ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2025 Управление, вычислительная техника и информатика № 73
Tomsk State University Journal of Control and Computer Science

Научная статья
УДК 519.24
doi: 10.17223/19988605/73/9

Численная вероятностная арифметика для обобщенных кусочно-полиномиальных функций

Борис Станиславович Добронец[1], Ольга Аркадьевна Попова[2]

[1, 2] *Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия*
[1] *BDobronets@yandex.ru*
[2] *OlgaArc@yandex.ru*

Аннотация. Исследуется важный случай арифметических операций над случайными переменными, заданных своими функциями плотности вероятности. Проводится анализ возможностей существующих подходов и отмечаются их недостатки. Предлагается новый подход, основанный на представлениях законов распределения аргументов в виде обобщенных кусочно-полиномиальных функций. Для этих целей разработана вероятностная арифметика, основу которой составляют модели и методы вычислительного вероятностного анализа. Отмечается, что предложенная техника вычислений позволяет учитывать особенности функций плотности вероятности и рассматривать распределения с «тяжелыми хвостами».

Ключевые слова: вероятностные арифметики; вычислительный вероятностный анализ; обобщенные кусочно-полиномиальные функции; распределения с «тяжелыми хвостами».

***Для цитирования*:** Добронец Б.С., Попова О.А. Численная вероятностная арифметика для обобщенных кусочно-полиномиальных функций // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2025. № 73. С. 75–80. doi: 10.17223/19988605/73/9

Original article
doi: 10.17223/19988605/73/9

Numerical probabilistic arithmetic for generalized piecewise polynomial functions

Boris S. Dobronets[1], Olga A. Popova[2]

[1, 2] *Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia*
[1] *BDobronets@yandex.ru*
[2] *OlgaArc@yandex.ru*

Abstract. This paper examines the important case of arithmetic operations on random variables defined by their probability density functions. The capabilities of existing approaches are analyzed and their limitations are highlighted. A new approach is proposed based on representing the distribution laws of arguments as generalized piecewise polynomial functions. For these purposes, probabilistic arithmetic is developed, based on models and methods of computational probabilistic analysis. It is noted that the proposed computational technique allows for the consideration of the properties of probability density functions and the analysis of distributions with "heavy tails."

Keywords: probabilistic arithmetic; computational probabilistic analysis; generalized piecewise polynomial functions; heavy-tailed distributions.

***For citation*:** Dobronets, B.S., Popova, O.A. (2025) Numerical probabilistic arithmetic for generalized piecewise polynomial functions. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitelnaja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 73. pp. 75–80. doi: 10.17223/19988605/73/9

Введение

При численном моделировании часто возникают задачи вычисления функциональных зависимостей от случайных аргументов. Важный случай представляют арифметические операции над случайными переменными, заданные своими функциями плотности вероятности. Практическая значимость решения подобных задач определила необходимость создания численных вероятностных арифметик, которые возникли в начале 1980-х гг. как операции над гистограммами.

В 1980 г. была опубликована одна из первых работ по вероятностной арифметике [1], где для реализации операций напрямую использовались свойства гистограмм как кусочно-постоянных функций и тот факт, что вероятность попадания случайной величины в интервал основания столбца гистограммы определяется его высотой. В работе [2] основатель интервального анализа R.E. Moore использовал гистограммную арифметику для оценки рисков. В [3] обсуждается использование гистограммной арифметики для решения практических задач.

Дальнейшее развитие численных вероятностных арифметик шло по различным направлениям и требовало от численных операций определенных свойств: точности, возможности реализации длинных цепочек вычислений, использования бесконечных носителей и учет особенностей, включая «тяжелые хвосты».

Существующие численные арифметики над случайными переменными по способу вычислений и организации вычислительного процесса можно условно разделить на следующие основные группы:

– использующие символьные вычисления;

– на основе замкнутых семейств распределений;

– основанные на методе Монте-Карло;

– операции над функциями плотности вероятности, представленными кусочно-полиномиальными функциями.

Каждый из подходов имеет свои теоретическое обоснование и программную реализацию. Символьный подход опирается на возможности систем компьютерной алгебры и позволяет в явном виде вычислять интегралы, участвующие в выполнении операций на случайных величинах. Однако на практике интегралы часто не имеют представлений в замкнутой форме и (или) не берутся аналитически. Такие случаи, как правило, не подходят для практического использования [4]. Другой класс подходов основан на замкнутых семействах распределений. Самый важный из таких подходов описан в [5] и основан на так называемых *H*-функциях, которые являются обобщением гипергеометрических функций. Подход, представленный в [5], является в первую очередь аналитическим. В работе [6] представлен пакет PaCAL который можно рассматривать как систему, основанную на работе [5]. Подход, более близкий по духу к символьным вычислениям, представлен в работе [7]. В этом подходе не реализованы операции деления случайных величин, и он не допускает плотностей с разрывами или сингулярности. Группа методов Монте-Карло (МК) – это чисто статистические подходы [8]. Основная слабость подхода Монте-Карло – медленная сходимость. В вычислительном вероятностном анализе (ВВА) [9] функции плотности вероятности представляются в виде кусочно-полиномиальных функций, которые определяются сеткой $\omega = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_n\}$, на каждом интервале (x_i, x_{i+1}) которой функция задается полиномом.

