ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2025 Управление, вычислительная техника и информатика № 73
Tomsk State University Journal of Control and Computer Science

Научная статья
УДК 519.248
doi: 10.17223/19988605/73/5

Нестационарные потоки в СеМО без очереди и с детерминированным временем обслуживания

Гурами Шалвович Цициашвили

Институт прикладной математики Дальневосточного отделения РАН, Владивосток, Россия, guram@iam.dvo.ru

Аннотация. Строится математическая модель ациклической сети массового обслуживания с нестационарным пуассоновским входным потоком, без очереди и с детерминированным временем обслуживания. Вычисляются нестационарные интенсивности потоков, проходящих по сети. Доказывается, что если входной поток является пуассоновским, то все остальные потоки, проходящие по сети, также являются пуассоновскими. Причем количество заявок, находящихся в каждом узле сети, также имеет пуассоновское распределение. С помощью специальных интегральных соотношений вычисляются параметры этих пуассоновских распределений.

Ключевые слова: пуассоновский поток; ациклическая сеть; ориентированный граф; теорема о раскрашивании; максимальная длина пути в графе.

***Благодарности*:** Работа выполнена в рамках государственного задания Института прикладной математики ДВО РАН № 075-00459-25-00.

***Для цитирования*:** Цициашвили Г.Ш. Нестационарные потоки в СеМО без очереди и с детерминированным временем обслуживания // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2025. № 73. С. 41–45. doi: 10.17223/19988605/73/5

Original article
doi: 10.17223/19988605/73/5

Non-stationary flows in queuing networks without queue and with deterministic service time

Gurami Sh. Tsitsiashvili

Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch of RAS, Vladivostok, Russian Federation, guram@iam.dvo.ru

Abstract. The paper builds a mathematical model of an acyclic queuing network with an unsteady Poisson input flow, no queue, and deterministic service time. The non-stationary intensities of the flows passing through the network are calculated. It is proving that if the input flow is Poisson, then all other flows passing through the network are also Poisson. Moreover, the number of customers located in each node of the network also has a Poisson distribution. The parameters of these Poisson distributions are calculated using special integral relations.

Keywords: Poisson flow; acyclic network; directed graph; coloring theorem; maximum path length in graph.

***Acknowledgments*:** The research was carried out within the state assignment for Institute for Applied Mathematics FEB of the RAS N 075-00459-25-00.

***For citation*:** Tsitsiashvili, G.Sh. (2025) Non-stationary flows in queuing networks without queue and with deterministic service time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitelnaja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 73. pp. 41–45. doi: 10.17223/19988605/73/5

Введение

Наряду с классическими мультипликативными теоремами для открытых [1] и замкнутых [2] сетей массового обслуживания (СеМО) в последнее время проведено много их обобщений (см., напр.: [3]). Эти обобщения представляют интерес, если они связаны с новыми практическими приложениями, например при введении в модели СеМО блокирующих вероятностей [4, 5]. Настоящая работа вызвана появлением новых интересных имитационных моделей СеМО в морском транспорте (см., напр.: [6]). Такие модели приводят к новым задачам, требующим для своего решения новых математических приемов.

Однако наряду с определением стационарных характеристик в СеМО требуется рассматривать обслуживание нестационарных входных потоков. Обслуживание нестационарных потоков связано с так называемыми трамповыми перевозками (tramp shipping), т.е. с нерегулярной морской перевозкой грузов. Причем нестационарность входных потоков интересна в том смысле, что позволяется описывать возникновение пробок в СеМО. Поэтому исследование СеМО с нестационарными входными потоками (см., напр.: [7]) является важной и достаточно сложной аналитической и вычислительной задачей. Для получения содержательных решений здесь в первую очередь требуется включение ограничений и дополнительных условий, наиболее часто встречающихся в приложениях и допускающих сравнительно простые решения.

