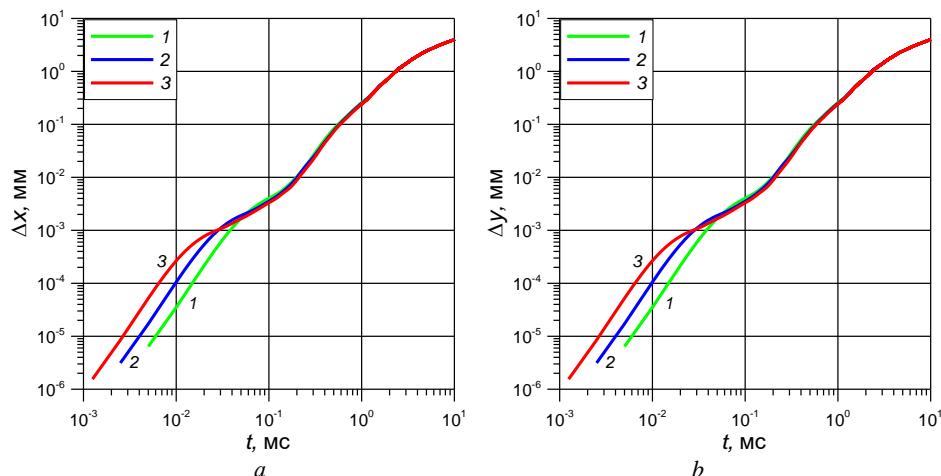


Рис. 3. Влияние сетки на смещение точки *A* во времени: *a* – осевое смещение;

b – радиальное смещение; 1 – сетка № 1, 2 – № 2, 3 – № 3; $G_0 = 90$ МПа

Fig. 3. Effect of the mesh on the displacement of point *A* over time (*a*) axial and (*b*) radial displacements at different meshes: 1, No. 1; 2, No. 2; and 3, No. 3; $G_0 = 90$ MPa

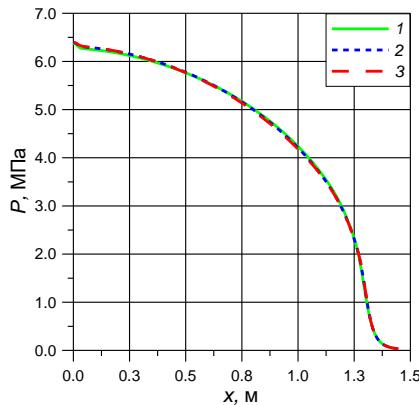


Рис. 4. Влияние сетки на распределение давления вдоль оси канала:

1 – сетка № 1, 2 – № 2, 3 – № 3

Fig. 4. Effect of the mesh on the pressure distribution along the channel axis at different meshes: 1, No. 1; 2, No. 2; and 3, No. 3

Результаты расчетов, приведенные далее, были получены на сетке № 1.

Малые значения начального модуля сдвига, характерные для топлив, имеющих высокую температуру термостатирования, приводят к большим перемещениям поверхности топлива (рис. 5). Уменьшение модуля сдвига с 90 до 30 МПа привело к увеличению смещения точки *A* от положения равновесия более чем в два раза как в осевом направлении, так и в радиальном.

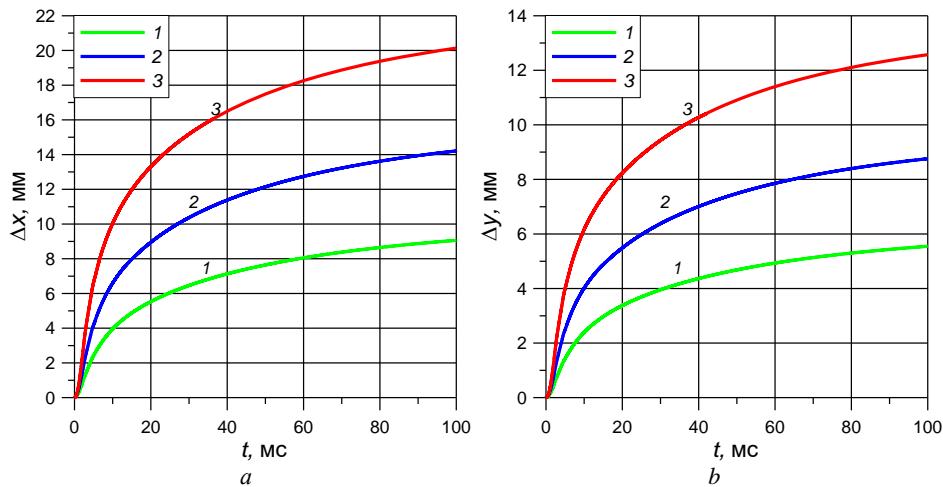


Рис. 5. Влияние начального сдвигового модуля на смещение: *a* – осевое смещение; *b* – радиальное смещение; 1 – $G_0 = 90$ МПа, 2 – 50 МПа, 3 – 30 МПа

Fig. 5. Effect of the initial shear modulus on displacement

(*a*) axial and (*b*) radial displacements at: $G_0 = (1) 90$, (2) 50, and (3) 30 MPa

Для вязкоупругого топлива, в отличие от гиперупругого [14], характерным является монотонное изменение перемещения точек поверхности заряда от времени.

На рис. 6 и 7 показаны поля соответственно осевых и радиальных перемещений внутри заряда ТТ на момент времени 100 мс для начальных модулей сдвига 30, 50 и 90 МПа. Видно, что, как осевое (см. рис. 6), так и радиальное перемещение (см. рис. 7) возрастают по мере продвижения от стенки камеры сгорания к каналу и от левого торца заряда к правому торцу.

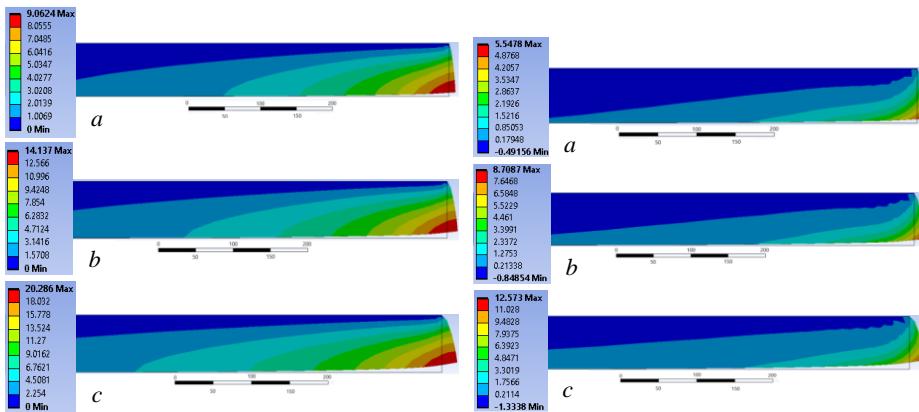


Рис. 6. Осевые перемещения:
a – $G_0 = 90$ МПа, *b* – 50 МПа, *c* – 30 МПа

Fig. 6. Axial displacements
at $G_0 =$ (a) 90, (b) 50, and (c) 30 MPa

Рис. 7. Радиальные перемещения:
a – $G_0 = 90$ МПа, *b* – 50 МПа, *c* – 30 МПа

Fig. 7. Radial displacements
at $G_0 =$ (a) 90, (b) 50, and (c) 30 MPa

Высокие температуры термостатирования ведут, одной стороны, к увеличениюю перемещения точек заряда под действием газодинамической нагрузки, а с другой стороны, ведут к уменьшению напряжения внутри топлива (рис. 8). При этом максимальные напряжения достигаются на правом торце заряда в месте его крепления к корпусу. Снижение модуля сдвига в 3 раза привело к уменьшению максимального напряжения в 1.46 раза.

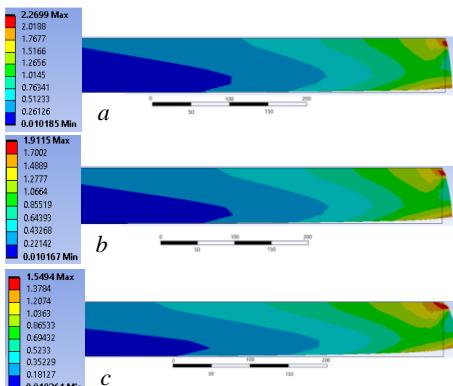


Рис. 8. Эквивалентные напряжения по Мизесу
в МПа: *a* – $G_0 = 90$ МПа, *b* – 50 МПа, *c* – 30 МПа

Fig. 8. Equivalent stresses according to von Mises
in MPa at $G_0 =$ (a) 90, (b) 50, and (c) 30 MPa

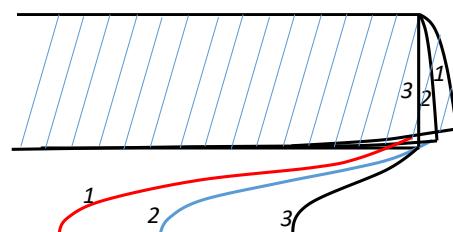


Рис. 9. Положение изолинии $M = 1$:
1 – $G_0 = 30$ МПа, *2* – 90 МПа, *3* – ∞

Fig. 9. Position of isoline $M = 1$ at
 $G_0 =$ (1) 30 MPa, (2) 90 MPa, and (3) ∞

На рис. 9 показано положение звуковых линий в камере сгорания для двух зарядов с начальным модулем сдвига 30 МПа (кривая 1) и 90 МПа (кривая 2) и для заряда без учета деформаций (кривая 3). Уменьшение значения начального модуля сдвига ведет к растяжению звуковой линии вглубь канала.

В табл. 7 приведены значения максимального давления P_{\max} и геометрические параметры канала в зависимости от начального модуля сдвига топлива. Здесь S_r – площадь поверхности топлива, $S_{r,M \leq 1}$ – площадь поверхности горения, ограниченная звуковой линией, $X_{M=1}$, $Y_{M=1}$ – соответственно абсцисса и ордината точки присоединения звуковой линии к образующей канала, F – площадь поперечного сечения канала, проведенного через точку присоединения звуковой линии к образующей канала.

Таблица 7

Геометрические параметры

G_0 , МПа	30	50	90	∞
P_{\max} , МПа	5.37	5.65	5.97	7.04
S_r , см ²	51.36	50.74	50.24	49.34
$S_{r,M \leq 1}$, см ²	49.98	49.97	49.85	49.34
$X_{M=1}$, см	124.95	125.59	125.94	126.0
$Y_{M=1}$, см	4.90	4.78	4.60	4.10
F , см ²	1.046	0.997	0.922	0.733

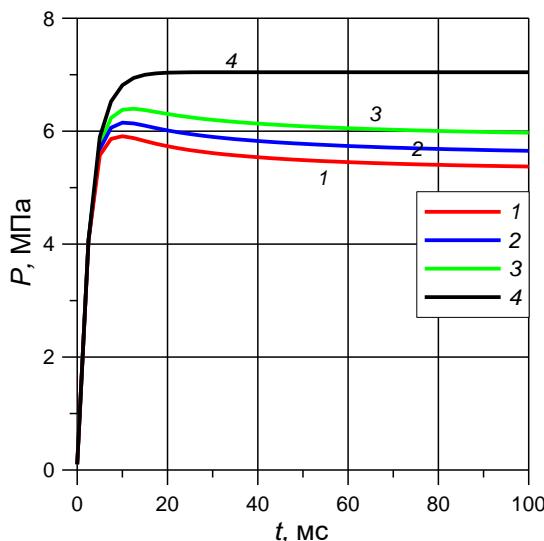


Рис. 10. Изменение максимального давления от времени:

1 – $G_0 = 30$ МПа, 2 – 50 МПа, 3 – 90 МПа, 4 – ∞

Fig. 10. Time variation of the maximum pressure at $G_0 = (1) 30$ MPa, (2) 50 MPa, (3) 90 MPa, and (4) ∞

Увеличение начального модуля сдвига топлива ведет к уменьшению деформации заряда, в результате чего уменьшается значение ординаты точки крепления звуковой линии к образующей поверхности заряда, следствием чего является умень-

шение площади критического сечения и уменьшение поверхности горения, находящейся слева от точки крепления звуковой линии к образующей заряда (см. рис. 9). При увеличении начального модуля сдвига с 30 до 90 МПа площадь горения уменьшается незначительно (в 1.003 раза), в то время как площадь критического сечения уменьшается существенно (в 1.135 раза), в результате чего давление в камере сгорания становится больше.

Неучет деформации заряда ведет к завышению максимального давления в камере сгорания от 18 до 32% (см. табл. 7, правый столбец). На рис. 10 показано изменение максимального давления от времени для разных начальных модулей сдвига ТТ. С увеличением начального модуля сдвига возрастает максимальное давление, что связано с уменьшением площади проходного сечения канала (см. табл. 7). Кривые 1–3 имеют характерный максимум в момент времени, близкий к 10 мс, после которого давление монотонно падает (на 7–10% к моменту времени 100 мс), асимптотически приближаясь к своему стационарному значению, определяемому положением контура заряда. Время 10 мс является характерным временем релаксации материала заряда ТТ (см. рис. 2), за которое относительный модуль сдвига уменьшается со своего максимального значения до значения, близкого к минимальному.

Заключение

Вязкоупругое поведение заряда ТТ под действием нагрузки со стороны продуктов сгорания в начальный период работы БДУ оказывает существенное влияние на внутрибаллистические характеристики БДУ. Повышение температуры терmostатирования заряда ТТ ведет к снижению максимального давления в камере сгорания БДУ за счет увеличения площади проходного сечения канала, связанного с более сильными деформациями заряда за счет более низкого модуля сдвига. Наибольшие осевые и радиальные перемещения наблюдаются по периметру канала на правом торце заряда, причем изменение перемещений во времени происходит монотонно. Зависимость максимального давления в камере сгорания от времени имеет характерный максимум, совпадающий по времени с характерным временем релаксации относительного модуля сдвига, за которое он уменьшается со своего максимального значения до минимального. Начальный модуль сдвига ТТ влияет на форму канала, тем самым изменения поле течения, причем уменьшение начального модуля сдвига ведет к растягиванию звуковой линии вглубь канала.

Список источников

1. Прямоточные воздушно-реактивные двигатели на энергоемких конденсированных материалах / под общ. ред. Л.С. Яновского. М.: ЦИАМ, 2020. 198 с.
2. Милёхин Ю.М., Бурский Г.В., Лавров Г.С., Попов В.С., Садовничий Д.Н. Энергетика и внутренняя баллистика ракетных двигателей на твердом топливе. М.: Наука, 2018. 359 с.
3. Липанов А.М. О влиянии конусности канала заряда на величины внутрибаллистических параметров РДТТ // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 93. С. 131–139. doi: 10.17223/19988621/93/11
4. Davenas A. History of the Development of Solid Rocket Propellant in France // Journal of Propulsion and Power. 1995. V. 11 (2). P. 285–291. doi: 10.2514/3.51423

5. Gany A., Aharon I. Internal Ballistics Considerations of Nozzleless Rocket Motors // Journal of Propulsion and Power. 1999. V. 15 (6). P. 866–873. doi: 10.2514/2.5509
6. Милёхин Ю.М., Ключников А.Н., Попов В.С. Сопряженная задача моделирования внутрибаллистических характеристик бесспловых РДТТ // Физика горения и взрыва. 2013. Т. 49, № 5. С. 77–85.
7. Егоров М.Ю., Егоров Д.М. Численное моделирование внутрикамерных процессов в бесспловом РДТТ // Вестник ПНИПУ. Аэрокосмическая техника. 2012. № 32. С. 36–49.
8. Егоров М.Ю., Егоров Д.М., Некрасов В.И. Моделирование внутрикамерных процессов при срабатывании бессплового ракетного двигателя на твердом топливе // Вестник ПНИПУ. Аэрокосмическая техника. 2012. № 33. С. 19–29.
9. Егоров М.Ю., Егоров Д.М. Моделирование внутрикамерных процессов при срабатывании бессплового ракетного двигателя на твердом топливе. Результаты расчетов // Вестник ПНИПУ. Аэрокосмическая техника. 2012. № 33. С. 30–42.
10. Кириюшин А.Е., Миньков Л.Л. Параллельная реализация решения сопряженной задачи определения внутрибаллистических характеристик двигателей на твердом топливе // Компьютерные исследования и моделирование. 2021. Т. 13, № 1. С. 47–65. doi: 10.20537/2076-7633-2021-13-1-47-65
11. Кириюшин А.Е., Миньков Л.Л. Моделирование внутрикамерных процессов в ракетном двигателе на твердом топливе с учетом движения поверхности горения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 71. С. 90–105. doi: 10.17223/19988621/71/8
12. Zhukov A.P., Belov S.V., Ponomarev S.V. Numerical conjugate problem solution algorithm for fluid-deformable body system // Journal of Physics: Conference Series. 2019. V. 1145. Art. 012053. doi: 10.1088/1742-6596/1145/1/012053
13. Zhukov A.P., Belov S.V., Ponomarev S.V. Determining non-stationary state of solid-propellant rocket engine model based on numerical conjugate problem solution // Journal of Physics: Conference Series. 2020. V. 1459. Art. 012024. doi: 10.1088/1742-6596/1459/1/012024
14. Воропаева И.Г., Козуллин А.А., Миньков Л.Л., Шрагер Э.Р. Нестационарное поведение заряда ТТ бессплового РДТТ под действием газодинамической нагрузки // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 72. С. 48–59. doi: 10.17223/19988621/72/4
15. Li Q., Liu P., He G. Fluid–solid coupled simulation of the ignition transient of solid rocket motor // Acta Astronautica. 2015. V. 110. P. 180–190. doi: 10.1016/j.actaastro.2015.01.017
16. Li Y., Chen X., Xu J., Zhou C., Musa O. Three-dimensional multi-physics coupled simulation of ignition transient in a dual pulse solid rocket motor // Acta Astronautica. 2018. V. 146. P. 46–65. doi: 10.1016/j.actaastro.2018.01.058
17. Li Y., Chen X., Cheng H., Zhao Z. Fluid–structure coupled simulation of ignition transient in a dual pulse motor using overset grid method // Acta Astronautica. 2021. V. 183. P. 211–226. doi: 10.1016/j.actaastro.2021.03.008
18. Chyuan S.W. Dynamic analysis of solid propellant grains subjected to ignition pressurization loading // Journal of Sound and Vibration. 2003. V. 268. P. 465–483. doi: 10.1016/S0022-460X(02)01554-7
19. Guo X., Zhang J.T., Zhang M., Liu L.S., Zhai P.C., Zhang Q.J. Effects of liner properties on the stress and strain along liner/propellant interface in solid rocket motor // Aerospace Science and Technology. 2016. V. 58. P. 594–600. doi: 10.1016/j.ast.2016.09.020
20. Егоров М.Ю., Мормуль Р.В. Математическое моделирование вязкоупругого поведения заряда ТТ при акустической неустойчивости внутрикамерного процесса. Вычислительный эксперимент // Вестник ПНИПУ. Аэрокосмическая техника. 2018. № 54. С. 67–77. doi: 10.15593/2224-9982/2018.54.06
21. Марпл С.Л. (мл.) Цифровой спектральный анализ и его приложения: пер. с англ. М.: Мир, 1990. 584 с.

