ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2025 Управление, вычислительная техника и информатика № 73
Tomsk State University Journal of Control and Computer Science

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

CONTROL OF DYNAMICAL SYSTEMS

Научная статья
УДК 517.977; 62-50
doi: 10.17223/19988605/73/1

Необходимые условия оптимальности для разностных уравнений дробного порядка с запаздыванием

Саадат Тофик кызы Алиева

Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан;
Институт систем управления науки и образования Азербайджана, Баку, Азербайджан;
Азербайджанский государственный экономический университет, Баку, Азербайджан;
Университет Азербайджан, Баку, Азербайджан, saadat.t.aliyeva@au.edu.az

Аннотация. Исследуется терминальная дискретная задача оптимального управления с запаздыванием дробного порядка. С применением одного из вариантов метода приращений доказаны необходимые условия оптимальности первого порядка в форме аналога дискретного принципа максимума, линеаризованного условия максимума и уравнения Эйлера.

Ключевые слова: разностное уравнение дробного порядка с запаздыванием; формула приращения; дискретный принцип максимума; оптимальное управление; необходимые условия оптимальности; аналог линеаризованного условия максимума; аналог уравнения Эйлера.

***Для цитирования*:** Алиева С.Т. Необходимые условия оптимальности для разностных уравнений дробного порядка с запаздыванием // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2025. № 73. С. 4–14. doi: 10.17223/19988605/73/1

Original article
doi: 10.17223/19988605/73/1

Necessary optimality conditions for fractional-order difference equations with delay

Saadat T. Aliyeva

Baku State University, Baku, Azerbaijan;
Institute of Control Systems, Science and Education of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan;
Azerbaijan State University of Economics, Baku, Azerbaijan;
Azerbaijan University, Baku, Azerbaijan, saadat.t.aliyeva@au.edu.az

Abstract. The paper studies a terminal discrete optimal control problem with fractional-order delay. Using one of the variants of the increment method, the necessary conditions for first-order optimality are proved in the form of an analogue of the discrete maximum principle, a linearized maximum condition, and the Euler equation.

Keywords: fractional-order difference equations with delay; increment formula; discrete maximum principle; optimal control; necessary conditions for optimality; an analogue of the linearized maximum condition; an analogue of the Euler equation.

***For citation*:** Aliyeva, S.T. (2025) Necessary optimality conditions for fractional-order difference equations with delay. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitelnaja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 73. pp. 4–14. doi: 10.17223/19988605/73/1

Введение

В последние годы дробные задачи вариационного исчисления и оптимального управления привлекают большее внимание многих авторов (см., напр.: [1–3] и ссылки в них). Но имеющиеся результаты касаются только случая непрерывного времени. Дробные задачи оптимального управления, которые могут быть представлены обыкновенными дробными дифференциальными уравнениями, можно рассматривать как развитие или расширение обычных задач оптимального управления.

Принцип максимума Понтрягина является ключевым результатом в теории необходимых условий оптимальности первого порядка. Первоначально он был доказан для задач оптимального управления, включающих обыкновенные дифференциальные уравнения [4]. Впоследствии были выведены различные условия оптимальности для ряда систем, охватывающих условия как первого, так и более высокого порядка [5].

Необходимые условия оптимальности для дробных дифференциальных уравнений с запаздыванием включают комбинацию дробного дискретного исчисления, вариационного исчисления и адаптации принципов из теории оптимального управления. Полученные условия создают основу для разработки оптимальных стратегий управления в системах с эффектами памяти и временными задержками, которые часто встречаются в реальных приложениях.

Хорошо известно, что дискретные аналоги дифференциальных уравнений могут быть очень полезны в приложениях [6, 7] и что дробные дифференциальные уравнения Эйлера–Лагранжа чрезвычайно трудно решить, поскольку необходимо их дискретизировать [2, 8].

Дискретное исчисление всегда предпочтительнее, особенно когда компьютеры используются для изучения свойств определенных динамических задач управления. Широко исследованы свойства разных обыкновенных разностных уравнений. Однако теория дробно-разностных уравнений все еще разработана мало.

В работах [9, 10] рассмотрена одна задача оптимального управления, описываемая обыкновенным разностным уравнением дробного порядка и получен ряд необходимых условий оптимальности первого и второго порядка.

Многие сложные процессы описываются обыкновенными разностными уравнениями с запаздыванием дробного порядка [11–14]. Разностные уравнения дробного порядка с запаздыванием представляют собой значительную и быстро развивающуюся область исследований в более широкой области дробного исчисления. Традиционные разностные уравнения моделируют системы, где изменения происходят на дискретных временных шагах, в то время как дробное исчисление расширяет концепцию производных и интегралов до нецелых порядков, охватывая эффекты памяти и зависимость на больших расстояниях, часто наблюдаемые в явлениях реального мира. Объединяя эти две концепции, разностные уравнения дробного порядка с запаздыванием включают временные задержки в динамику системы, еще больше повышая их способность реалистично моделировать сложные системы.

В данной статье исследуется задача оптимального управления для модели, описываемой разностными уравнениями с запаздыванием дробного порядка.

Цель работы – при различных предположениях получить ряд необходимых условий оптимальности.

