ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2025 Управление, вычислительная техника и информатика № 73
Tomsk State University Journal of Control and Computer Science

Научная статья
УДК 681.51
doi: 10.17223/19988605/73/3

О задаче управления качеством переходных процессов по выходу в матричной системе второго порядка с обратной связью по состоянию

Евгений Александрович Перепелкин

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, Россия, perepelkin@guap.ru

Аннотация. Решается задача управления качеством переходных процессов по выходу в матричной системе второго порядка с обратной связью по состоянию. Качество переходных процессов задается эталонной моделью выхода в виде системы дифференциальных уравнений второго порядка. Описывается алгоритм модального синтеза обратной связи, при которой выход системы точно соответствует динамике эталонной модели. При этом замкнутая обратной связью система является асимптотически устойчивой. Исследуются условия существования решения задачи. Указываются ограничения, накладываемые на размеры векторов входа и выхода системы и на свойства матриц системы. Приводятся численный пример и результаты моделирования.

Ключевые слова: матричная система второго порядка; качество переходных процессов; эталонная модель.

Для цитирования: Перепелкин Е.А. О задаче управления качеством переходных процессов по выходу в матричной системе второго порядка с обратной связью по состоянию // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2025. № 73. С. 23–29. doi: 10.17223/19988605/73/3

Original article
doi: 10.17223/19988605/73/3

On the problem of transient process quality control of output in a matrix second-order system with state feedback

Evgenii A. Perepelkin

Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Saint-Petersburg, Russian Federation, perepelkin@guap.ru

Abstract. The article solves the problem of transient process quality control of output in a matrix second-order system with state feedback. The transient process quality is specified by a reference output model in the form of second-order differential equations system. The paper describes modal synthesis algorithm, in which the system output exactly matches to the dynamics of the reference model. At the same time, the closed loop system is asymptotically stable. The conditions for the existence of a solution to the problem are investigated. The restrictions imposed on the sizes of the system input and output vectors and on the properties of the system matrices are indicated. A numerical example and simulation results are given.

Keywords: matrix second-order system; transient process quality; reference model.

For citation: Perepelkin, E.A. (2025) On the problem of transient process quality control of output in a matrix second-order system with state feedback. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitelnaja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 73. pp. 23–29. doi: 10.17223/19988605/73/3

Введение

Проблема качества переходных процессов в системах автоматического управления является одной из основных в теории и практике управления сложными динамическими объектами. Известные методы синтеза регуляторов [1, 2] не всегда могут обеспечить желаемое качество переходных процессов. Модальные, линейно-квадратичные, оптимальные и робастные по критериям H_2 / H_∞ регуляторы частично решают эту проблему, поскольку сложно определить влияние полюсов замкнутой системы или весовых матриц в интегральных критериях качества на временные характеристики переходных процессов в многосвязных системах.

В настоящей работе решается задача управления качеством переходных процессов по выходу для матричной системы второго порядка. Матричные системы дифференциальных уравнений второго порядка применяются для описания объектов управления в механике, акустике, электротехнике, робототехнике. Для решения задач управления такого рода системами применяют классические методы теории автоматического управления, в том числе методы модального и оптимального управления [3, 4].

В данной работе описывается метод синтеза обратной связи по состоянию в матричной системе второго порядка, при которой переходный процесс по выходу точно соответствует переходному процессу эталонной модели. Такой подход позволяет решить задачу управления качеством переходных процессов по выходу при условии асимптотической устойчивости системы с обратной связью.

Синтез на основе эталонной модели является классическим методом решения задач управления динамическими объектами. Данный метод применяется в теории автоматического управления для решения широкого круга задач, включая задачи адаптивного и робастного управления [5–10].

Работа содержит постановку задачи, предварительные сведения о решении задачи модального управления матричной системой второго порядка, алгоритм синтеза обратной связи с применением эталонной модели выхода, численный пример и результаты моделирования.

1. Постановка задачи

Рассмотрим линейную матричную систему второго порядка, поведение которой описывается уравнениями

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_1\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_2\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{u}, \qquad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \tag{1}$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ – вектор управления, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^l$ – вектор выхода, матрицы системы $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $l < m < n.$ Будем считать, что матрицы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ полного ранга, $\operatorname{rank}\mathbf{B} = m,$ $\operatorname{rank}\mathbf{C} = l.$ Строки матрицы $\mathbf{CB}$ линейно независимы, $\operatorname{rank}\mathbf{CB} = l.$

В теории матричных систем второго порядка вектор $\mathbf{x}$ принято называть перемещением системы, вектор $\dot{\mathbf{x}}$ – скоростью системы.