Одна из существующих проблем вероятностных арифметик связана с особенностями функций плотности вероятности и необходимостью учитывать распределения с «тяжелыми хвостами» [10].

В настоящей работе, в отличие от [9], предлагается расширить представления функций плотности вероятности до обобщенных кусочно-полиномиальных функций. Исследование численных вероятностных арифметик начнем с рассмотрения свойств случайных переменных, включая арифметические операции. Далее рассмотрим применение обобщенных кусочно-полиномиальных функций для реализации численных вероятностных арифметик.

1. Операции над случайными переменными

Пусть x – случайная величина, тогда ее плотность вероятности будем обозначать $\boldsymbol{x}$. Обозначим через $\boldsymbol{R}$ – множество плотностей вероятности $\{\boldsymbol{x}\}$ случайных величин x; соответственно, $\boldsymbol{R}^n$ – пространство плотностей вероятности случайных векторов из R^n.

Носителем функции плотности вероятности f будем называть множество

$$\mathrm{supp}(f) = \{x \mid f(x) > 0\}.$$

Известны аналитические формулы для определения плотности вероятности результатов арифметических действий над случайными величинами. Например, для нахождения плотности вероятности $p_{x_1+x_2}$ суммы двух случайных величин $x_1 + x_2$ используется соотношение [5]

$$p_{x_1+x_2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x-v,v)dv = \int_{-\infty}^{\infty} p(v,x-v)dv, \tag{1}$$

где $p(x_1, x_2)$ – совместная функция плотности вероятности случайного вектора (x_1, x_2). Для нахождения плотности вероятности p_{x_1/x_2} частного двух случайных величин x_1 / x_2 имеет место формула

$$p_{x_1/x_2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |v|\, p(xv,v)dv. \tag{2}$$

Плотность вероятности $p_{x_1x_2}$ произведения двух случайных величин x_1x_2 определяется соотношением

$$p_{x_1x_2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(v, x/v)\frac{1}{|v|}dv. \tag{3}$$

Далее рассмотрим использование аналитических формул для численной реализации вероятностной арифметики.

2. Численная реализация арифметических операций

В этом разделе мы будем рассматривать численные реализации арифметических операций в конечномерных подпространствах пространства распределений.

Пространством распределений будем называть множество неотрицательных интегрируемых функций $f(x),\ x \in R$, интеграл от которых равен единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Отметим, что важным подпространством пространства распределений является конечномерное пространство кусочно-полиномиальных функций, где кусочно-полиномиальная функция f характеризуется сеткой $\omega = \{x_0, x_1, \ldots x_n\}$ и набором полиномов $p_i(x) \in P_m, x \in [x_{i-1}, x_i]$. В специальных случаях будем допускать возможность использования вместо полиномов аналитических функций ln, exp и др.

В данной работе, в отличие от [9], предлагается расширить представления функций плотности вероятности до обобщенных кусочно-полиномиальных функций.

Обобщенные кусочно-полиномиальные функции задаются сетками

$$\omega = \{-\infty \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le \infty\}.$$

Таким образом, функции плотности вероятности могут иметь бесконечные носители, и на каждом интервале (x_i, x_{i+1}) это либо полином, либо аналитическая функция.

Рассмотрим численную реализацию арифметических операций на примере кусочно-полиномиальных функций. В случае, когда случайные величины x, y являются независимыми, совместную функцию плотности вероятности $p(x, y)$ можно представить в виде произведения $p(x, y) = s_x(x)s_y(y)$. В этом случае на каждом прямоугольнике $(x_i, x_{i+1}) \times (y_j, y_{j+1})$ для вычисления интегралов (1)–(3) можно пользоваться как численными квадратурами, например Гаусса, которые точны на соответствующих полиномах, так и аналитическими вычислениями. В случае когда случайные величины x, y являются зависимыми, совместную функцию плотности вероятности $p(x, y)$ необходимо вычислять отдельной процедурой.

