ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2025 Управление, вычислительная техника и информатика № 73
Tomsk State University Journal of Control and Computer Science

Научная статья
УДК 519.2
doi: 10.17223/19988605/73/13

Рекуррентный обобщенный асинхронный поток событий с продлевающимся мертвым временем в особом случае

Людмила Алексеевна Нежельская[1], Валентина Денисовна Пономаренко[2]

[1, 2] Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия
[1] ludne@mail.ru
[2] valya.ponomarenko.00@mail.ru

Аннотация. Рассматривается дважды стохастический рекуррентный обобщенный асинхронный поток событий с двумя состояниями, функционирующий в стационарном режиме в условиях продлевающегося мертвого времени фиксированной длительности. Методом моментов решается задача оценивания длительности мертвого времени в рекуррентном обобщенном асинхронном потоке в особом случае соотношения параметров. Приводятся численные результаты статистических экспериментов, поставленных на имитационной модели потока, и анализ полученных оценок длительности мертвого времени.

Ключевые слова: рекуррентный обобщенный асинхронный поток событий; особый случай соотношения параметров потока; инфинитезимальные характеристики; продлевающееся мертвое время; совместная плотность вероятности; условия рекуррентности; преобразование Лапласа; метод моментов; статистические эксперименты.

***Для цитирования*:** Нежельская Л.А., Пономаренко В.Д. Рекуррентный обобщенный асинхронный поток событий с продлевающимся мертвым временем в особом случае // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2025. № 73. С. 110–121. doi: 10.17223/19988605/73/13

Original article
doi: 10.17223/19988605/73/13

A recurrent generalized asynchronous event flow with extended dead time in a special case

Lyudmila A. Nezhel'skaya[1], Valentina D. Ponomarenko[2]

[1, 2] National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation
[1] ludne@mail.ru
[2] valya.ponomarenko.00@mail.ru

Abstract. We consider a double stochastic recurrent generalized asynchronous flow of events with two states, operating in a stationary mode under conditions of an extended dead time of a fixed duration. The problem of estimating the duration of dead time in a recurrent generalized asynchronous flow of events has been solved for a specific parameter relationship. Numerical results of statistical experiments performed on a simulation model are presented.

Keywords: double stochastic flow of events; generalized asynchronous flow of events; infinitesimal characteristics; extending dead time; joint probability density; low recurrence conditions; Laplace transform; method of moments; statistical experiments.

***For citation*:** Nezhel'skaya, L.A., Ponomarenko, V.D. (2025) A recurrent generalized asynchronous event flow with extended dead time in a special case. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitelnaja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 73. pp. 110–121. doi: 10.17223/19988605/73/13

Введение

Среди математических моделей, описывающих потоки заявок в компьютерных и телекоммуникационных сетях, наиболее приближенной к реальности считается модель дважды стохастического потока [1]. Для нее характерно следующее: сопровождающий случайный процесс является принципиально ненаблюдаемым, и моменты наступления событий случайны. Дважды стохастические потоки делятся на два класса: к первому классу относятся потоки, интенсивность которых есть непрерывный случайный процесс [2, 3], ко второму – потоки с интенсивностью в виде кусочно-постоянного случайного процесса с конечным числом состояний [4–9].

Многие исследования в теории массового обслуживания предполагают, что все события входящего потока в систему доступны для наблюдения. Однако это условие на практике часто не выполняется, поскольку поступившее событие может вызывать период мертвого времени регистрирующего прибора, в течение которого последующие события потока становятся ненаблюдаемыми (теряются) [10]. Наличие мертвого времени осложняет решение задачи оценивания состояний потока или его параметров по наблюдаемым моментам времени наступления событий.

В работах [11–14] решены задачи оценивания длительности мертвого времени, когда наступившие в течение периода мертвого времени события не вызывают его продления (непродлевающееся мертвое время).

Поток событий, рассматриваемый в данной работе, относится ко второму классу дважды стохастических потоков. В отличие от упомянутых исследований здесь предполагается, что событие, наступившее в период мертвого времени, хотя и не наблюдается, способно продлить общий период ненаблюдаемости (продлевающееся мертвое время). При этом длительность мертвого времени считается фиксированной, а общий период ненаблюдаемости потока является случайной величиной.

В работе [15] решена задача оценивания длительности продлевающегося мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий в случае соотношения параметров $z_2 - z_1 \neq 0$ (общий случай). Однако интерес представляет решение задачи оценивания длительности продлевающегося мертвого времени в рекуррентном обобщенном асинхронном потоке событий в случае $z_2 - z_1 = 0$, называемом в дальнейшем **особым** случаем. Аналитически выводится уравнение моментов, решение которого возможно численно; проводятся статистические эксперименты с целью установления качества получаемых оценок.

1. Постановка задачи

Рассматривается обобщенный асинхронный поток событий, обладающий следующими свойствами: стационарностью, ординарностью, наличием последействия. В общем случае исследуемый поток является коррелированным.

Сопровождающий процесс данного потока $\lambda(t)$ является принципиально ненаблюдаемым кусочно-постоянным случайным процессом с двумя состояниями S_1 и S_2; будем говорить, что имеет место состояние S_i процесса $\lambda(t)$, если $\lambda(t) = \lambda_i$, $i = 1, 2$, $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$. Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_i является случайной величиной с функцией распределения $F_i(t) = 1 - e^{-\alpha_i t}$, $t \geq 0$, $i = 1, 2$. В течение времени пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_1 имеет место пуассоновский поток событий с параметром λ_1; в течение времени пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_2 − пуассоновский поток событий с параметром λ_2.

В момент перехода сопровождающего случайного процесса $\lambda(t)$ из состояния S_1 в состояние S_2 с вероятностью $p\,(0 < p \leq 1)$ инициируется дополнительное событие потока в состоянии S_2 (сначала переход из S_1 в S_2, затем наступление дополнительного события в S_2). Аналогично при переходе сопровождающего случайного процесса $\lambda(t)$ из состояния S_2 в состояние S_1 с вероятностью $q\,(0 < q \leq 1)$

инициируется дополнительное событие потока в состоянии S_1 (сначала переход из S_2 в S_1, затем наступление дополнительного события в S_1).