Пусть задано желаемое значение выхода $\bar{\mathbf{y}}.$ Необходимо построить управление в виде обратной связи по скорости и перемещению $\mathbf{u} = -\mathbf{F}_1\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{F}_2\mathbf{x} + \bar{\mathbf{u}},$ где $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ – матрицы обратной связи, $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^m$ – некоторое постоянное значение управления такое, что

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{y}(t) = \bar{\mathbf{y}}$$

при любых начальных значениях перемещения и скорости $\mathbf{x}(0),$ $\dot{\mathbf{x}}(0).$ При этом замкнутая обратной связью система

$$\ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}\mathbf{F}_1)\dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{A}_2 + \mathbf{B}\mathbf{F}_2)\mathbf{x} = \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}} \tag{2}$$

должна быть асимптотически устойчивой, а переходный процесс по вектору выхода должен точно соответствовать переходному процессу эталонной модели асимптотически устойчивой матричной системы второго порядка

$$\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{D}_1\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{D}_2(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) = 0, \tag{3}$$

где $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2 \in \mathbb{R}^{l\times l},$ $\det\mathbf{D}_2 \neq 0.$

2. Предварительные сведения

Матрицу $\mathbf{A}(s) = \mathbf{E}s^2 + \mathbf{A}_1 s + \mathbf{A}_2$ будем называть матрицей разомкнутой системы, матрицу $\mathbf{A}_c(s) = \mathbf{E}s^2 + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}\mathbf{F}_1)s + \mathbf{A}_2 + \mathbf{B}\mathbf{F}_2$ – матрицей замкнутой системы, матрицу $\mathbf{D}(s) = \mathbf{E}s^2 + \mathbf{D}_1 s + \mathbf{D}_2$ – матрицей эталонной модели. Здесь $\mathbf{E}$ – единичная матрица соответствующего порядка, $s \in \mathbb{C}$.

Обозначим через $a(s) = \det \mathbf{A}(s)$ характеристический полином разомкнутой системы, через $a_c(s) = \det \mathbf{A}_c(s)$ – характеристический полином замкнутой системы, через $d(s) = \det \mathbf{D}(s)$ – характеристический полином эталонной модели. Заметим, что $\deg a(s) = \deg a_c(s) = 2n$, $\deg d(s) = 2l$.

Полюсы системы есть корни характеристического полинома. Для асимптотической устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы полюсы системы имели вещественные части меньше нуля.

В работах [11, 12] приводятся необходимые и достаточные условия существования решения задачи о назначении полюсов замкнутой системы и описываются алгоритмы нахождения матриц обратной связи.

Утверждение 1. Все полюсы замкнутой системы можно произвольно задать, выбирая матрицы обратной связи $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank}\left(\mathbf{A}(s),\quad \mathbf{B}\right) = n$ для любого $s \in \mathbb{C}$.

Решить задачу о назначении полюсов замкнутой системы можно, применяя известные методы модального управления. Заметим, что $a_c(s) = \det(s\mathbf{E} - \overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{F}})$, где

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{E} \\ -\mathbf{A}_2 & -\mathbf{A}_1 \end{pmatrix}, \qquad \overline{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}, \qquad \overline{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_2 & \mathbf{F}_1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, полюсы замкнутой системы есть собственные числа матрицы $\overline{\mathbf{A}} - \overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{F}}$. Задача о назначении собственных чисел этой матрицы является задачей модального управления для системы с обратной связью по состоянию. Для решения этой задачи разработаны численный методы, реализованные в системах компьютерной математики [13. P. 343].

Далее будут применяться следующие обозначения для матриц: $\mathbf{M}^+$ – псевдообратная матрица; $\mathbf{M}_0$ – матрица, столбцы которой составляют ортонормированный базис $\ker \mathbf{M} = \left\{ \mathbf{x} \mid \mathbf{M}\mathbf{x} = 0 \right\}$.