Однако в случае, когда совместная функция плотности вероятности содержит точку (0, 0), при произведении случайных величин возможны особенности в результирующей функции плотности. В качестве примера рассмотрим вычисление функции плотности вероятности произведения двух независимых случайных величин x_1 и x_2. Предположим, что $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ распределены по треугольному закону с носителем на отрезке [–1, 1] и вершиной в точке (0, 1). В этом случае $\boldsymbol{x_1 x_2}$ имеет вид

$$(\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2)(z) = \int_z^1 (1-x)(1-z/x)\frac{1}{|x|}dx + \int_{-1}^{-z}(1+x)(1+z/x)\frac{1}{|x|}dx. \quad (4)$$

В силу того, что исходные функции плотности вероятности представлены кусочно-полиномиальными функциями, интеграл (4) может быть вычислен в явном виде:

$$\boldsymbol{x}_3(z) = (\boldsymbol{x_1 x_2})(z) = -4 - 4|z| - 2\ln(|z|)\,(|z|+1).$$

В результате получаем $\boldsymbol{x}_3$ в виде обобщенной кусочно-полиномиальной функции с носителем (–1, 1).

Этот подход можно распространить на общий случай вычисления функции плотности вероятности произведения двух случайных величин, когда носитель совместной функции плотности вероятности содержит точку (0, 0). В этом случае кусочно-полиномиальное представление функции плотности вероятности случайной величины $\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2$ будет содержать отрезки, где к полиномам добавлены аналитические функции. При дальнейших операциях с подобными кусочно-полиномиальными функциями необходимо учитывать эти особенности. Заметим, что особенности при вычислении произведений случайных величин возникают только в случае, когда носитель совместной функции плотности вероятности содержит точку (0, 0).

Важное значение при реализации вероятностных арифметик имеет учет особенностей, представленных «тяжелыми хвостами» (the Fat Tail) [10].

Будем говорить, что функция плотности вероятности имеет «тяжелый хвост», если выполнено условие

$$f(x) \sim x^{1+\alpha}, x \to \infty, \alpha > 0.$$

Важный представитель подобных распределений – распределение Коши

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{a}{a^2+x^2}\right],$$

где $a > 0$ – параметр масштаба. Известно, что сумма двух распределений Коши – распределение Коши.

Для проверки работы численных вероятностных арифметик была вычислена сумма двух случайных величин с распределениями Коши. Было сделано предположение, что результирующее распределение имеет «тяжелый хвост» $s(t) = ct^{-(1+\alpha(t))}$, где $\alpha(t)$ – парабола. Было сделано преобразование: $\tan(\pi x/2) \leftrightarrow t$. Учитывалось, что $s(t) = 0, s'(t) = 0$, при $t \to \infty$. Аппроксимация искалась в виде $s(t) = \exp\left((a \arctan(t) - 1)\text{^}2 - 1) - 2\right)\ln(t) + c)$.

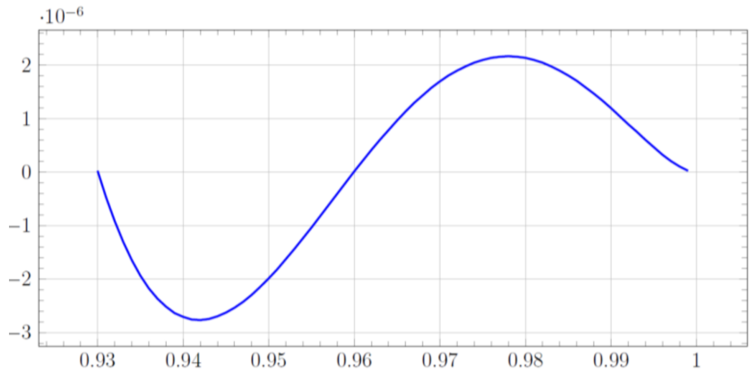

Рис. 1. Ошибки приближения распределения Коши
Fig. 1. Errors in the approximation of the Cauchy distribution

Интегралы (1) брались аналитически, плотность вероятности суммы была вычислена в точках $\xi_1 = 10$, $\xi_2 = 20$ и были найдены константы a, c. В результате построенного приближения погрешность на интервале $[10, \infty)$ не превысила величины $3 \cdot 10^{-6}$. На рис. 1 представлена ошибка аппроксимации, горизонтальная шкала x представляет $t = \tan(\pi x / 2)$. Таким образом, точка $x = 1$ соответствует $t = \infty$.

Заключение

Представление функций плотности вероятности в виде обобщенных кусочно-полиномиальных функций позволило при численной реализации вероятностных арифметик учитывать особенности функций плотности вероятности и использовать распределения с «тяжелыми хвостами». Данный подход позволяет повысить качество численного моделирования и дает возможность получать надежные оценки при решении ряда практических задач, например в задачах прогнозной аналитики, а также для оценки и управления финансовыми, инвестиционными и другими видами рисков.