В момент наступления каждого события потока наступает период ненаблюдаемости фиксированной длительности *T* (мертвое время), так что другие события, наступившие в течение времени *T*, недоступны наблюдению. Каждое событие, ненаблюдаемое в течение мертвого времени, вызывает продление периода ненаблюдаемости на величину *T*; наблюдаться будет лишь то событие, которое наступило после окончания последнего периода ненаблюдаемости.

На рис. 1 приведены схема формирования наблюдаемого потока событий и одна из реализаций сопровождающего процесса $\lambda(t)$, где S_i, $i=1,2$, − состояния процесса $\lambda(t)$; t_1, t_2, … − моменты времени наступления событий в наблюдаемом потоке. Наблюдаемые события обозначены незакрашенными кругами, а ненаблюдаемые события, т.е. недоступные наблюдению из-за наличия мертвого времени, обозначены закрашенными кругами. Штриховкой обозначен период ненаблюдаемости. Длительность общего периода ненаблюдаемости ξ − случайная величина.

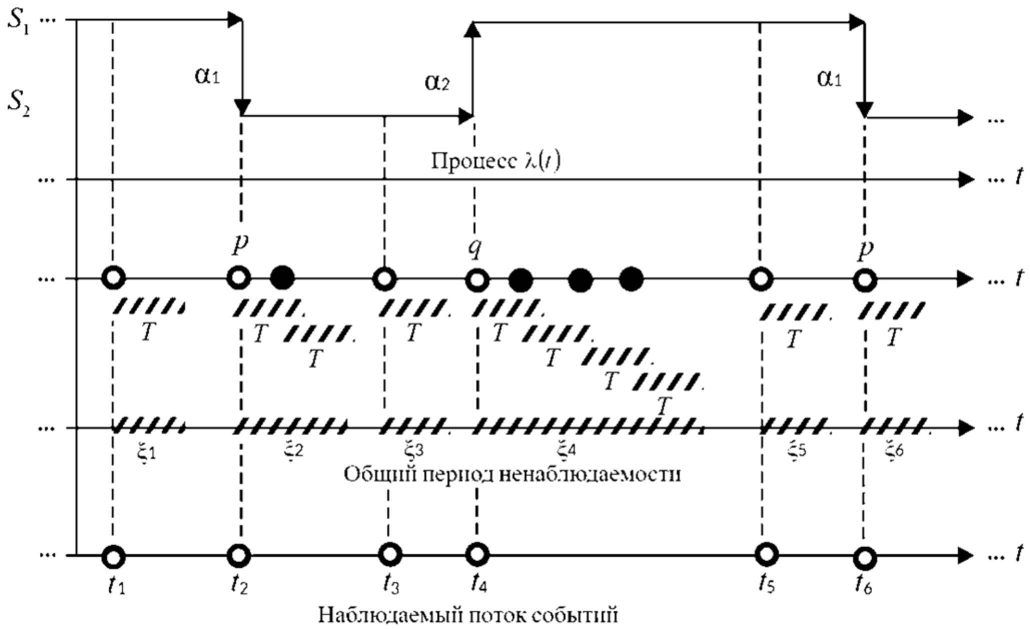

Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий
Fig. 1. Formation of the observed event flow

Матрицы инфинитезимальных характеристик сопровождающего процесса $\lambda(t)$ имеют вид [16]:

$$\mathbf{D_0} = \begin{Vmatrix} -(\lambda_1+\alpha_1) & (1-p)\alpha_1 \\ (1-q)\alpha_2 & -(\lambda_2+\alpha_2) \end{Vmatrix}, \ \mathbf{D_1} = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & p\alpha_1 \\ q\alpha_2 & \lambda_2 \end{Vmatrix}.$$

Элементами матрицы $\mathbf{D_1}$ являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния S_i в состояние S_j, $i, j = 1,2$, с наступлением события потока. Недиагональные элементы матрицы $\mathbf{D_0}$ – интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния S_i в состояние S_j, $i, j = 1,2$, без наступления события. Диагональные элементы матрицы $\mathbf{D_0}$ – интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком.

В работе [15] проведено исследование в случае $z_2 - z_1 \neq 0$, где

$$z_1 = \frac{1}{2}\left(\lambda_1+\alpha_1+\lambda_2+\alpha_2-\sqrt{(\lambda_1+\alpha_1-\lambda_2-\alpha_2)^2+4\alpha_1\alpha_2(1-p)(1-q)}\right),$$
$$z_2 = \frac{1}{2}\left(\lambda_1+\alpha_1+\lambda_2+\alpha_2+\sqrt{(\lambda_1+\alpha_1-\lambda_2-\alpha_2)^2+4\alpha_1\alpha_2(1-p)(1-q)}\right),$$
$$z_2 > z_1.$$

Отметим, что при получении одномерной плотности в [15] имеет место деление на величину $z_2 - z_1$. Из явного вида параметров z_1 и z_2 следует, что ситуация $z_2 - z_1 = 0$ возможна, если одновременно выполняются условия $\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2 - \alpha_2 = 0$, $(1-p)(1-q) = 0$.

Решение системы уравнений приводит к трем вариантам соотношения параметров потока:

1) $\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2 - \alpha_2 = 0$, $p = 1$, $0 < q < 1$;

2) $\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2 - \alpha_2 = 0$, $q = 1$, $0 < p < 1$;

3) $\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2 - \alpha_2 = 0$, $p = q = 1$.

Цель настоящего исследования – вывод и решение уравнения моментов для получения оценки длительности продлевающегося мертвого времени в исследуемом потоке в особом случае соотношения параметров потока, а также проведение на имитационной модели потока серии статистических экспериментов и анализ качества полученных оценок.

2. Условия рекуррентности обобщенного асинхронного потока в особом случае

Будем рассматривать первый вариант задания параметров потока. Предполагается, что обобщенный асинхронный поток событий функционирует в условиях полной наблюдаемости ($T = 0$) в стационарном режиме.

Лемма 1. Для обобщенного асинхронного потока событий, функционирующего в условиях полной наблюдаемости, сопровождающий кусочно-постоянный случайный процесс $\lambda(t)$ является марковским процессом [16].

Пусть $t_1, t_2, ..., t_k, ...$ – моменты времени наступления событий в потоке.

Лемма 2. Последовательность $\{\lambda(t_k)\}$, порождаемая совокупностью моментов наступления событий $t_1, t_2, ..., t_k, ...$, является вложенной цепью Маркова [16].

Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $\tau_k \geq 0$, – значение длительности k-го интервала между соседними событиями t_k и t_{k+1}, $k = 1, 2, ...$, наблюдаемого потока. В силу стационарного режима функционирования потока для плотности вероятности значений τ_k справедливо $p(\tau_k) = p(\tau)$, $\tau_k \geq 0$, $\forall k$.

Это позволяет без ограничения общности считать момент наступления события t_k равным нулю, или, что то же самое, момент наступления события есть $\tau = 0$.

В общем случае исследуемый поток в условиях полной наблюдаемости является коррелированным потоком. Для достижения поставленной цели необходимо выписать условия реккурентности потока и определить явный вид плотности вероятности значений длительности интервала между соседними событиями потока.

Воспользуемся следующей теоремой.

Теорема 1. *Плотность вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в обобщенном асинхронном потоке в особом случае имеет вид* [17]:

$$p(\tau) = \left[(\lambda_1 + \alpha_1) - \pi_2(0)\alpha_2(1-q)(1-(\lambda_1+\alpha_1)\tau)\right]e^{-(\lambda_1+\alpha_1)\tau}, \tau \geq 0; \;\; \pi_2(0) = \frac{\alpha_1(\lambda_1+\alpha_1)}{\alpha_1(\lambda_1+\alpha_1) + \alpha_2(\lambda_1+\alpha_1 q)}. \quad (1)$$

Обозначим $p(\tau_1, \tau_2)$ – *совместная плотность вероятности длительностей двух соседних интервалов* $(t_1, t_2), (t_2, t_3)$; $\tau_1 = t_2 - t_1$, $\tau_2 = t_3 - t_2$ – *значения длительностей,* $\tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0$. *В силу стационарного режима расположение одного интервала* (t_k, t_{k+1}) *либо двух соседних интервалов* $(t_k, t_{k+1}), (t_{k+1}, t_{k+2})$ *между моментами наступления событий* $t_1, t_2, ..., t_k, ..., k = 1, 2, ...,$ *на временной оси произвольно.*

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Совместная плотность вероятности* $p(\tau_1, \tau_2)$ *длительностей двух соседних интервалов для обобщенного асинхронного потока событий в особом случае имеет вид* [17]:

$$p(\tau_1,\tau_2)=p(\tau_1)p(\tau_2)-\frac{\left[\alpha_1\alpha_2(1-q)\right]^2(\lambda_1\lambda_2-\alpha_1\alpha_2 q)}{\left[(\lambda_1+\alpha_1)^2-(\lambda_1\lambda_2-\alpha_1\alpha_2 q)\right]^2}\times$$
$$\times\left(1-(\lambda_1+\alpha_1)\tau_1\right)\left(1-(\lambda_1+\alpha_1)\tau_2\right)e^{-(\lambda_1+\alpha_1)(\tau_1+\tau_2)}, \tag{2}$$
$$\tau_1\ge 0, \tau_2\ge 0,$$

где $p(\tau_k)$ *определены в* (1) *для* $\tau=\tau_k$, $k=1,2$.

Из анализа (2) вытекает условие рекуррентности $\lambda_1\lambda_2-q\alpha_1\alpha_2=0$, с использованием которого находится величина $\pi_2(0)\alpha_2(1-q)=\alpha_2-\lambda_1$, входящая в (1). Тогда плотность вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в рекуррентном обобщенном асинхронном потоке событий принимает вид:

$$p(\tau)=\left[\lambda_1+\lambda_2+(\alpha_1\alpha_2-\lambda_1\lambda_2)\tau\right]e^{-(\lambda_1+\alpha_1)\tau},\ \tau\ge 0. \tag{3}$$

3. Преобразование Лапласа плотности вероятности общего периода ненаблюдаемости рекуррентного потока

Пусть ξ – длительность общего периода ненаблюдаемости в рекуррентном обобщенном асинхронном потоке, функционирующем в условиях продлевающегося мертвого времени фиксированной длительности $T\ne 0$. Последовательность $t_1, t_2, \ldots$ моментов наступления событий в наблюдаемом потоке образует вложенную цепь Маркова, и рекуррентность наблюдаемого потока сохраняется.

Рассмотрим функцию Пальма $\varphi_0(T)=\int\limits_T^\infty \tilde{p}(x)dx$ – вероятность того, что на интервале $(0,T)$ событий рекуррентного потока не наступит при условии, что в начальный момент времени интервала $(0,T)$ событие наступило [18]; здесь $\tilde{p}(x)$ − плотность вероятности длительности интервала между соседними событиями в дважды стохастическом рекуррентном потоке.

Теорема 3. *Преобразование Лапласа плотности вероятности значений длительности общего периода ненаблюдаемости в рекуррентном обобщенном асинхронном потоке с продлевающимся мертвым временем в особом случае имеет вид:*

$$g_\xi(s)=\frac{\varphi_0(T)}{e^{sT}}\left\{1-\frac{1-e^{-(\lambda_1+\alpha_1+s)T}}{(\lambda_1+\alpha_1+s)^2}\left[(\lambda_1+\alpha_1)^2+s\left(\lambda_1+\lambda_2\right)\right]+(\alpha_2-\lambda_1)(\lambda_1+\alpha_1)\frac{T}{\lambda_1+\alpha_1+s}e^{-(\lambda_1+\alpha_1+s)T}\right\}^{-1}, \tag{4}$$

где $\varphi_0(T)=\left[1+(\alpha_2-\lambda_1)T\right]e^{-(\lambda_1+\alpha_1)T}$.

Доказательство. Воспользуемся результатом, полученным в [17]. Преобразование Лапласа плотности вероятности значений длительности общего периода ненаблюдаемости в рекуррентном дважды стохастическом потоке событий, функционирующем в условиях продлевающегося мертвого времени, имеет вид:

$$g_\xi(s)=\frac{\varphi_0(T)}{e^{sT}}\left[1-\int\limits_0^T e^{-sx}\tilde{p}(x)dx\right]^{-1}. \tag{5}$$

Переобозначая плотность $p(\tau)$, определенную в (3), на $\tilde{p}(x)$, подставляя в (5) и выполняя необходимые преобразования, приходим к (4). Теорема доказана.