22. Williams M.L., Landel R.F., Ferry J.D. The Temperature Dependence of Relaxation Mechanisms in Amorphous Polymers and Other Glass-forming Liquids // Journal of the American Chemical Society. 1955. V. 77. P. 3701–3706.
23. Minkov L.L., Shrager E.R., Kiryushkin A.E. Two approaches for simulating the burning surface in gas dynamics // Key Engineering Materials. 2016. V. 685. P. 114–118. doi: 10.4028/www.scientific.net/KEM.685.114
24. Xu J., Chen X., Wang H., Zheng J., Zhou C. Thermo-damage-viscoelastic constitutive model of HTPB composite propellant // International Journal of Solids and Structures. 2014. V. 51. P. 3209–3217. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2014.05.024
25. Adel W.M., Liang G.Z. Analysis of Mechanical Properties for AP/HTPB Solid Propellant under Different Loading Conditions // World Academy of Science, Engineering and Technology International Journal of Aerospace and Mechanical Engineering. 2017. V. 11 (12). P. 1906–1910. doi: 10.5281/zenodo.1314893

References

1. Ed. by Yanovskiy L.S. (2020) *Pryamotochnye vozdushno-reaktivnye dvigateli na energoyomkikh kondensirovannykh materialakh* [Ramjet engines powered by high-energy condensed materials]. Moscow: TsIAM.
2. Milyokhin Yu.M., Burskly G.V., Lavrov G.S., Popov V.S., Sadovnichiy D.N. (2018) *Energetika i vnutrennaya ballistika raketnykh dvigateley na tvyordom toplive* [Energetics and internal ballistics of solid rocket motors]. Moscow: Nauka.
3. Lipanov A.M. (2025) O vliyanii konusnosti kanala zaryada na velichiny vnutriballisticheskikh parametrov RDTT [On the effect of charge channel conicity on the internal ballistic parameters of a solid-propellant rocket motor]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mehanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 93. pp. 131–139. doi: 10.17223/19988621/93/11
4. Davenas A. (1995) History of the development of solid rocket propellant in France. *Journal of Propulsion and Power.* 11(2). pp. 285–291. doi: 10.2514/3.51423
5. Gany A., Aharon I. (1999) Internal ballistics considerations of nozzleless rocket motors. *Journal of Propulsion and Power.* 15(6). pp. 866–873. doi: 10.2514/2.5509
6. Milekhin Y.M., Kluchnikov A.N., Popov V.S. (2013) Coupled problem of modeling the internal ballistics of nozzleless solid rocket motors. *Combustion, Explosion, and Shock Waves.* 49(5). pp. 575–582. doi: 10.1134/S0010508213050092
7. Egorov M.Yu., Egorov D.M. (2012) Chislennoe modelirovanie vnutrikamernykh protsessov v bessoplovom RDTT [Numerical modeling of the processes in the combustion chamber of nozzleless solid propellant rocket engine]. *Vestnik PNIPU. Aerokosmicheskaya tekhnika – PNRPU Aerospace Engineering Bulletin.* 32. pp. 36–49.
8. Egorov M.Yu., Egorov D.M., Nekrasov V.I. (2012) Modelirovanie vnutrikamernykh protsessov pri srabatyvaniyu bessoplovogo raketnogo dvigatelya na tvyordom toplive [Modeling of the processes within the combustion chamber when triggering the nozzleless solid propellant rocket engine]. *Vestnik PNIPU. Aerokosmicheskaya tekhnika – PNRPU Aerospace Engineering Bulletin.* 33. pp. 19–29.
9. Egorov M.Yu., Egorov D.M. (2012) Modelirovanie vnutrikamernykh protsessov pri srabatyvaniyu bessoplovogo raketnogo dvigatelya na tvyordom toplive. Rezul'taty raschetov [Modeling of the processes within the combustion chamber when triggering the nozzleless solid propellant rocket engine. Results of calculations]. *Vestnik PNIPU. Aerokosmicheskaya tekhnika – PNRPU Aerospace Engineering Bulletin.* 33. pp. 30–42.
10. Kiryushkin A.E., Min'kov L.L. (2021) Parallel'naya realizatsiya resheniya sopryazhyonnoy zadachi opredeleniya vnutriballisticheskikh kharakteristik dvigateley na tvyordom toplive [Parallel implementation of numerical algorithm of solving coupled internal ballistics model-

- ling problem for solid rocket motors]. *Komp'yuternye issledovaniya i modelirovaniye – Computer Research and Modeling.* 13(1). pp. 47–65. doi: 10.20537/2076-7633-2021-13-1-47-65
11. Kiryushkin A.E., Min'kov L.L. (2021) Modelirovaniye vnutrikamernykh protsessov v raketnom dvigatele na tvyordom toplive s uchayotom dvizheniya poverkhnosti goreniya [Numerical simulation of intra-chamber processes in a solid rocket motor with account for burning surface motion]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mehanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 71. pp. 90–105. doi: 10.17223/19988621/71/8
 12. Zhukov A.P., Belov S.V., Ponomarev S.V. (2019) Numerical conjugate problem solution algorithm for fluid-deformable body system. *Journal of Physics: Conference Series.* 1145. Article 012053. doi: 10.1088/1742-6596/1145/1/012053
 13. Zhukov A.P., Belov S.V., Ponomarev S.V. (2020) Determining non-stationary state of solid-propellant rocket engine model based on numerical conjugate problem solution. *Journal of Physics: Conference Series.* 1459. Article 012024. doi: 10.1088/1742-6596/1459/1/012024
 14. Voropaeva I.G., Kozulin A.A., Min'kov L.L., Shrager E.R. (2021) Nestatsionarnoe povedenie zaryada TT bessoplavogo RDTT pod deystviem gazodinamicheskoy nagruzki [Non-stationary behavior of a solid propellant charge for nozzles solid rocket motors under gas-dynamic load]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mehanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 72. pp. 48–59. doi: 10.17223/19988621/72/4
 15. Li Q., Liu P., He G. (2015) Fluid–solid coupled simulation of the ignition transient of solid rocket motor. *Acta Astronautica.* 110. pp. 180–190. doi: 10.1016/j.actaastro.2015.01.017
 16. Li Y., Chen X., Xu J., Zhou C., Musa O. (2018) Three-dimensional multi-physics coupled simulation of ignition transient in a dual pulse solid rocket motor. *Acta Astronautica.* 146. pp. 46–65. doi: 10.1016/j.actaastro.2018.01.058
 17. Li Y., Chen X., Cheng H., Zhao Z. (2021) Fluid–structure coupled simulation of ignition transient in a dual pulse motor using overset grid method. *Acta Astronautica.* 183. pp. 211–226. doi: 10.1016/j.actaastro.2021.03.008
 18. Chyuan S.W. (2003) Dynamic analysis of solid propellant grains subjected to ignition pressurization loading. *Journal of Sound and Vibration.* 268. pp. 465–483. doi: 10.1016/S0022-460X(02)01554-7
 19. Guo X., Zhang J.T., Zhang M., Liu L.S., Zhai P.C., Zhang Q.J. (2016) Effects of liner properties on the stress and strain along liner/propellant interface in solid rocket motor. *Aerospace Science and Technology.* 58. pp. 594–600. doi: 10.1016/j.ast.2016.09.020
 20. Egorov M.Yu., Mormul' R.V. (2018) Matematicheskoe modelirovaniye vyazkouprugogo povedeniya zaryada TT pri akusticheskoy neustoychivosti vnutrikamernogo protsessa. Vychislitel'nyy eksperiment [Mathematical modeling of the viscoelastic behavior of a charge of a solid propellant under acoustic instability of an inter chamber process. Computational experiment]. *Vestnik PNIPU. Aerokosmicheskaya tekhnika – PNRPU Aerospace Engineering Bulletin.* 54. pp. 67–77. doi: 10.15593/2224-9982/2018.54.06
 21. Marple Jr.S.L. (1987) *Digital Spectral Analysis with Applications.* Englewood Cliffs: Prentice Hall.
 22. Williams M.L., Landel R.F., Ferry J.D. (1955) The temperature dependence of relaxation mechanisms in amorphous polymers and other glass-forming liquids. *Journal of the American Chemical Society.* 77. pp. 3701–3706. doi: 10.1021/ja01619a008
 23. Minkov L.L., Shrager E.R., Kiryushkin A.E. (2016) Two approaches for simulating the burning surface in gas dynamics. *Key Engineering Materials.* 685. pp. 114–118. doi: 10.4028/www.scientific.net/KEM.685.114
 24. Xu J., Chen X., Wang H., Zheng J., Zhou C. (2014) Thermo-damage-viscoelastic constitutive model of HTPB composite propellant. *International Journal of Solids and Structures.* 51. pp. 3209–3217. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2014.05.024
 25. Adel W.M., Liang G.Z. (2017) Analysis of mechanical properties for AP/HTPB solid propellant under different loading conditions. *Engineering and Technology International Journal of Aerospace and Mechanical Engineering.* 11(12). pp. 1906–1910. doi: 10.5281/zenodo.1314893

Сведения об авторах:

Миньков Леонид Леонидович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: lminkov@ftf.tsu.ru

Гимаева Наталья Радиковна – ассистент физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: natalia.gimaeva@inbox.ru

Диль Диана Викторовна – студент физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: dil.dianochka@mail.ru

Information about the authors:

Min'kov Leonid L. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: lminkov@ftf.tsu.ru

Gimaeva Nataliya R. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: natalia.gimaeva@inbox.ru

Dil' Diana V. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: dil.dianochka@mail.ru

Статья поступила в редакцию 03.06.2025; принята к публикации 08.12.2025

The article was submitted 03.06.2025; accepted for publication 08.12.2025

Научная статья

УДК 532.135

doi: 10.17223/19988621/98/12

Влияние реологических характеристик полимерных расплавов на кинематику их течений в сходящихся каналах

**Михаил Сергеевич Павлов¹, Юрий Алексеевич Павлюк²,
Григорий Владимирович Пышнограй³**

¹ Томский политехнический университет, Томск, Россия

² Алтайский государственный педагогический университет, Барнаул, Россия

³ Алтайский государственный технический университет

им. И.И. Ползунова, Барнаул, Россия

¹ mspavlov@tpu.ru

² pawlyk1996@yandex.ru

³ pyshnograi@mail.ru

Аннотация. Проведено сравнение неоднородных двумерных течений полимерных расплавов с различной структурой макромолекул в каналах с прямоугольным сечением и внезапным сужением. Показано, что при моделировании течения полимера с разветвленной структурой в области входа в щелевой канал возникает возвратное течение, чего не наблюдается в случае течения линейного полимера с близким значением начальной сдвиговой вязкости. Для расчетов использовалась реологическая модель Виноградова–Покровского, поля скоростей и напряжений были получены методом конечных элементов. Полученные результаты демонстрируют хорошее соответствие между теоретическими и экспериментальными данными.

Ключевые слова: реология, вязкость, расплавы полимеров, вихревое течение, реологическое уравнение состояния, двумерные течения, метод конечных элементов

Благодарности: Авторы выражают свою признательность Центру вычислительной механики и компьютерного инжиниринга при ТПУ за помощь в проведении вычислений с использованием вычислительной среды COMSOL Multiphysics.

Для цитирования: Павлов М.С., Павлюк Ю.А., Пышнограй Г.В. Влияние реологических характеристик полимерных расплавов на кинематику их течений в сходящихся каналах // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 98. С. 136–150. doi: 10.17223/19988621/98/12

Original article

Effect of rheologocal properties of polymer melts on kinematics of their flows in converging channeles

Mikhail S. Pavlov¹, Yuriy A. Pavlyuk², Grigorij V. Pyshnograi³

¹ Tomsk Polytechnical University, Tomsk, Russian Federation

² Altai State Pedagogical University, Barnaul, Russian Federation

³Altai State Technical University, Barnaul, Russian Federation

¹mspavlov@tpu.ru

²pawlyk1996@yandex.ru

³pyshnograi@mail.ru

Abstract. This study uses a modified Vinogradov–Pokrovsky rheological model to investigate two-dimensional flows of polymer melts with different molecular structures in channels with a rectangular cross-section and a sudden contraction. The effect of the polymer structure on the flow behavior is analyzed. It is shown that the branched polymer exhibits a reverse flow in the entrance region of the slit channel, whereas the linear polymer does not induce secondary flows. This effect is found to be governed by the polymer relaxation time, i.e., the Weissenberg number.

The profiles of the x - and y -components of the velocity vector are examined in several cross-sections upstream of the slit channel and within the channel. For the branched polymer, the x -component of the velocity takes both positive and negative values, and the y -component is directed away from the channel axis, which indicates the presence of a reverse flow. The branched polymer demonstrates a non-parabolic velocity profile in the slit channel, in contrast to the linear polymer, whose velocity distribution is close to parabolic.

In all the considered cases, the computed velocity profiles are compared with the experimental data. The obtained results confirm the applicability of the modified Vinogradov–Pokrovsky rheological model for describing non-uniform flows of polymer melts, as well as the efficiency of finite-element-based computational methods for simulating unsteady two-dimensional flows of nonlinear viscoelastic media with a rheological law written in a differential form.

Keywords: rheology, viscosity, polymer melts, vortex flow, rheological equation of state, two-dimensional flows, finite element method

Acknowledgments: The authors express their gratitude to the Center for Computational Mechanics and Computer Engineering at Tomsk Polytechnical University for their assistance in performing computations using the COMSOL Multiphysics computing environment.

For citation: Pavlov, M.S., Pavlyuk, Yu.A., Pyshnograi, G.V. (2025) Effect of rheologocal properties of polymer melts on kinematics of their flows in converging channelles. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mehanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 98. pp. 136–150. doi: 10.17223/19988621/98/12

Введение

В процессе переработки большинство полимерных материалов находится в вязкотекучем состоянии. Одна из причин изучения вторичных течений при входе в канал связана с тем, что при экструзии полимерных расплавов часто используются каналы с изменяющейся геометрией. Это приводит к образованию вторичных течений, в которых расплав медленно вращается. Длительное пребывание в таком состоянии может вызвать нежелательное термическое разложение, что негативно влияет на качество конечного продукта. Для успешной переработки полимеров необходимо тщательно проектировать штампы и переходные элементы, а также выбирать подходящие материалы и условия обработки, чтобы предотвратить нежелательные эффекты.

Помимо этого, вихревые потоки связаны с изменениями гидродинамической структуры расплава. Когда энергия упругости во вторичном течении достигает критического уровня напряжения, скорость перед выходом из емкости увеличивается

по сравнению со скоростью выхода. Таким образом, проточная система способствует аккумуляции энергии (усиливается вторичный поток), что в конечном итоге приводит к формированию струй расплава, которые попадают в основной поток, вызывая случайные дефекты экструдата.

Работа [1] была одной из первых, где теоретический анализ двумерного течения был проведен независимо от экспериментов по визуализации. Исследовалось течение в сходящемся канале, образованном двумя параллельными плоскостями, которые сходятся к вершине прямоугольного конуса. Дальнейшие исследования этой проблемы с применением вязкоупругих реологических моделей и процедур возмущений были проведены в работах [2–6]. В этих исследованиях авторы получили схожие результаты, которые отличаются в деталях, вероятно, из-за алгебраических погрешностей. В работе [7] были получены численные решения для областей с закругленными и выступающими углами, что привело к возникновению угловых вторичных течений.

В работе [8] было проведено первое систематическое теоретическое исследование вторичных течений на входе для расплавов полимеров. В ходе исследования изучался процесс плоского резкого сжатия несжимаемой жидкости с высокой сдвиговой вязкостью. Это касалось как ньютоновских, так и неニュтоновских жидкостей со степенным законом. Исследователи обнаружили, что в ньютоновской жидкости в углу резервуара формируется небольшой и слабый вихрь. Однако уменьшение сдвиговой вязкости приводит к уменьшению размеров и интенсивности вихря. Практические расчеты не подтвердили усиление слабого углового вихря, как это наблюдалось в эксперименте. Для преодоления вычислительных трудностей авторы использовали две упрощенные реологические модели, основанные на экспериментальных данных о течении на входе и выходе для типичного образца расплава полистирола [9]. Обе модели имели сдвиговую вязкость, которая зависела от скорости деформации и соответствовала модели Карро.

Хотя вторичные потоки возникают из-за вязкоупругих напряжений, в экспериментах основное внимание уделялось визуализации поля скоростей. Это связано с тем, что изучение области вблизи входящего угла представляет собой сложную задачу [10–14].

В исследовании [15] была использована реологическая модель Гизекуса с восемью параметрами в изотермических условиях для анализа осесимметричного течения несжимаемого полимера LDPE. Авторы провели сравнение ньютоновского (первая итерация – слабое ньютоновское вторичное течение на входе) и полностью вязкоупругого (сходящееся – большое упругое вторичное течение на входе) решений. Результаты были представлены в виде графиков вдоль центральной линии и поперек капилляра. На графиках были показаны сдвиговые и нормальные вязкоупругие дополнительные напряжения вблизи входящего угла. Примечательно, что максимальное значение нормальных напряжений в ньютоновском решении примерно в 12 раз больше, чем в сходящемся решении с вторичными течениями. Из-за столь высокого поперечного нормального напряжения происходила рециркуляция части расплава.

Разработка модели Pom-Pom стала важным шагом в развитии реологических теорий [16]. Модель была протестирована на простых сдвиговых и одноосных расстояниях. Хотя результаты были многообещающими, оставались вопросы относительно того, насколько хорошо модель сможет предсказывать более сложные течения [16–24].

В работах [25, 26] проведены расчеты течений с различными геометрией и реологическими свойствами. Было изучено плоское течение вязкой несжимаемой жидкости в Т-образном канале [25] и трубе с внезапным сужением [26].

В работе [27] была применена модифицированная модель Виноградова–Покровского, адаптированная для анализа трехмерного потока полимерных расплавов LDPE и LLDPE через щель с резким входом 14:1. Эта модель была применена к экспериментальным данным [14]. В ходе исследования [27] было установлено, что выбранная реологическая модель успешно предсказывает особенности течения на входе для обоих расплавов, включая вторичное течение в случае LDPE.

Таким образом, для более глубокого понимания происходящих процессов требуется изучение влияния реологических характеристик полимерного расплава (его начальной сдвиговой вязкости и начального времени релаксации) на гидродинамическую структуру течения в сходящемся канале как в области входа, так и в самом щелевом канале. Это является целью настоящей работы.

Реологическая модель Виноградова–Покровского

Система уравнений динамики на основе модифицированной модели Виноградова–Покровского была сформулирована ранее [28–30]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ \text{Re}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta_1}{\eta_0} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial a_{11}}{\partial x} + \frac{\partial a_{12}}{\partial y} \right), \\ \text{Re}\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\eta_1}{\eta_0} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial a_{12}}{\partial x} + \frac{\partial a_{22}}{\partial y} \right), \\ \text{Wi}\left(\frac{d}{dt} a_{11} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} a_{11} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} a_{12}\right) + (1 + (\kappa - \beta)I) a_{11} &= 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \text{Wi}\beta(a_{11}^2 + a_{12}^2), \quad (1) \\ \text{Wi}\left(\frac{d}{dt} a_{22} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} a_{12} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} a_{22}\right) + (1 + (\kappa - \beta)I) a_{22} &= 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \text{Wi}\beta(a_{22}^2 + a_{12}^2), \\ \text{Wi}\left(\frac{d}{dt} a_{12} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} a_{12} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} a_{22}\right) &= \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - \text{Wi}\beta(a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22}). \end{aligned}$$

где $\text{Re} = \rho U l / \eta_0$ – числа Рейнольдса; $\text{Wi} = (\tau_0 U) / l$ – число Вайсенберга; $U = Q / (\rho l^2)$ – характерная скорость; l – характерная длина; Q – массовый расход; τ_0 – начальное время релаксации; p – гидростатическое давление; η_0 – начальное значение сдвиговой вязкости; η_1 – остаточная сдвиговая вязкость полимера ($\eta_1 \ll \eta_0$); a_{ik} – симметричный тензор анизотропии второго ранга; $I = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ – первый инвариант тензора анизотропии a_{ik} ; $\kappa = 1.2\beta$ и $\beta = \beta(I) = (\beta_0 + p_0 I) / (1 + \sqrt{(p_0 I)})$ – феноменологические параметры модели, которые зависят от первого инварианта тензора анизотропии [31] и учитывают в уравнениях динамики макромолекулы размеры и форму молекулярного клубка.

Эти уравнения далее будут применяться для моделирования течений полимерных расплавов.

Расчетная область

На рис. 1 показана расчетная область, которая состоит из половины резервуара с квадратным поперечным сечением и щелевой матрицы. Резервуар $ABCO$ имеет размеры 50×7 мм. Щелевой канал $ODEF$ – 40×0.5 мм. Расчетная область представляет собой половину экспериментальной установки, размеры которой соотносятся как 14:1, взятой из работы [10]. Длины прямоугольников были выбраны достаточно большими, чтобы избежать влияния областей входа в резервуар и выхода из щелевого канала на результаты решения.

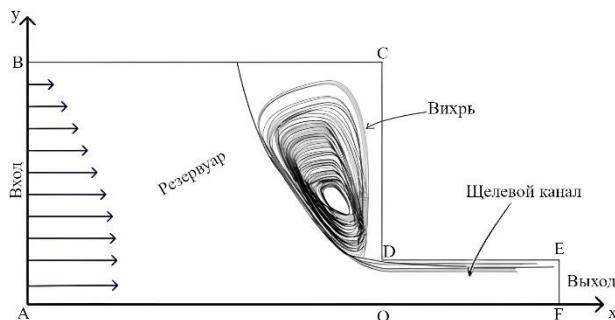


Рис. 1. Расчетная область
Fig. 1. Computational region

На границах резервуара макромолекулы полимера прилипают к стенкам проточного канала, поэтому на отрезках BC , CD и DE скорости $u = v = 0$.

Отрезок AF является осью симметрии, поэтому при $y = 0$ соответствующие частные производные равны нулю. На входе в резервуар компоненты скорости рассчитываются по формулам $v(-50/l, y/7) = 0$ и $u(-50/l, y/7) = 1.5(1 - (y/7)^2)$, где y изменяется от 0 до 7. На выходе из щелевого канала FE использованы граничные условия $p = 0$, $\partial u / \partial x = 0$ и $v = 0$.

В начальный момент времени значения скоростей и напряжений равны нулю. После получения ненулевых значений эти значения использовались в качестве начальных для следующих итераций.

Численный метод

Для нахождения решения использовался метод конечных элементов, который реализован в пакете *COMSOL Multiphysics*. Нелинейность задачи была преодолена путем использования многозадачного режима, что соответствует разделению на физические процессы: гидродинамический и вязкоупругий. В процессе решения гидродинамической задачи были определены поля скоростей и давлений, а в процессе решения вязкоупругой задачи поля дополнительных напряжений. Эти шаги повторяли до достижения необходимой точности, причем на каждой временной итерации требовалось от двух до шести повторений.

Для обоснования применения численного метода для решения систем уравнений в частных производных необходимо анализировать точность, стабильность и сходимость используемого алгоритма. Нередко решение таких задач вызывает не меньше сложностей, чем решение полученных систем нелинейных уравнений.

Поэтому оценку выполняли по упрощенной методике. Для этого выполняли расчеты на разных сетках триангулярного вида: 212, 848, 3 392 и 13 568 элементов. Контролировались площадь вихря и скорость потока в щелевом канале. Второй параметр был учтен, потому что характеристики течения полимера меняются при переходе из резервуара в щелевой канал.

В табл. 1 представлены расчеты при $Wi = 0.8$ и $Re = 0.005$.

Таблица 1

Влияние числа элементов сетки на результаты моделирования

Параметры	Число элементов			
	212	848	3 392	13 568
Площадь вихря	20.27	27.93	30.56	31.17
Значения скорости на оси канала	40.96	28	26	26.29

Поскольку грубая сетка имеет всего 212 элементов, то расчеты существенно отличаются от результатов, полученных с использованием более мелкой сетки. Однако использование более мелких сеток затрачивает значительно больше машинного времени – примерно на два порядка. Поэтому вычисления проводились на сетке с 848 элементами. Сетку с 3 392 элементами использовали для уточнения результатов.

Стабильность достигается неявной методикой и релаксацией при переходе к следующей итерации.

Безразмерное время варьирует от 0 до 100, а относительная точность – 0.001 на каждой временной итерации.

Результаты

Для сопоставления расчетов с экспериментальными данными обратимся к работам [10–14]. В этих работах в качестве материалов использовалось два типа полиэтилена: LDPE (Lupolen 1840 H, Basell) и LLDPE (Escorene LLN 1201 XV, Exxon). LDPE обладает разветвленной молекулярной структурой, а LLDPE – линейной. Характеристические данные о материалах приведены в табл. 2, взятой из работы [14].

Таблица 2

Характеристики материала

Характеристики	LDPE	LLDPE
Плотность, ρ (г/см ³), (25°C)	0.918	0.926
Молярная масса, M_w (кг/моль)	245	150
Начальная сдвиговая вязкость, η_0 (Па), 150°C	54.500	25.500
Модуль упругости, J_e^0 (Па ⁻¹)	7.7×10^{-4}	$< 8 \times 10^{-5}$
Время релаксации, $\eta_0 J_e^0$ (с)	~ 42	< 2

Данные образцы по многим параметрам схожи между собой, однако полимер LLDPE имеет более низкую начальную вязкость и меньшее время релаксации по сравнению с LDPE.