К таким условиям можно отнести отсутствие очереди (при наличии крупных обрабатывающих узлов сети), детерминированное распределение времени обслуживания и ацикличность сети перевозки грузов. С одной стороны, эти условия понятны для эксплуатационников и логистиков. С другой стороны, они достаточно удобны при рассмотрении пуассоновских нестационарных потоков, проходящих через узлы ациклической сети.

Для ациклических сетей с нестационарным входным пуассоновским потоком, детерминированным временем обслуживания и отсутствием очереди строится рекуррентная процедура вычисления интенсивностей пуассоновских потоков, выходящих из узлов сети, и параметров пуассоновских распределений числа заявок в различные моменты времени.

Она основана на выделении наборов узлов U_k сети с заданной максимальной длиной пути k (числом ребер в пути из начальной вершины в другую вершину сети) на каждом шаге. Такая классификация узлов сети приводит к тому, что в каждый узел сети из набора U_k входят ребра только из узлов, содержащихся в наборах $U_{k'}$, $k' < k$. Это позволяет последовательно по $k \geq 1$ устанавливать пуассоновость и независимость нестационарных потоков, выходящих из узлов набора U_l, и вычислять нестационарную интенсивность этих потоков. Детерминированность времени обслуживания заявок из узлов сети также является источником достаточно простых интегральных формул для определения нестационарных параметров пуассоновских распределений числа заявок в узлах сети.

1. Вычисление максимальных длин путей в ациклических ориентированных графах

Рассмотрим ациклический ориентированный граф (орграф) G с множеством вершин $U = \{1,\ldots,n\}$ и множеством ребер V. Полагаем, что в графе G для любой вершины $i \in U$ существует путь из вершины 1 в вершину i. Для каждой вершины i графа G определим максимальную длину пути $l(i)$ из вершины 1 в вершину i, $l(1) = 0$, и положим $S = \max_{i\in U} l(i)$.

Для конструктивного вычисления $l(i)$, $i \in U$, введем матрицу $D^1 = \| d_{ij}^1 \|_{i,\, j=1}^n$, где $d_{ii}^1 = 0, i = 1,\ldots,n$, $d_{ij}^1 = \infty$, если $(i,\, j) \notin V$, $d_{ij}^1 = 1$, если $(i,\, j) \in V$. Тем самым для любой пары вершин, которые не соединяются ребром (путем длины единица), величина $d_{ij}^1 = \infty$.

Построим аналог алгоритма Флойда–Уоршелла [8] для нахождения матрицы максимальных длин всех путей между вершинами ациклического орграфа. Обозначим $D^k = \| d_{ij}^k \|_{i,\, j=1}^n, k = 1,\ldots,K$, где величина $d_{ij}^k = \infty$, если в графе G нет пути, проходящего только через вершины $1, \ldots, k$ и соединяющего вершины i, j. Если такие пути существуют, то величина d_{ij}^k равна максимальной длине таких путей. Тогда справедлива следующая теорема [9].

Теорема 1. *Матрицы* $D^k = \| d_{ij}^k \|_{i,\, j=1}^n,\ k = 2, \ldots, K,$ *удовлетворяют соотношениям*

$$d_{ij}^k = \max(d_{ij}^{k-1}, d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}),\ \text{если}\ \max(d_{ij}^{k-1}, d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}) < \infty, \tag{1}$$

иначе

$$d_{ij}^k = \min(d_{ij}^{k-1}, d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}). \tag{2}$$

С помощью теоремы 1 можно вычислить максимальные длины путей из вершины 1 в вершины $i \in U$, полагая $l(i) = d_{1i}^n$.

2. Построение нестационарной модели прохождения пуассоновского потока через СеМО

Вычисление переходных интенсивностей. Определим подмножества $L_s = \{i : l(i) = s\},\ s = 0, 1, \ldots, S.$ Тогда при $r > k, i \in L_k, j \in L_r$ граф G не содержит ребра (i, j) и, значит, в ациклическом орграфе любое ребро $(j, i) \in V,\ i \in L_k, j \in L_r$ может принадлежать графу G только при $k > r$. Обозначим $U_k = \bigcup\limits_{s=0}^{k} L_s$ и положим V_k совокупность ребер (i, j) графа G таких, что $i \in U_k, j \notin U_k$. Очевидно, что $\bigcup\limits_{k=0}^{K-1} V_k = V.$ В качестве примера приведем орграф с $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (рис 1).