Лемма 3. Математическое ожидание длительности общего периода ненаблюдаемости ξ в рекуррентном обобщенном асинхронном потоке событий с продлевающимся мертвым временем в особом случае имеет вид:

$$M\xi=\frac{1}{\varphi_0(T)(\lambda_1+\alpha_1)^2}\left[\left(1-\varphi_0(T)\right)\left(\lambda_1+\alpha_1\right)+(\alpha_2-\lambda_1)\left(1-e^{-(\lambda_1+\alpha_1)T}\right)\right], \tag{6}$$

где $\varphi_0(T)$ определена в (4).

Доказательство. Нетрудно показать, что с использованием вида $g_\xi(s)$, определенного в (4), математическое ожидание общего периода ненаблюдаемости ξ запишется в виде:

$$M\xi = -g'_\xi(s)\Big|_{s=0} = T + \frac{1}{\varphi_0(T)}\int_0^T x\tilde{p}(x)dx. \tag{7}$$

Подставляя $\tilde{p}(x)$, определенную в (3), в (7) и выполняя необходимые преобразования, находим (6). Лемма доказана.

4. Преобразование Лапласа плотности вероятности длительности интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке

Рассмотрим интервал времени (t_k, t_{k+1}), значение длительности которого есть $\tau_k = t_{k+1} - t_k$. В то же время длительность этого интервала равна $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}$, где η – длительность интервала между моментом окончания общего периода ненаблюдаемости и моментом t_{k+1}. В силу произвольного расположения интервала на временной оси индекс *k* опущен. Случайные величины η и ξ являются зависимыми. Тогда плотность вероятности $p(\tau)$ длительности интервала между событиями в наблюдаемом потоке запишется в виде:

$$p(\tau) = \int_0^\tau p(\xi)\, p(\eta|\xi)d\xi = \int_0^\tau p(\xi)\, p(\tau-\xi|\xi)d\xi\,. \tag{8}$$

Теорема 4. *Преобразование Лапласа плотности вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в рекуррентном обобщенном асинхронном потоке с продлевающимся мертвым временем в особом случае имеет вид:*

$$g_\tau(s) = \frac{1}{(\lambda_1+\alpha_1+s)^2(\alpha_1+\alpha_2)}\left\{(\lambda_1+\alpha_1)^2(\alpha_1+\alpha_2+s)g_\xi(s) - (\lambda_1-\alpha_2)^2 s g_\xi(\alpha_1+\alpha_2+s)\right\}, \tag{9}$$

где функция $g_\xi(s)$ определена формулой (4); $g_\xi(\alpha_1+\alpha_2+s)$ определена формулой (4), в которой нужно заменить аргумент s на $\alpha_1+\alpha_2+s$.

Доказательство. Найдем выражение для $p(\tau-\xi|\xi)$. Пусть момент наступления события в наблюдаемом потоке есть $\tau = 0$. Рассмотрим временной интервал $(0,\tau) = (0, \xi+\eta)$ и зафиксируем ξ. Пусть $p_{ij}(\tau-\xi)$ – условные вероятности того, что в интервале длительности $\eta = \tau - \xi$ не наступит событий наблюдаемого потока и $\lambda(\xi+\eta) = \lambda_j$ при условии, что $\lambda(\xi) = \lambda_i$, $i, j = 1, 2$. По смыслу введенные условные вероятности не отличаются от вероятностей $p_{ij}(\tau)$ для обобщенного асинхронного потока в особом случае, полученных в [17]:

$$\begin{gathered} p_{11}(\tau) = e^{-(\lambda_1+\alpha_1)\tau},\ p_{12}(\tau) = 0, \\ p_{21}(\tau) = (1-q)\alpha_2\tau e^{-(\lambda_1+\alpha_1)\tau},\ p_{22}(\tau) = e^{-(\lambda_1+\alpha_1)\tau},\ \tau \ge 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Тогда условные вероятности $p_{ij}(\tau-\xi)$, $i, j = 1, 2$, определяются формулами (10), в которых аргумент τ заменен на $\tau - \xi$.

Введем $P_i(\tau-\xi) = p_{i1}(\tau-\xi) + p_{i2}(\tau-\xi)$ – условная вероятность того, что в интервале (ξ,τ) событий наблюдаемого потока не произойдет при условии, что $\lambda(\xi) = \lambda_i$, $i = 1, 2.$ Тогда условная плотность вероятности длительности интервала (ξ,τ) по определению есть $p_i(\tau-\xi) = -P'_i(\tau-\xi),\ i = 1, 2.$ Учитывая (10), находим

$$\begin{gathered} p_1(\tau-\xi) = (\lambda_1+\alpha_1)e^{-(\lambda_1+\alpha_1)(\tau-\xi)}, \\ p_2(\tau-\xi) = -\left\{\alpha_2(1-q) - (\lambda_1+\alpha_1)\left[\alpha_2(1-q)(\tau-\xi)+1\right]\right\}e^{-(\lambda_1+\alpha_1)(\tau-\xi)}, \\ \tau \ge \xi. \end{gathered} \tag{11}$$

Введем вероятность $\pi_i(\tau|\xi)$ – условная вероятность того, что $\lambda(\tau)=\lambda_i$, $i=1, 2,$ при условии, что в момент $\tau=0$ событие наступило и наступило мертвое время длительности ξ. Тогда

$$p(\tau-\xi|\xi)=\pi_1(\tau=\xi|\xi)p_1(\tau-\xi)+\pi_2(\tau=\xi|\xi)p_2(\tau-\xi). \quad (12)$$

Вероятности $\pi_i(\tau=\xi|\xi)$ по смыслу совпадают с вероятностями $\pi_i(T), i=1, 2$, определенными в [17], в которых вместо периода ненаблюдаемости *T* следует рассматривать ξ:

$$\begin{gathered}\pi_2(\tau=\xi|\xi)=\pi_2(\xi)=\pi_2-\left[\pi_2-\pi_2(0|\xi)\right]e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\xi},\ \ \pi_2(0|\xi)=\frac{p_{12}+\delta\pi_2\left[1-e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\xi}\right]}{1-\delta e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\xi}},\\ p_{12}=\frac{\alpha_1}{\lambda_1+\alpha_1},\ \pi_2=\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2},\delta=\frac{\lambda_1\lambda_2-q\alpha_1\alpha_2}{(\lambda_1+\alpha_1)^2};\ \ \pi_1(\tau=\xi|\xi)=1-\pi_2(\tau=\xi|\xi).\end{gathered} \quad (13)$$