Установлены аналоги дискретного принципа максимума, линеаризованного принципа максимума, получен аналог классического уравнения Эйлера.

1. Основные понятия и постановка задачи

Рассмотрим некоторые необходимые определения и понятия.

Определение 1 [15–17]. Расширенный биномиальный коэффициент $\binom{a}{n}$ определяется следующим образом:

$$\binom{a}{n}=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-n+1)\Gamma(n+1)}, & n>0,\\ 1, & n=0,\\ 0 & n<0.\end{cases}$$

Определение 2 [18]. Для любого $x, y \in R$ $x^{(y)}=\dfrac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+1-y)}$, где Γ – гамма функция, для которой выполняется $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.

Пусть a – произвольное действительное число, и $b=k+a$, здесь $k\in N, k\geq 2$; $T=\{a, a+1, ..., b\}$, $T^k=\{a, a+1, ..., b-1\}$, а Ŧ – множество функций определенных на T.

Определение 3. Пусть $f\in$ Ŧ. Выражения

$${}_a\Delta_t^{-\alpha} f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=a}^{t}\left(t+\alpha-\sigma(s)\right)^{(\alpha-1)} f(s), \qquad {}_t\Delta_b^{-\alpha} f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=t+a}^{b}\left(s+\alpha-\sigma(t)\right)^{(\alpha-1)} f(s)$$

называются соответственно левыми и правыми дробными суммами порядка $\alpha>0$.

Определение 4. Пусть $0<\alpha\leq 1$ и $\mu=1-\alpha$, тогда для функции $f\in$ Ŧ левые и правые дробные суммы порядка α определяются в виде:

$${}_a\Delta_t^{\alpha} f(t)=\Delta\left({}_a\Delta_t^{-\mu} f(t)\right),$$

$${}_t\Delta_b^{\alpha} f(t)=-\Delta\left({}_t\Delta_b^{-\mu} f(t)\right).$$

Приведем некоторые известные свойства дробной суммы и дробной разности из [15–17]:

1. $\Delta^{\alpha}\Delta^{\beta} f(t)=\Delta^{\alpha+\beta} f(t)$;
2. $\Delta^{-\alpha}\Delta^{\alpha} f(t)=f(t)-f(0)$;
3. $\Delta^{\alpha}\Delta^{-\alpha} f(t)=f(t)$;
4. $\Delta^{\alpha} f(0)=0$ и $\Delta^{\alpha} f(1)=f(1)-f(0)=\Delta f(1)$.

Перейдем к формулировке постановки задачи. Пусть управляемый процесс описывается системой нелинейных разностных уравнений с запаздыванием дробного порядка α

$$\Delta^{\alpha} x(t+1)=f\left(t, x(t), x(t-h), u(t)\right), \quad t\in T=\{t_0, t_0+1, ..., t_1-1\}, \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(t)=\varphi(t),\ t\in E_{t_0}=\{t_0-h, t_0-h+1, ..., t_0-1\},\ x(t_0)=x_0. \tag{2}$$

Здесь $x(t)$ – n-мерный вектор фазовых переменных, t_0, t_1 – заданные числа, x_0 – заданный постоянный вектор, $f(t, x, y, u)$ – заданная n-мерная вектор-функция, дискретная по t и непрерывная по (x, y, u) вместе с $f_x(t, x, y, u)$, $f_y(t, x, y, u)$, h – заданное натуральное число (запаздывание), $x_0, \varphi(t), t\in E_{t_0}$ заданы, $\Delta^{\alpha} x(t)$ $(0<\alpha<1)$ – дробный оператор порядка α, а $u(t)$ – r-мерный дискретный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества U, т.е.

$$u(t)\in U\subset R^r,\ t\in T. \tag{3}$$

Такие управляющие функции называем допустимыми управлениями.

Цель состоит в том, чтобы минимизировать функционал

$$S(u)=\phi\left(x(t_1)\right), \tag{4}$$

определенный на решениях системы (1), порожденных всевозможными допустимыми управлениями. Здесь $\phi(x)$ – заданная непрерывно дифференцируемая скалярная функция.

Задача (1)–(4) называется задачей дискретного терминального управления с запаздыванием дробного порядка.

Допустимое управление $u(t)$, доставляющее минимум функционалу (4) при ограничениях (1)–(3), называется оптимальным управлением, а допустимый процесс $(u(t), x(t))$ – оптимальным процессом.

2.Формула приращения критерия качества и необходимое условие оптимальности

Пусть $(u(t), x(t))$ – фиксированный допустимый процесс, а $(\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t),\ \bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t))$ – произвольный допустимый процесс. Тогда ясно, что $\Delta x(t)$ будет решением следующей системы:

$$\Delta^{\alpha}\left(\Delta x(t+1)\right) = f(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t-h), \bar{u}(t)) - f(t, x(t), x(t-h), u(t)),\ t \in T, \tag{5}$$

$$\Delta x(t_0 - h) = 0, \ldots, \Delta x(t_0) = 0.$$

Пусть $\psi(t)$ – пока неизвестный *n*-мерный дискретный вектор-столбец,

$$H(t, x, y, u, \psi) = \psi'(t) f(t, x, y, u)$$

дискретный аналог функции Гамильтона–Понтрягина, где $y(t) = x(t-h)$.