Для выполнения расчетов течения подбирались параметры реологической модели k , β , η_0 и τ_0 . Для этого использовались экспериментальные данные [14]. Для

образца LLDPE получены $\eta_0 = 14\,500$ Па, $\tau_0 = 0.01$ с, а для LDPE $\eta_0 = 18\,500$ Па, $\tau_0 = 0.45$ с. Значения для начальной сдвиговой вязкости отличаются от приведенных в табл. 2, потому что в экспериментах [14] измерения проводили при 180°C. Параметры $\beta = 0.1$ и $k = 0.12$ оказались одинаковыми для обоих образцов полимеров. Значение плотности ρ для полимера LDPE составляет 918 кг/м³, для LLDPE – 926 кг/м³. Расчеты проводились при числах Вайсенберга $Wi = 0.45$ для LDPE, $Wi = 0.01$ для LLDPE, а также при числах Рейнольдса $Re = 6 \cdot 10^{-6}$ для LDPE и $Re = 4 \cdot 10^{-6}$ для LLDPE.

Сначала рассмотрим результаты расчетов для образца LDPE [10, 14]. В этом случае изменение поля скоростей в резервуаре перед входом в плоскую фильтру показано профилями x -компоненты вектора скорости u в различных сечениях: $x = -1, -3, -5, -8$ (рис. 2). По мере приближения к входу в щелевой канал происходит деформация профиля скорости u . При этом максимальная скорость течения полимерного расплава увеличивается, а скорость в промежутке от 0.5 до 7 мм уменьшается и даже становится отрицательной. Результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными [10, 14].

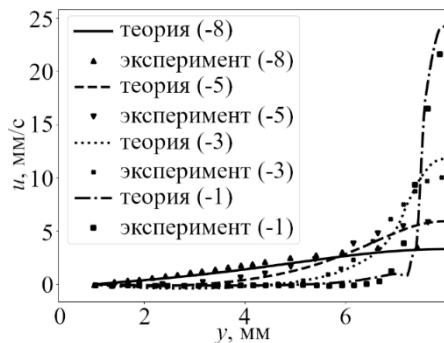


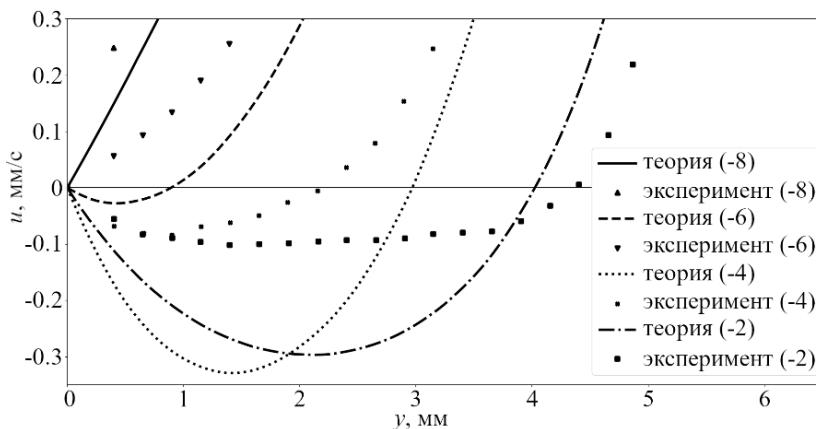
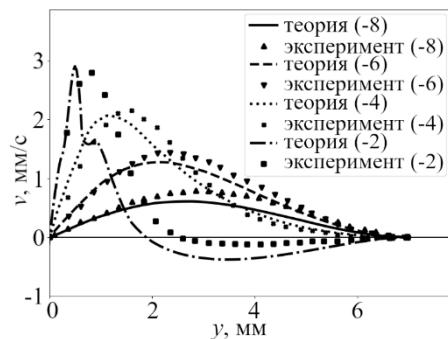
Рис. 2. Зависимость x -компоненты вектора скорости u при разных значениях $x = -1, -3, -5, -8$

Fig. 2. Dependence of the x -component of velocity vector u at different values of $x = -1, -3, -5$, and -8

Для оценки малых скоростей профили продольной скорости в области входа в канал были воспроизведены в увеличенном масштабе (рис. 3).

Из рис. 3 видно, что существуют отрицательные значения x -компоненты вектора скорости. Изменение знака показывает, что эта часть расплава действительно меняет направление движения при приближении к щелевой матрице. То есть поток разворачивается в сторону, противоположную направлению экструзии. Это явление можно объяснить наличием вихрей над плоскостью входа, которые уже были обнаружены в экспериментах [10, 12].

Также для полимера LDPE были получены профили y -компоненты вектора скорости v в резервуаре (рис. 4). В верхней части канала поток закручивается против часовой стрелки, и поэтому y -компонента скорости принимает как положительные значения (при $0 \leq y \leq 2$), так и отрицательные (при $y > 2$). Значения скоростей на этих участках достигают 15% от значений, направленных к центру. Этот результат также указывает на наличие вихревого течения, обнаруженного в экспериментах [10, 12].

Рис. 3. x -компоненты вектора скорости u Fig. 3. x -component of velocity vector u Рис. 4. Зависимость y -компоненты вектора скорости v при разных значениях $x = -1, -3, -5, -8$ Fig. 4. Dependence of the y -component of velocity vector v at different values of $x = -1, -3, -5$, and -8

Далее в ходе исследования были сопоставлены характеристики двух видов полимеров LDPE и LLDPE. Продемонстрировано, как структура полимера влияет на установившийся профиль скорости как в резервуаре, так и в щелевом канале [31].

На рис. 5 изображены поля скоростей для x -компоненты вектора скорости u полимеров LDPE и LLDPE в резервуаре при значении $x = -30$ мм. На рис. 6 изображены поля скоростей для x -компоненты вектора скорости u полимеров LDPE и LLDPE в щелевом канале при значении $x = 30$ мм.

Во всех случаях наблюдается отклонение установившегося профиля скорости от параболического, который характерен для ньютоновских сред. При этом образец LDPE демонстрирует более сильное отклонение от параболического профиля, чем LLDPE. В этом случае полимер LDPE демонстрирует высокую степень соответствия между профилем скорости и экспериментальными данными [14].

Таким образом, профили скоростей для разветвленного полиэтилена LDPE существенно отличаются от параболического, в отличие от полиэтилена с макромолекулами LLDPE, обладающими линейной структурой.

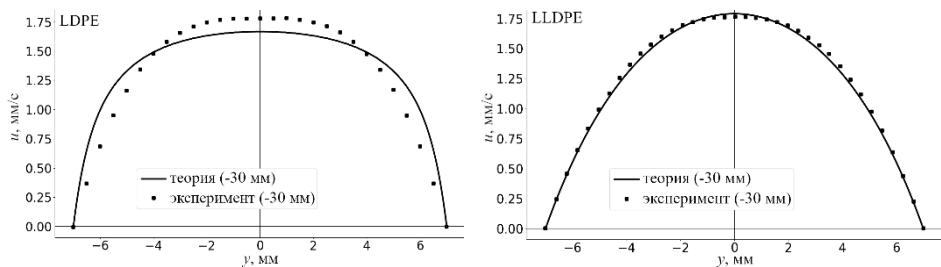


Рис. 5. Зависимость x -компоненты вектора скорости u при $x = -30$ мм для полимеров LDPE и LLDPE

Fig. 5. Dependence of the x -component of velocity vector u at $x = -30$ mm for LDPE and LLDPE polymers

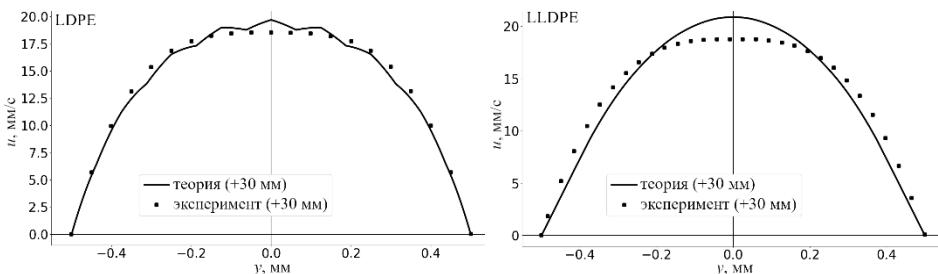


Рис. 6. Зависимость x -компоненты вектора скорости u при $x = 30$ мм для полимеров LDPE и LLDPE

Fig. 6. Dependence of the x -component of velocity vector u at $x = 30$ mm for LDPE and LLDPE polymers

Кроме того, интерес представляет распределение x -компоненты вектора скорости вдоль оси канала. На рис. 7 представлено сравнение x -компоненты вектора скорости вдоль оси симметрии канала с экспериментальными данными [14].

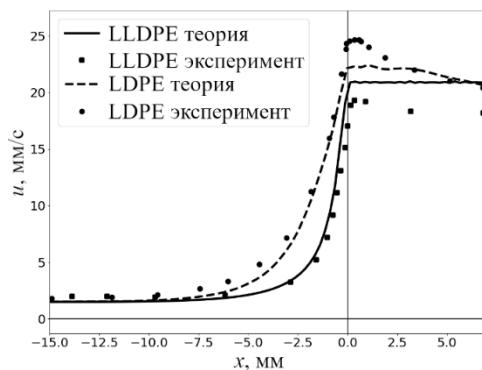


Рис. 7. Распределение x -компоненты вектора скорости вдоль оси канала для двух образцов полимеров

Fig. 7. Variation of the x -component of the velocity vector along the channel axis for two polymer samples

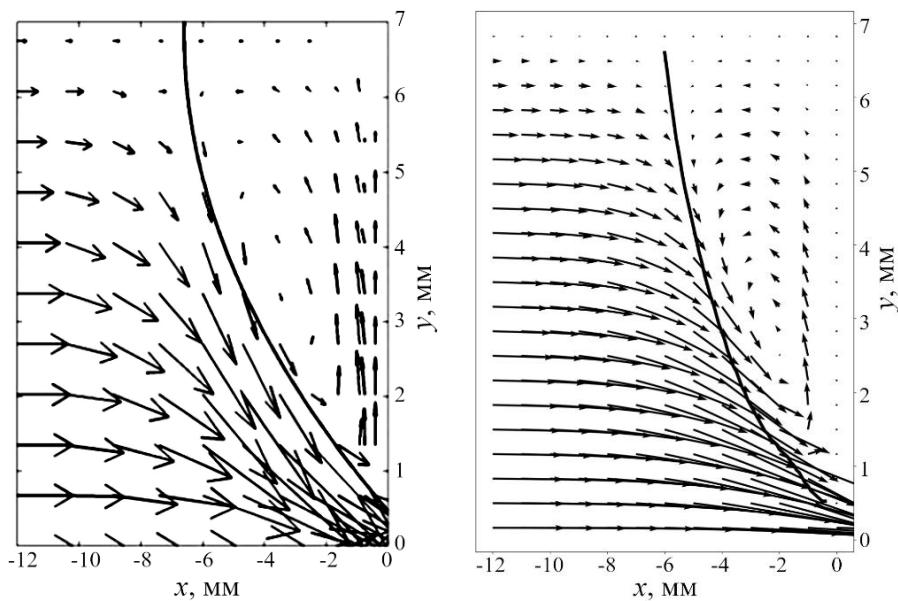


Рис. 8. Поле скоростей во входной области полимера LDPE в сечении $z = 0$ мм: слева – эксперимент; справа – теория

Fig. 8. Velocity field in section $z = 0$ mm for LDPE polymer in the inlet region: experiment (on the left) and theory (on the right)

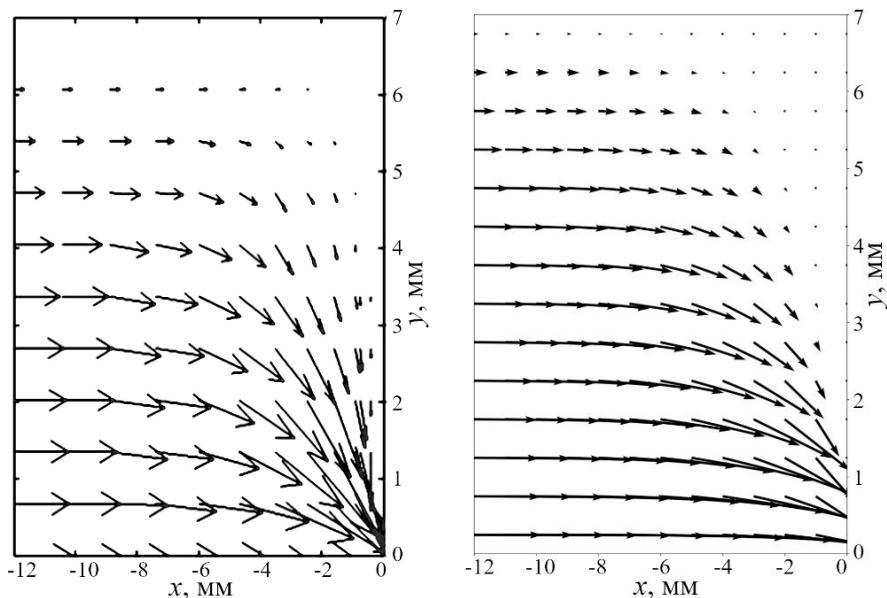


Рис. 9. Поле скоростей во входной области полимера LLDPE в сечении $z = 0$ мм: слева – эксперимент; справа – теория

Fig. 9. Velocity field in section $z = 0$ mm for LLDPE polymer in the inlet region: experiment (on the left) and theory (on the right)

Из рис. 7 видно, что максимальная скорость на оси канала наблюдается в момент входа в щель. Более того, этот максимум выше для разветвленного полиэтилена LDPE. Полученные результаты качественно согласуются с экспериментами.

Далее проведено сравнение вихревых зон для рассматриваемых полимерных образцов. Показано, что при течении полимера LDPE перед входом в щелевой канал образуется выраженный вторичный поток (рис. 8). Полимер LLDPE сохраняет стабильность потока, не создавая вторичных течений (рис. 9). Важно отметить, что значения вязкости у этих образцов отличаются незначительно, поэтому данный эффект связан с временным параметром τ_0 .

Все эти эффекты были выявлены в ходе численного моделирования и хорошо согласуются с результатами экспериментов [14].

Заключение

Таким образом, выполнено исследование течения полимерного расплава в канале с прямоугольным сечением с внезапным сужением с применением реологической модели Виноградова–Покровского. Были определены x - и y -компоненты вектора скорости и проведено сравнение с экспериментальными данными.

Осуществлено сравнение характеристик двух полимерных образцов, имеющих различную молекулярную структуру. Исследовано влияние строения полимера на характер его течения. Выявлено, что при течении разветвленного полимера в углу резервуара над входом в щелевой канал образуется выраженный вторичный поток, который не наблюдается при течении линейного полимера. Установлено, что данный эффект связан с временем релаксации полимера.

Кроме того, в щелевом канале полимер с разветвленной молекулярной структурой имеет непараболический профиль продольной скорости в отличие от образца линейного полимера, имеющего профиль, близкий к параболическому. Согласно расчетам, профиль скорости формируется на значительном расстоянии от входа в щель. Это важно учитывать как при проведении измерений в узких частях каналов, так и при проведении вычислительных экспериментов.

Таким образом, исходя из полученных результатов, можно ожидать, что модифицированная реологическая модель Виноградова–Покровского окажется также применима и для других типов геометрии каналов, например Т-образного канала, цилиндрического канала, прямоугольного канала с препятствием и др., что будет сделано в будущих исследованиях. Кроме того, результаты показывают эффективность применения вычислительных методов, основанных на методе конечных элементов, для расчета нестационарных двумерных течений нелинейных вязкоупругих сред с реологическим законом поведения в дифференциальной форме. Также разработанная математическая модель может послужить отправной точкой для будущих исследований, направленных на изучение того, как геометрия канала, молекулярное строение полимера и температура влияют на характер течения в сужающихся каналах.

Список источников

1. Langlois W.E. Steady flow of slightly visco-elastic fluids: Dissertation / Brown University, 1957.
2. Schümm P. Zum Fließverhalten Nicht-Newtonsscher Flüssigkeiten in konischen Düsen // Rheologica Acta. 1967. V. 6. P. 192–200. doi: 10.1007/BF01969173

3. Schümm P. Die Strömung viskoelastischer Flüssigkeiten in einem konvergenten Kanal // *Rheologica Acta*. 1968. V. 7. P. 271–277. doi: 10.1007/BF01985789
4. Strauß K., Kinast R. Sekundärströmungseffekte beim Strömen viskoelastischer Flüssigkeiten durch Keilspaltdüsen // *Colloid and Polymer Science*. 1974. V. 252. P. 753–758. doi: 10.1007/BF01554502
5. Strauss K. Die Strömung einer einfachen viskoelastischen Flüssigkeit in einem konvergenten Kanal // *Acta Mechanica*. 1974. V. 20. P. 233–246. doi: 10.1007/BF01175926
6. Strauß K. Die Strömung einer einfachen viskoelastischen Flüssigkeit in einem konvergenten Kanal // *Acta Mechanica*. 1975. V. 21. P. 141–152. doi: 10.1007/BF01172833
7. Datta A.B., Strauß K. Slow flow of a viscoelastic fluid through a contraction // *Rheologica Acta*. 1976. V. 15. P. 403–410. doi: 10.1007/BF01574495
8. Mitsoulis E., Vlachopoulos J., Mirza F.A. Numerical simulation of entry and exit flows in slit dies // *Polymer Engineering & Science*. 1984. V. 24 (9). P. 707–715.
9. Mitsoulis E., Vlachopoulos J., Mirza F.A. A numerical study of the effect of normal stresses and elongational viscosity on entry vortex growth and extrudate swell // *Polymer Engineering & Science*. 1985. V. 25 (1). P. 677–689.
10. Münstedt H., Schwetz M., Heindl M., Schmidt M. Influence of molecular structure on secondary flow of polyolefin melts as investigated by laser-Doppler velocimetry // *Rheologica Acta*. 2001. V. 40. P. 384–394. doi: 10.1007/s003970000160
11. Mitsoulis E., Schwetz M., Münstedt H. Entry flow of LDPE melts in a planar contraction // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2003. V. 111 (1). P. 41–61. doi: 10.1016/s0377-0257(03)00012-0
12. Merten A., Schwetz M., Münstedt H. Laser-Doppler velocimetry – a powerful tool to investigate the flow behavior of polymer melts // *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. 2003. V. 8. P. 283–288.
13. Hertel D., Münstedt H. Dependence of the secondary flow of a low-density polyethylene on processing parameters as investigated by laser-Doppler velocimetry // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2008. V. 153 (2-3). P. 73–81. doi: 10.1016/j.jnnfm.2007.12.004
14. Hertel D., Valette R., Münstedt H. Three-dimensional entrance flow of a low-density polyethylene (LDPE) and a linear low-density polyethylene (LLDPE) into a slit die // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2008. V. 153 (2-3). P. 82–94. doi: 10.1016/j.jnnfm.2007.11.010
15. Hulsen M.A., van der Zanden J. Numerical simulation of contraction flows using a multi-mode Giesekus model // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 1991. V. 38 (2-3). P. 183–221. doi: 10.1016/0377-0257(91)83005-O
16. McLeish T.C.B., Larson R.G. Molecular constitutive equations for a class of branched polymers: the Pom-Pom polymer // *Journal of Rheology*. 1998. V. 42 (1). P. 81–110. doi: 10.1122/1.550933
17. Bishko G.B., McLeish T.C.B., Harlen O.G., Larson R.G. Theoretical molecular rheology of branched polymers in simple and complex flows: the Pom-Pom model // *Physical Review Letters*. 1997. V. 79 (12). P. 2352–2355. doi: 10.1103/PhysRevLett.79.2352
18. Bishko G.B., Harlen O.G., McLeish T.C.B., Nicholson T.M. Numerical simulation of the transient flow of branched polymer melts through a planar contraction using the ‘Pom-Pom’ model // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 1999. V. 82 (2-3). P. 255–273. doi: 10.1016/S0377-0257(98)00165-7
19. Clemeur N., Rutgers R., Debbaut B. Numerical evaluation of three dimensional effects in planar flow birefringence // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2004. V. 123 (2). P. 105–120. doi: 10.1016/j.jnnfm.2004.07.002
20. Sirakov I., Ainser A., Haouche M., Guillet J. Three-dimensional numerical simulation of viscoelastic contraction flows using the Pom-Pom model differential constitutive model // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2005. V. 126 (2). P. 163–173. doi: 10.1016/j.jnnfm.2004.08.013

21. Sousa P.C., Coelho P.M., Oliveira M.S.N., Alves M.A. Effect of the contraction ratio upon viscoelastic fluid flow in three-dimensional square-square contractions // *Chemical Engineering Science*. 2011. V. 66 (5). P. 998–1009. doi: 10.1016/j.ces.2010.12.011
22. Griebel M., Rutgers A. Multiscale simulations of three-dimensional viscoelastic flows in a square-square contraction // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2014. V. 205. P. 41–63. doi: 10.1016/j.jnnfm.2014.01.004
23. Wang X., Chen R., Wang M., Jin G. Validation of double convected Pom-Pom model with particle image velocimetry technique // *Polymer Engineering and Science*. 2015. V. 55 (8). P. 1897–1905. doi: 10.1002/pen.24030
24. Clemeur N., Rutgers R.P., Debbaut B. On the evaluation of some differential formulations for the pom-pom constitutive model // *Rheologica Acta*. 2003. V. 42. P. 217–231. doi: 10.1007/s00397-002-0279-2
25. Борзенко Е.И., Дьякова О.А. Исследование течения вязкой жидкости в т-образном канале с условиями прилипание–скольжение на твердой стенке // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 4 (42). С. 58–69. doi: 10.17223/19988621/42/6
26. Борзенко Е.И., Рыльцева К.Е., Шрагер Г.Р. Численное исследование характеристик течения неньютоновской жидкости в трубе с внезапным сужением // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 58. С. 56–70. doi: 10.17223/19988621/58/5
27. Кошелев К.Б., Пышнограй Г.В., Толстых М.Ю. Моделирование трехмерного течения полимерного расплава в сходящемся канале с прямоугольным сечением // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2015. № 3. С. 3–11.
28. Мерзликина Д.А., Пышнограй Г.В., Пивоконский Р., Филип П. Реологическая модель для описания вискозиметрических течений расплавов разветвленных полимеров // Инженерно-физический журнал. 2016. Т. 89, № 3. С. 643–651.
29. Макарова М.А., Малыгина А.С., Пышнограй Г.В., Рудаков Г.О. Моделирование реологических свойств расплавов полиэтиленов при их одноосном растяжении // Вычислительная механика сплошных сред. 2020. Т. 13, № 1. С. 73–82. doi: 10.7242/1999-6691/2020.13.1.6
30. Капустина Л.В., Павлюк Ю.А., Пышнограй Г.В. Гидродинамическая структура вторичных потоков расплавов полимеров в каналах с изменением геометрии // Южно-Сибирский научный вестник. 2023. № 6 (52). С. 101–105. doi: 10.25699/SSSB.2023.52.6.012
31. Гусев А.С., Макарова М.А., Пышнограй Г.В. Мезоскопическое уравнение состояния полимерных сред и описание динамических характеристик на его основе // Инженерно-физический журнал. 2005. Т. 78, № 5. С. 55–61.