Список источников

1. Colombo A., Jaarsma R. A powerful numerical method to combine random variables // IEEE Transactions on Reliability. 1980. V. R-29 (2). P. 126–129.
2. Moore R.E. Risk Analysis without Monte Carlo Methods // Freiburger Intervall-Berichte. 1984. V. 84 (1). P. 1–48.
3. Герасимов В.А., Добронец Б.С., Шустров М.Ю. Численные операции гистограммной арифметики и их применения // Автоматика и телемеханика. 1991. № 2. С. 83–88.
4. Glen A.G., Evans D.L., Leemis L.M. APPL: A Probability Programming Language // The American Statistician, 2001. V. 55 (2). P. 156–166.
5. Springer M.D. The Algebra of Random Variables. Hoboken, NJ : John Wiley & Sons, 1979.
6. Korzeń M., Jaroszewicz S. PaCAL: A Python Package for Arithmetic Computations with Random Variables // Journal of Statistical Software. 2014. V. 57 (10). P. 1–34. doi: 10.18637/jss.v057.i10
7. Williamson R., Downs T. Probabilistic arithmetic I: numerical methods for calculating convolutions and dependency bounds // International Journal of Approximate Reasoning. 1990. V. 4 (2). P. 89–158.
8. Михайлов Г.А., Войтишек А.В. Статистическое моделирование. Методы Монте-Карло : учеб. пособие для бакалавриата и магистратуры. М. : Юрайт, 2018.
9. Добронец Б.С., Попова О.А. Вычислительный вероятностный анализ: модели и методы. Красноярск : Сиб. фед. ун-т, Ин-т космических и информационных технологий, 2020.
10. Clauset A., Shalizi C.R., Newman M.E.J. Power-law distributions in empirical data // SIAM Rev. 2009. V. 51. P. 661–703.

References

1. Colombo, A. & Jaarsma, R. (1980) A Powerful Numerical Method to Combine Random Variables. *IEEE Transactions on Reliability*. R-29(2). pp. 126–129
2. Moore, R.E. (1984) Risk Analysis without Monte Carlo Methods. *Freiburger Intervall-Berichte.* 84(1). pp. 1–48.
3. Gerasimov, V.A., Dobronets, B.S. & Shustrov, M.Yu. (1991) Numerical operations of histogram arithmetic and their applications. *Automation and Remote Control*. 2. pp. 83–88.
4. Glen, A.G., Evans, D.L. & Leemis, L.M. (2001) APPL: A Probability Programming Language. *The American Statistician.* 55(2). pp. 156–166.
5. Springer, M.D. (1979) *The Algebra of Random Variables*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons.
6. Korzeń, M. & Jaroszewicz, S. (2014) PaCAL: A Python Package for Arithmetic Computations with Random Variables. *Journal of Statistical Software*. 57(10). doi: 10.18637/jss.v057.i10
7. Williamson, R. & Downs, T. (1990) Probabilistic arithmetic I: numerical methods for calculating convolutions and dependency bounds. *International Journal of Approximate Reasoning*. 4(2). pp. 89–158.
8. Mikhailov, G.A. & Voitishek, A.V. (2018) *Statisticheskoye modelirovanie. Metody Monte-Karlo* [Statistical modeling. Monte-Carlo Methods]. Moscow: Yurait.
9. Dobronets, B.S. & Popova, O.A. (2020) *Vychislitel'nyy veroyatnostnyy analiz: modeli i metody* [Computational Probabilistic Analysis: Models and Methods].. Krasnoyarsk: Siberian Federal University.
10. Clauset, A., Shalizi, C.R. & Newman, M.E.J. (2009) Power-law distributions in empirical data. *SIAM Rev*. 51. pp. 661–703.

***Информация об авторах*:**

Добронец Борис Станиславович – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры систем искусственного интеллекта Института космических и информационных технологий Сибирского федерального университета (Красноярск, Россия). E-mail: BDobronets@yandex.ru

Попова Ольга Аркадьевна – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры систем искусственного интеллекта Института космических и информационных технологий Сибирского федерального университета (Красноярск, Россия). E-mail: OlgaArc@ yandex.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

***Information about the authors*:**
Dobronets Boris S. (Professor, Doctor of Physics and Mathematics, Siberian Federal University, Institute of Space and Information Technologies, Krasnoyarsk, Russian Federation). E-mail: BDobronets@yandex.ru
Popova Olga A. (Associate Professor, Candidate of Technical Sciences, Siberian Federal University, Institute of Space and Information Technologies, Krasnoyarsk, Russian Federation). E -mail: OlgaArc@yandex.ru

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Received 04.09.2025; accepted for publication 02.12.2025

Поступила в редакцию 04.09.2025; принята к публикации 02.12.2025