Умножая обе части тождества (5) слева скалярно на пока неизвестную вектор-функцию $\psi(t)$, затем суммируя обе части полученного тождества по *t* от t_0 до $t_1 - 1$ и при этом учитывая вид функции Гамильтона–Понтрягина, получим

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t)\Delta^{\alpha}\left(\Delta x(t+1)\right) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[H(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t-h), \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, x(t), x(t-h), u(t), \psi(t))\right].$$

Поэтому приращение функционала $S(u)$ можно записать в виде:

$$\Delta S(u) = S(\bar{u}) - S(u) = \phi\left(\bar{x}(t_1)\right) - \phi\left(x(t_1)\right) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi'(t)\Delta^{\alpha}\left(\Delta x(t+1)\right) -$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[H(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t-h), \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, x(t), x(t-h), u(t), \psi(t))\right]. \tag{6}$$

Используя формулу Тейлора, приращение функционала (6) представим в виде:

$$\Delta S(u) = S(\bar{u}) - S(u) = \phi_x\left(x(t_1)\right)\Delta x(t_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi'(t)\Delta^{\alpha}\left(\Delta x(t+1)\right) -$$

$$-\sum_{t-t_0}^{t_1-1}\frac{\partial H'(t, x(t), y(t), u(t), \psi(t))}{\partial x(t)}\Delta x(t) - \sum_{t-t_0}^{t_1-1}\frac{\partial H'(t, x(t), y(t), u(t), \psi(t))}{\partial y(t)}\Delta y(t) -$$

$$-\sum_{t-t_0}^{t_1-1}\frac{\partial H_{\bar{u}}'(t, x(t), y(t), u(t), \psi(t))}{\partial x(t)}\Delta x(t) - \sum_{t-t_0}^{t_1-1}\frac{\partial H_{\bar{u}}'(t, x(t), y(t), u(t), \psi(t))}{\partial y(t)}\Delta y(t) -$$

$$-\sum_{t-t_0}^{t_1-1}\Delta_{\bar{u}}H'(t, x(t), y(t), u(t), \psi(t)) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} o_2(\|\Delta z(t)\|) + o_1(\|\Delta x(t_1)\|), \tag{7}$$

где по определению

$$\Delta_{\bar{u}}H\left[(t)\right] = H(t, x(t), y(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, x(t), y(t), u(t), \psi(t)),$$

$$H_x\left[t\right] = H_x(t, x(t), y(t), u(t), \psi(t)),$$

$$H_y\left[t\right] = H_y(t, x(t), y(t), u(t), \psi(t)),$$

$$\Delta z = \left(\Delta x, \Delta y\right)',$$

$$\Delta_{\bar{u}}H_x\left[t\right] = H_x(t, x(t), y(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, x(t), y(t), u(t), \psi(t)).$$

Выполним преобразование формулы приращения (7).
Сначала рассмотрим выражение

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi'(t)\Delta^{\alpha}\left(\Delta x(t+1)\right).$$

Сделав в нем замену переменных $(t+1)=s$ и учитывая начальное условие (6), получим

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi'(t)\Delta^{\alpha}\left(\Delta x(t+1)\right)=\sum_{t=t_0+1}^{t_1}\psi'(t-1)\Delta^{\alpha}\left(\Delta x(t)\right)=$$

$$=\psi'(t_1-1)\Delta^{\alpha}\left(\Delta x(t_1)\right)-\psi'(t_0-1)\Delta^{\alpha}\left(\Delta x(t_0)\right)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi'(t-1)\Delta^{\alpha}\left(\Delta x(t)\right)=$$

$$=\psi'(t_1-1)\Delta^{\alpha}\left(\Delta x(t_1)\right)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi'(t-1)\Delta^{\alpha}\left(\Delta x(t)\right). \tag{8}$$

Из свойства дробной суммы получаем, что

$$\Delta x(t)=\Delta^{-\alpha}\Delta^{\alpha}(\Delta x(t))=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=t_0}^{t}(t+\alpha-\sigma(s))^{(\alpha-1)}\Delta^{\alpha}(\Delta x(s)), \tag{9}$$

$$\Delta x(t_1)=\Delta^{-\alpha}\Delta^{\alpha}(\Delta x(t_1))=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=t_0}^{t_1}(t_1+\alpha-\sigma(s))^{(\alpha-1)}\Delta^{\alpha}(\Delta x(s))=$$

$$=\Delta^{\alpha}(\Delta x(t_1))+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}(t_1+\alpha-\sigma(s))^{(\alpha-1)}\Delta^{\alpha}(\Delta x(s)). \tag{10}$$