Справедливы равенства [14. С. 31]: $\mathbf{M}\mathbf{M}^+\mathbf{M} = \mathbf{M}$, $\mathbf{M}^+\mathbf{M}\mathbf{M}^+ = \mathbf{M}^+$, $\mathbf{M}\mathbf{M}_0 = 0$. Если строки матрицы $\mathbf{M}$ линейно независимы, то $\mathbf{M}^+ = \mathbf{M}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{M}\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$ и $\mathbf{M}\mathbf{M}^+ = \mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ – единичная матрица. Если столбцы матрицы $\mathbf{M}$ линейно зависимы, то $\mathbf{M}_0 \neq 0$ и $\mathbf{M}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_0 = \mathbf{E}$.

3. Алгоритм синтеза обратной связи

Пусть матрицы обратной связи $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ и вектор $\overline{\mathbf{u}}$ удовлетворяют соотношениям

$$\mathbf{C}(\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}\mathbf{F}_1) = \mathbf{D}_1\mathbf{C}, \qquad \mathbf{C}(\mathbf{A}_2 + \mathbf{B}\mathbf{F}_2) = \mathbf{D}_2\mathbf{C}, \tag{4}$$

$$\mathbf{C}\mathbf{B}\overline{\mathbf{u}} = \mathbf{D}_2\overline{\mathbf{y}}. \tag{5}$$

Тогда выход системы подчиняется уравнению эталонной модели (3). Действительно, из уравнений (1), (4), (5) следует

$$\mathbf{C}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{A}_1\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{A}_2\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u},$$

$$\mathbf{C}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{A}_1\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{A}_2\mathbf{x} = -\mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{F}_1\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{F}_2\mathbf{x} + \mathbf{C}\mathbf{B}\overline{\mathbf{u}},$$

$$\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{D}_1\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{D}_2(\mathbf{y} - \overline{\mathbf{y}}) = 0.$$

Уравнение (5) имеет бесконечно много решений, поскольку $\operatorname{rank}\mathbf{C}\mathbf{B} = l < m$. Решение, обладающее минимальной евклидовой нормой [14. С. 34], может быть записано в виде: $\overline{\mathbf{u}} = (\mathbf{C}\mathbf{B})^+\mathbf{D}_2\overline{\mathbf{y}}$.

Уравнения (4) также имеют бесконечно много решений относительно матриц $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$. Все множество решений этих уравнений можно записать в виде:

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_0\mathbf{H}_1, \qquad \mathbf{F}_2 = \mathbf{G}_2 + \mathbf{G}_0\mathbf{H}_2, \tag{6}$$

где $\mathbf{H}_1,\ \mathbf{H}_2 \in \mathbb{R}^{(m-l)\times n}$ – произвольные матрицы, $\mathbf{G}_0 = (\mathbf{CB})_0 \in \mathbb{R}^{m\times(m-l)}$,

$$\mathbf{G}_1 = (\mathbf{CB})^+(\mathbf{D}_1\mathbf{C} - \mathbf{CA}_1) \in \mathbb{R}^{m\times n}, \qquad \mathbf{G}_2 = (\mathbf{CB})^+(\mathbf{D}_2\mathbf{C} - \mathbf{CA}_2) \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Матрицы $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ будем искать из условия асимптотической устойчивости замкнутой системы (2), уравнение которой с учетом формул (6) принимает вид:

$$\ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{BG}_1 + \mathbf{BG}_0\mathbf{H}_1)\dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{A}_2 + \mathbf{BG}_2 + \mathbf{BG}_0\mathbf{H}_2)\mathbf{x} = \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}, \tag{7}$$

Полюсы системы (7) есть корни характеристического полинома $a_c(s) = \det(\mathbf{A}_c(s))$, где $\mathbf{A}_c(s) = \mathbf{E}s^2 + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{BG}_1 + \mathbf{BG}_0\mathbf{H}_1)s + \mathbf{A}_2 + \mathbf{BG}_2 + \mathbf{BG}_0\mathbf{H}_2$ – матрица замкнутой системы.