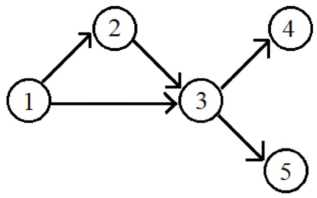

Рис. 1. Пример орграфа G
Fig. 1. Example of digraph G

В этом случае $l(1) = 0,\ l(2) = 1,\ l(3) = 2,\ l(4) = l(5) = 3;\ L_0 = \{1\},\ L_1 = \{2\},\ L_2 = \{3\}, L_3 = \{4,5\};\ U_0 = \{1\},$ $U_1 = \{1,2\},\ U_2 = \{1,2,3\};\ V_0 = \{(1,2), (1,3)\}, V_1 = \{(1,3), (2,3)\}, V_2 = \{(3,4), (3,5\}.$

Пусть каждому ребру $(j, i) \in V$ сопоставляется неотрицательная кусочно непрерывная функция $\lambda_{ji}(t)$ от времени t. Эта функция определяет нестационарную интенсивность пуассоновского потока, проходящего по ребру $(j, i) \in V$. Обозначим $\underline{\Lambda}_1(t)$ неотрицательную кусочно непрерывную функцию, являющуюся интенсивностью входного пуассоновского потока в ациклическую сеть. Потребуем, чтобы при некотором $a_i > 0$ выполнялись равенства

$$\underline{\Lambda}_i(t) = \sum_{(j.i) \in V} \lambda_{ji}(t),\ i \in U,\ i \neq 1,\ \overline{\Lambda}_i(t) = \underline{\Lambda}_i(t - a_i),\ i \in U. \tag{3}$$

Величина $a_i > 0$ определяет сдвиг вправо каждой точки входного потока, т.е. время задержки (обслуживания каждого требования) в вершине i сети. Предположим, что для каждой вершины $i \in U$ задан набор положительных чисел $\{\theta_{ij} : (i, j) \in V\} : \sum\limits_{(i,j) \in V} \theta_{ij} = 1,$ и выполняются равенства

$$\lambda_{ij}(t) = \theta_{ij} \overline{\Lambda}_i(t),\ (i, j) \in V. \tag{4}$$

Здесь θ_{ij} определяют вероятности, с которыми каждая заявка, выходящая из вершины $i \in U$, поступает в вершину $j \in U$.

Теорема 2. *По изначально заданным функции $\underline{\Lambda}_1(t)$, наборам $\{\theta_{ij} : (i, j) \in V\}$ и числам a_i, $i \in U$, можно с помощью равенств (3), (4) однозначно вычислить функции $\lambda_{ij}(t)$, $(i, j) \in V$.*

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по ребрам V_k, $k = 1,\ldots,S-1$. При k = 1 это утверждение вытекает из равенств (3), (4). Предположим, что утверждение теоремы 2 выполняется при некотором $k \geq 1$ и, следовательно, заданы $\lambda_{ij}(t), (i, j) \in V_k$. Тогда, используя равенства (3), (4), можно вычислить сначала $\overline{\Lambda}_i(t)$, а затем $\lambda_{ij}(t), (i, j) \in V_{k+1}$. Корректность такого определения связана с тем, что ребра сети направлены из вершин множества U_k в вершины множества $U_r, k < r$, с большим нижним индексом. Это утверждение иллюстрируется рис. 1.