References

1. Langlois W.E. (1957) *Steady Flow of Slightly Visco-elastic Fluids*. Dissertation. Brown University.
2. Schümmel P. (1967) Zum Fließverhalten Nicht-Newtonsscher Flüssigkeiten in konischen Düsen. *Rheologica Acta*. 6. pp. 192–200. doi: 10.1007/BF01969173
3. Schümmel P. (1968) Die Strömung viskoelastischer Flüssigkeiten in einem konvergenten Kanal. *Rheologica Acta*. 7. pp. 271–277. doi: 10.1007/BF01985789
4. Strauß K., Kinast R. (1974) Sekundärströmungseffekte beim Strömen viskoelastischer Flüssigkeiten durch Keilspaltdüsen. *Colloid and Polymer Science*. 252. pp. 753–758. doi: 10.1007/BF01554502
5. Strauss K. (1974) Die Strömung einer einfachen viskoelastischen Flüssigkeit in einem konvergenten Kanal. *Acta Mechanica*. 20. pp. 233–246. doi: 10.1007/BF01175926
6. Strauss K. (1975) Die Strömung einer einfachen viskoelastischen Flüssigkeit in einem konvergenten Kanal. *Acta Mechanica*. 21. pp. 141–152. doi: 10.1007/BF01172833

7. Datta A.B., Strauß K. (1976) Slow flow of a viscoelastic fluid through a contraction. *Rheologica Acta.* 15. pp. 403–410. doi: 10.1007/BF01574495
8. Mitsoulis E., Vlachopoulos J., Mirza F.A. (1984) Numerical simulation of entry and exit flows in slit dies. *Polymer Engineering & Science.* 24(9). pp. 707–715. doi: 10.1002/pen.760240913
9. Mitsoulis E., Vlachopoulos J., Mirza F.A. (1985) A numerical study of the effect of normal stresses and elongational viscosity on entry vortex growth and extrudate swell. *Polymer Engineering & Science.* 25(1). pp. 677–689. doi: 10.1002/pen.760251106
10. Münstedt H., Schwetz M., Heindl M., Schmidt M. (2001) Influence of molecular structure on secondary flow of polyolefin melts as investigated by laser-Doppler velocimetry. *Rheologica Acta.* 40. pp. 384–394. doi: 10.1007/s003970000160
11. Mitsoulis E., Schwetz M., Münstedt H. (2003) Entry flow of LDPE melts in a planar contraction. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics.* 111(1). pp. 41–61. doi: 10.1016/s0377-0257(03)00012-0
12. Merten A., Schwetz M., Münstedt H. (2003) Laser-Doppler velocimetry – a powerful tool to investigate the flow behavior of polymer melts. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering.* 8. pp. 283–288.
13. Hertel D., Münstedt H. (2008) Dependence of the secondary flow of a low-density polyethylene on processing parameters as investigated by laser-Doppler velocimetry. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics.* 153(2-3). pp. 73–81. doi: 10.1016/j.jnnfm.2007.12.004
14. Hertel D., Valette R., Münstedt H. (2008) Three-dimensional entrance flow of a low-density polyethylene (LDPE) and a linear low-density polyethylene (LLDPE) into a slit die. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics.* 153(2-3). pp. 82–94. doi: 10.1016/j.jnnfm.2007.11.010
15. Hulsen M.A., van der Zanden J. (1991) Numerical simulation of contraction flows using a multi-mode Giesekus model. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics.* 38(2-3). pp. 183–221. doi: 10.1016/0377-0257(91)83005-O
16. McLeish T.C.B., Larson R.G. (1998) Molecular constitutive equations for a class of branched polymers: the Pom-Pom polymer. *Journal of Rheology.* 42(1). pp. 81–110. doi: 10.1122/1.550933
17. Bishko G.B., McLeish T.C.B., Harlen O.G., Larson R.G. (1997) Theoretical molecular rheology of branched polymers in simple and complex flows: the Pom-Pom model. *Physical Review Letters.* 79(12). pp. 2352–2355. doi: 10.1103/PhysRevLett.79.2352
18. Bishko G.B., Harlen O.G., McLeish T.C.B., Nicholson T.M. (1999) Numerical simulation of the transient flow of branched polymer melts through a planar contraction using the ‘Pom-Pom’ model. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics.* 82(2-3). pp. 255–273. doi: 10.1016/S0377-0257(98)00165-7
19. Clemeur N., Rutgers R., Debbaut B. (2004) Numerical evaluation of three dimensional effects in planar flow birefringence. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics.* 123(2). pp. 105–120. doi: 10.1016/j.jnnfm.2004.07.002
20. Sirakov I., Ainser A., Haouche M., Guillet J. (2005) Three-dimensional numerical simulation of viscoelastic contraction flows using the Pom-Pom model differential constitutive model. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics.* 126(2). pp. 163–173. doi: 10.1016/j.jnnfm.2004.08.013
21. Sousa P.C., Coelho P.M., Oliveira M.S.N., Alves M.A. (2011) Effect of the contraction ratio upon viscoelastic fluid flow in three-dimensional square-square contractions. *Chemical Engineering Science.* 66(5). pp. 998–1009. doi: 10.1016/j.ces.2010.12.011
22. Griebel M., Rutgers A. (2014) Multiscale simulations of three-dimensional viscoelastic flows in a square-square contraction. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics.* 205. pp. 41–63. doi: 10.1016/j.jnnfm.2014.01.004
23. Wang X., Chen R., Wang M., Jin G. (2015) Validation of double convected Pom-Pom model with particle image velocimetry technique. *Polymer Engineering and Science.* 55(8). pp. 1897–1905. doi: 10.1002/pen.24030

24. Clemeur N., Rutgers R.P., Debbaut B. (2003) On the evaluation of some differential formulations for the pom-pom constitutive model. *Rheologica Acta.* 42. pp. 217–231. doi: 10.1007/s00397-002-0279-2
25. Borzenko E.I., D'yakova O.A. (2016) Issledovanie techeniya vyazkoy zhidkosti v T-obraznom kanale s usloviyami prilipanie - skol'zhenie na tverdoy stenke [Investigation of viscous fluid flow in T-shaped channel with no slip/slip boundary conditions on the solid wall]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mehanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 4(42). pp. 58–69. doi: 10.17223/19988621/42/6
26. Borzenko E.I., Ryltseva K.E., Shrager G.R. (2019) Chislennoe issledovanie kharakteristik techeniya nen'yutonovskoy zhidkosti v trube s vnezapnym suzheniem [Numerical investigation of non-Newtonian fluid flow through a pipe sudden contraction]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mehanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 58. pp. 56–70. doi: 10.17223/19988621/58/5
27. Koshelev K.B., Pyshnograi G.V., Tolstykh M.Y. (2015) Modeling of the three-dimensional flow of polymer melt in a convergent channel of rectangular cross-section. *Fluid Dynamics.* 50(3). pp. 315–321. doi: 10.1134/S0015462815030011
28. Merzlikina D.A., Pyshnograi G.V., Pivokonsky R., Philip P. (2016) Rheological model for describing viscometric flows of melts of branched polymers. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics.* 89. pp. 652–659. doi: 10.1007/s10891-016-1423-7
29. Makarova M.A., Malygina A.S., Pyshnograi G.V., Rudakov G.O. (2021) Simulation of rheological properties of polyethylene melts under uniaxial tension. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics.* 62. pp. 1063–1071. doi: 10.1134/S0021894421070142
30. Kapustina L.V., Pavlyuk Yu.A., Pyshnograi G.V. (2024) Hydrodynamic structure of secondary polymer melt flows in channels with changing geometry. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering.* doi: 10.1134/S0040579524601006
31. Gusev A.S., Makarova M.A., Pyshnograi G.V. (2005) Mesoscopic equation of state of polymer systems and description of the dynamic characteristics based on it. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics.* 78. pp. 892–898. doi: 10.1007/s10891-006-0009-1

Сведения об авторах:

Павлов Михаил Сергеевич – кандидат физико-математических наук, доцент Томского политехнического университета (Томск, Россия). E-mail: mspavlov@tpu.ru

Павлюк Юрий Алексеевич – аспирант Алтайского государственного педагогического университета (Барнаул, Россия). E-mail: pawlyk1996@yandex.ru

Пышнограй Григорий Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор Алтайского государственного технического университета им. И.И. Ползунова (Барнаул, Россия). E-mail: pyshnograi@mail.ru

Information about the authors:

Pavlov Mikhail S. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk Polytechnical University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: mspavlov@tpu.ru

Pavlyuk Yuriy A. (Altai State Pedagogical University, Barnaul, Russian Federation). E-mail: pawlyk1996@yandex.ru

Pyshnograi Grigory V. (Doctor of Physics and Mathematics, Altai State Technical University, Barnaul, Russian Federation). E-mail: pyshnograi@mail.ru

Статья поступила в редакцию 11.12.2024; принята к публикации 08.12.2025

The article was submitted 11.12.2024; accepted for publication 08.12.2025

Научная статья

УДК 519.6, 532.5

doi: 10.17223/19988621/98/13

Численное моделирование влияния солнечного излучения на аэродинамику, теплообмен и перенос примеси в уличном каньоне

Александр Васильевич Старченко¹, Евгений Александрович Данилкин²,
Дмитрий Викторович Лещинский³

^{1, 2, 3} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ starch@math.tsu.ru

² ugin@math.tsu.ru

³ 360flip182@gmail.com

Аннотация. Исследуется влияние солнечного излучения на аэродинамику, теплообмен и перенос пассивной легкой примеси в 3D уличном каньоне. Для численного исследования привлекаются уравнения Рейнольдса, k-eps модель турбулентности с учетом плавучести, рассматривается теплообмен не только внутри уличного каньона, но и в ограждающих его твердых поверхностях. Результаты расчетов показали, что солнечный нагрев боковых поверхностей каньона может приводить к заметному изменению картины течения внутри каньона, которое сопровождается ухудшением качества воздуха в зоне дыхания пешеходов (до 2 м от дна каньона).

Ключевые слова: турбулентное неизотермическое течение, плавучесть, солнечное излучение, сопряженный теплообмен, уличный каньон, перенос примеси

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2025-1728/2).

Для цитирования: Старченко А.В., Данилкин Е.А., Лещинский Д.В. Численное моделирование влияния солнечного излучения на аэродинамику, теплообмен и перенос примеси в уличном каньоне // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 98. С. 151–165. doi: 10.17223/19988621/98/13

Original article

Numerical simulation of the solar radiation effect on the aerodynamics, heat exchange, and pollution transfer in a street canyon

Aleksandr V. Starchenko¹, Evgeniy A. Danilkin², Dmitriy V. Leshchinskij³

^{1, 2, 3} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ starch@math.tsu.ru

²ugin@math.tsu.ru
³360flip182@gmail.com

Abstract. This work investigates the influence of solar radiation on the aerodynamics, heat transfer, and pollutant dispersion in a street canyon. The main purpose of this study is to develop a mathematical model of aerodynamics, coupled heat transfer, and pollutant dispersion, as well as to examine the impact of solar heating on air quality in the pedestrian breathing zone (up to 2 m from the bottom of the canyon). The microscale model M2UE has been extended with a module for calculating coupled heat transfer between the ambient environment, building walls, and road surfaces. The study is based on the Reynolds equations and the $k-\epsilon$ turbulence model with buoyancy effects, considering heat transfer both inside the canyon and within the solid enclosing surfaces. A numerical experiment was conducted to simulate the impact of solar heating of the windward building wall at various solar elevation angles. The results show that solar heating of the canyon walls significantly modifies the airflow structure, leading to deteriorated air quality in the pedestrian zone. It is found that the highest pollutant concentrations occur near the windward (eastern) side of the canyon when it is partially (~50%) or fully (~100%) heated by solar radiation during the daytime, whereas higher concentrations near the leeward side are observed in the absence of solar heating or under partial heating from the setting sun.

Keywords: non-isothermal turbulent flow, buoyancy, solar radiation, conjugate heat transfer, street canyon, pollution transfer

Acknowledgments: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement No. 075-02-2025-1728/2).

For citation: Starchenko, A.V., Danilkin, E.A., Leshchinskiy, D.V. (2025) Numerical simulation of the solar radiation effect on the aerodynamics, heat exchange, and pollution transfer in a street canyon. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mehanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 98. pp. 151–165. doi: 10.17223/19988621/98/13

Введение

Одним из эффективных способов изучения процессов распространения автомобильных выбросов в городах является применение микромасштабных математических моделей [1], описывающих движение воздуха и транспортировку загрязняющих веществ. С помощью таких моделей можно предсказать распространение автомобильных выбросов в зависимости от конфигурации городской застройки и погодных условий. В последнее десятилетие при численном моделировании движения воздуха и распространения загрязняющих веществ в уличных каньонах исследователи из разных стран учитывали не только сложную аэродинамику турбулентного потока, но и неизотермический характер рассматриваемого процесса с учетом влияния силы плавучести.

В [2] авторы исследовали влияние отношения размеров уличного каньона (отношение высоты к ширине каньона, AR) и реального солнечного нагрева на конвективный теплоперенос и вентиляцию в полномасштабном двумерном уличном каньоне. Для анализа использовались результаты экспериментов, проводимых в ветровом туннеле, в котором перпендикулярно основному потоку располагались модели уличных каньонов с AR = 1.1, 2.4, 4, и 5.67. Также для исследования привлекался коммерческий пакет вычислительной гидродинамики и теплопередачи

ANSYS Fluent. При моделировании использовались уравнения Рейнольдса для несжимаемой жидкости, RNG k-eps модель турбулентности, метод пристеночных функций. Влияние силы плавучести в уравнениях движения рассматривалось в приближении Буссинеска. Для учета падающего солнечного излучения применялась модель трассировки солнечных лучей (Solar Ray Tracing Model) и P1-приближение радиационной модели переноса излучения. На границах учитывались конвективный теплообмен и рассеяние излучения. Перенос тепла внутри стен не рассматривался. Авторами получено хорошее согласование результатов моделирования и результатов эксперимента в ветровом туннеле. В работе было установлено, что при $AR = 1.1$ и 2.4 в 2D каньоне образуется один главный вихрь, способствующий хорошей вентиляции, в то время как при $AR = 4$ и $5,67$ образуется двухвихревая структура движения. Характер течения в уличном каньоне существенно зависит от условий солнечного нагрева поверхностей. Нагрев подветренной стороны каньона и его дна заметно усиливает вентиляцию. При значительном нагреве наветренной стороны или ее части (в глубоком каньоне) основной вихрь в каньоне деформируется, и в нижней части появляется дополнительный вихрь, способствующий накоплению примеси в зоне дыхания пешеходов [2].

В [3, 4] отмечается, что солнечный нагрев поверхностей глубокого уличного каньона ведет к образованию сложной многовихревой структуры течения в рассматриваемой области и чаще всего ухудшает проветриваемость внутри этого элемента городской застройки. Коэффициент конвективного теплообмена распределен неравномерно по поверхностям и зависит от солнечного излучения и геометрии каньона. Кроме того, отмечается, что при слабом ветре и низком уровне турбулентности температура внутри каньона увеличивается на $1\text{--}2^{\circ}\text{C}$. В [3, 4] использовались те же вычислительные технологии, что и в [2].

В [5] выполнено численное исследование влияния солнечного нагрева в уличном каньоне с $AR = 1$. Результаты показали, что важным является рассмотрение процессов аэродинамики и теплообмена в трехмерной постановке, поскольку структура течения при определенных условиях смешанной конвекции и излучения может значительно меняться в поперечном основному течению направлении с образованием двух- или многовихревых структур. Влияние естественной конвекции значительно при скорости ветра менее 2 м/с . В [5] при моделировании солнечного нагрева учитывались процессы теплообмена в ограничивающих каньон поверхностях. Также использовался пакет ANSYS Fluent.

В [6] влияние солнечного нагрева наветренной стены уличного каньона исследовалось путем задания повышенной температуры подсвечиваемой Солнцем части поверхности стенки. Использовался разрабатываемый авторами оригинальный программный комплекс M2UE (Microscale Model of Urban Environment) [1], в котором численно решаются трехмерные уравнения Рейнольдса, замкнутые с использованием двухпараметрической модели турбулентности, учитывающей влияние силы плавучести, уравнения теплообмена и переноса примеси. Результаты расчетов показали, что при скорости ветра 1 м/с нагрев наветренной образующей уличного каньона (температура стенки больше на 20°) приводит к изменению структуры течения и характера распространения примеси внутри каньона. Нагрев половины наветренной стенки уличного каньона приводит к изменению структуры течения и значительному увеличению максимальной концентрации примеси в каньоне и средней концентрации в зоне дыхания пешеходов.

Таким образом, проведенный обзор литературы показывает, что при численном моделировании движения воздуха и переноса примеси в уличном каньоне целесообразно наряду с осредненными по Рейнольдсу трехмерными уравнениями Навье–Стокса с динамическим турбулентным замыканием и учетом силы плавучести учитывать сопряженный теплообмен между окружающей средой, стенами зданий и дорожным полотном. По проведеному обзору литературы можно заключить, что влияние температурной неоднородности на ограничивающих рассматривающую область поверхностях на структуру турбулентного течения – существенно. Исходя из этого, возникает потребность в более полном моделировании конвективного теплопереноса, а это напрямую связано с моделированием влияния солнечного излучения. Такой подход позволит более точно описать сопряженные аэродинамические и тепловые процессы, протекающие в уличных каньонах при солнечном нагреве.

Целями работы являются:

- 1) разработка физико-математической модели турбулентного неизотермического течения с плавучестью, сопряженного радиационно-конвективного теплообмена и переноса легкой инертной примеси в уличном каньоне;
- 2) численное исследование совместного влияния слабого ветра и частичного / полного солнечного нагрева наветренной стороны уличного каньона, в нижней части которого поступает примесь от выбросов автомобильного транспорта, на качество воздуха в зоне дыхания пешеходов.

Физическая постановка задачи

Рассматривается стационарное неизотермическое турбулентное течение несжимаемой вязкой среды в уличном каньоне, образованном двумя протяженными зданиями, между которыми находится широкая дорога. Ось Ox_1 ориентирована на восток, Ox_2 – на север, Ox_3 – вертикально вверх (рис.1). Движение набегающего воздушного потока над зданиями направлено вдоль оси Ox_1 . Теплофизические свойства, степень черноты стен, крыш зданий и дорожного полотна могут различаться. Высота зданий (H) соизмерима с шириной улицы (W). Длина уличного каньона L на порядок превышает высоту и ширину.

В результате солнечного излучения в светлое время суток различные участки образующих уличного каньона в рассматриваемых условиях могут последовательно нагреваться: сначала подветренная сторона, потом дно и наветренная сторона каньона.

Стены и дно уличного каньона могут иметь переменную температуру, отличную от температуры окружающей среды. Это возможно в результате антропогенной деятельности или солнечного нагрева. Для представления влияния силы плавучести в уравнениях движения используется приближение Буссинеска–Обербека, применение которого оправдано при небольшом изменении температуры воздуха внутри рассматриваемой области, порядка несколько градусов. Внизу уличного каньона, ближе к середине, находятся линейные источники выбросов автотранспорта, расположенные на небольшой высоте над поверхностью и ориентированные параллельно уличным зданиям. Поступающая от автомобилей примесь считается легкой, химически инертной и не осаждающейся на образующих уличного каньона.

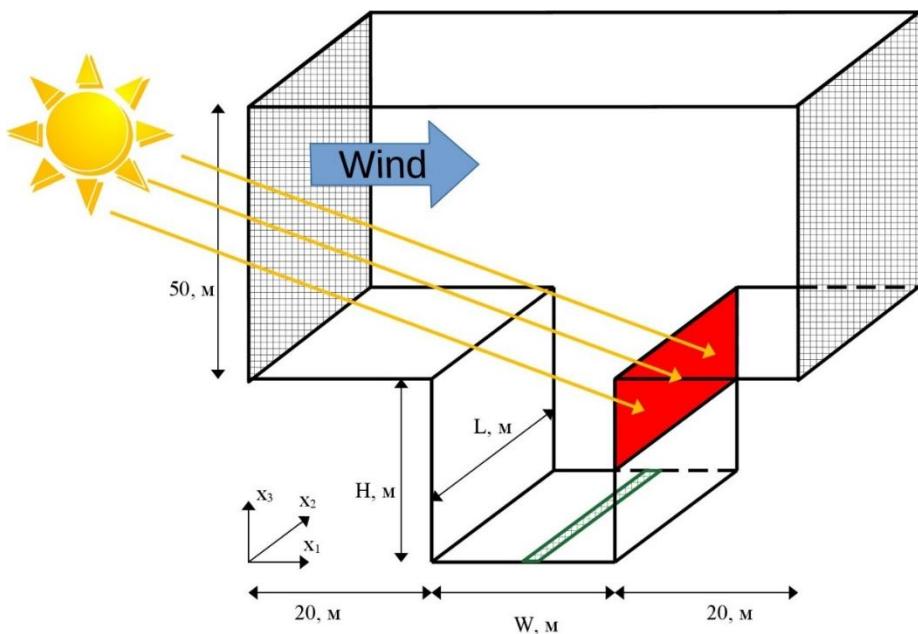


Рис. 1. Иллюстрация физической постановки задачи
Fig. 1. Illustration of the physical problem formulation

Таблица 1

Свойства ограничивающих каньон поверхностей

Поверхности	Коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К)	Степень черноты	Толщина, м	Температура на внешней границе, С
Стены	1,5	0,88	1,0	23
Дорога	2,0	0,75	2,0	17
Крыши	2,0	0,88	1,0	23

Геометрические размеры каньона заданы следующим образом: высота H и ширина $W = 20$ м, глубина $L = 90$ м. Скорость ветра выбранного западного направления над зданиями U_1 равна 1,0 м/с. Интенсивность турбулентности потока составляет 30%. Температура окружающей среды принята равной 20°C. Значения коэффициента теплопроводности, степени черноты стен, дороги и крыш, толщины стен, прогреваемого слоя дороги [2–4] представлены в табл. 1. Там же представлены значения температуры на внешних границах: в помещениях здания (23°C), на глубине 2 м под дорожным полотном (17°C).