Составим невырожденную матрицу

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}_0{}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица $\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}^+ & \mathbf{C}_0 \end{pmatrix}$. Здесь $\mathbf{C}^+ = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{CC}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$. Выполним невырожденное преобразование матрицы замкнутой системы

$$\mathbf{PA}_c(s)\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}(s) & 0 \\ \mathbf{C}_0{}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_c(s)\mathbf{C}^+ & \mathbf{C}_0{}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_c(s)\mathbf{C}_0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, характеристический полином замкнутой системы $a_c(s) = d(s)h(s)$, где $h(s) = \det\left(\mathbf{C}_0{}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_c(s)\mathbf{C}_0\right)$.

Замкнутая система асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда корни полиномов $d(s)$ и $h(s)$ имеют отрицательные вещественные части. Полином $d(s)$ является характеристическим полиномом асимптотически устойчивой эталонной модели. Следовательно, для асимптотической устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы корни полинома $h(s)$ имели отрицательные вещественные части.

Обозначим

$$\mathbf{V}(s) = \mathbf{E}s^2 + \mathbf{V}_1 s + \mathbf{V}_2, \qquad \mathbf{W}_1(s) = \mathbf{W}_1 s + \mathbf{W}_2,$$
$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{C}_0{}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}_1 + \mathbf{BG}_1)\mathbf{C}_0, \qquad \mathbf{V}_2 = \mathbf{C}_0{}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}_2 + \mathbf{BG}_2)\mathbf{C}_0,$$
$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{H}_1\mathbf{C}_0, \qquad \mathbf{W}_2 = \mathbf{H}_2\mathbf{C}_0. \tag{8}$$

Тогда $\mathbf{C}_0{}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_c(s)\mathbf{C}_0 = \mathbf{V}(s) + \mathbf{C}_0{}^{\mathrm{T}}\mathbf{BG}_0\mathbf{W}(s)$, $h(s) = \det\left(\mathbf{V}(s) + \mathbf{C}_0{}^{\mathrm{T}}\mathbf{BG}_0\mathbf{W}(s)\right)$.

Согласно утверждению 1 все корни полинома $h(s)$ можно произвольно задать, выбирая матрицы $\mathbf{W}_1$ и $\mathbf{W}_2$, тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \mathbf{V}(s) & \mathbf{C}_0{}^{\mathrm{T}}\mathbf{BG}_0 \end{pmatrix} = n - l$ для всех $s \in \mathbb{C}$.

Предположим, что матрицы $\mathbf{W}_1$ и $\mathbf{W}_2$ найдены из условия заданных корней полинома $h(s)$. Тогда из соотношений (8) получим искомые значения матриц обратной связи $\mathbf{H}_1 = \mathbf{W}_1\mathbf{C}_0{}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{H}_2 = \mathbf{W}_2\mathbf{C}_0{}^{\mathrm{T}}$.

В целом можно сформулировать следующее

Утверждение 2. Пусть $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \mathbf{V}(s), & \mathbf{C}_0{}^{\mathrm{T}}\mathbf{BG}_0 \end{pmatrix} = n - l$ для всех $s \in \mathbb{C}$. Тогда существует управление в виде обратной связи $\mathbf{u} = -\mathbf{F}_1\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{F}_2\mathbf{x} + \bar{\mathbf{u}}$, при котором выход системы (1) подчиняется уравнению эталонной модели (3), и при этом замкнутая обратной связью система является асимптотически устойчивой.

Алгоритм синтеза обратной связи заключается в следующем:

1. Вычисляем матрицы $\mathbf{G}_0 = (\mathbf{CB})_0$, $\mathbf{G}_1 = (\mathbf{CB})^+(\mathbf{D}_1\mathbf{C} - \mathbf{CA}_1)$, $\mathbf{G}_2 = (\mathbf{CB})^+(\mathbf{D}_2\mathbf{C} - \mathbf{CA}_2)$.

2. Вычисляем матрицы $\mathbf{V}_1 = \mathbf{C}_0^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}_1 + \mathbf{BG}_1)\mathbf{C}_0$, $\mathbf{V}_2 = \mathbf{C}_0^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}_2 + \mathbf{BG}_2)\mathbf{C}_0$ и находим матрицы $\mathbf{W}_1$ и $\mathbf{W}_2$ из условия заданных корней полинома $h(s) = \det\left(\mathbf{V}(s) + \mathbf{C}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{BG}_0\mathbf{W}(s)\right)$.