Теперь, принимая во внимание тождества (8)–(10), из формулы приращения (7) получим

$$\Delta S(u)=\phi_x'(x(t_1))\left(\Delta^{\alpha}(\Delta x(t_1))+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}(t_1+\alpha-\sigma(s))^{(\alpha-1)}\Delta^{\alpha}(\Delta x(t))\right)+$$

$$+\psi'(t_1-1)\Delta^{\alpha}\left(\Delta x(t_1)\right)+\sum_{t=t_0}^{t_1-h-1}\psi'(t-1)\Delta^{\alpha}\left(\Delta x(t)\right)+\sum_{t=t_1-h}^{t_1-1}\psi'(t-1)\Delta^{\alpha}\left(\Delta x(t)\right)-$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{t=t_0}^{t_1-h-1}\left[\sum_{s=t}^{t_1-1}(s+\alpha-\sigma(t))^{(\alpha-1)}\frac{\partial H'(s,x(s),y(s),u(s),\psi(s))}{\partial x(s)}\right]\Delta^{\alpha}(\Delta x(t))-$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{t=t_1-h}^{t_1-1}\left[\sum_{s=t}^{t_1-1}(s+\alpha-\sigma(t))^{(\alpha-1)}\frac{\partial H'(s,x(s),y(s),u(s),\psi(s))}{\partial x(s)}\right]\Delta^{\alpha}(\Delta x(t))-$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{t=t_0}^{t_1-h-1}\left[\sum_{s=t}^{t_1-1}(s+\alpha-\sigma(t))^{(\alpha-1)}\frac{\partial H'(s,x(s),y(s),u(s),\psi(s))}{\partial y(s)}\right]\Delta^{\alpha}(\Delta x(t))-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\frac{\partial H_{\bar u}'(t,x(t),y(t),u(t),\psi(t))}{\partial x(t)}\Delta x(t)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\frac{\partial H_{\bar u}'(t,x(t),y(t),u(t),\psi(t))}{\partial y(t)}\Delta y(t)-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Delta_{\bar u}H(t,x(t),y(t),u(t),\psi(t))-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}o_2(\|\Delta z(t)\|)+o_1(\|\Delta x(t_1)\|). \tag{11}$$

Предположим, что $\psi(t)$ является решением следующей системы:

$$\psi(t-1)=-\sum_{s=t}^{t_1-1}(s+\alpha-\sigma(t))^{(\alpha-1)}\frac{\partial H'(s,x(s),y(s),u(s),\psi(s))}{\partial x(s)},\ t=t_1-h,\dots,t_1-1,$$

$$\psi(t-1)=-\varphi_x'(x(t_1))\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}(t_1+\alpha-\sigma(s))^{(\alpha-1)}+$$

$$+\sum_{s=t}^{t_1-1}(s+\alpha-\sigma(t))^{(\alpha-1)}H_x[s]+\sum_{s=t}^{t_1-1}(s+\alpha-h-\sigma(t))^{(\alpha-1)}H_y[s],\ t=t_0,\dots,t_1-h-1, \tag{12}$$

$$\psi(t_1-1)=-\phi_x(x(t_1)). \tag{13}$$

Задачу (12)–(13) называем сопряженной системой для задачи управления (1)–(4).

Учитывая задачу (12)–(13), из формулы приращения (11) получим

$$\Delta S(u) = -\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta_{\bar{u}} H[t] + \eta(u, \Delta u), \tag{14}$$

где по определению

$$\eta(u,\Delta u) = o_1(\|\Delta x(t_1)\|) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} o_2(\|\Delta z(t)\|) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta_{\bar{u}} H_x[(t)]\Delta x(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta_{\bar{u}} H_y[(t)]\Delta x(t-h). \tag{15}$$

Нам понадобится оценка для $\|\Delta x(t)\|$ $\left(\|\Delta x(t)\| = \sum_{i=1}^{n} |\Delta x_i(t)|\right)$.

Применяя $\Delta^{-\alpha}$ обеим сторонам уравнения (1), имеем

$$\Delta^{-\alpha}\Delta^{\alpha} x(t+1) = \Delta^{-\alpha} f(t, x(t), y(t), u(t)).$$

Займемся преобразованием этой формулы. С этой целью рассмотрим выражение

$$\Delta^{-\alpha}\Delta^{\alpha} x(t+1).$$

Учитывая свойства операторов дробной суммы и дробной разности, проведем следующие преобразования:

$$\Delta^{-\alpha}\Delta^{\alpha} x(t+1) = \Delta^{-\alpha}(\Delta^{1-\mu} x(t+1)) = \Delta^{-\alpha}(\Delta^{-\mu}(\Delta x(t+1)) =$$

$$= \Delta^{-1}(\Delta x(t+1)) = \sum_{j=t_0}^{t} (x(t+1) - x(t)) = x(t+1) - x(t_0).$$

Правая сторона:

$$\Delta^{-\alpha} f(t, x(t), y(t), u(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=t_0}^{t} (t - \sigma(j))^{(\alpha-1)} f(j, x(j), y(j), u(j)) =$$

$$= \sum_{j=t_0}^{t} \binom{t-j+\alpha-1}{t-j} f(j, x(j), y(j), u(j)) = \sum_{j=t_0}^{t} A_{\alpha}(t,j) f(j, x(j), y(j), u(j)).$$