Определение пуассоновских потоков в сети. Пусть задан пуассоновский поток точек $\underline{T}_1$ с интенсивностью $\underline{\Lambda}_1(t)$, тогда сдвигом всех точек этого потока вправо на величину a_1 можно получить пуассоновский поток интенсивности $\overline{T}_1$. Если считать, что точки пуассоновского потока $\underline{T}_1$ соответствуют моментам прихода заявок в узел 1 сети, то тогда соответствующие им (с тем же номером) точки потока $\overline{T}_1$ соответствуют моментам ухода заявок входного потока из узла 1. Далее предположим, что каждая точка выходного потока $\overline{T}_1$ с вероятностью θ_{1j} поступает в поток T_{1j}, следующий по ребру $(1, j) \in V_1$. Тогда вследствие теоремы о раскрашивании [10] потоки T_{1j}, $(1, j) \in V_1$, являются независимыми и имеют интенсивности $\lambda_{1j}(t)$. Те из потоков T_{1j}, $(1, j) \in V_1$, которые соединяются в узлах $i \in U_2$, образуют пуассоновские потоки $\underline{T}_i$, $i \in V_2$, и имеют интенсивности $\underline{\Lambda}_i(t), i \in U_2$. Причем пуассоновские потоки T_{1j}, $(1, j) \in V_1$, $j \notin U_2$, и пуассоновские потоки $\underline{T}_i$, $i \in V_2$, независимы. Продолжая индукцией по k доказывать пуассоновость и независимость потоков $\underline{T}_i$, $i \in V_k$, и пуассоновских потоков $T_{ij}, (i, j) \in V_k$, $j \notin U_k$, можно определить пуассоновские потоки, проходящие по всем ребрам сети G. Интенсивности всех этих потоков совпадают с $\underline{\Lambda}_i(t)$, $i \in V_k$, $\lambda_{ij}(t)$, $(1, j) \in V_k$, $j \notin U_k$.

Определение случайного числа точек в узлах сети. Известно, что точки пуассоновского потока $\underline{T}_i$, входящего в узел $i \in V_k$, образуют моменты прихода заявок в этот узел. Поскольку время пребывания каждой заявки равно a_i, то можно утверждать, что случайное число этих заявок в момент t имеет пуассоновское распределение с параметром $\int_{t-a_i}^{t} \underline{\Lambda}_i(\tau)d\tau = F_i(t)$. Таким образом, появляется возможность определить не только интенсивности нестационарных пуассоновских потоков, проходящих по ребрам орграфа G, но и зависимость от времени t параметров пуассоновсикх распределений числа заявок в узлах сети.

Заключение

Таким способом для ациклического орграфа G построена вероятностная модель прохождения входного пуассоновского потока заявок $\underline{T}_1$ через СеМО. Определены интенсивности нестационарных пуассоновских потоков, входящих в узлы и выходящих из узлов сети. Вычислены параметры пуассоновских распределений числа заявок в узлах сети в нестационарном режиме. Все математические построения основаны на алгоритме вычисления длины максимального пути из начальной вершины ациклического орграфа в остальные вершины и на выделении в орграфе наборов вершин с фиксированной длиной максимального пути. Далее строится методом математической индукции алгоритм вычисления интенсивностей потоков, входящих в узлы и выходящих из узлов сети. Корректность этих вычислений определяется независимостью пуассоновских потоков с вычисленными интенсивностями. Наконец, по интенсивностям входных пуассоновских потоков в узлы сети и по времени пребывания заявок в этих узлах находятся формулы для вычисления параметров пуассоновских распределений числа заявок в узлах сети.