3. Вычисляем матрицы обратной связи $\mathbf{F}_1 = \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_0\mathbf{W}_1\mathbf{C}_0^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{F}_2 = \mathbf{G}_2 + \mathbf{G}_0\mathbf{W}_2\mathbf{C}_0^{\mathrm{T}}$.

4. Находим $\bar{\mathbf{u}} = (\mathbf{CB})^+\mathbf{D}_2\bar{\mathbf{y}}$.

4. Численный пример

Рассмотрим систему (1) с матрицами

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -1,2801 & 8,9546 & -3,3933 & -7,601 & 2,4227 \\ -6,2984 & -1,2936 & -6,9115 & -4,0069 & 6,3645 \\ -9,4815 & -0,305 & -5,907 & -0,2965 & 0,5828 \\ 9,6308 & -1,5926 & 3,9773 & -4,6635 & 3,6605 \\ 0,9932 & -3,5893 & 2,3854 & 2,6548 & -7,3084 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -0,0288 & 5,7067 & -1,8538 & 0,1049 & -7,6761 \\ 0,2716 & -4,83 & 6,9312 & -4,0596 & -8,0694 \\ 1,7359 & 7,0795 & -6,4603 & -8,6943 & -6,3655 \\ -6,3112 & 0,9241 & -8,4071 & -4,2426 & -7,4568 \\ 4,3951 & -0,1153 & 9,3926 & -1,4376 & -0,1142 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1,9349 & 5,3498 & -0,6443 \\ 1,3153 & -5,5939 & -2,6506 \\ -5,4798 & 1,5462 & -5,9651 \\ -5,5633 & -3,0035 & -0,6265 \\ -7,8611 & -6,6435 & 2,8081 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -7,6103 & -7,0287 & 7,0456 & 0,1905 & -5,6546 \\ -6,754 & 4,015 & 9,291 & 0,0002 & 7,7904 \end{pmatrix}.$$

Матрицы эталонной модели зададим в виде

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} 2r & 0 \\ 0 & 2r \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \qquad r > 0.$$

Характеристический полином эталонной модели $d(s) = (s + r)^4$. Эталонная модель обладает монотонным переходным процессом по переменным выхода. Время переходного процесса определяется параметром r. Пусть $r = 3$.

Вычисляем матрицы

$$\mathbf{G}_0 = \begin{pmatrix} -0,5352 & 0,3496 & 0,769 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} -0,1005 & -0,5916 & -0,6181 & 0,6787 & -0,3366 \\ -0,5346 & -0,4264 & -0,072 & -0,6041 & 0,5055 \\ 0,1731 & -0,2178 & -0,3974 & 0,747 & -0,0045 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}_2 = \begin{pmatrix} 0,8861 & 0,5039 & -1,3799 & -0,7135 & 0,1987 \\ -0,2365 & -1,3304 & 2,2299 & -0,0467 & -1,7984 \\ 0,7243 & 0,9556 & -1,9743 & -0,4753 & 0,956 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} -7,233 & 5,3665 & 12,212 \\ 0,6414 & -7,0061 & 12,385 \\ -5,026 & -13,215 & -9,9859 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} 4,2705 & 5,1324 & -0,9356 \\ -2,4274 & 0,0301 & -12,399 \\ -16,317 & -1,852 & 7,8424 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицы

$$\mathbf{W}_1 = \begin{pmatrix} 9,6517 & -8,9177 & 17,748 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_2 = \begin{pmatrix} 1,167 & 6,8491 & -68,704 \end{pmatrix},$$

при которых полином $h(s)=(s+5)^6$. Вычисляем матрицы обратной связи

$$\mathbf{F}_1=\begin{pmatrix} -7,2706 & 4,9514 & -5,5369 & 5,4825 & -3,5435 \\ 4,1496 & -4,0476 & 3,1414 & -3,7424 & 1,5896 \\ 10,475 & -8,1819 & 6,6698 & -6,155 & 4,6031 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_2=\begin{pmatrix} 28,586 & -5,5912 & 21,99 & -4,5629 & -0,5162 \\ -18,332 & 2,6514 & -13,037 & 2,4681 & -1,3314 \\ -39,074 & 9,713 & -35,551 & 5,0555 & 1,9833 \end{pmatrix}.$$

При этих значениях матриц обратной связи характеристический полином замкнутой системы $a_c(s)=(s+3)^4(s+5)^6$. Замкнутая система асимптотически устойчива. Заметим, что разомкнутая система не является асимптотически устойчивой.