Здесь

$$A_{\alpha}(t,j) = \binom{t-j+\alpha-1}{t-j}.$$

Таким образом, доказали, что

$$x(t+1) = x(t_0) + \sum_{j=t_0}^{t} A_{\alpha}(t,j) f(j, x(j), y(j), u(j)).$$

Отсюда, переходя к норме и используя условие Липшица, получаем, что

$$\|\Delta x(t)\| = \sum_{j=t_0}^{t-1} A_{\alpha}(t-1,j) \| f(j, x(j)+\Delta x(j), y(j)+\Delta y(j), u(j)+\Delta u(j)) -$$

$$- f(j, x(j), y(j), u(j)) \| = \sum_{j=t_0}^{t-1} A_{\alpha}(t-1,j) \| f(j, x(j)+\Delta x(j), y(j)+\Delta y(j), u(j)+\Delta u(j)) -$$

$$- f(j, x(j), y(j)), u(j)) + \Delta_{\bar{u}} f(j, x(j), y(j)), u(j)) \| \le$$

$$\le L_1 \sum_{j=t_0}^{t-1} A_{\alpha}(t-1,j) \left(\|\Delta x(j)\| + \|\Delta y(j)\| + \sum_{j=t_0}^{t} A_{\alpha}(t-1,j) \|\Delta_{\bar{u}} f[j]\| \right) \le$$

$$\le L_1 + \sum_{j=t_0}^{t-1} A_{\alpha}(t-1,j) \|\Delta_{\bar{u}} f[j]\|, \ t \in \{t_0, t_0+1, ..., t_1-1\}.$$

Применяя к последнему неравенству лемму Гроноулла–Беллмана дробного порядка (см., напр.: [15]), получим справедливость оценки

$$\|\Delta x(t)\| \le L_2 \prod_{j=t_0}^{t-1} (1 + A_{\alpha}(t,j) \|\Delta_{\bar{u}} f[j]\|), t = t_0, t_0+1, ..., t_1. \tag{16}$$

3. Необходимые условия оптимальности

Теперь предположим, что вдоль допустимого процесса $(u(t), x(t))$ множество допустимых скоростей системы (1), т.е. множество

$$f\left(t, x(t), y(t), U\right) = \left\{\beta : \beta = f\left(t, x(t), y(t), v\right), v \in U\right\}, \tag{17}$$

выпукло. Тогда специальное приращение управления $u(t)$ можно определить по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(t) = v(t,\varepsilon) - u(t),\ t \in T, \tag{18}$$

здесь $\varepsilon \in [0,1]$ – произвольное число, а $v(t,\varepsilon) \in U$ – такой вектор, что

$$f\left(t, x(t), y(t), v(t,\varepsilon)\right) = \varepsilon f\left(t, x(t), y(t), v(t)\right) + (1-\varepsilon) f\left(t, x(t), y(t), u(t)\right). \tag{19}$$

Через $\Delta x_\varepsilon(t)$ обозначим специальное приращение траектории $x(t)$, отвечающее приращению $\Delta u_\varepsilon(t)$ управления $u(t)$.

С учетом оценки (16) получаем, что

$$\|\Delta x_\varepsilon(t)\| \le L_3\varepsilon,\ t \in T \cup t_1, L_3 = const > 0. \tag{20}$$

В силу этой оценки получим

$$\eta\left(u; \Delta u_\varepsilon(t)\right) = o(\varepsilon).$$

Тогда из формулы приращения (14) следует, что

$$\Delta S_\varepsilon(u) = S(u + \Delta u_\varepsilon) - S(u) = -\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta_{v(t,\varepsilon)} H[t] + o(\varepsilon) = -\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta_{v(t)} H[t] + o(\varepsilon). \tag{21}$$

Если предположить, что в задаче (1)–(4) управление $u(t)$ оптимальное, то из разложения (21) получим следующее неравенство:

$$-\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta_{v(t)} H[t] + o(\varepsilon) \ge 0. \tag{22}$$

Из этого неравенства в силу произвольности ε следует неравенство

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta_{v(t)} H[t] \le 0. \tag{23}$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 1 (*дискретный принцип максимума для системы с запаздыванием*). *Если в задаче* (1)–(2) *вдоль допустимого процесса* $(u(t), x(t))$ *множество допустимых скоростей системы* (19) выпукло, то для оптимальности управления $u(t)$ в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы неравенство (23) *выполнялось для любого* $v(t) \in U$, $t \in T$.

Непосредственным следствием этого утверждения является

Теорема 2 (*поточечный дискретный принцип максимума* [19]). *При выполнении условия теоремы* 1 *для оптимальности допустимого управления* $u(t)$ *в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы условие*

$$\max_{v \in U} H(\theta, x(\theta), y(\theta), v, \psi(\theta)) = H(\theta, x(\theta), y(\theta), u(\theta), \psi(\theta)) \tag{24}$$

выполнялось для всех $\theta \in T$.

Условие (24) является поточечным дискретным условием максимума для рассматриваемой задачи. Для доказательства условия (24) достаточно в неравенстве (23) $v(t)$ определить по формуле

$$v(t) = \begin{cases} v,\ t = \theta \in T, v \in U, \\ u(t), t \ne \theta \in T. \end{cases}$$

Также легко доказывается, что если вдоль процесса $(u(t), x(t))$ выполняется соотношение (24), то вдоль этого же процесса выполняется также неравенство (23). Все эти рассуждения показывают, что условия оптимальности (23) и (24) равносильны.

Теперь предположим, что вектор-функция $f(t,x,y,u)$ непрерывна по совокупности переменных вместе с частными производными по (x,u), а множество U выпукло.