Математическая постановка задачи

Рассматриваются трехмерные уравнения Рейнольдса для несжимаемой среды ($\rho = \text{const}$), уравнение энергии и переноса инертной газообразной примеси:

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\mathbf{v} + \mathbf{v}_t) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{g_i(\bar{T} - T_0)}{T_0}; i = 1, 2, 3; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{T} \bar{u}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(a + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right); \quad (3)$$

$$\frac{\partial \bar{C} \bar{u}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(D + \frac{\nu_t}{Sc_t} \right) \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_j} \right) + S_c. \quad (4)$$

В правых и левых частях уравнений (1)–(4) по повторяющемуся индексу j производится суммирование от 1 до 3; черта представляет собой операцию осреднения по Рейнольдсу; $\bar{u}_i, \bar{p}, \bar{T}, \bar{C}$ – компоненты скорости, давление, температура и концентрация инертной газообразной примеси; \mathbf{v}, ρ, a, D – кинематическая вязкость, плотность, температуропроводность, коэффициент диффузии; компоненты вектора ускорения свободного падения определяются в соответствии с принятым направлением осей: $g_1 = g_2 = 0, g_3 = -g$; g – значение ускорения свободного падения; ν_t, Pr_t, Sc_t – турбулентная вязкость, турбулентные числа Прандтля и Шмидта, которые появляются в (1)–(4) в результате турбулентного замыкания с использованием градиентных соотношений Буссинеска [7]; T_0 – некоторая относительная температура, в качестве которой может быть принята температура набегающего потока; S_c – источник поступления примеси вблизи дна уличного каньона.

В качестве граничных условий используются следующие [8–10]. Скорость потока, температура, концентрация примеси, турбулентные характеристики на входе при $x_1 = 0$ известны. На выходе принимаются условия равенства нулю производных по x_1 от величин, вычисляемых из дифференциальных конвективно-диффузионных уравнений (1)–(4) (компонент скорости, температуры, концентрации), что моделирует доминирование адвекции выходящего потока над диффузией. При $x_2 = 0$ или $x_2 = L$ также рассматриваются условия равенства нулю производных по x_2 . На стенах все компоненты скорости равны нулю, и задаются условия отсутствия осаждения примеси, а также условия теплового баланса радиационно-конвективного сопряженного теплообмена, учитывающие изменение температуры не только в воздушной среде, но и в стенах зданий:

$$\alpha(\bar{T} - T_w) + q_{sun} + \frac{\varepsilon_w}{2(2 - \varepsilon_w)} [H_w - 4\sigma T_w^4] = \frac{\lambda_w}{L_w} (T_w - T_{room}). \quad (5)$$

Здесь T_w – температура наружной поверхности стен или дна каньона; q_{sun} – тепловой поток от солнечного нагрева, для некоторых участков стен или дна может быть равен нулю из-за затененности поверхности; ε_w – степень черноты поверхности каньона; H_w – плотность падающего излучения ($H_w = 1672 \text{ Вт}/\text{м}^2$ принята для рассматриваемых условий); σ – постоянная Стефана–Больцмана; λ_w, L_w – коэффициент теплопроводности и толщина стен зданий; T_{room} – температура внутри помещений, которая поддерживается на постоянном уровне; α – коэффициент теплоотдачи.

Коэффициент теплоотдачи рассчитывается с применением формул метода пристеночных функций [11]

$$\alpha = \frac{\rho C_p C_\mu^{0.25} \sqrt{k_p}}{Pr_t \ln \left(E y_p C_\mu^{0.25} \sqrt{k_p} / v \right) / \kappa + f(Pr/Pr_t)},$$

где k_p – кинетическая энергия турбулентности на расстоянии y_p от стенки в области турбулентного пристенного слоя, $E = 9.0$, C_p – удельная теплоемкость.

При расчете $q_{sun} = Q_{sun}(1 - A)$ использовались формулы из [12]

$$Q_{sun} = \begin{cases} (a_g - a_w) S_{slope} S_0 \cos \chi, & \cos \chi > 0 \\ 0, & \cos \chi \leq 0 \end{cases},$$

где $a_g(x_3)$, $a_w(x_3)$ – функции, учитывающие рассеяние и поглощение излучения кислородом, озоном, диоксидом углерода и водяным паром в атмосфере [12], χ – угол склонения Солнца, $S_{slope} = \cos i / \cos \chi$, i – угол падения солнечных лучей на поверхность, $\cos i = \cos \alpha_0 \cos \chi + \sin \alpha_0 \sin \chi \cos(\beta - \eta)$, α_0 – угол наклона поверхности ($\alpha_0 = \pi/2$ или $3\pi/2$ – вертикальные поверхности, ориентированные на запад или восток), β – солнечный азимут, η – азимут наклона поверхности, который измеряется как угол между нормалью к поверхности и направлением на юг, S_0 – солнечная постоянная; A – альbedo поверхности.

В данной работе турбулентное замыкание основных уравнений осуществляется с использованием $k-\varepsilon$ -модели [13, 14], в которой рассматривается воздействие силы плавучести на уровень турбулентных пульсаций. Подход Лаундера–Сполдинга [11] применяется для эффективного и экономичного описания турбулентных процессов в непосредственной близости от стенки. Метод пристеночных функций Лаундера–Сполдинга широко используется при моделировании турбулентности неизотермических течений вблизи стенки при высоких значениях числа Рейнольдса (более 10^6), которые часто реализуются в индустриальных и геофизических приложениях. Главным образом это обусловлено разумными вычислительными затратами на проведение численного моделирования трехмерных течений и теплообмена в геометрически сложных областях.

$$\frac{\partial k \bar{u}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + P + G - \varepsilon; \quad (6)$$

$$\frac{\partial \varepsilon \bar{u}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(v + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} (P + C_{\varepsilon 3} G) - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}; \quad (7)$$

$$v_t = C_\mu k^2 / \varepsilon; C_\mu = 0.09; Pr_t = 0.9; Sc_t = 0.5; \sigma_k = 1.0; \sigma_\varepsilon = 1.22;$$

$$C_{\varepsilon 1} = 1.44, C_{\varepsilon 2} = \tanh(|\bar{u}_3| / \sqrt{\bar{u}_1^2 + \bar{u}_2^2}); C_{\varepsilon 3} = 1.92;$$

$$P = v_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}; \quad G = \delta_{ij} \frac{g_i}{T_0} \frac{v_t}{Pr_t} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i}.$$

Численный метод решения задачи

Поставленная задача решается численно с использованием структурированных сеток и метода конечного объема [15]. В параллелепипеде, включающем область исследования, строится неравномерная прямоугольная сетка со сгущением сеточных плоскостей к твердым поверхностям (стенкам или крышам уличного каньона). Часть полученных в результате построения такой сетки конечных объемов является фиктивной, поскольку они выходят за область моделирования движения и теплообмена несущей среды. Они исключаются из расчетов. Сгущение узлов сетки

вблизи твердых поверхностей необходимо для обеспечения выполнения условий применения метода пристеночных функций [11], согласно которому ближайший к твердой поверхности узел сетки должен располагаться на безразмерном расстоянии $y^+ = yv^*/v = 50\text{--}300$, в области развитой пристеночной турбулентности. Здесь y – расстояние до стенки, v^* – динамическая скорость, v – коэффициент кинематической вязкости несущей среды. После построения вычислительной сетки производится получение разностной схемы, аппроксимирующей дифференциальную задачу. В соответствии с основными идеями метода конечного объема это осуществляется путем интегрирования каждого дифференциального уравнения по отдельному конечному объему, при приближенном вычислении поверхностных и объемных интегралов применяются 2D и 3D аналоги метода средних прямоугольников, а для представления производных – центрально-разностные формулы численного дифференцирования. Для точного выполнения разностного уравнения неразрывности (1) используется смешенное представление значений сеточных функций зависимых переменных, в соответствии с которым компоненты вектора скорости ассоциируются с центрами граней конечных объемов, а остальные сеточные функции зависимых переменных – с центрами конечных объемов [15]. Использование таких разнесенных сеток избавляет также от осцилляций рассчитываемых значений давления, которые могут иметь место при использовании неразнесенных сеток.

Кроме того, чтобы уменьшить влияние схемной вязкости на искомые значения скорости, температуры, концентрации, в данной работе применяются так называемые монотонизированные противопотоковые схемы ван Лира MLU или MUSCL [15, 16]. В итоге полученные разностные схемы на участках монотонного изменения приближенного решения на равномерных сетках обладают вторым порядком аппроксимации, соответствующие им системы линейных уравнений имеют матрицы с диагональным преобладанием, что позволяет использовать надежные итерационные методы для получения приближенного решения задачи. В данной работе такие системы решались методом релаксации для компонент скорости и методом неполной факторизации Н.И. Булесева [17] для остальных скалярных характеристик (температуры, концентрации, турбулентных параметров). Поскольку полная задача является взаимосвязанной и нелинейной, использовались глобальные итерации. В качестве критерия завершения вычислительного процесса рассматривались значения норм векторов невязок сеточных уравнений и векторов ошибок между двумя последовательными итерациями. Предлагаемая модель и численный метод прошли тестирование на результатах экспериментов в ветровом тоннеле с обогреваемой выемкой [18] и переноса примеси в модели уличного каньона [19]. Получено хорошее согласование [6].

Отдельно остановимся на выводе вычислительной процедуры, позволяющей избежать применения локальных итераций для получения значения температуры стенки T_w из нелинейного уравнения (5). Представим (5) в следующем виде:

$$Ax^4 + Dx + E = 0,$$

где

$$\begin{aligned} x &= T_w / 300, \quad A = \varepsilon_w 4\sigma \cdot 300^4 / 2(2 - \varepsilon_w), \quad D = (\alpha + \lambda_k / L_k) \cdot 300, \\ E &= -\alpha T_p - q_{sun} - \varepsilon_w / (2(2 - \varepsilon_w)) H_w - \lambda_k T_{room} / L_k. \end{aligned}$$

Перепишем это уравнение в виде:

$$x^4 + dx + e = 0, \quad d = D / A > 0, \quad e = E / A < 0,$$

и для нахождения положительного действительного корня применим метод Феррари [20]. Этот корень вычисляется по следующим формулам:

$$x = \frac{T_w}{300} = 0.5 \left(-\sqrt{-y_1} + \sqrt{-y_1 - 4q} \right), \quad (8)$$

где $y_1 = \sqrt[3]{-\frac{d^2}{2} + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{-\frac{d^2}{2} - \sqrt{Q}}$, $Q = \left(\frac{-4e}{3}\right)^3 + \left(\frac{d^2}{2}\right)^2$, а при выборе величины

$q = \frac{1}{2} \left(-y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 4e} \right)$ следует ориентироваться на то значение q , которое обеспечивает неотрицательность $(-y_1 - 4q)$ в (8).

Результаты расчетов

Для обнаружения неблагоприятных аэродинамических условий, приводящих к увеличению концентрации примеси в зоне дыхания пешеходов, были проведены расчеты (табл. 2) для изотермического случая (базовый вариант 1), частичного (вариант 2) и полного солнечного нагрева наветренной стороны уличного каньона (вариант 3). В работах [2–6] указывается, что при совместном влиянии слабого набегающего ветрового потока над каньоном (скорость ~ 1 м/с) и существенной естественной конвекции у наветренной поверхности может образовываться сложная аэродинамическая картина потока внутри уличного каньона, приводящая к накоплению примеси в нижней части каньона.

Таблица 2

Параметры для расчета теплообмена в уличном каньоне при солнечном нагреве для рассматриваемых вариантов расчетов

№ варианта	t , время суток	q_{sun} , Вт/м ²	A_{sun}
1		0	0
2	18:00	780	0.5
3	15:00	600	1.0

Примечание. t – локальное время суток, q_{sun} – величина теплового потока падающего солнечного излучения, зависящая от величины угла склонения χ . A_{sun} – доля поверхности наветренной стенки, на которую падает солнечное излучение.

В расчетах использовалась сетка $102 \times 63 \times 92$. Удвоение количества узлов сетки в каждом координатном направлении не привело к существенному изменению значений скорости и концентрации примеси.

При рассмотрении неизотермических течений в атмосферном пограничном слое обычно используется число Ричардсона $Ri = gH\Delta T_{w,ave} / (T_{ref} U_{ref}^2)$, чтобы количественно оценить баланс между силой термической плавучести $g\Delta T_{w,ave} / T_{ref}$ и адвекции U_{ref}^2 / H . В городских условиях неизотермические течения можно классифицировать на три категории [3]: $Ri \ll 1$ – адвекция существенно доминирует над силой термической плавучести; $Ri \sim 1$ – адвекция сопоставима с силой плавучести; $Ri \gg 1$ – силы плавучести определяют характер течения. Осредненная по всем поверхностям уличного каньона разность $T_w - T_{ref}$ в рассматриваемых условиях

составила 4.03 К (вариант 2) и 6.13 К (вариант 3) и, соответственно, $Ri = 0$ (вариант 1), $Ri = 2.7$ (вариант 2), $Ri = 4.1$ (вариант 3) ($H = 20$ м, $U_{ref} = 1$ м/с, $T_{ref} = 293$ К). Таким образом, вариант 1 относится к случаю, когда распределение примеси в каньоне определяется адвективным переносом, а варианты 2 и 3 – к сложному взаимодействию адвекции и плавучести и их влиянию на распространение примеси.

На рис. 2 представлены векторное поле скорости и распределение безразмерной концентрации $C^* = c^* U_1^* L^* H / Sc$ в поперечном сечении уличного каньона при $x_2 = L/2$ для варианта 1 (изотермический случай). Видно, что в каньоне формируется вращательное движение воздуха с активным выносом поступающей снизу примеси за счет адвекции. Наибольшие значения концентрации примеси наблюдаются в левой половине нижней части области исследования и у подветренной стороны.

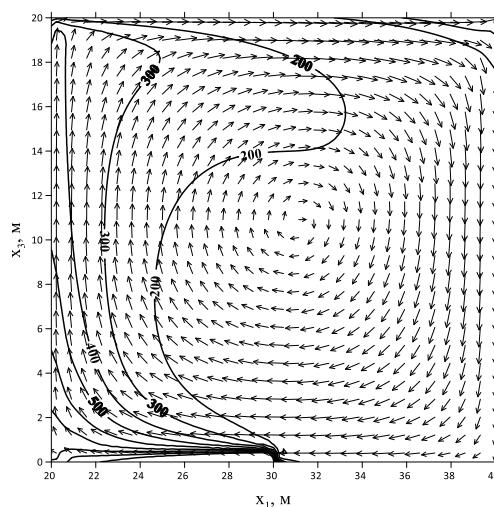


Рис. 2. Рассчитанные для варианта 1 векторное поле скорости и изолинии безразмерной концентрации примеси внутри уличного каньона при $x_2 = L/2$

Fig. 2. Calculated vector velocity field and pollution concentration contours within the street canyon at $x_2 = L/2$ for case 1

Рисунки 3 и 4 демонстрируют как нагреваемая Солнцем величина доли поверхности A_{sun} наветренной стены и значение теплового потока q_{sun} влияют на аэродинамику и тепломассоперенос в уличном каньоне. При $A_{sun} = 0.5$ и $q_{sun} = 780$ Вт/м² (см. рис. 3, а, 4, а) основной вихрь смещается влево и вверх, а в нижней части каньона интенсивность движения уменьшается, вдоль наветренной стенки расчеты показывают подъемное движение, которое формирует многовихревую структуру; в частности, внизу у подветренной стороны появляется вихрь, препятствующий выносу примеси вверх вдоль этой поверхности. Заметим, что чем больше поверхность солнечного нагрева наветренной стороны (см. рис. 3, б, 4, б), тем больше скорость локального пристенного подъемного движения и скорость движения воздуха на уровне зоны дыхания пешеходов. Судя по рис. 2–4, наибольшие значения скорости на этом уровне имеет при изотермических условиях, наименьшие – при $A_{sun} = 0.5$, что согласуется с результатами [3].

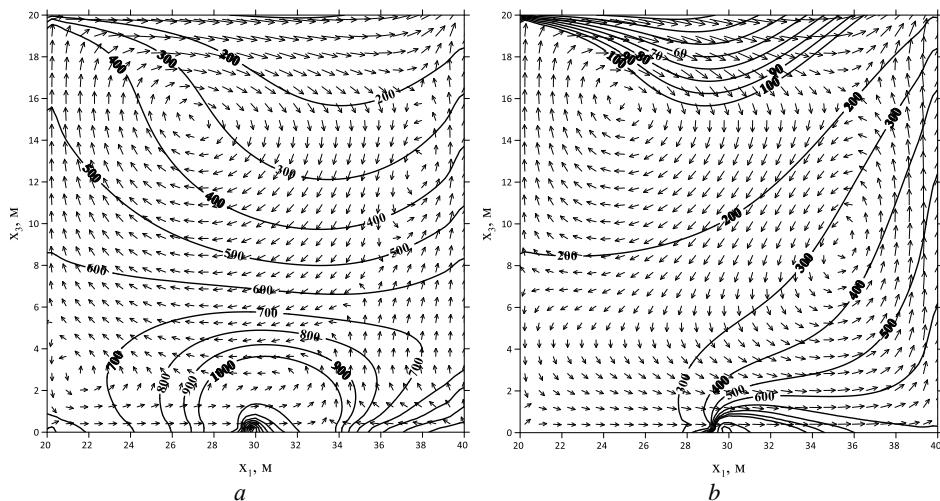


Рис. 3. Рассчитанные векторные поля скорости и изолинии безразмерной концентрации примеси внутри уличного каньона при $x_2 = L/2$: *a* – вариант 2, *b* – вариант 3

Fig. 3. Calculated vector velocity fields and pollution concentration contours within the street canyon at $x_2 = L/2$: (*a*) case 2 and (*b*) case 3

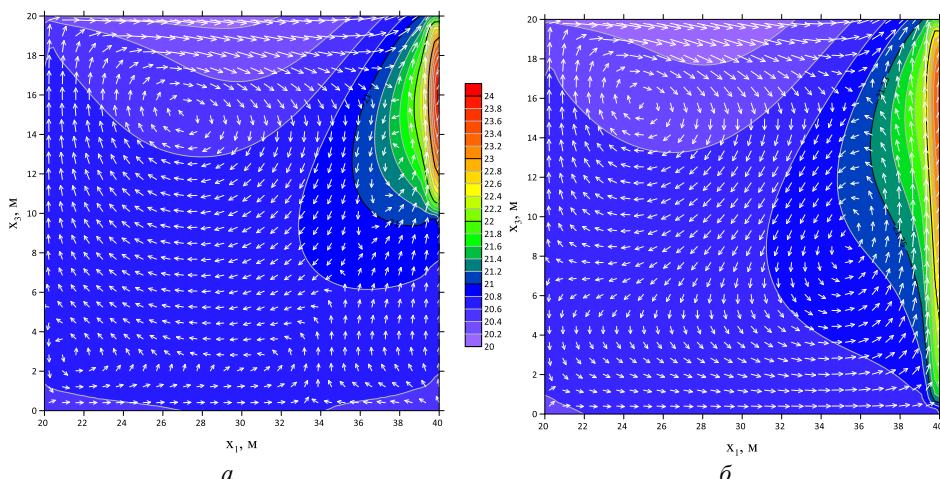


Рис. 4. Рассчитанные векторные поля скорости и изолинии температуры воздуха внутри уличного каньона при $x_2 = L/2$: *a* – вариант 2, *б* – вариант 3

Fig. 4. Calculated vector velocity fields and air temperature contours within the street canyon at $x_2 = L/2$: (*a*) case 2 and (*b*) case 3

В итоге для варианта 2, судя по изолиниям концентрации, ниже 8 м в уличном каньоне формируется слой загрязненного воздуха с почти постоянной концентрацией, значения которой изменяются в сторону повышения только вблизи источника поступления примеси. Концентрация в зоне дыхания пешеходов на высоте 1,6 м для этого варианта значительно увеличивается по сравнению со случаем изотермического течения (Рис 5). При $A_{sun} = 1.0$ и $q_{sun} = 600 \text{ Вт}/\text{м}^2$ (см. рис. 3, *b*, 4, *b*)

образуется двувихревая картина течения: ярко выраженный вихрь сверху способствует возвращению части выносимой из каньона примеси в его верхнюю часть, а второй, справа снизу, – выносу поступающей из линейного источника примеси вдоль наветренной стенки из каньона.

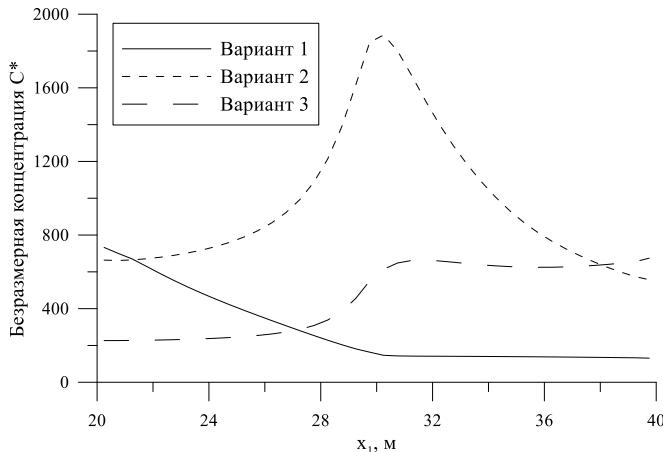


Рис. 5. Значения безразмерной концентрации примеси на высоте 1.6 м от нижней границы уличного каньона

Fig. 5. Dimensionless pollution concentration at a height of 1.6 m from the lower boundary of the street canyon

Такая картина течения способствует очищению (хорошему выносу примеси) из левой нижней части каньона, что подтверждает график зависимости безразмерной концентрации $C^* = c^* U_1^* L^* H/S_C$ от x_1 (рис. 5).