Принимая во внимание условие рекуррентности $\lambda_1\lambda_2-q\alpha_1\alpha_2=0$, запишем формулы (13) в виде:

$$\pi_2(0|\xi)=\frac{\alpha_1}{\lambda_1+\alpha_1},\ \pi_2(\xi)=\frac{\alpha_1}{(\lambda_1+\alpha_1)(\alpha_1+\alpha_2)}\left(\lambda_1+\alpha_1+(\alpha_2-\lambda_1)e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\xi}\right),\ \delta=0. \quad (14)$$

Подставляя (11), (14) в (12), находим

$$p(\tau-\xi|\xi)=\begin{cases}0, \quad 0\le\tau<\xi,\\ \left\{(\lambda_1+\alpha_1)-\pi_2(\xi)\alpha_2(1-q)\left[1-(\lambda_1+\alpha_1)(\tau-\xi)\right]\right\}e^{-(\lambda_1+\alpha_1)(\tau-\xi)}, \quad \tau\ge\xi.\end{cases} \quad (15)$$

Найдем преобразование Лапласа плотности $p(\tau)$, используя (8) и (15). Имеем

$$g_\tau(s)=\int_0^\infty e^{-s\tau}p(\tau)d\tau=$$

$$=\int_0^\infty e^{-s\tau}\left[\int_0^\tau p(\xi)p(\tau-\xi|\xi)d\xi\right]d\tau=\int_0^\infty p(\xi)\left[\int_\xi^\infty e^{-s\tau}p(\tau-\xi|\xi)d\tau\right]d\xi=$$

$$=\int_0^\infty p(\xi)\left[\int_\xi^\infty e^{-s\tau}\left\{\lambda_1+\alpha_1-\alpha_2(1-q)\left[1-(\lambda_1+\alpha_1)(\tau-\xi)\right]\pi_2(\xi)\right\}e^{-(\lambda_1+\alpha_1)(\tau-\xi)}d\tau\right]d\xi.$$

В выражении для $g_\tau(s)$ выполним замену переменных: $\tau-\xi=\eta,\tau=\xi+\eta.$ Тогда

$$g_\tau(s)=\int_0^\infty p(\xi)\left[\int_0^\infty e^{-s(\xi+\eta)}\left\{\lambda_1+\alpha_1-\alpha_2(1-q)\left[1-(\lambda_1+\alpha_1)\eta\right]\pi_2(\xi)\right\}e^{-(\lambda_1+\alpha_1)\eta}d\eta\right]d\xi.$$

Выполняя достаточно трудоемкие преобразования, приходим к (9). Теорема доказана.

Замечание 1. Для второго варианта задания параметров потока имеет место условие рекуррентности $\lambda_1\lambda_2-\alpha_1\alpha_2 p=0$, с учетом которого все выкладки аналогичны предыдущему случаю и приводят к преобразованию Лапласа $g_\tau(s)$, определённому в (9). Третий вариант задания параметров потока не вызывает интереса, поскольку в указанном случае поток вырождается в простейший.

5. Оценка длительности мертвого времени

Преобразование Лапласа (9) позволяет получить начальные моменты

$$M(\boldsymbol{\tau}^l)=(-1)^l g_\tau^{(l)}(s)\Big|_{s=0},\ \ l=1,2,...$$

Будем решать задачу оценивания длительности мертвого времени *T* методом моментов. Введем статистики $C_l=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\tau_k^l,\ l=1, 2, ...,$ где $\tau_k=t_{k+1}-t_k$ – значение длительности интервала между моментами t_k и t_{k+1} наступления событий в рекуррентном обобщенном асинхронном потоке с продлевающимся мертвым временем.

Предположим, что параметры потока $\alpha_1,\alpha_2,\lambda_1,\lambda_2,p,q$ являются известными. При количестве наблюдений $n\to\infty$ выборочный момент C_1 стремится к теоретическому моменту $M(\boldsymbol{\tau})$ [19]. Тогда для оценки длительности мнртвого времени *T* имеем уравнение моментов $M(\boldsymbol{\tau})=C_1$.

Вычислив производную от (9) по s в точке $s = 0$ и взяв ее со знаком минус, получим уравнение для нахождения значения $\hat{T}$ оценки $\hat{\mathbf{T}}$:

$$\frac{2}{\lambda_1+\alpha_1}-\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}+\frac{1}{(\lambda_1+\alpha_1)^2\varphi_0(T)}\Big((\lambda_1+\alpha_1)[1-\varphi_0(T)]-(\lambda_1-\alpha_2)\big[1-e^{-(\lambda_1+\alpha_1)T}\big]\Big)+$$
$$+\frac{(\lambda_1-\alpha_2)^2\varphi_0(T)e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}}{(\lambda_1+\alpha_1)^2(\alpha_1+\alpha_2)}\Bigg(1-\frac{(\lambda_1+\alpha_1)^2+(\alpha_1+\alpha_2)(\lambda_1+\lambda_2)}{(\lambda_1+2\alpha_1+\alpha_2)^2}\big[1-e^{-(\lambda_1+2\alpha_1+\alpha_2)T}\big]- \tag{16}$$
$$-\frac{(\lambda_1+\alpha_1)(\lambda_1-\alpha_2)}{\lambda_1+2\alpha_1+\alpha_2}Te^{-(\lambda_1+2\alpha_1+\alpha_2)T}\Bigg)^{-1}=C_1,$$

где $\varphi_0(T)$ определена в (4).

Обозначим левую часть уравнения (16) через $f(T)$. Можно показать, что функция $f(T), T \geq 0$, является возрастающей. Уравнение $f(T)=C_1$ решается численно на интервале $0 \leq T \leq \tau_{\min}$, $\tau_{\min}=\min\{\tau_k\},\ k=\overline{1,n}$. Возможные ситуации:

1) $f(T=0) \geq C_1$; в качестве значения оценки $\hat{\mathbf{T}}$ выбирается $\hat{T}^*=0$;

2) $f(T=0) < C_1$, тогда возможны случаи: а) корень уравнения моментов (16) попадает в полуинтервал $(0,\tau_{\min}]$, тогда он и выбирается в качестве значения оценки $\hat{T}=\hat{T}^*$; б) корень уравнения (16) больше $\tau_{\min}$, тогда в качестве значения оценки $\hat{\mathbf{T}}$ выбирается $\hat{T}^*=\tau_{\min}$.