Далее, считая $(u(t),x(t))$ оптимальным процессом, специальное приращение оптимального управления определим следующим образом:

$$\Delta u(t;\varepsilon)=\varepsilon\left(v(t)-u(t)\right). \tag{25}$$

Здесь $\varepsilon\in[0,1]$ – произвольное число, а $v(t)\in U, t\in T$ – произвольный вектор.

В силу выпуклости множества U специальное приращение $\Delta u(t;\varepsilon)$ оптимального управления $u(t)$, определяемое формулой (25), будет допустимым. В самом деле:

$$\bar{u}_\varepsilon(t)=u(t)+\Delta u(t;\varepsilon)=u(t)+\varepsilon\left[v(t)-u(t)\right]=\varepsilon v(t)+(1-\varepsilon)u(t)\in U.$$

Через $\Delta x(t;\varepsilon)$ обозначим специальное приращение оптимальной траектории $x(t)$, отвечающей специальному приращению управления $u(t)$, определяемое формулой (25).

Используя работу [20], по аналогии с ней доказывается оценка

$$\left\|\Delta x(t+1)\right\|\le L_1\prod_{j=t_0}^{t-1}(1+A_\alpha(t,j)\left\|\Delta u(j)\right\|),$$

здесь $L_1=const>0,\ t\in T\cup t_1$.

Из этого неравенства получаем, что

$$\left\|\Delta x(t;\varepsilon)\right\|\le L_1\prod_{j=t_0}^{t-1}(1+A_\alpha(t,j)\left\|\Delta u(j;\varepsilon)\right\|)\le\varepsilon L_2\left(\left\|v(j)-u(j)\right\|\right),$$

отсюда следует

$$\left\|\Delta x(t;\varepsilon)\right\|\sim\varepsilon. \tag{26}$$

Учитывая формулу (25) и оценку (26), из формулы приращения (14) получим справедливость следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть множество* U *выпукло, а* $f(t,x,y,u)$ *непрерывно по совокупности переменных вместе с частными производными по* (x,u). *Тогда для оптимальности допустимого управления* $u(t)$ *необходимо, чтобы соотношение*

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}H_u'[t](u(t)-v(t))\le 0 \tag{27}$$

выполнялось для любого $u(t)\in U, t\in T$.

Соотношение (27) является аналогом линеаризованного принципа максимума.

Теперь предположим, что U – заданное непустое, ограниченное и открытое множество, а векторная функция $f(t,x,y,u)$ непрерывна относительно множества переменных вместе с частными производными по (x,u).

Поскольку, по предположению, множество U открыто, особое приращение допустимого управления $u(t)$ можно определить по формуле

$$u_\varepsilon(t)=\varepsilon\delta u(t). \tag{28}$$

Здесь ε достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta u(t)$ – произвольная r-мерная векторная функция со значениями из R^r.

Через $\Delta x_\varepsilon(t)$ обозначим особое приращение допустимой траектории $x(t)$, соответствующее особому приращению управления $u(t)$, определяемому формулой (28).

Учитывая оценку (16), получаем, что

$$\left\|\Delta x_\varepsilon(t)\right\|\le L_2\varepsilon,\ t\in T\cup t_1, L_2=const>0. \tag{29}$$

Кроме того, для $\Delta x_\varepsilon(t)$ справедливо следующее разложение:

$$\Delta x_\varepsilon(t)=\varepsilon\delta x(t)+o(\varepsilon;t). \tag{30}$$

Отметим, что $\delta u(t)$ называется вариацией управления $\delta u(t)$, а $\delta x(t)$ называется вариацией траектории $x(t)$.

Используя формулы (28) и (30), а также оценку (29), из формулы приращения (25) получаем справедливость следующего утверждения.

Теорема 4. *Пусть множество U открыто, а* $f(t,x,y,u)$ *непрерывна по множеству переменных вместе с частными производными по* (x,u). *Тогда для оптимальности допустимого управления* $u(t)$ *необходимо, чтобы соотношение*

$$H_u[t]=0 \tag{31}$$

выполнялось для любого $t\in T$.

Соотношение (31) называется аналогом уравнения Эйлера для рассматриваемой задачи.

4. Пример проверки необходимого условия оптимальности

Пусть требуется минимизировать функционал

$$S(u)=-x(3)\to\min$$

при ограничениях

$$\Delta^{\alpha}x(t+1)=3x(t)+x(t-1)u(t),\ T=\{0,1,2\},$$

$$x(-1)=0,\ x(0)=1,\ |u(t)|\le 2,\ t\in T\setminus 2.$$

Используя определения 2, 3 можно доказать, что

$$S(u)=-(2-\alpha-\frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)})-(\alpha+1)\,u(1)-u(2).$$

Отсюда получаем, что $u^*(t)=(u^*(1),u^*(2))=(2,2)$ может быть оптимальным управлением.