Заключение

Разработана версия модели M2UE для расчета турбулентного неизотермического течения с плавучестью и сопряженным теплообменом с твердыми стенками, ограничивающими область уличного каньона. На поверхностях уличного каньона могут рассматриваться условия не только конвективного, но и радиационного теплообмена (охлаждения / нагрева) с окружающей средой.

Для рассматриваемых в работе условий радиационно-конвективного сопряженного теплообмена на твердых стенах разработан эффективный безитерационный метод расчета температуры поверхности.

Выполненные на основе усовершенствованной модели M2UE вычислительные эксперименты показали, что при неполном солнечном нагреве наветренной стенки уличного каньона и слабом ветре ($\sim 1 \text{ м/с}$) внутри рассматриваемой области может сформироваться аэродинамическая картина, приводящая к накоплению (2x) примеси в нижней половине каньона и особенно в зоне дыхания пешеходов.

Список источников

- Старченко А.В., Нутерман Р.Б., Данилкин Е.А. Численное моделирование турбулентных течений и переноса примеси в уличных каньонах. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2015. 252 с.
doi: 10.17223/9785751123963

2. Chen L., Hang J., Chen G., Liu S., Lin Y., Mattsson M., Sandberg M., Ling H. Numerical investigations of wind and thermal environment in 2D scaled street canyons with various aspect ratios and solar wall heating // Building and Environment. 2021. V. 190. Art. 107525. doi: 10.1016/j.buildenv.2020.107525
3. Yang H., Chen G., Wang D., Hang J., Li Q., Wang Q. Influences of street aspect ratios and realistic solar heating on convective heat transfer and ventilation in full-scale 2D street canyons // Building and Environment. 2021. V. 204. Art. 108125. doi: 10.1016/j.buildenv.2021.108125
4. Liu S., Yang X., Yang H., Gao P., Hang J., Wang Q. Numerical investigation of solar impacts on canyon vortices and its dynamical generation mechanism // Urban Climate. 2021. V. 39. Art. 100978. doi: 10.1016/j.ulclim.2021.100978
5. Bottillo S., De Lieto Vollaro A., Galli G., Vallati A. CFD modeling of the impact of solar radiation in a tridimensional urban canyon at different wind conditions // Solar Energy. 2014. V. 102. P. 212–222. doi: 10.1016/j.solener.2014.01.029
6. Данилкин Е.А., Лещинский Д.В., Старченко А.В. Микромасштабная математическая модель неизотермического турбулентного течения и переноса пассивной газообразной примеси в уличном каньоне // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 85. С. 117–131. doi: 10.17223/19988621/85/9
7. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 846 с.
8. Бубенчиков А.М., Старченко А.В. Численные модели динамики и горения аэродисперсных смесей в каналах. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1998. 236 с.
9. Литвинцев К.Ю., Дектерев А.А., Мешкова В.Д., Филимонов С.А. Влияние излучения на формирование ветрового и температурного режимов в городской среде // Теплофизика и аэромеханика. 2023. № 4. С. 723–735.
10. Белов И.А., Шеленикевич И.А., Шуб Л.И. Моделирование гидромеханических процессов в технологии изготовления полупроводниковых приборов и микросхем. Л.: Политехника, 1991. 287с.
11. Launder B.E., Spalding D.B. The numerical computation of turbulent flows // Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1974. V. 3 (2). P. 269–289. doi: 10.1016/0045-7825(74)90029-2
12. Mahrer Y., Pielke R.A. The Effects of Topography on Sea and Land Breezes in Two-Dimensional Numerical Model // Monthly Weather Review. 1977. V. 105. P. 1151–1162.
13. Henkes R.A.W.M., van der Flugt F.F., Hoogendoorn C.J. Natural Convection Flow in a Square Cavity Calculated with Low-Reynolds-Number Turbulence Models // Int. J. Heat Mass Transfer. 1991. V. 34. P. 1543–1557.
14. Starchenko A.V., Danilkin E.A., Leshchinskiy D.V. Numerical Simulation of the Distribution of Vehicle Emissions in a Street Canyon // Mathematical Models and Computer Simulations. 2023. V. 15 (3). С. 427–435.
15. Patankar S. Numerical heat transfer and fluid flow. New York: Hemisphere Publ. Corporation, 1980. 214 p. doi: 10.1201/9781482234213
16. Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method // Journal of Computational Physics. 1979. V. 32 (1). P. 101–136. doi: 10.1016/0021-9991(74)90019-9
17. Ильин В.П. Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. М.: Физматлит, 1995. 288 с.
18. Allegri J., Dorer V., Carmeliet J. Wind tunnel measurements of buoyant flows in street canyons // Building and Environment. 2013. V. 59. P. 315–326. doi: 10.1016/j.buildenv.2012.08.029
19. Kikumoto H., Ooka R. Large-eddy simulation of pollutant dispersion in a cavity at fine grid resolutions // Building and Environment. 2018. V. 127. P. 127–137. doi: 10.1016/j.buildenv.2017.11.005
20. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984. 831с.

References

1. Starchenko A.V., Nuterman R.B., Danilkin E.A. (2015) *Chislennoe modelirovanie turbulentnykh techeniy i perenosa primesi v ulichnykh kan'onakh* [Numerical study of turbulent flows and pollution transport in street canyons]. Tomsk: Tomsk State University Press. doi: 10.17223/9785751123963
2. Chen L., Hang J., Chen G., Liu S., Lin Y., Mattsson M., Sandberg M., Ling H. (2021) Numerical investigations of wind and thermal environment in 2D scaled street canyons with various aspect ratios and solar wall heating. *Building and Environment*. 190. Article 107525. doi: 10.1016/j.buildenv.2020.107525
3. Yang H., Chen G., Wang D., Hang J., Li Q., Wang Q. (2021) Influences of street aspect ratios and realistic solar heating on convective heat transfer and ventilation in full-scale 2D street canyons. *Building and Environment*. 204. Article 108125. doi: 10.1016/j.buildenv.2021.108125
4. Liu S., Yang X., Yang H., Gao P., Hang J., Wang Q. (2021) Numerical investigation of solar impacts on canyon vortices and its dynamical generation mechanism. *Urban Climate*. 39. Article 100978. doi: 10.1016/j.uclim.2021.100978
5. Bottillo S., De Lieto Vollaro A., Galli G., Vallati A. (2014) CFD modeling of the impact of solar radiation in a tridimensional urban canyon at different wind conditions. *Solar Energy*. 102. pp. 212–222. doi: 10.1016/j.solener.2014.01.029
6. Danilkin E.A., Leshchinskii D.V., Starchenko A.V. (2023) Mikromasshtabnaya matematicheskaya model' neizotermicheskogo turbulentnogo techeniya i perenosa passivnoy gazoobraznoy primesi v ulichnom kan'one [A microscale mathematical model of a non-isothermal turbulent flow and transport of a passive gaseous pollutant in a street canyon]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mehanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 85. pp. 117–131. doi: 10.17223/19988621/85/9
7. Loytsyanskiy L.G. (2003) *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Gas and fluid mechanics]. Moscow: Drofa.
8. Bubenchikov A.M., Starchenko A.V. (1998) *Chislennye modeli dinamiki i goreniya aerodispersnykh smesey v kanalakh* [Numerical models of dynamics and combustion of aerodispersed mixtures in channels]. Tomsk: Tomsk University Publishing House.
9. Litvintsev K.Yu., Dekterev A.A., Meshkova V.D., Filimonov S.A. (2023) Vliyanie izlucheniya na formirovanie vetrovogo i temperaturnogo rezhimov v gorodskoy srede [Influence of radiation on the formation of wind and temperature regimes in the urban environment]. *Teplofizika i aeromehanika – Thermophysics and Aeromechanics*. 4. pp. 723–735.
10. Belov I.A., Shelenshkevich I.A., Shub L.I. (1991) *Modelirovanie gidromekhanicheskikh protsessov v tekhnologii izgotovleniya poluprovodnikovykh priborov i mikroskhem* [Modeling of hydro-mechanical processes in the technology of semiconductor devices and circuits production]. Leningrad: Politekhnika.
11. Launder B.E., Spalding D.B. (1974) The numerical computation of turbulent flows. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 3(2). pp. 269–289. doi: 10.1016/0045-7825(74)90029-2
12. Maher Y., Pielke R.A. (1977) The effects of topography on sea and land breezes in two-dimensional numerical model. *Monthly Weather Review*. 105. pp. 1151–1162. doi: 10.1175/1520-0493(1977)105<1151:TEOTOS>2.0.CO;2
13. Henkes R.A.W.M., van der Flugt F.F., Hoogendoorn C.J. (1991) Natural convection flow in a square cavity calculated with low-Reynolds-number turbulence models. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 34. pp. 1543–1557. doi: 10.1016/0017-9310(91)90258-G
14. Starchenko A.V., Danilkin E.A., Leshchinskii D.V. (2023) Numerical simulation of the distribution of vehicle emissions in a street canyon. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 15(3). pp. 427–435. doi: 10.1134/S207004822303016X
15. Patankar S. (1980) *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. New York: Hemisphere Publishing Corporation. doi: 10.1201/9781482234213

16. Van Leer B. (1974) Towards the ultimate conservative difference scheme. II. Monotonicity and conservation combined in a second order scheme. *Journal of Computational Physics*. 14. pp. 361–370. doi: 10.1016/0021-9991(74)90019-9
17. Il'in V.P. (1995) *Metody nepolnoy faktorizatsii dlya resheniya algebraicheskikh sistem* [Methods of incomplete factorization for solving algebraic systems]. Moscow: Fizmatlit.
18. Allegrini J., Dorer V., Carmeliet J. (2013) Wind tunnel measurements of buoyant flows in street canyons. *Building and Environment*. 59. pp. 315–326. doi: 10.1016/j.buildenv.2012.08.029
19. Kikumoto H., Ooka R. (2018) Large-eddy simulation of pollutant dispersion in a cavity at fine grid resolutions. *Building and Environment*. 127. pp. 127–137. doi: 10.1016/j.buildenv.2017.11.005
20. Korn G., Korn T. (1984) *Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Mathematical handbook for scientists and engineers]. Moscow: Nauka.

Сведения об авторах:

Старченко Александр Васильевич – профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой вычислительной математики и компьютерного моделирования, ведущий научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: starch@math.tsu.ru
Данилкин Евгений Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и компьютерного моделирования, старший научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: ugin@math.tsu.ru

Лещинский Дмитрий Викторович – старший преподаватель кафедры вычислительной математики и компьютерного моделирования, младший научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: 360flip182@gmail.com

Information about the authors:

Starchenko Aleksandr V. (Professor, Doctor of Physics and Mathematics, Head of Department, Department of Computational Mathematics and Computer Modeling, Leading Researcher, Regional Scientific and Educational Mathematical Center, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: starch@math.tsu.ru

Danilkin Evgeniy A. (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Computational Mathematics and Computer Modeling, Senior Researcher, Regional Scientific and Educational Mathematical Center, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ugin@math.tsu.ru

Leshchinskiy Dmitriy V. (Senior Lecturer, Department of Computational Mathematics and Computer Modeling, Junior Researcher, Regional Scientific and Educational Mathematical Center, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: 360flip182@gmail.com

Статья поступила в редакцию 17.06.2025; принята к публикации 08.12.2025

The article was submitted 17.06.2025; accepted for publication 08.12.2025

Научная статья

УДК 517.958:531.32

doi: 10.17223/19988621/98/14

**Неустойчивые возмущения закрученного течения
идеальной несжимаемой жидкости в областях
с открытыми границами**

Олег Никифорович Шабловский

*Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого,
Гомель, Беларусь, shablovsky-on@yandex.ru*

Аннотация. Рассмотрены линеаризованные уравнения Эйлера, определяющие закрученное осесимметричное течение идеальной несжимаемой жидкости. Скорость основного течения имеет одну нетривиальную (азимутальную) компоненту, зависящую от радиальной цилиндрической координаты. Построены точные решения, определяющие растущие со временем возмущения скорости и / или давления. Дано аналитическое описание неустойчивых состояний потока жидкости в открытых областях различной геометрической формы, таких как комбинация вихревого цилиндра с непроницаемой поверхностью, непроницаемый цилиндр, зазор между цилиндрами. Открытые участками границ служат проницаемые сферические сегменты, расположенные на торцах цилиндра.

Ключевые слова: уравнения Эйлера, задача протекания, открытое течение, вихревая спираль, коаксиальные цилиндры

Для цитирования: Шабловский О.Н. Неустойчивые возмущения закрученного течения идеальной несжимаемой жидкости в областях с открытыми границами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 98. С. 166–181. doi: 10.17223/19988621/98/14

Original article

**Unstable perturbations in a swirling flow of an ideal
incompressible fluid in the regions with open boundaries**

Oleg N. Shablovskiy

*Pavel Sukhoi State Technical University of Gomel,
Gomel, Republic of Belarus, shablovsky-on@yandex.ru*

Abstract. This paper examines the linearized Euler equations determining the axisymmetric swirling flow of an ideal incompressible fluid. The main flow is characterized by a single nontrivial (azimuthal) velocity component that depends arbitrarily on the radial cylindrical coordinate. Based on a perturbed steady-state solution, explicit expressions for vortex helices and spiral-shaped stream surfaces are obtained. Exact solutions are constructed that incorporate arbitrary functions in their structure and describe perturbations of velocity and/or pressure growing linearly in time. A hydrodynamic interpretation of

these solutions is given in terms of the fluid flow through a given domain. An analytical description is provided for the unstable fluid states in the regions with open boundary segments. Three geometric configurations of such domains are analyzed. The first is the flow outside a vortex cylinder attached to an impermeable surface with a non-monotonic profile in the radial cylindrical coordinate. The second is the flow inside an impermeable cylinder with movable permeable spherical segments at its ends; the boundary conditions on these segments represent a coupling between velocity and pressure perturbations and the velocity of the segment. The third configuration is the flow in a gap between coaxial cylinders with movable permeable segments located at their ends. The effect of the pressure gradient on the spatial structure of the vortex field is studied. The effect of geometric parameters of the open regions on the flow properties is determined.

Keywords: Euler equations, flow problem, open flow, vortex spiral, coaxial cylinders

For citation: Shablovskiy, O.N. (2025) Unstable perturbations in a swirling flow of an ideal incompressible fluid in the regions with open boundaries. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mehanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 98. pp. 166–181. doi: 10.17223/19988621/98/14

Введение

В данной статье на основе уравнений Эйлера для идеальной жидкости рассматриваются открытые закрученные течения, в которых неустойчивые возмущения скорости и / или давления являются линейными функциями времени. Укажем краткий перечень научных публикаций, относящихся к теме нашего исследования. История вопроса и основные результаты изучения фундаментальных свойств вихревого движения идеальной однородной несжимаемой жидкости изложены в книгах [1–3]. В работах [4–6] проанализированы различные типы неустойчивости и их влияние на поведение решений двумерных и трехмерных уравнений Эйлера. Статья [7] содержит анализ решений уравнений Эйлера со специальной геометрической структурой; в частности, здесь представлены геликоидальные решения. Основные сведения о состоянии экспериментальных исследований свойств закрученных течений (спиралевидные вихревые структуры, радиальный градиент давления) имеются в [8, 9]. Задача протекания нестационарного потока жидкости через область с открытыми участками границ [10–12] занимает важное место в современной математической гидродинамике. Анализ устойчивости открытых невязких течений при различных вариантах постановки начально-краевой задачи представлен в [13–17]. Отметим, что в этих работах придается большое значение геометрическим формам изучаемых областей: каналам и линиям тока на плоскости, зазорам между цилиндрами и сферами и др.

Ясно, что для дальнейшего изучения обсуждаемых задач полезно иметь в явном виде примеры физически содержательных неустойчивых течений, обладающих нетривиальными свойствами.

Предметом данного исследования являются уравнения Эйлера, линеаризованные на точном стационарном решении, представляющем собой произвольную аналитическую зависимость азимутальной скорости от радиальной цилиндрической координаты.

Цель работы – построить точные частные решения линеаризованных уравнений Эйлера и указать неустойчивые закрученные течения в областях, имеющих проникаемые участки границ.

Исходные уравнения

В сферической системе координат (r, θ, ϕ) нестационарное осесимметричное ($\partial/\partial\phi \equiv 0$) движение идеальной несжимаемой жидкости определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r} + \frac{v_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta &= 0, \\ \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \left(v_\theta^2 + v_\phi^2 \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} v_r v_\theta - \frac{v_\phi^2}{r} \operatorname{ctg} \theta &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} v_\phi v_r + \frac{v_\phi v_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta &= 0. \end{aligned}$$

Здесь r – радиальная сферическая координата; θ – полярный угол; ϕ – азимутальный угол; $\mathbf{v}(v_r, v_\theta, v_\phi)$ – вектор скорости жидкости; t – время; ρ – плотность; p – давление. Вектор вихря скорости равен $\boldsymbol{\omega} = (1/2)\operatorname{rot} \mathbf{v}$. Связь с цилиндрической системой координат дается формулами $\zeta = r \sin \theta$ и $z = r \cos \theta$, которые определяют радиальную цилиндрическую и осевую координаты.

Эта система уравнений движения имеет точное стационарное решение

$$v_r \equiv 0, \quad v_\theta \equiv 0, \quad v_\phi = H(\zeta), \quad p = \Pi(\zeta), \quad H^2 = (\zeta/\rho) d\Pi/d\zeta, \quad (1)$$

где вращательная скорость $v_\phi = H(\zeta)$ – произвольная дифференцируемая функция, ограниченная в изучаемой области. В дальнейшем при рассмотрении отдельных течений применяем частные зависимости $H(\zeta)$. Например:

1) полубесконечный интервал $\zeta \in [0, \infty)$, $H(\zeta = 0) = 0$, $H(\zeta \rightarrow \infty) = 0$,

$$H = H_1 \zeta \exp(a_1 \zeta); \quad H_1, a_1 - \text{const}; \quad H_1 > 0, a_1 < 0; \quad (2)$$

2) конечный интервал $\zeta \in [\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}]$; $0 \leq \zeta^{(1)} < \zeta^{(2)} < \infty$, $H(\zeta = 0) = 0$.

Линеаризацию исходных уравнений выполняем, применяя малые добавки f , g , h , b к основному решению (1):

$$v_r = f(r, \theta, t), \quad v_\theta = g(r, \theta, t), \quad v_\phi = H(\zeta) + h(r, \theta, t), \quad p = \Pi(\zeta) + b(r, \theta, t). \quad (3)$$

В результате стандартных преобразований имеем линеаризованную систему уравнений

$$r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial \theta} + 2f + g \operatorname{ctg} \theta = 0, \quad r \frac{\partial f}{\partial t} = 2Hh - \frac{r}{\rho} \frac{\partial b}{\partial r}, \quad (4)$$

$$r \frac{\partial g}{\partial t} = 2Hh \operatorname{ctg} \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial b}{\partial \theta}, \quad r \frac{\partial h}{\partial t} + (\zeta \dot{H} + H)(f + g \operatorname{ctg} \theta) = 0. \quad (5)$$

Точка над символом функции означает дифференцирование $d/d\zeta$. В последующем изложении считаем, что произвольные функции, содержащиеся в решениях системы (4), (5), являются ограниченными и дифференцируемыми. Далее нам понадобится уравнение

$$\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} S_v = 0, \quad (6)$$

определяющее непротекаемую поверхность $S_v(r, \theta, t) = 0$, а также уравнение

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \operatorname{grad} S_{\omega} = 0, \quad (7)$$

определяющее вихревую поверхность $S_{\omega}(r, \theta, t) = 0$. Термин «винтовое движение» применяем в тех случаях, когда вектор скорости параллелен вектору вихря скорости, $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = 0$.

Стационарное решение

В (4), (5) полагаем $\partial/\partial t \equiv 0$, $\zeta \dot{H} + H \neq 0$. Здесь мы оставляем в стороне случай $\zeta \dot{H} + H = 0$. Стационарное возмущенное течение определяется зависимостями (3), в которых

$$f = A(\zeta) \cos \theta, \quad g = -A(\zeta) \sin \theta, \quad v_{\varphi} = H(\zeta) + h(\zeta), \quad 2\rho H h = \zeta \dot{b}(\zeta), \quad \zeta \in [0, \infty), \quad (8)$$

причем $A(\zeta)$, $b(\zeta)$, $H(\zeta)$ – произвольные функции, которые должны удовлетворять условиям: $\zeta=0, H=0, h=0; \zeta \rightarrow \infty, A \rightarrow 0, b \rightarrow 0, H \rightarrow 0, h \rightarrow 0$. Завихренность течения (8) определяется следующими выражениями:

$$\omega_r = \frac{\cos \theta}{2\zeta} (\zeta \dot{v}_{\varphi} + v_{\varphi}), \quad \omega_{\theta} = \frac{-\sin \theta}{2\zeta} (\zeta \dot{v}_{\varphi} + v_{\varphi}), \quad \omega_{\varphi} = -\dot{A}/2.$$

Значит, в цилиндрических координатах $v_z = A(\zeta)$, $\omega_z = (\zeta \dot{v}_{\varphi} + v_{\varphi})/(2\zeta)$, а ζ – радиальные компоненты скорости и завихренности нулевые: $v_{\zeta} \equiv 0$, $\omega_{\zeta} \equiv 0$. Следовательно, $\zeta = \text{const} > 0$ – это семейство непротекаемых вихревых цилиндров. Каждый такой цилиндр – прямой и круговой, а ζ есть радиус направляющей окружности. На поверхности цилиндра $\zeta = \zeta_s$ движение является винтовым, если выполнено условие

$$\zeta = \zeta_s, \quad [\zeta A / (\zeta \dot{v}_{\varphi} + v_{\varphi})] = -v_{\varphi}/\dot{A}. \quad (9)$$

Укажем два интересных варианта течения вида (8).

Примем связь

$$v_z(\zeta) \equiv A(\zeta) = A_* v_{\varphi}(\zeta), \quad A_* \equiv \text{const}, \quad (10)$$

в которой $|A_*|$ в соответствии с процедурой линеаризации есть величина 1-го порядка малости, а в остальном произвольная. Течение (8), (10) содержит непротекаемую спиралевидную поверхность

$$S_v(\zeta, \theta, \varphi) \equiv \Phi(\zeta) + \operatorname{ctg} \theta - A_* \varphi = 0, \quad (11)$$

геометрические свойства которой зависят от выбора произвольной функции $\Phi(\zeta)$. Выражение (11) есть результат интегрирования уравнения (6). Именно связь (10) дает возможность записать (11) в конечной форме. Плоскость $\theta = \pi/2$ будем называть условно плоскостью экватора.