Пусть заданное значение выхода системы $\bar{\mathbf{y}}=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$. Тогда $\bar{\mathbf{u}}=\begin{pmatrix}-0,1451 & 0,044 & -0,121\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$. Выход системы удовлетворяет уравнению эталонной модели.

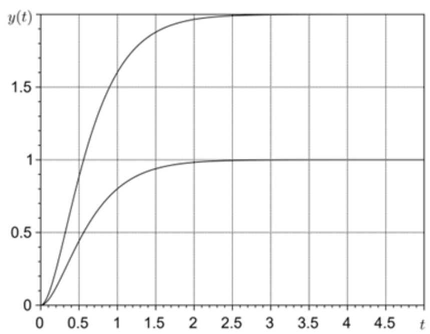

Рис. 1. Переходный процесс по переменным выхода
Fig. 1. Transient process of output variables

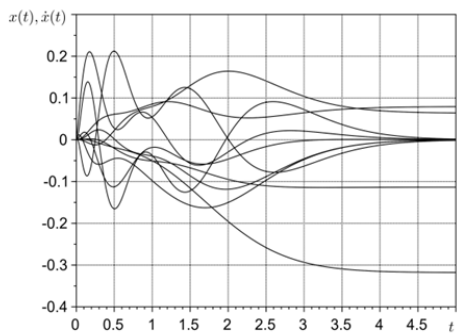

Рис. 2. Переходный процесс по переменным перемещения и скорости
Fig. 2. Transient process of displacement and velocity variables

На рис. 1, 2 показаны результаты моделирования замкнутой системы при нулевых начальных условиях. На рис. 1 показан переходный процесс по переменным выхода, на рис. 2 – переходный процесс по переменным перемещения и скорости.

Все вычисления и моделирование выполнялись в системе компьютерной математики Scilab.

Заключение

В работе решена задача управления качеством переходных процессов по выходу для матричной системы второго порядка. Предложен алгоритм синтеза управления в виде обратной связи по состоянию, при которой выход системы точно соответствует эталонной модели с заданным качеством переходных процессов. При этом замкнутая система асимптотически устойчива. Исследованы условия существования решения задачи. Указаны ограничения, накладываемые на размеры векторов управления и выхода и на матрицы системы. Численный пример и результаты моделирования подтверждают теоретические результаты работы.

Список источников

1. Александров А.Г. Методы построения систем автоматического управления. М. : УРСС, 2008. 232 с.
2. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б. Математическая теория автоматического управления. М. : УРСС, 2019. 500 с.
3. Gawronski W.K. Dynamics and Control of Structures: a modal approach. New York : Springer, 1998. 231 p. doi: 10.1007/978-0-387-21855-7
4. Du C., Xie L. Modeling and Control of Vibration in Mechanical Systems. Boca Raton, FL : CRC Press, 2010. 336 p. doi: 10.1201/9781315218069
5. Петров Б.Н., Рутковский В.Ю., Земляков С.Д. Адаптивное координатно-параметрическое управление нестационарными объектами. М. : Наука, 1980. 244 с.

6. Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. М. : Наука, 2000. 549 с.
7. Бронников А.М., Буков В.Н. Условия точного слежения линейной системы за эталонной моделью пониженного порядка // Автоматика и телемеханика. 2008. № 3. С. 60–69.
8. Буков В.Н., Бронников А.М., Сельвесюк Н.И. Децентрализованное управление с модельной координацией составной многосвязной системой // Автоматика и телемеханика. 2009. № 10. С. 3–14.
9. Проскурников А.В., Якубович В.А. Линейные системы с эталонной моделью // Доклады Академии наук. 2007. Т. 415, № 4. С. 441–446.
10. Проскурников А.В., Якубович В.А. Универсальные регуляторы в задачах оптимального управления с эталонной моделью при неизвестных внешних сигналах // Известия РАН. Теория и системы управления. 2012. № 2. С. 49–62.
11. Chu E.K., Datta B.N. Numerically robust pole assignment for second-order systems // International Journal of Control. 1996. V. 64 (4). P. 1113–1127. doi: 10.1080/00207179608921677
12. Chu E.K. Pole assignment for second-order systems // Mechanical Systems and Signal Processing. 2002. V. 16 (1). P. 39–59. doi: 10.1006/mssp.2001.1439
13. Datta B. Numerical Methods for Linear Control Systems. Academic Press, 2004. 695 p. doi: 10.1016/B978-0-12-203590-6.X5000-9
14. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М. : Физматлит, 2010. 560 с.