Список источников

1. Jackson J.R. Networks of Waiting Lines // Oper. Res. 1957. V. 5 (4). P. 518–521.
2. Gordon K.D., Newell G.F. Closed Queuing Systems with Exponential Servers // Oper. Research. 1967. V. 15 (2). P. 254–265.
3. Basharin G.P., Gaidamaka Yu.V., Samouylov K.E. Mathematical Theory of Teletraffic and Its Applications to the Analysis of Multiservice Communication of Next Generation Networks // Autom. Control. Comput. Sci. 2013. V. 47. P. 62–69. doi: 10.3103/S0146411613020028
4. Balsamo S., De Nitto V. A survey of Product-form Queuing Networks with Blocking and their Equivalences // Annals of Operations Research. 1998. V. 79. P. 97–117.
5. Boucherie R.J., van Dijk N.M. On the arrival theorem for product form queuing networks with blocking // Performance Evaluation. 1997. Vol. 29 (3). P. 155–176.
6. Лемперт А.А., Жарков М.Л., Казаков А.Л., Ву Х.З. Моделирование морского контейнерного терминала с использованием сети массового обслуживания // Управление большими системами. 2024. Вып. 112. С. 310–337.
7. Ивницкий В.А. Теория произвольного входящего потока с применениями к нестационарным системам и сетям массового обслуживания. Saarbrucken : LAP Lambert, 2012. 640 с.
8. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ. М. : Вильямс, 2011. 1296 с.
9. Цициашвили Г.Ш., Осипова М.А. Стационарные потоки в ациклических сетях массового обслуживания // Дальневосточный математический журнал. 2016. Т. 16, вып. 2. С. 223–228.
10. Кингман Дж. Пуассоновские процессы. М. : МЦНМО, 2007. 136 с.

References

1. Jackson, J.R. (1957) Networks of Waiting Lines. *Oper. Research.* 5(4). pp. 518–521.
2. Gordon, K.D.& Newell, G.F. (1967) Closed Queuing Systems with Exponential Servers. *Oper. Research*. 15(2). pp. 254–265.
3. Basharin, G.P., Gaidamaka Yu.V. & Samouylov K.E. (2013) Mathematical Theory of Teletraffic and Its Applications to the Analysis of Multiservice Communication of Next Generation Networks. *Automation Control and Computer Science.* 47. pp. 62–69. doi: 10.3103/S0146411613020028
4. Balsamo, S. & De Nitto, V. (1998) A survey of Product-form Queuing Networks with Blocking and their Equivalences. *Annals of Operations Research.* 79. pp. 97–117.
5. Boucherie, R.J. & van Dijk, N.M. (1997) On the arrival theorem for product form queuing networks with blocking. *Performance Evaluation*. 29(3). pp. 155–176.
6. Lempert, A.A., Zharkov, M.L., Kazakov, A.L. & Vu, Kh.Z. (2024) Modelirovanie morskogo konteynernogo terminala s ispol'zovaniem seti massovogo obsluzhivaniya [Modeling of a Sea Container Terminal Using a Queuing Network]. *Upravlenie bol'shimi sistemami*. 112. pp. 310–337.
7. Ivnitskiy, V.A. (2012) *Teoriya proizvol'nogo vkhodyashchego potoka s primeneniyami k nestatsionarnym sistemam i setyam massovogo obsluzhivaniya* [Theory of an Arbitrary Input Flow with Applications to Non-Stationary Systems and Queuing Networks]. Saarbrucken: LAP Lambert.
8. Cormen, T.H., Leiserson, Ch.E., Rivest, R.L. & Shtayn, K. (2011) *Algoritmy: postroeniye i analiz* [Algorithms: Construction and Analysis]. Translated from English. Moscow: Vil'yams.
9. Tsitsiashvili, G.Sh. & Osipova, M.A. (2016) Statsionarnye potoki v atsiklicheskikh setyakh massovogo obsluzhivaniya [Stationary Flows in Acyclic Queuing Networks]. *Dal'nevostochnyy matematicheskiy zhurnal*. 16(2). pp. 223–228.
10. Kingman, J. (2007) *Puassonovskie protsessy* [Poisson Processes]. Translated from English. Moscow: MTsNMO.

Информация об авторе:
Цициашвили Гурами Шалвович – профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института прикладной математики Дальневосточного отделения РАН (Владивосток, Россия). E-mail: guram@iam.dvo.ru

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Information about the author:
Tsitsiashvili Gurami Sh. (Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Main Researcher of the Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch of RAS, Vladivostok, Russian Federation). E-mail: guram@iam.dvo.ru

The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 23.06.2025; принята к публикации 02.12.2025

Received 23.06.2025; accepted for publication 02.12.2025