Если $\Phi(\zeta) = \Phi_1 \zeta$, $\Phi_1 \equiv \text{const}$, $A_* < 0$, то

$$\zeta_v = (A_* \varphi - \operatorname{ctg} \theta) / \Phi_1. \quad (12)$$

В северной части пространства нужно взять $\theta \in [0, \pi/2]$, $\Phi_1 < 0$, $\varphi \geq 0$; в южной части пространства $\theta \in [\pi/2, \pi]$, $\Phi_1 > 0$, $\varphi \leq 0$. На плоскости экватора имеем спираль Архимеда, $\zeta_v(\theta = \pi/2) = A_* \varphi / \Phi_1$.

Если $\Phi(\zeta) = \Phi_1 \ln(\Phi_2 \zeta)$; $\Phi_1, \Phi_2 - \text{const}$; $A_* < 0$, $\Phi_2 > 0$, то

$$\zeta_v = (1/\Phi_2) \exp[(A_* \varphi - \operatorname{ctg} \theta) / \Phi_1]. \quad (13)$$

В северной части пространства $\Phi_1 > 0$, $\varphi \geq 0$, $\zeta_v(\theta = 0, \varphi) \rightarrow 0$; в южной части пространства $\Phi_1 < 0$, $\varphi \leq 0$, $\zeta_v(\theta = \pi, \varphi) \rightarrow 0$. На плоскости экватора имеем логарифмическую спираль, $\zeta_v(\theta = \pi/2) = (1/\Phi_2) \exp(A_* \varphi / \Phi_1)$. Непротекаемую спираль (13) можно поместить внутри непротекаемого вихревого цилиндра $\zeta = \zeta_v^1 > (1/\Phi_2)$, а при $\zeta = \zeta_v^1$ задать, например, постоянное давление жидкости.

Если $\Phi(\zeta) = \Phi_1 \operatorname{tg}(\Phi_2 \zeta)$; $\Phi_1, \Phi_2 - \text{const}$; $A_* < 0$, $\Phi_2 > 0$, то

$$\zeta_v = (1/\Phi_2) \operatorname{arctg}[(A_* \varphi - \operatorname{ctg} \theta) / \Phi_1]. \quad (14)$$

В северной части пространства $\Phi_1 < 0$, $\varphi \geq 0$; в южной части пространства $\Phi_1 > 0$, $\varphi \leq 0$. На плоскости экватора имеем спираль, которая по мере роста аргумента $A_* \varphi / \Phi_1 \geq 0$ асимптотически приближается изнутри к окружности радиуса $\pi/(2\Phi_2)$. Непротекаемую спираль (14) можно поместить внутри непротекаемого вихревого цилиндра $\zeta = \zeta_v^1 > [\pi/(2\Phi_2)]$, $p(\zeta = \zeta_v^1) = \text{const}$.

Итак, течение (8), удовлетворяющее связи $v_z \leftrightarrow v_\varphi$ (10), содержит в своей структуре спиралевидную поверхность тока (11). Условие винтового движения (9) с учетом (10) выглядит так:

$$\zeta = \zeta_S, \zeta \dot{A} A_* + \zeta \dot{v}_\varphi + v_\varphi = 0. \quad (15)$$

Приведем частный пример винтового движения. Пусть основное течение определяется формулой (2), и при этом $h = \delta_1 H$, где $|\delta_1|$ – малая величина 1-го порядка. Тогда

$$b(\zeta) = \rho \delta_1 H_1^2 [(2a_1 \zeta - 1) \exp(2a_1 \zeta) + 1] / (2a_1^2), \zeta \in [0, \infty). \quad (16)$$

В итоге получаем $A = A_1 \zeta \exp(a_1 \zeta)$, $A_1 = A_* H_1 (1 + \delta_1)$, $A_*^2 = -(2 + a_1 \zeta_S) / (1 + a_1 \zeta_S) > 0$, и значение $(-a_1 \zeta_S)$ должно располагаться в малой левой окрестности 2, а именно: $a_1 \zeta_S + 2 = O(\delta_1^2)$. На поверхности цилиндра $\zeta = \zeta_S$ течение является винтовым.

Теперь в решении (8) примем связь $\omega_\theta / \omega_\varphi = B_* \sin \theta$, или, что то же самое,

$$B_* = (\zeta \dot{v}_\varphi + v_\varphi) / (\zeta \dot{A}) \equiv \text{const}, \quad (17)$$

где $1/|B_*|$ – малая величина 1-го порядка. После интегрирования уравнения (7) получаем спиралевидную вихревую поверхность

$$S_\omega(\zeta, \theta, \varphi) \equiv \Phi_\omega(\zeta) + \operatorname{ctg} \theta + B_* \varphi = 0, \quad (18)$$

где $\Phi_\omega(\zeta)$ – произвольная функция. Выражения (11) и (18) имеют одинаковую аналитическую форму, поэтому, применяя переобозначения $\zeta_v \rightarrow \zeta_\omega$, $\Phi \rightarrow \Phi_\omega$, $A_* \rightarrow (-B_*)$, находим спиралевидные вихревые поверхности $\zeta = \zeta_\omega$, геометрические свойства которых аналогичны (12)–(14). Например, вихревую поверхность вида (14) можем поместить внутри непротекаемого вихревого цилиндра $\zeta = \zeta_\omega^1 > (\pi/2\Phi_2)$, являющегося изобарической поверхностью. Итак, течение (8), удовлетворяющее связи $\omega_\theta \leftrightarrow \omega_\varphi$ (17), содержит в своей структуре спиралевидную поверхность (18). Случай, когда в потоке жидкости выполнены сразу две связи (10) и (17), неинтересен. Условие винтового движения (9) с учетом (17) выглядит так:

$$\zeta = \zeta_S, A + B_* v_\varphi = 0. \quad (19)$$

Приведем частный пример винтового движения. Берем по-прежнему (см.: (16)) течение (2) и $h = \delta_1 H$. Тогда (17) дает $A(\zeta) = (1 + \delta_1)(H_1/B_*) (\zeta + a_1^{-1}) \exp(a_1 \zeta)$, т.е. здесь $A(\zeta = 0) \neq 0$, $A(\zeta \rightarrow \infty) = 0$. Течение винтовое на поверхности цилиндра $\zeta = \zeta_s$, для которого $-a_1 \zeta_s = (1 + B_*^2)^{-1} = O(\delta_1^2)$.

Подведем итог. Для решения (8), (2), (16) верны следующие утверждения. Течение, удовлетворяющее связи $v_z \leftrightarrow v_\phi$ (10), является винтовым при том значении $\zeta = \zeta_s$, которое есть корень уравнения (15), имеющего вид связи $\omega_0 \leftrightarrow \omega_\phi$ (17). Течение, удовлетворяющее связи $\omega_0 \leftrightarrow \omega_\phi$, является винтовым при том значении $\zeta = \zeta_s$, которое есть корень уравнения (19), имеющего вид связи $v_z \leftrightarrow v_\phi$.

Растущее возмущение давления

Простые аналитические преобразования позволяют построить следующее точное решение системы уравнений (4), (5):

$$b = (t + t_0) C, \quad h = (t + t_0) \zeta \dot{C} / (2\rho H), \quad t_0 \equiv \text{const} > 0, \quad (20)$$

$$f = -h_1 - g \operatorname{ctg} \theta, \quad h_1 = \zeta r G / (2\rho), \quad \dot{C} = GH \left(\zeta \dot{H} + H \right), \quad g = \frac{D}{r} - \frac{\zeta^2 \cos \theta}{2\rho} (4G + \zeta \dot{G}).$$

Произвольные функции $C(\zeta)$ и $D(\zeta)$ нужно задавать так, чтобы иметь при $t=0$ физически содержательное решение, ограниченное во всей области течения. Функция $G(\zeta)$ применяется для компактности записи. Решение (20) дает равную нулю ζ -радиальную компоненту завихренности, $\omega_\zeta \equiv 0$, поэтому здесь $\zeta = \text{const} > 0$ есть семейство вихревых цилиндров.

Приведем пример. Основное течение имеет вид (2). Взяв $D(\zeta) \equiv 0$, $\dot{C} = C_1 \zeta (2 + a_1 \zeta) \exp(a_2 \zeta)$, $a_2 < 2a_1 < 0$, получим $h_1 = (rC_1 / 2\rho H_1^2) \exp(a_{21} \zeta)$, $a_{21} = a_2 - 2a_1$. Здесь C_1 – постоянная малая величина 1-го порядка. Поведение скорости определяется формулами $v_\zeta = -h_1 \sin \theta = v_\zeta(\zeta)$,

$$h = (t + t_0) \frac{C_1 \zeta}{2\rho H_1} (2 + a_1 \zeta) \exp[(a_2 - a_1) \zeta], \quad v_z = \frac{z C_1}{\rho H_1^2} \left(1 + \frac{\zeta}{2} a_{21} \right) \exp(a_{21} \zeta). \quad (21)$$

Вращательная компонента завихренности выглядит так:

$$\omega_\phi = (-z C_1 a_{21} / 4\rho H_1^2) (3 + a_{21} \zeta) \exp(a_{21} \zeta).$$

Течение жидкости происходит вне вихревого цилиндра $\zeta = \zeta_\omega$ и ограничено непротекаемыми поверхностями $z = \pm z_v(\zeta)$:

$$z_v = (z_1 / \zeta^2) \exp(-a_{21} \zeta), \quad z_1 = \text{const}. \quad (22)$$

Область течения: $z \in [-z_v, z_v]$, $\zeta \geq \zeta_\omega > 0$, и тогда

$$v_z(z = z_v) = \frac{z_1 C_1}{\rho H_1^2 \zeta^2} \left(1 + \frac{\zeta}{2} a_{21} \right). \quad (23)$$

Половина высоты вихревого цилиндра равна $z_c = z_v(\zeta = \zeta_\omega)$. Экстремум функции (22) достигается при $\zeta = \zeta_z = 2/(-a_{21})$, т.е. именно там, где $v_z(\zeta = \zeta_z) = 0$, см. (21) (рис. 1). Вместе с тем имеем $\omega_\phi(\zeta = \zeta_\phi) = 0$, $\zeta_\phi = 3/(-a_{21})$, $0 < \zeta_z < \zeta_\phi$,

т.е. по мере удаления от оси z сначала меняет знак скорость v_z , а затем ω_ϕ . Вихревой цилиндр $\zeta_\omega = 2/(-a_1)$ определяем из граничного условия $h(\zeta = \zeta_\omega) = 0$, см. (21). Возмущение h и градиент возмущения давления $\partial b/\partial\zeta$ сохраняют постоянными свои знаки во всей области течения. Если $3a_1 \geq a_2$, то $\zeta_\omega \geq \zeta_z$. Основной интерес представляет случай, когда нулевая скорость $v_z(\zeta = \zeta_z) = 0$ присутствует в данном потоке жидкости: $0 < \zeta_\omega < \zeta_z$, $3a_1 < a_2 < 2a_1$ (см. рис. 1).

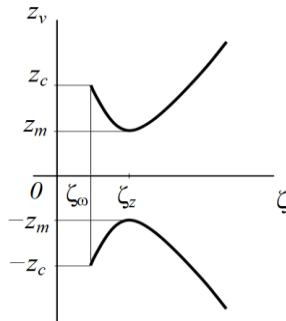


Рис. 1. Границы области течения (20)–(22): $\zeta = \zeta_\omega$ – вихревой цилиндр;
 $z = \pm z_v(\zeta)$ – непроницаемые поверхности; $z_m = z_v(\zeta_z)$

Fig. 1. Boundaries of the flow region (20) – (22): $\zeta = \zeta_\omega$ is the vortex cylinder;
 $z = \pm z_v(\zeta)$ are the impermeable surfaces; and $z_m = z_v(\zeta_z)$

Структура течения зависит от знака константы C_1 и симметрична по отношению к плоскости $z=0$, см. (21), (23). При $C_1 > 0$ вихревой цилиндр $\zeta = \zeta_\omega$ – это сток конечных размеров, т.е. $v_z(z=0)=0$, $v_\zeta < 0$ во всей области течения, а для $\zeta \in [\zeta_\omega, \zeta_z]$ имеем: если $z > 0$, то $v_z > 0$; если $z < 0$, то $v_z < 0$, рис. 2, *a*. При $C_1 < 0$ вихревой цилиндр $\zeta = \zeta_\omega$ – это источник конечных размеров, т.е. $v_z(z=0)=0$, $v_\zeta > 0$ во всей области течения, а для $\zeta \in [\zeta_\omega, \zeta_z]$ имеем: если $z > 0$, то $v_z < 0$; если $z < 0$, то $v_z > 0$, рис. 2, *b*. На рис. 2 ось z идет вдоль образующей вихревого цилиндра. Для источника и стока гладкий выступ на непроницаемой границе (22) является причиной изменения направления вектора скорости $\mathbf{v}(v_\zeta, v_\phi, v_z)$. Пример течения, содержащего излом непроницаемой границы, дан в [18].

Растущее возмущение скорости

Система уравнений (4), (5) имеет следующее точное решение:

$$f = \frac{(t+t_0)}{r} f_1(\zeta, z), \quad g = \frac{(t+t_0)}{r} g_1(\zeta), \quad f_1 + g_1 \frac{z}{\zeta} = 0, \quad b = b_0(\zeta) + \rho g_1(\zeta) \frac{z}{\zeta},$$

$$h = \frac{\zeta}{2\rho H} \frac{\partial b}{\partial \zeta}, \quad t_0 \equiv \text{const} > 0, \quad (24)$$

где $b_0(\zeta)$, $g_1(\zeta)$ – произвольные функции. Формулы (24) определяют неустойчивое начальное ($t=0$) состояние жидкости. Отметим, что в данном случае $\zeta=\text{const}$ есть

семейство стационарных поверхностей тока; z – компонента градиента давления равна

$$(1/\rho) \partial p / \partial z = g_1(\zeta)/\zeta, \quad (25)$$

а также выполнено соотношение $v_r = -v_0 \operatorname{ctg} \theta$. Радиальная цилиндрическая компонента завихренности не зависит от времени:

$$\omega_\zeta = -\frac{\zeta}{4H} \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{g_1}{\zeta} \right). \quad (26)$$

Цилиндр $\zeta = \zeta^1$ является вихревой поверхностью, если $\zeta^1 > 0$ есть корень уравнения $\dot{g}_1 = (g_1/\zeta)$.

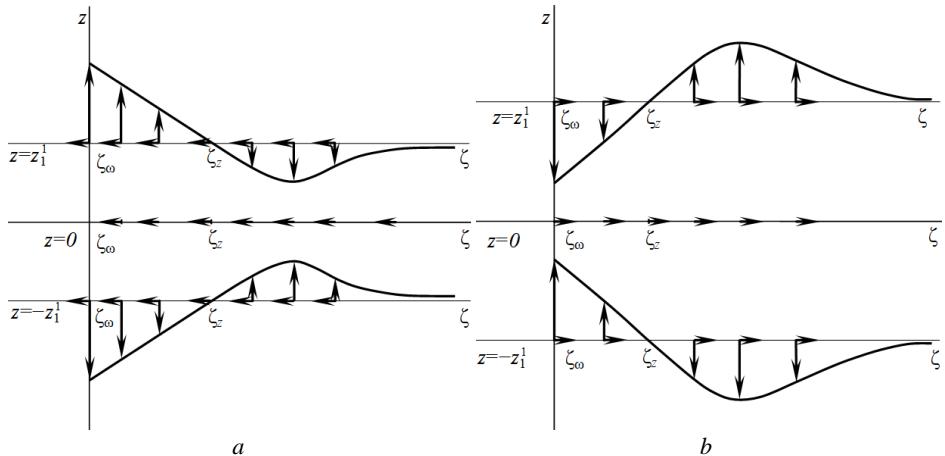


Рис. 2. Схема расположения компонентов v_z и v_ζ вектора скорости течения (20)–(22).

Направления этих компонент отмечены стрелками, параллельными осям z и ζ соответственно: a – сток; b – источник; $\zeta_1^1 \in (0, z_m)$

Fig. 2. Spatial position of the velocity vector components v_z and v_ζ for the flow (20) – (22).

The directions of these components are indicated by arrows parallel to z - and ζ -axes, respectively: (a) discharge; (b) source; $\zeta_1^1 \in (0, z_m)$

Далее нам понадобятся формулы

$$v_z = (t + t_0) \frac{(-g_1)}{\zeta}, \quad h = \frac{z\zeta}{2H} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{g_1}{\zeta} \right), \quad (27)$$

$$2\omega_z = \frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} [\zeta(H + h)], \quad 2\omega_\varphi = (t + t_0) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{g_1}{\zeta} \right),$$

$$2\omega_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(H + h)].$$

В случае (24) интеграл уравнения (7) имеет вид:

$$S_\phi(\zeta, \varphi, t) \equiv \int \frac{H(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta + \frac{\varphi}{2(t + t_0)} + \text{const} = 0. \quad (28)$$

Следовательно, вихревую поверхность можно представить в явной либо неявной форме как $\zeta = \zeta_{\omega} [\varphi/(t + t_0)]$, и, независимо от вида основного течения $H(\zeta) > 0$, имеем

$$\partial \zeta_{\omega} / \partial \varphi < 0, \quad \partial \zeta_{\omega} / \partial t > 0. \quad (29)$$

Приведем примеры. Рассмотрим течение внутри цилиндрической поверхности тока $\zeta = \zeta_v$, $0 < \zeta_v < \infty$:

$$H = H_1 \zeta, \quad H_1 \equiv \text{const} > 0, \quad \zeta \in [0, \zeta_v], \quad (30)$$

$$b_0(\zeta) \equiv 0, \quad g_1(\zeta) = g_1^1 \zeta^2 \exp(a_3 \zeta), \quad a_3 < 0,$$

где $|g_1^1|$ – постоянная малая величина 1-го порядка. Интеграл (28) дает логарифмическую спираль

$$\zeta_{\omega} = \zeta_v \exp \left[\frac{-\varphi}{2H_1(t + t_0)} \right], \quad \varphi \geq 0, \quad H_1 d\varphi > 0, \quad \zeta_{\omega}(\varphi = 0) = \zeta_v,$$

которая обладает свойствами (29): она обматывается вокруг оси $\zeta = 0$, неограниченно приближаясь к ней. В начальном состоянии ($t=0$) наблюдается стремление к расширению вихревой поверхности, находящейся внутри цилиндра $\zeta = \zeta_v$. На оси цилиндра жидкость неподвижна. Структура решения (24) позволяет поставить внутри цилиндра $\zeta = \zeta_v$ проницаемые границы области – подвижные сферические сегменты: $r = r_S(t) = v_S(t + t_0)$, $0 < \zeta_v < r_S(t = 0)$, $\theta \in [0, \theta_S]$ – северная область, и $\theta \in [\pi - \theta_S, \pi]$ – южная область, где $v_S > 0$ – постоянная скорость перемещения поверхности сегмента, $\sin \theta_S = \zeta_v / r_S$, рис. 3. Радиальная сферическая скорость протекания через сегменты равна $v_r(r = r_S) = (-g_1^1 r_S^2 / v_S) \sin \theta \cos \theta \exp(a_3 r_S \sin \theta)$.

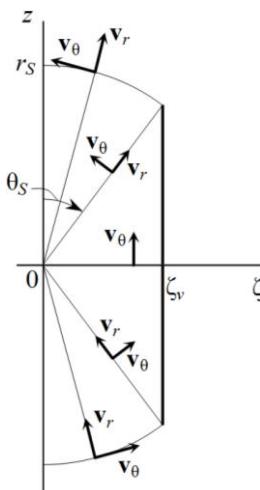


Рис. 3. Схема расположения компонентов \mathbf{v}_r и \mathbf{v}_{θ} вектора скорости течения (30)–(32):

$\zeta = \zeta_v$ – непроницаемый цилиндр; $r = r_S$ – проницаемый сферический сегмент

Fig. 3. Spatial position of velocity vector components \mathbf{v}_r and \mathbf{v}_{θ} for the flow (30)–(32):

$\zeta = \zeta_v$ is the impermeable cylinder; $r = r_S$ is the permeable spherical segment

Согласно (24), при $b_0(\zeta) \equiv 0$ полученное решение удовлетворяет граничному условию

$$r=r_S, b+\rho v_r v_S = 0, \quad (31)$$

которое представляет собой связь между возмущением давления $b(r=r_S)$ и скоростью протекания $v_r(r=r_S)$.

Возьмем для определенности $g_1^1 < 0$. Тогда в северной области течения $v_r(r=r_S) > 0$, в южной области $v_r(r=r_S) < 0$. Ясно, что

$$v_z(r=r_S) = (-r_S/v_S) [g_1(\zeta_S)/\zeta_S], \quad \zeta_S = \zeta_v \sin \theta / \sin \theta_S, \quad \operatorname{sgn} v_z = -\operatorname{sgn} g_1^1.$$

Схема течения показана на рис. 3. Формула

$$\omega_\phi(r=r_S) = \frac{r_S}{2\rho v_S} \left[\frac{d}{d\zeta} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) \right]_{r=r_S} \quad (32)$$

дает корреляцию между вращательной компонентой завихренности и ζ -радиальной неоднородностью продольного градиента давления. Громоздкая запись θ -компоненты завихренности здесь не приводится; отметим только, что для $\omega_\theta(r=r_S)$ основным элементом аналитической структуры тоже является производная $(d/d\zeta)(g_1/\zeta)$, см. (25)–(27).

Итак, для данного течения (30) формирование вихревого поля обусловлено зависимостью $\partial p/\partial z$ от ζ -радиальной координаты. Эта зависимость немонотонная: она имеет минимум при $\zeta^1 = 1/(-a_3)$, $g_1^1 a_3 > 0$.