6. Результаты статистических экспериментов

Для получения статистики C_1 построена имитационная модель, выходом которой является последовательность $t_1, t_2, \ldots$ моментов наступления событий.

Имитационная модель реализована на языке программирования C# с использованием технологии WPF и библиотеки Math.NET Numerics. Результат работы программы имитационного моделирования для длительности мертвого времени T = 0,3 и параметров потока $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 5$, $p = 1$, q = 0,1 приведен на рис. 2.

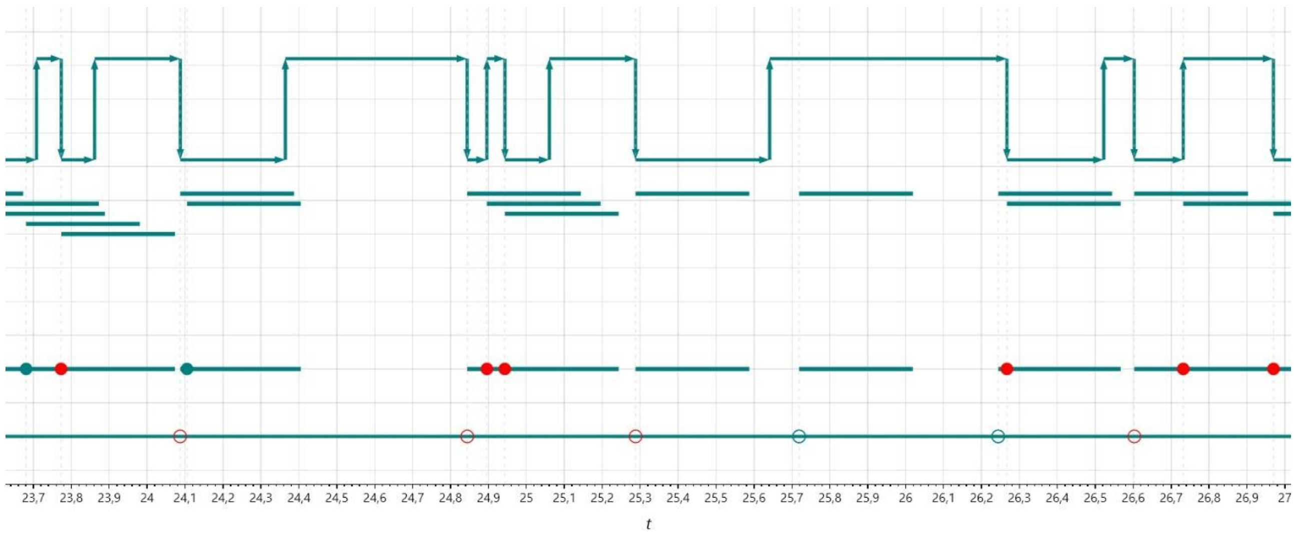

Рис. 2. Результат работы программы имитационного моделирования
Fig. 2. The result of the simulation program

В верхней части рис. 2 показана реализация сопровождающего процесса $\lambda(t)$; ниже короткие горизонтальные линии обозначают периоды мертвого времени фиксированной длительности T; далее ниже показана реализация случайной величины – общего периода ненаблюдаемости, где круги зеленого цвета обозначают ненаблюдаемые события пуассоновского потока, круги красного цвета обозначают ненаблюдаемые дополнительные события потока; наконец, на нижней временной оси отмечены наблюдаемые события – дополнительные события обозначены окружностями с красной границей, события пуассоновского потока – окружностями с границей зеленого цвета.

Для получения значения $\hat{T}$ оценки $\hat{\mathbf{T}}$ длительности мертвого времени T разработан следующий алгоритм оценивания:

1) задаются параметры потока с учетом условия особого случая $\lambda_1+\alpha_1=\lambda_2+\alpha_2$ и условий рекуррентности $\lambda_1>\lambda_2,\ \lambda_1\lambda_2=p\alpha_1\alpha_2,\ 0<p<1,\ q=1$ или $\lambda_1>\lambda_2,\ \lambda_1\lambda_2=q\alpha_1\alpha_2,\ 0<q<1,\ p=1$;

2) табулируется функция $f(T)$ и численно устанавливается, что $f(T)$ является возрастающей функцией;

3) в течение T_m ед. времени работает имитационная модель потока для получения выборки $\tau_1,\tau_2,...,\tau_n$, находится $\tau_{\min}=\min\{\tau_k\}$, вычисляется статистика C_1;

4) численно решается уравнение (15) методом Ньютона; корень уравнения моментов (16) является единственным;

5) в результате шагов 1–4 вычисляется $\hat{T}_1^*$ – значение оценки $\hat{T}$ в первом опыте;

6) шаги 2–4 повторяются для N опытов и находятся значения оценок $\hat{T}_1^*,\hat{T}_2^*,\ldots,\hat{T}_N^*$.

Выборочное среднее оценки и выборочная вариация оценки вычисляются по формулам $\hat{M}(\hat{\mathbf{T}})=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\hat{T}_j^*$, $\hat{V}(\hat{\mathbf{T}})=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(\hat{T}_j^*-T)^2$, где T – значение длительности мертвого времени, известное из имитационной модели потока.

Выборочное среднее количество событий исходного потока и выборочное среднее количество событий наблюдаемого потока вычисляются по формулам $\overline{n}_{исх}=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}n_{исх}^{(j)}$, $\overline{n}_{набл}=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}n_{набл}^{(j)}$, где $n_{исх}^{(j)}$ – количество событий исходного потока в j-м опыте, $n_{набл}^{(j)}$ – количество событий наблюдаемого потока в j-м опыте.

На рис. 3 представлен график функции $f(T)$ при значениях параметров $\lambda_1=2$, $\lambda_2=1$, $\alpha_1=4$, $\alpha_2=5$, $p=1$, $q=0{,}1$. Статистика C_1 является результатом работы программы имитационного моделирования для $T=0{,}5$ и времени моделирования $T_m=2\,000$ ед. времени.