References

1. Aleksandrov, A.G. (2008) *Metody postroeniya sistem avtomaticheskogo upravleniya* [Methods for Constructing Automatic Control Systems]. Moscow: URSS.
2. Polyak, B.T., Khlebnikov, M.V. & Rapoport, L.B. (2019) *Matematicheskaya teoriya avtomaticheskogo upravleniya* [Mathematical Theory of Automatic Control]. Moscow: URSS.
3. Gawronski, W.K. (1998) *Dynamics and Control of Structures: A Modal Approach*. New York: Springer. doi: 10.1007/978-0-387-21855-7
4. Du, C. & Xie, L. (2010) *Modeling and Control of Vibration in Mechanical Systems*. Boca Raton, FL: CRC Press. doi: 10.1201/9781315218069
5. Petrov, B.N., Rutkovskiy, V.Yu. & Zemlyakov, S.D. (1980) *Adaptivnoe koordinatno-parametricheskoe upravlenie nestatsionarnymi ob"ektami* [Adaptive Coordinate-Parametric Control of Non-Stationary Objects]. Moscow: Nauka.
6. Miroshnik, I.V., Nikiforov, V.O. & Fradkov, A.L. (2000) *Nelineynoe i adaptivnoe upravlenie slozhnymi dinamicheskimi sistemami* [Nonlinear and Adaptive Control of Complex Dynamic Systems]. Moscow: Nauka.
7. Bronnikov, A.M. & Bukov, V.N. (2008) Usloviya tochnogo sledovaniya lineynoy sistemy za etalonnoy model'yu ponizhennogo poryadka [Conditions for Exact Tracking of a Linear System After a Reduced-Order Reference Model]. *Avtomatika i telemekhanika.* 3. pp. 60–69.
8. Bukov, V.N., Bronnikov, A.M. & Selvesyuk, N.I. (2009) Detsentralizovannoe upravlenie s model'noy koordinatsiey sostavnoy mnogosvyaznoy sistemoy [Decentralized Control with Model Coordination of a Composite Multivariable System]. *Avtomatika i telemekhanika*. 10. pp. 3–14.
9. Proskurnikov, A.V. & Yakubovich, V.A. (2007) Lineynye sistemy s etalonnoy model'yu [Linear Systems with a Reference Model]. *Doklady Akademii nauk.* 415(4). pp. 441–446.
10. Proskurnikov, A.V. & Yakubovich, V.A. (2012) Universal'nye regulyatory v zadachakh optimal'nogo upravleniya s etalonnoy model'yu pri neizvestnykh vneshnikh signalakh [Universal Controllers in Optimal Control Problems with a Reference Model Under Unknown External Signals]. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*. 2. pp. 49–62.
11. Chu, E.K. & Datta, B.N. (1996) Numerically robust pole assignment for second-order systems. *International Journal of Control*. 64(4). pp. 1113–1127. doi: 10.1080/00207179608921677
12. Chu, E.K. (2002) Pole assignment for second-order systems. *Mechanical Systems and Signal Processing.* 16(1). pp. 39–59. doi: 10.1006/mssp.2001.1439
13. Datta, B. (2004) *Numerical Methods for Linear Control Systems*. Academic Press. doi: 10.1016/B978-0-12-203590-6.X5000-9
14. Gantmacher, F.R. (2010) *Teoriya matrits* [The Theory of Matrices]. Moscow: Fizmatlit.

***Информация об авторе*:**
Перепелкин Евгений Александрович – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения (Санкт-Петербург, Россия). E-mail: perepelkin@guap.ru

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Information about the author:
Perepelkin Evgenii A. (Professor, Doctor of Technical Sciences, Saint-Petersburg State University of the Aerospace Instrumentation, Saint-Petersburg, Russian Federation). E-mail: perepelkin@guap.ru

The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 12.09.2025; принята к публикации 02.12.2025

Received 12.09.2025; accepted for publication 02.12.2025