Составим функцию Гамильтона–Понтрягина следующим образом:

$$H(t,x(t),x(t-1),u(t),\psi(t))=\psi(t)\big(3x(t)+x(t-1)u(t)\big).$$

Сопряженная система имеет вид:

$$\psi(t-1)=-3\left[\sum_{s=t}^{t_1-1}\big(s+\alpha-\sigma(t)\big)^{(\alpha-1)}\psi(s)\right],\ t=2,3,$$

$$\psi(t-1)=-\varphi_x{}'(x(t_1))\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}(t_1+\alpha-\sigma(s))^{(\alpha-1)}+$$

$$+3\sum_{s=t}^{t_1-1}(s+\alpha-\sigma(t))^{(\alpha-1)}\psi(s)+\sum_{s=t}^{t_1-1}(s+\alpha-h-\sigma(t))^{(\alpha-1)}\psi(s)u(s),\ t=t_0,...,t_1-h-1,\ t=0,1.$$

Отсюда получаем, что

$$\psi(2)=1,\psi(1)=3\Gamma(\alpha).$$

По теореме 1 проверим, что управление $u^*(t)$ является оптимальным.

Получаем, что условие

$$H(t,x(t),x(t-1),v(t),\psi(t))-H(t,x(t),x(t-1),u(t),\psi(t))=\psi(t)x(t-1)(v(t)-2)\le 0$$

выполняется для любого $v(t)\in[-2,\,2],\ t=0,1,2.$

Заключение

В работе ставится и исследуется дискретная терминальная задача оптимального управления, описываемая нелинейным разностным уравнением дробного порядка.

В рассмотрение введены функции типа Понтрягина, а также аналог сопряженной задачи, при сделанных предположениях построена общая формула приращения функционала качества.

В случае выпуклости множества допустимых скоростей рассматриваемой системы уравнений, используя построенную формулу приращения, доказан дискретный аналог принципа максимума Л.С. Понтрягина. В случае выпуклости области управления и непрерывной дифференцируемости правой части уравнения по управлению доказан аналог линеаризованного условия максимума, а в случае открытости области управления установлено необходимое условие оптимальности в форме аналога классического уравнения Эйлера.

Список источников

1. Agrawal O.P. Formulation of Euler-Lagrange equations for fractional variational problems // J. Math. Anal. Appl. 2002. V. 272 (1). P. 368–379.
2. Agrawal O.P. A general finite element formulation for fractional variational problems // J. Math. Anal. Appl. 2008. V. 337 (1). P. 1–12.
3. El-Nabulsi R.A., Torres D.F.M. Necessary optimality conditions for fractional action-like integrals of variational calculus with Riemann-Liouville derivatives of order (α, β) // Math. Methods Appl. Sci. 2007. V. 30 (15). P. 1931–1939. URL: https://arxiv.org/abs/math-ph/0702099
4. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.М. Математическая теория оптимальных процессов. М. : Наука, 1984. 364 с.
5. Gabasov R., Kirillova F.M. High-order necessary conditions for optimality // SIAM J. Control. 1972. V. 10. P. 127–168.
6. Baleanu D., Jarad F. Difference discrete variational principles // Mathematical Analysis and Applications. Melville, NY : Amer. Inst. Phys., 2006. P. 20–29.
7. Jarad F., Baleanu D. Discrete variational principles for Lagrangians linear in velocities // Rep. Math. Phys. 2007. V. 59 (1). P. 33–43.
8. Baleanu D., Defterli O., Agrawal O.P. A central difference numerical scheme for fractional optimal control problems // J. Vib. Control. 2009. V. 15 (4). P 583–597.
9. Алиева С.Т. Принцип максимума Понтрягина для нелинейных разностных уравнений дробного порядка // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2021. № 54. С. 4–11. doi: 10.17223/19988605/54/1
10. Алиева С.Т. Необходимые условия оптимальности первого и второго порядков в одной задаче управления, описываемой нелинейными разностными уравнениями дробного порядка // Автоматика и телемеханика. 2023. № 2. С. 54–65. doi: 10.31857/S0005231023020034
11. Bhalekar S., Daftardar-Gejji V., Baleanu D., Magin R. Fractional Bloch equation with delay // Computers and Mathematics with Applications. 2011. V. 61 (5). P. 1355–1365.
12. Magin R.L. Fractional calculus models of complex dynamics in biological tissues // Computers and Mathematics with Applications. 2010. V. 59 (5). P. 1586–1593.
13. Bahaa G.M. Fractional optimal control problem for differential system with delay argument // Advanc. Differen. Equat. 2017. Art. 69. P. 1–19. doi: 10.1186/s13662-017-1121-6
14. Si-Ammour A., Djennoune S., Bettayeb M. A sliding mode control for linear fractional systems with input and state delays // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2009. V. 14 (5). P. 2310–2318.
15. Miller K., Ross B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. New York :Wiley, 1993. 366 p.
16. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional Integrals and Derivatives – Theory and Applications. Linghorne, PA : Gordon and Breach, 1993. 976 p.
17. Podlubny I. Fractional Differential Equations. San Diego, CA : Academic Press, 1999. 340 p.
18. Kilbas A., Srivastava M.H., Trujillo J.J. Theory and Application of Fractional Differential Equations. Elsevier Science, 2006. 541 p. (North Holland Mathematics Studies; v. 204).
19. Мансимов К.Б. Дискретные системы. Баку : Изд-во Бакинского гос. ун-та, 2013. 151 с.
20. Алиева С.Т., Мансимов К.Б. Аналог линеаризованного принципа максимума для задачи оптимального управления нелинейными разностными уравнениями дробного порядка // Вестник Пермского университета. Математика, механика и информатика. 2021. Вып 1 (52). С. 9–15. doi: 10.17072/1993-0550-2021-1-9-15