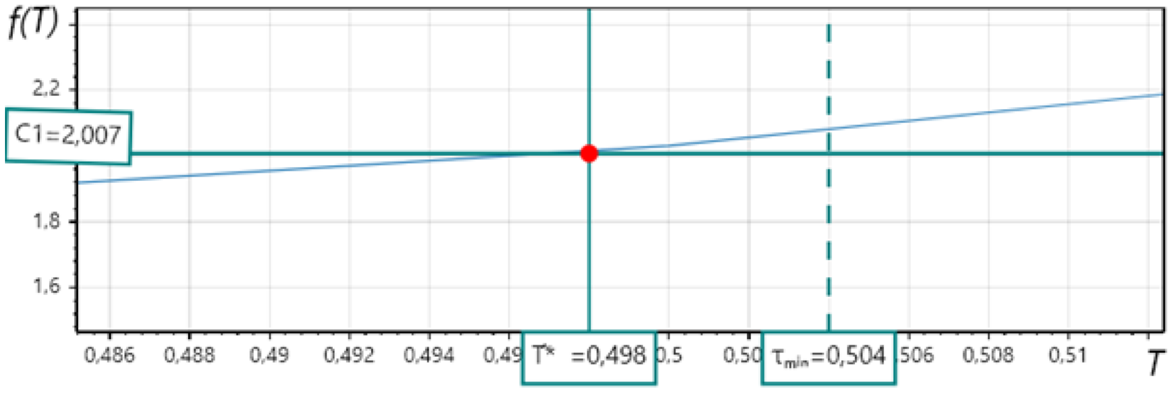

Рис. 3. График функции $f(T)$
Fig. 3. Graph of the function $f(T)$

Пересечение графика функции $f(T)$ и статистики C_1 отмечено на рис. 3 красной точкой. Абсцисса точки пересечения есть значение оценки $\hat{T}^*$ – решение уравнения моментов (16) в одном опыте. Возрастание функции $f(T)$ в области определения $0\le T\le 1$ свидетельствует о единственности решения уравнения моментов для заданного набора параметров.

Для установления качества полученной оценки выполнен эксперимент, который заключается в том, что при одних и тех же параметрах потока $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 5$, $p = 1$, $q = 0{,}1$ меняется значение длительности мертвого времени T от $T = 0{,}1$ до $T = 1$ ед. времени; количество опытов полагается равным $N = 1\,000$ и время моделирования $T_m = 2\,000$ ед. времени.

Численные результаты работы алгоритма оценивания приведены в таблице. В первой строке задается значение длительности мертвого времени T; во второй и третьей строках – выборочное среднее оценки $\hat{M}(\hat{\mathbf{T}})$ и выборочная вариация $\hat{V}(\hat{\mathbf{T}})$ соответственно; в четвертой и пятой строках – выборочное среднее количество событий исходного потока $\bar{n}_{исх}$ и выборочное среднее количество событий наблюдаемого потока $\bar{n}_{набл}$; в шестой строке – процент наблюдаемых событий $p = (\bar{n}_{набл} / \bar{n}_{исх}) \cdot 100\%$.

Зависимость $\hat{M}(\hat{\mathbf{T}}), \hat{V}(\hat{\mathbf{T}}), \bar{n}_{исх}, \bar{n}_{набл}, p$ от значения длительности мертвого времени T

T	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\hat{M}(\hat{\mathbf{T}})$	0,0986	0,1970	0,2963	0,3967	0,4970	0,5975	0,6928	0,7985	0,8933	0,8668
$\hat{V}(\hat{\mathbf{T}})$	$1{,}0\cdot10^{-6}$	$2{,}0\cdot10^{-6}$	$3{,}0\cdot10^{-6}$	$5{,}0\cdot10^{-6}$	$9{,}0\cdot10^{-6}$	$1{,}4\cdot10^{-5}$	$3{,}0\cdot10^{-5}$	$5{,}6\cdot10^{-5}$	$2{,}7\cdot10^{-3}$	$6{,}8\cdot10^{-2}$
$\bar{n}_{исх}$	16 002	16 010	16 004	16 002	16 005	16 001	16 002	16 000	15 997	15 999
$\bar{n}_{набл}$	11 415	7 710	5 024	3 193	1 992	1 224	744	448	268	160
p	71,33	48,16	31,39	19,95	12,45	7,65	4,65	2,80	1,68	1,00

Анализ результатов оценивания, представленных в таблице, показывает, что с ростом значения длительности мертвого времени число событий в наблюдаемом потоке уменьшается, выборочная вариация $\hat{V}(\hat{\mathbf{T}})$ растет, что является естественным.

Замечание 2. Поскольку: а) длительности интервала между соседними событиями наблюдаемого потока $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2, ..., \boldsymbol{\tau}_k$ являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами; б) теоретический момент $M(\boldsymbol{\tau})$ существует; в) численно показано, что уравнение моментов (16) имеет единственное решение, оценки $\hat{\mathbf{T}}$ являются состоятельными [19].

Заключение

В данной работе рассмотрен дважды стохастический обобщенный асинхронный поток событий с двумя состояниями, функционирующий в стационарном режиме в условиях продлевающегося мертвого времени, в особом случае соотношения параметров потока. Полученные результаты показывают возможность оценивания длительности продлевающегося мертвого времени, выступающего искажающим фактором, по результатам текущих наблюдений за потоком событий. Предложенный подход, основанный на применении преобразования Лапласа и метода моментов, позволяет получить приемлемые в смысле выборочной вариации оценки длительности мертвого времени при достаточно больших выборках наблюдений.

Список источников

1. Вишневский В.М., Дудин А.Н., Клименок В.И. Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях. М. : Техносфера, 2018. 564 с.
2. Cox D.R. The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1955. V. 51 (3). P. 433–441.
3. Kingman Y.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60 (4). P. 923–930.
4. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 1 // Известия Академии наук СССР. Техническая кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
5. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 2 // Известия Академии наук СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
6. Neuts M.F. A versatile Markov point process // Journal of Applied Probability. 1979. V. 16. P. 764–779.

7. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a bath markovian arrival process // Communication in Statistics Stochastic Models. 1991. V. 7. P. 1–46.
8. Nezhelskaya L., Tumashkina D. Optimal state estimation of semi-synchronous event flow of the second order under its complete observability // Communications in Computer and Information Science. 2018. V. 912. P. 93−105.
9. Горцев А.М., Нежельская Л.А. Оценивание параметров асинхронного потока с инициированием лишних событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2006. № S18. С. 267–273.
10. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 256 с.
11. Василевская Т.П., Горцев А.М., Нежельская Л.А. Оценивание длительности мертвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока с проявлением либо непроявлением событий // Вестник Томского государственного университета. 2004. № S9-2. С. 129–138.
12. Калягин А.А., Нежельская Л.А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 3 (32). С. 23–32.
13. Горцев А.М., Ниссенбаум О.В. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий с инициированием лишнего события // Вестник Томского государственного университета. 2004. № 284. С. 137–145.
14. Горцев А.М., Веткина А.В. Оценивание методом моментов параметра равномерного распределения длительности непродлевающегося случайного мертвого времени в рекуррентном полусинхронном потоке событий в общем и особом случаях // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 61. С. 47–60.
15. Нежельская Л.А., Пономаренко В.Д. Обобщенный асинхронный поток событий с продлевающимся мертвым временем // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2024. № 69. С 82−94.
16. Нежельская Л.А. Оценка состояний дважды стохастических потоков событий : учеб. пособие. Томск : Изд-во Том. гос. ун-та, 2020. 210 с.
17. Нежельская Л.А. Оценка состояний и параметров дважды стохастических потоков событий : дис. … д-ра физ.-мат. наук. Томск, 2016. 341 с.
18. Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания. М. : Физматгиз, 1963. 236 с.
19. Малинковский Ю.В. Теория вероятностей и математическая статистика. Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2004. Ч. 2: Математическая статистика. 146 с.

References

1. Vishnevsky, V.M., Dudin, A.N. & Klimenok, V.I. (2018) *Stokhasticheskie sistemy s korrelirovannymi potokami. Teoriya i primenenie v telekommunikatsionnykh setyakh* [Stochastic Systems with Correlated Flows. Theory and Application in Telecommunication Networks]. Moscow: Tekhnosfera.
2. Cox, D.P. (1955) The analysis of non−Markovian stochastic process by the inclusion of supplementary variables. *Proceeding of the Cambridge Philosophical Society*. 51(3). pp. 433−441.
3. Kingman, Y.F.C. (1964) On double stochastic Poisson process. *Proceeding of the Cambridge Philosophical Society*. 60(4). pp. 923−930.
4. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. Ch. 1 [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks. Part 1]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 6. pp. 92–99.
5. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1980) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. [On the equivalent substitution method for computing fragments of communication networks]. *Izvestiya AN SSSR.* Tekhnicheskaya Kibernetika. 1. pp. 55–61.
6. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markov point process. *Journal of Applied Probability*. 16. pp. 764–779.
7. Lucantoni, D.M. (1991) New results on the single server queue with a bath Markovian arrival process. *Communication in Statistics Stochastic Models*. 7. pp. 1−46.
8. Nezhelskaya, L. & Tumashkina, D. (2018). Optimal state estimation of semi-synchronous event flow of the second order under its complete observability. *Communications in Computer and Information Science*. 912. pp. 93−105.
9. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2006) Otsenivanie parametrov asinkhronnogo potoka s initsiirovaniem lishnikh sobytiy metodom momentov [Estimation of parameters of an asynchronous flow with the initiation of extra events by the method of moments]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal.* S18. pp. 267–273.
10. Apanasovich, V.V., Kolyada, A.A. & Chernyavsky, A.F. (1988) *Statisticheskiy analiz sluchaynykh potokov v fizicheskom eksperimente* [Statistical Analysis of Random Flows in Physical Experiment]. Minsk: Universitetskoe.
11. Vasilevskaya, T.P., Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2004) Otsenivanie dlitel'nosti mertvogo vremeni i parametrov sinkhronnogo al'terniruyushchego potoka s proyavleniem libo neproyavleniem sobytiy [Estimation of dead time duration and parameters of synchronous alternating flow with manifestation or non-manifestation of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta.*

Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science. S9−2. pp. 129−138.

12. Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2015) The comparison of maximum likelihood estimation and method of moments estimation of dead time value in a generalized semysynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(32). pp. 23–32.
13. Gortsev, A.M. & Nissenbaum, O.V. (2004) Otsenivanie dlitel'nosti mertvogo vremeni i parametrov asinkhronnogo al'terniruyushchego potoka sobytiy s initsiirovaniem lishnego sobytiya [Estimation of the dead time duration and parameters of the asynchronous alternating stream of events with initialization of an extra event]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 284. pp. 137–145.
14. Gortsev, A.M. & Vetkina, A.V. (2022) Estimation by the method of moments of the parameter of the uniform distribution of the duration of non-transient random dead time in the recurrent semi-synchronous flow of events in general and special cases. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 61. pp. 47–60.
15. Nezhelskaya L.A. & Ponomarenko V.D. (2024) Generalized asynchronous flow of events with extending dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 69. pp. 82−94.
16. Nezhelskaya, L.A. (2020) *Otsenka sostoyaniy dvazhdy stokhasticheskikh potokov sobytiy* [Estimation of States of Doubly Stochastic Flows of Events]. Tomsk: Tomsk State University Press.
17. Nezhelskaya, L.A. (2016) *Otsenka sostoyaniy i parametrov dvazhdy stokhasticheskikh potokov sobytiy* [Evaluation of states and parameters of doubly stochastic flows of events]. Physics and Mathematics Dr. Diss. Tomsk.
18. Khinchin, A.Ya. (1963) *Raboty po matematicheskoy teorii massovogo obsluzhivaniya* [Works on the Mathematical Theory of Queuing]. Moscow: Fizmatgiz.
19. Malinkovsky, Y.V. (2004) *Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika* [Theory of Probabilities and Mathematical Statics]. Vol. 2. Gomel: GSU.

Информация об авторах:
Нежельская Людмила Алексеевна – профессор, доктор физико-математических наук, заведующая кафедрой прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: ludne@mail.ru
Пономаренко Валентина Денисовна – магистрант кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: valya.ponomarenko.00@mail.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:
Nezhel'skaya Lyudmila A. (Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russia Federation). E-mail: ludne@mail.ru
Ponomarenko Valentina D. (Master's Student, Department of Applied Mathematics, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russia Federation). E-mail: valya.ponomarenko.00@mail.ru

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 14.09.2025; принята к публикации 02.12.2025

Received 14.09.2025; accepted for publication 02.12.2025