Течение между двумя коаксиальными цилиндрами

На основе решения (24), $b_0(\zeta) \equiv 0$ рассмотрим течение жидкости между коаксиальными цилиндрами:

$$\zeta \in [\zeta_i, \zeta_e], \quad 0 < \zeta_i < \zeta_e < r_S(t=0), \quad \sin \theta_1 = \zeta_i/r_S, \quad \sin \theta_2 = \zeta_e/r_S.$$

Внутри цилиндрического зазора перемещаются проницаемые сферические сегменты, из которых вырезана центральная часть, соответствующая внутреннему цилинду и заключающая в себе конечную окрестность оси z : $r_S(t) = v_S(t+t_0)$, $v_S > 0$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ – северная область, и $\theta \in [\pi-\theta_2, \pi-\theta_1]$ – южная область, рис. 4. На поверхности $r=r_S$ выполнено граничное условие (31). Радиальная сферическая скорость протекания жидкости через сегменты зависит от выбора функции $g_1(\zeta)$: $v_r(r=r_S) = (-1/v_S) g_1(\zeta_S) \operatorname{ctg} \theta$, $\zeta_S = r_S \sin \theta$. Далее нижними индексами i, e отмечаем параметры течения на внутреннем и внешнем цилиндрах соответственно.

Примем связь между функциями $H(\zeta)$ и $g_1(\zeta)$:

$$\zeta^2 \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{g_1}{\zeta} \right) = \frac{2H^2}{g_*}, \quad (33)$$

где $1/g_*$ – постоянная малая величина 1-го порядка. Изучим движение, для которого

$$H = H_e \frac{(1+m_*)(\zeta/\zeta_e)}{[1+m_*(\zeta/\zeta_e)]}, \quad h = (H/g_*) \operatorname{ctg} \theta,$$

$$b = 2\rho H_* \zeta h, \quad H_* = H_e (1 + m_*) / \zeta_e, \quad (34)$$

$$g_* = \frac{2\zeta^2 H_*^2 \zeta_i (m_H - 1)}{\zeta_i (m_H - 1) + \zeta \left(1 - \frac{\zeta_i}{\zeta_e} m_H \right)}, \quad \zeta \in [\zeta_i, \zeta_e], \quad \theta \in [\theta_1, \pi - \theta_1].$$

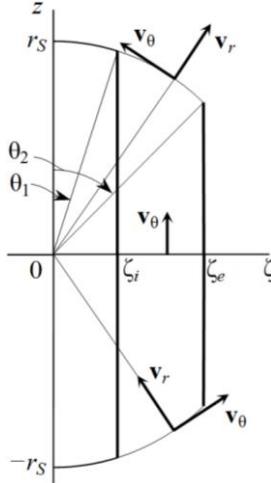


Рис. 4. Геометрические параметры области течения (34) в зазоре между непроницаемыми коаксиальными цилиндрами: $\zeta = \zeta_i$ и $\zeta = \zeta_e$ – радиусы внутреннего и внешнего цилиндов; $r = r_s$ – проницаемый сферический сегмент

Fig. 4. Geometric parameters of the flow domain (34) in a gap between impermeable coaxial cylinders: $\zeta = \zeta_i$ and $\zeta = \zeta_e$ are the radii of internal and external cylinders, respectively; $r = r_s$ is the permeable spherical segment

Применяем обозначения:

$$m_H = \frac{H_e}{H_i}, \quad m_\phi = \frac{h_e}{h_i}, \quad 1 + m_* = \frac{(\zeta_e/\zeta_i) - 1}{m_H - 1}.$$

При анализе решения (34) полагаем $H(\zeta) > 0$ и фиксируем исходные положительные параметры ζ_i , ζ_e , H_e , m_H . Отметим, что $m_H = (v_z)_e / (v_z)_i$, $v_z(r = r_s) = -2r_s H_* H_S / (g_* v_S)$, $H_S = H(\zeta = \zeta_S)$, $\zeta_S = r_s \sin \theta$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Согласно (6), течению (34) соответствует непротекаемая поверхность

$$S_v \equiv \zeta - \Phi(Y) = 0, \quad Y = 2H_*(t + t_0)\phi + \left[(1 + g_* \sin 2\theta) / (2 \sin^2 \theta) \right], \quad (35)$$

где $\Phi(Y)$ – произвольная функция, область значений которой находится внутри интервала $[\zeta_i, \zeta_e]$. Например, $\Phi = \zeta_i + \Phi_1 (\zeta_e - \zeta_i) \sin^2 \Phi_2 Y$ либо $\Phi = \zeta_i + \Phi_1 (\zeta_e - \zeta_i) \operatorname{th}^2 \Phi_2 Y$, где $\Phi_1, \Phi_2 - \text{const}$, $0 < \Phi_1 \leq 1$. Именно связь (33) позволяет получить в явном виде спираль (35). Из (25), (33) следует, что

$$\operatorname{sgn} g_* = \operatorname{sgn} \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right). \quad (36)$$

Существуют два режима движения (34), зависящие от поведения основного течения, а именно от знака производной $dH/d\zeta$. Режим I: если $m_H > 1$, то $m_\varphi > (\zeta_i/\zeta_e)$, $1 + (m_* \zeta / \zeta_e) > 0$, $\operatorname{sgn} g_* = \operatorname{sgn}(\partial p / \partial z) = -\operatorname{sgn} v_z$. Здесь $m_* > 0$, если $1 < m_H < (\zeta_e/\zeta_i)$; $-1 < m_* < 0$, если $m_H > (\zeta_e/\zeta_i) > 1$; $m_* = 0$, если $m_H = (\zeta_e/\zeta_i)$.

Режим II: если $0 < m_H < 1$, то $0 < m_\varphi < (\zeta_i/\zeta_e)$, $1 + (m_* \zeta / \zeta_e) < 0$, $\operatorname{sgn} g_* = -\operatorname{sgn}(\partial p / \partial z) = \operatorname{sgn} v_z$.

Итак, согласно (36), $\operatorname{sgn} g_*$ определяет характер ζ -радиальной неоднородности продольного градиента давления $\partial p / \partial z$. Значение $m_H = 1$ является пороговым между режимами I и II. Для каждого режима формальное изменение знака константы g_* влечет за собой формальное изменение направления течения через проницаемые сегменты. Для выяснения физического характера различий между режимами I и II будем сопоставлять течения с одинаковыми $\operatorname{sgn}(\partial p / \partial z)$. Возьмем для определенности течения, в которых $\partial p / \partial z < 0$. В режиме I эта ситуация наблюдается при $g_* < 0$, и здесь $|\partial p / \partial z|$ растет с ростом ζ . В режиме II имеем $g_* > 0$, и здесь $|\partial p / \partial z|$ убывает с ростом ζ . Такой же результат справедлив и для $\partial p / \partial z > 0$, т.е. после формального изменения направления продольного течения. В качественном отношении поведение направлений векторов v_r и v_θ одинаковое для обоих режимов (см. рис. 4).

Вывод: для данного течения

$$\operatorname{sgn}(m_H - 1) = \operatorname{sgn} \frac{dH}{d\zeta} = \operatorname{sgn} \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right).$$

В экваториальной плоскости z -компоненту завихренности не зависит от g_* :

$$h(z=0) = 0, \quad \omega_z(z=0) = H_* \left(2 + (m_* \zeta / \zeta_e) \right) / \left[2 \left(1 + (m_* \zeta / \zeta_e) \right)^2 \right]. \quad (37)$$

Обозначим $\Omega_z(\zeta) = (d/d\zeta)[\omega_z(z=0)]$. Для режима I имеем $\omega_z(z=0) > 0$, и здесь существует еще один порог: $m_* = 0$. Если $m_* > 0$, то $\Omega_z < 0$; если $m_* \in (-1, 0)$, то $\Omega_z > 0$.

Вывод: для режима I $\operatorname{sgn}(m_H - (\zeta_e/\zeta_i)) = \operatorname{sgn} \Omega_z$.

Для режима II завихренность $\omega_z(z=0)$ как функция аргумента ζ может быть знакопеременной и немонотонной. Действительно, $\omega_z(z=0) < 0$, если $(\zeta_e/\zeta_i) < (-m_*) < 2$, см. (37). Нулевое значение $\omega_z(z=0) = 0$ получаем при $\zeta = \zeta_0 = 2\zeta_e/(-m_*)$, и перемена знака происходит во внутренних точках $\zeta_0 \in (\zeta_i, \zeta_e)$, когда

$$2 < (-m_*) < (2\zeta_e/\zeta_i). \quad (38)$$

Кроме того, $\zeta_0 = \zeta_e$ при $(-m_*) = 2$, и тогда $\omega_z(z=0) < 0$ для $\zeta \in [\zeta_i, \zeta_e]$. Если $(-m_*) = (2\zeta_e/\zeta_i)$, то $\zeta_0 = \zeta_i$, и тогда $\omega_z(z=0) > 0$ для $\zeta \in (\zeta_i, \zeta_e]$. Если $(-m_*) > (2\zeta_e/\zeta_i)$, то $\omega_z(z=0) > 0$ на всем интервале $\zeta \in [\zeta_i, \zeta_e]$.

Вывод: по отношению к перемене знака завихренности $\omega_z(z=0)$ параметр $(-m_*)$ имеет два пороговых значения, $(-m_*) = 2$ и $(-m_*) = 2\zeta_e/\zeta_i$ (рис. 5).

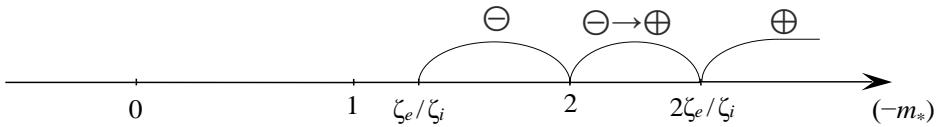


Рис. 5. Режим $m_H \in (0,1)$. Интервалы значений параметра $(-m_*)$, для которых $\omega_z(z=0)$, см. (37), отрицательная $[\ominus]$, знакопеременная $[\ominus \rightarrow \oplus]$ и положительная $[\oplus]$

Fig. 5. Flow regime at $m_H \in (0,1)$. Intervals with the values of parameter $(-m_*)$ for which, according to (37), $\omega_z(z=0)$ is negative $[\ominus]$, alternating $[\ominus \rightarrow \oplus]$, and positive $[\oplus]$

Функция $\Omega_z(\zeta)$ характеризует ζ -радиальную неоднородность завихренности $\omega_z(z=0)$. Имеем $\Omega_z < 0$, если $(-m_*) > (3\zeta_e/\zeta_i)$. Нулевое значение $\Omega_z(\zeta = \zeta_1) = 0$ получаем при $\zeta = \zeta_1 = 3\zeta_e/(-m_*)$; здесь $\zeta_1 \in (\zeta_i, \zeta_e)$, если $3 < (-m_*) < (3\zeta_e/\zeta_i)$. (39)

Кроме того, $\zeta_1 = \zeta_e$ при $(-m_*) = 3$, и тогда $\Omega_z > 0$ для $\zeta \in [\zeta_i, \zeta_e]$. Если $(-m_*) = (3\zeta_e/\zeta_i)$, то $\zeta_1 = \zeta_i$, и тогда $\Omega_z < 0$ для $\zeta \in [\zeta_i, \zeta_e]$. Если $(\zeta_e/\zeta_i) < (-m_*) < 3$, то $\Omega_z > 0$ на всем интервале $\zeta \in [\zeta_i, \zeta_e]$. Функция $\Omega_z(\zeta)$ в точке $\zeta = \zeta_1$ достигает максимум.

Вывод: по отношению к перемене знака $\Omega_z(\zeta)$, т.е. по отношению к переходу «монотонность–немонотонность» функции $\omega_z(z=0)$, параметр $(-m_*)$ имеет два пороговых значения: $(-m_*) = 3$ и $(-m_*) = 3\zeta_e/\zeta_i$. Этот результат аналогичен тому, что показан на рис. 5 для $\omega_z(z=0)$.

Итак, отношение радиусов цилиндров ζ_e/ζ_i предопределяет свойства течения, потому что именно эта величина указывает границы интервалов значений m_* , для которых наблюдаются знакопостоянные и знакопеременные, монотонные и немонотонные зависимости $\omega_z(z=0)$ аргумента ζ . Например, условия (38) и (39) совместимы друг с другом, если $3 < (-m_*) < (2\zeta_e/\zeta_i)$.

Заключение

Решение (1) содержит произвольную зависимость $v_\phi = H(\zeta)$, поэтому конкретный выбор основного течения дает возможность рассматривать разнообразные варианты поведения возмущенного движения. Для стационарного решения (8) определены закономерности появления спиралевидных вихревых поверхностей. Решение (20) характеризует течение, обусловленное растущим со временем возмущением давления. Гидродинамическая интерпретация: течение жидкости вне вихревого цилиндра, к которому пристыкована непроницаемая поверхность (см. рис. 1). Решение (24) определяет течение, обусловленное растущим со временем возмущением скорости. Гидродинамическая интерпретация:

- 1) течение внутри цилиндрической поверхности тока; на торцах этого цилиндра находятся подвижные проницаемые сферические сегменты см. (рис. 3), и на поверхностях сегментов выполнено условие (31);
- 2) течение в зазоре между коаксиальными цилиндрами (см. рис. 4).

Список источников

1. Гольдштик М.А. Вихревые потоки. Новосибирск: Наука, 1981. 366 с.
2. Сэффмен Ф.Дж. Динамика вихрей. М.: Научный мир, 2000. 376 с.
3. Головкин М.А., Головкин В.А., Калявкин В.М. Вопросы вихревой гидромеханики. М.: Физматлит, 2009. 264 с.
4. Дикий Л.А. Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1976. 108 с.
5. Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М.: Физматлит, 2005. 288 с.
6. Бардос К., Тити Э.С. Уравнения Эйлера идеальной несжимаемой жидкости // Успехи математических наук. 2007. Т. 62, вып. 3. С. 5–46. doi: 10.4213/rm6811
7. Данцен Р. Аксиально-симметричные несжимаемые потоки с ограниченным вихрем // Успехи математических наук. 2007. Т. 62, вып. 3. С. 73–94. doi: 10.4213/rm6761
8. Наумов И.В., Окулов В.Л., Соренсен Ж.Н. Диагностирование пространственной структуры вихревых мультиплетов в закрученном течении // Теплофизика и аэромеханика. 2010. Т. 17, № 4. С. 585–593.
9. Ахметов Д.Г., Ахметов Т.Г. Структура течения в вихревой камере // Прикладная механика и техническая физика. 2016. Т. 57, вып. 5. С. 134–143. doi: 10.15372/pmtf20160515
10. Юдович В.И. Двумерная нестационарная задача о протекании идеальной несжимаемой жидкости через заданную область // Математический сборник. 1964. Т. 64, № 4. С. 562–588.
11. Yudovich V.I. Eleven great problems of mathematical hydrodynamics // Moscow Mathematical Journal. 2003. V. 3 (2). P. 711–737. doi: 10.17323/1609-4514-2003-3-2-711-737
12. Коробков М.В., Пилецкас К., Пухначев В.В., Руссо Р. Задача протекания для уравнений Навье-Стокса // Успехи математических наук. 2014. Т. 69, вып. 6. С. 115–176. doi: 10.4213/rm9616
13. Юдович В.И. О неограниченном росте вихря и циркуляции скорости течений стратифицированной и однородной жидкости // Математические заметки. 2000. Т. 68, вып. 4. С. 627–636. doi: 10.4213/mzm983
14. Gallaire F., Chomaz J.-M. The role of boundary conditions in a simple model of incipient vortex breakdown // Physics of Fluids. 2004. V. 16. P. 274–286. doi: 10.1063/1.1630326
15. Rusak Z., Wang S., Xu L., Taylor S. On the global nonlinear stability of a near-critical swirling flow in a long finite-length pipe and the path to vortex breakdown // Journal of Fluid Mechanics. 2012. V. 712. P. 295–326. doi: 10.1017/jfm.2012.420
16. Моргулис А.Б. Вариационные принципы и устойчивость открытых течений идеальной несжимаемой жидкости // Сибирские электронные математические известия. 2017. Т. 14. С. 218–251. doi: 10.17377/semi.2017.14.022
17. Ильин К.И., Моргулис А.Б., Черныш А.С. Операторные интегралы Лапласа и устойчивость открытых течений идеальной несжимаемой жидкости // Владикавказский математический журнал. 2019. Т. 21, № 3. С. 31–49. doi: 10.23671/VNC.2019.3.36460
18. Шабловский О.Н. Разрывное конически симметричное течение идеальной несжимаемой жидкости // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 88. С. 149–163. doi: 10.17223/19988621/88/12

References

1. Goldshtik M.A. (1981) *Vikhrevye potoki* [Vortex flows]. Novosibirsk: Nauka.
2. Seffmen F.Dzh. (2000) *Dinamika vikhrey* [Vortex dynamics]. Moscow: Nauchnyy mir.
3. Golovkin M.A., Golovkin V.A., Kalyavkin V.M. (2009) *Voprosy vikhrevoy gidromekhaniki* [Questions of vortex hydromechanics]. Moscow: Fizmatlit.

4. Dikiy L.A. (1976) *Gidrodinamicheskaya ustoychivost' i dinamika atmosfery* [Hydrodynamic stability and atmospheric dynamics]. Leningrad: Gidrometeoizdat.
5. Drazin F. (2005) *Vvedenie v teoriyu gidrodinamicheskoy ustoychivosti* [Introduction to the theory of hydrodynamic stability]. Moscow: Fizmatlit.
6. Bardos K., Titi E.S. (2007) Uravneniya Eylera ideal'noy neszhimaemoy zhidkosti [Euler equations for incompressible ideal fluids]. *Uspekhi matematicheskikh nauk – Russian Mathematical Surveys*. 62(3). pp. 5–46. doi: 10.4213/rm6811
7. Danshen R. (2007) Aksial'no-simmetrichnye neszhimaemye potoki s ogranicennym vikhrem [Axisymmetric incompressible flows with bounded vorticity]. *Uspekhi matematicheskikh nauk – Russian Mathematical Surveys*. 62(3). pp. 73–94. doi: 10.4213/rm6761
8. Naumov I.V., Okulov V.L., Sorensen Zh.N. (2010) Diagnostirovaniye prostranstvennoy struktury vikhrevykh mul'ti-pletov v zakruchennom techenii [Diagnosing the spatial structure of vortex multiplets in a swirling current]. *Teplofizika i aeromehanika – Journal of Thermophysics and Aeromechanics*. 17(4). pp. 585–593.
9. Akhmetov D.G., Akhmetov T.G. (2016) Struktura techeniya v vikhrevoy kamere [Flow structure in a vortex chamber]. *Prikladnaya mehanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 57(5). pp. 134–143. doi: 10.1537/pmtf20160515
10. Yudovich V.I. (1964) Dvumernaya nestatsionarnaya zadacha o protekanii ideal'noy neszhimaemoy zhidkosti cherez zadannuyu oblast' [A two-dimensional nonstationary problem of the flow of an ideal incompressible fluid through a given region]. *Matematicheskiy sbornik – Sbornik: Mathematics*. 64(4). pp. 562–588.
11. Yudovich V.I. (2003) Eleven great problems of mathematical hydrodynamics. *Moscow Mathematical Journal*. 3(2). pp. 711–737. doi: 10.17323/1609-4514-2003-3-2-711-737
12. Korobkov M.V., Piletskas K., Pukhnachev V.V., Russo R. (2014) Zadacha protekaniya dlya uravneniya Nav'e-Stoksa [The flux problem for the Navier-Stokes equations]. *Uspekhi matematicheskikh nauk – Russian Mathematical Surveys*. 69(6). pp. 115–176. doi: 10.4213/rm9616
13. Yudovich V.I. (2000) O neogranichennom roste vikhrya i tsirkulyatsii skorosti techeniy stratifitsirovannoy i odno-rodnoy zhidkosti [On the unlimited vortex growth and circulation of the flow velocity of a stratified and homogeneous liquid]. *Matematicheskie zametki – Mathematical Notes*. 68(4). pp. 627–636. doi: 10.4213/mzm983
14. Gallaire F., Chomaz J.-M. (2004) The role of boundary conditions in a simple model of incipient vortex breakdown. *Physics of Fluids*. 16. pp. 274–286. doi: 10.1063/1.1630326
15. Rusak Z., Wang S., Xu L., Taylor S. (2012) On the global nonlinear stability of a near-critical swirling flow in a long finite-length pipe and the path to vortex breakdown. *Journal of Fluid Mechanics*. 712. pp. 295–326. doi: 10.1017/jfm.2012.420
16. Morgulis A.B. (2017) Variatsionnye printsipy i ustoychivost' otkrytykh techeniy ideal'noy neszhimaemoy zhidkosti [Variational principles and stability of open flows of an ideal incompressible fluid]. *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya – Siberian Electronic Mathematical Reports*. 14. pp. 218–251. doi: 10.17377/semi.2017.14.022
17. Il'in K.I., Morgulis A.B., Chernysh A.S. (2019) Operatornoye integraly Laplasa i ustoychivost' otkrytykh techeniy ideal'noy neszhimaemoy zhidkosti [Operator-valued Laplace's integrals and stability of the open flows of inviscid incompressible fluid]. *Vladikavkazskiy matematicheskiy zhurnal – Vladikavkaz Mathematical Journal*. 21(3). pp. 31–49. doi: 10.23671/VNC.2019.3.36460
18. Shablovskiy O.N. (2024) Razryvnoe konicheski simmetrichnoe techenie ideal'noy neszhimaemoy zhidkosti [A discontinuous conically symmetric flow of an ideal incompressible fluid]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mehanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 88. pp. 149–163. doi: 10.17223/19988621/88/12

Сведения об авторе:

Шабловский Олег Никифорович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Механика» Гомельского государственного технического университета им. П.О. Сухого (Гомель, Беларусь). E-mail: shablovsky-on@yandex.ru

Information about the author:

Shablovskiy Oleg N. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Pavel Sukhoi State Technical University of Gomel, Gomel, Belarus). E-mail: shablovsky-on@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 30.11.2024; принята к публикации 08.12.2025

The article was submitted 30.11.2024; accepted for publication 08.12.2025

Научный журнал

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

2025. № 98

Редактор Е.Г. Шумская
Оригинал-макет Е.Г. Шумской
Дизайн обложки Л.Д. Кривцова

Подписано в печать 19.12.2025 г. Формат 70×100¹/₁₆.
Печ. л. 11,5; усл. печ. л. 10,7. Цена свободная.
Тираж 250 экз. Заказ № 6613.

Дата выхода в свет 28.01.2026 г.

Адрес издателя и редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
Томский государственный университет

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании
Издательства Томского государственного университета
634050, г. Томск, Ленина, 36
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: rio.tsu@mail.ru