References

1. Agrawal, O.P. (2002) Formulation of Euler-Lagrange equations for fractional variational problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 272(1). pp. 368–379.
2. Agrawal, O.P. (2008) A general finite element formulation for fractional variational problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 337(1). pp. 1–12.
3. El-Nabulsi, R.A. & Torres, D.F.M. (2007) Necessary optimality conditions for fractional action-like integrals of variational calculus with Riemann-Liouville derivatives of order (α, β). *Mathematical Methods in the Applied Sciences.* 30(15). pp. 1931–1939. [Online] Available from: https://arxiv.org/abs/math-ph/0702099
4. Pontryagin, L.S., Boltyanskiy, V.G., Gamkrelidze, R.V. & Mishchenko, E.M. (1984) *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [Mathematical Theory of Optimal Processes]. Moscow: Nauka.

5. Gabasov, R. & Kirillova, F.M. (1972) High-order necessary conditions for optimality. *SIAM Journal on Control.* 10. pp. 127–168.
6. Baleanu, D. & Jarad, F. (2006) Difference discrete variational principles. In: *Mathematical Analysis and Applications*. Melville, NY: Amer. Inst. Phys. pp. 20–29.
7. Jarad, F. & Baleanu, D. (2007) Discrete variational principles for Lagrangians linear in velocities. *Reports on Mathematical Physics.* 59(1). pp. 33–43.
8. Baleanu, D., Defterli, O. & Agrawal, O.P. (2009) A central difference numerical scheme for fractional optimal control problems. *Journal of Vibration and Control.* 15(4). pp. 583–597.
9. Alieva, S.T. (2021) Pontryagin's maximum principle for nonlinear difference equations of fractional order. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 54. pp. 4–11. doi: 10.17223/19988605/54/1
10. Alieva, S.T. (2023) Neobkhodimye usloviya optimal'nosti pervogo i vtorogo poryadkov v odnoy zadache upravleniya, opisyvaemoy nelineynymi raznostnymi uravneniyami drobnogo poryadka [Necessary conditions for first- and second-order optimality in one control problem described by nonlinear difference equations of fractional order]. *Avtomatika i telemekhanika.* 2. pp. 54–65. doi: 10.31857/S0005231023020034
11. Bhalekar, S., Daftardar-Gejji, V., Baleanu, D. & Magin, R. (2011) Fractional Bloch equation with delay. *Computers and Mathematics with Applications.* 61(5). pp. 1355–1365.
12. Magin, R.L. (2010) Fractional calculus models of complex dynamics in biological tissues. *Computers and Mathematics with Applications.* 59(5). pp. 1586–1593.
13. Bahaa, G.M. (2017) Fractional optimal control problem for differential system with delay argument. *Advances in Difference Equations.* Art. 69. pp. 1–19. doi: 10.1186/s13662-017-1121-6
14. Si-Ammour, A., Djennoune, S. & Bettayeb, M. (2009) A sliding mode control for linear fractional systems with input and state delays. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 14(5). pp. 2310–2318.
15. Miller, K. & Ross, B. (1993) *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. New York: Wiley.
16. Samko, S.G., Kilbas, A.A. & Marichev, O.I. (1993) *Fractional Integrals and Derivatives – Theory and Applications*. Linghorne, PA: Gordon and Breach.
17. Podlubny, I. (1999) *Fractional Differential Equations*. San Diego, CA: Academic Press.
18. Kilbas, A., Srivastava, M.H. & Trujillo, J.J. (2006) *Theory and Application of Fractional Differential Equations*. (North Holland Mathematics Studies, vol. 204). Elsevier Science.
19. Mansimov, K.B. (2013) *Diskretnye sistemy* [Discrete Systems]. Baku: Baku University.
20. Alieva, S.T. & Mansimov, K.B. (2021) Analog linearizovannogo printsipa maksimuma dlya zadachi optimal'nogo upravleniya nelineynymi raznostnymi uravneniyami drobnogo poryadka [An Analog of the Linearized Maximum Principle for an Optimal Control Problem with Nonlinear Fractional Order Difference Equations]. *Vestnik Permskogo universiteta. Matematika, mekhanika i informatika.* 1(52). pp. 9–15. doi: 10.17072/1993-0550-2021-1-9-15

***Информация об авторе*:**
Алиева Саадат Тофик кызы – доцент, кандидат физико-математических наук, Бакинский государственный университет; Институт систем управления Министерства науки и образования Азербайджана; Азербайджанский государственный экономический университет; Университет Азербайджан (Баку, Азербайджан). E-mail: saadat.t.aliyeva@au.edu.az

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

***Information about the author*:**
Aliyeva Saadat T. (Associate Professor, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Baku State University; Institute of Control Systems of the Ministry of Science and Education of Azerbaijan; Azerbaijan State University of Economics; Azerbaijan University, Baku, Azerbaijan). E-mail: saadat.t.aliyeva@au.edu.az

The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 23.04.2025; принята к публикации 02.12.2025

Received 23.04.2025; accepted for publication 02.12.2025