

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья

УДК 512.552.23

doi: 10.17223/19988621/98/1

MSC: 16W50

Кольца с ограниченным градуированным индексом нильпотентности**Дмитрий Сергеевич Баженов***Московский государственный университет, Москва, Россия, trongsund@yandex.ru*

Аннотация. Статья посвящена исследованию свойств градуированных колец с ограниченным градуированным индексом нильпотентности. Показано, что градуированный случай существенно отличается от неградуированного, за исключением gr -полупервичного случая

Ключевые слова: градуированные кольца, кольца с ограниченным индексом нильпотентности, полупервичные кольца, первичные кольца

Для цитирования: Баженов Д.С. Кольца с ограниченным градуированным индексом нильпотентности // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 98. С. 5–12. doi: 10.17223/19988621/98/1

Original article

Rings with a bounded graded index of nilpotency**Dmitry S. Bazhenov***Moscow State University, Moscow, Russian Federation, trongsund@yandex.ru*

Abstract. This article is devoted to exploration of graded rings with a bounded graded index of nilpotency. It is shown that the graded case is drastically different from the non-graded one, except for gr -semiprime rings.

Graded ring is an algebraical object which is a generalization of such structures as polynomial rings and group algebras, and despite being quite obvious and straightforward, graded rings started being explored only in the middle of the 20th century. Construction of this object is based on two simple ideas: the first one is that any element of a ring is a sum of homogenous components, and the second one is that multiplication of homogenous elements induces a group (or a semigroup) structure on homogenous subgroups of the additive group of a ring.

In the theory of graded rings, a lot of graded analogues of classic concepts are introduced. For example, an ideal is called a graded ideal if it includes, with any of its elements, its homogenous components; a ring is called a gr -division ring (or a gr -field in the commutative case) if every its nonzero homogenous element is invertible, etc.

In this article we consider gr-prime rings (rings without graded nonzero ideals – divisors of zero), gr-semiprime rings (rings without graded nonzero nilpotent ideals), gr-reduced rings (rings without nonzero homogenous nilpotent elements) and, certainly, rings with bounded graded index of nilpotency (rings without nonzero homogenous nilpotent elements with nilpotency degree more than a certain natural n).

Keywords: graded rings, rings with bounded index of nilpotency, semiprime rings, prime rings

For citation: Bazhenov, D.S. (2025) Rings with a bounded graded index of nilpotency. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 98. pp. 5–12. doi: 10.17223/19988621/98/1

Введение

В статье кольца всюду предполагаются ассоциативными и с единицей.

Определение. Кольцо R называется *градуированным по группе G* или *G -градуированным*, если его группа по сложению распадается в прямую сумму слагаемых, индексированных элементами группы G :

$$R_+ = \bigoplus_{g \in G} R_g,$$

причем $\forall g, h \in G \ R_g R_h \subset R_{gh}$. Кольцо называется *градуированным*, если оно градуировано по некоторой группе G .

Определение. Элемент r градуированного кольца R называется *однородным*, если $\exists g \in G \ r \in R_g$. Множество всех однородных элементов кольца R обозначается как $h(R)$.

Определение. Кольцо R называется *редуцированным*, если оно не содержит ненулевых нильпотентных элементов. Градуированное кольцо R называется *gr-редуцированным*, если в нем нет ненулевых нильпотентных однородных элементов.

Замечание. Не любое gr-редуцированное кольцо является редуцированным. Пример – кольцо $R = M_2(\mathbf{k})$ (здесь \mathbf{k} – поле, $\text{char } \mathbf{k} \neq 2$) со следующей $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$ -градуировкой:

$$R_{(0,0)} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \quad R_{(0,1)} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}, \quad R_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{pmatrix}, \quad R_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}.$$

Определение. Градуированное кольцо R называется *кольцом с градуированным индексом нильпотентности n* , если в нем существуют однородные нильпотентные элементы r такие, что $r^{n-1} \neq 0$, и для любого однородного нильпотентного элемента $r \in R \ r^n = 0$. Если выполняется только последнее условие, говорят, что кольцо *имеет градуированный индекс нильпотентности $\leq n$* .

Gr-редуцированные кольца

Определение. Подмножество X градуированного кольца R называется *градуированным*, если вместе с любым элементом оно содержит все частичные суммы его однородных слагаемых.

Всюду далее $l(X)$ и $r(X)$ – соответственно левый и правый аннуляторы подмножества X кольца R . Легко заметить, что если X – градуированное подмножество, то $l(X)$ и $r(X)$ – соответственно, градуированные левый и правый идеалы кольца R .

Теорема. Пусть R — gr -редуцированное кольцо.

1) Если $a_1, \dots, a_n \in h(R)$ и $a_1 \dots a_n = 0$, то $Ra_{s(1)}R \dots Ra_{s(n)}R = 0$ для любой подстановки $s \in S_n$.

2) Если $x, y \in h(R)$, то $xy = 0 \Leftrightarrow yx = 0 \Leftrightarrow xRy = yRx = 0$.

3) $r(a) = r(a^n)$ для всех $a \in h(R)$ и $n \in \mathbf{N}$.

4) Для любого градуированного $B \subset R$ $r(B)$ — градуированный идеал и

$$r(B) = l(B) = r(RBR) = l(RBR) = \{a \in R \mid RBR \cap RaR = 0\}.$$

Доказательство. 1)–3) Произведение $a_{s(1)} \cdot \dots \cdot a_{s(n)}$ можно получить из $a_1 \cdot \dots \cdot a_n$ перестановками конечного числа соседних множителей. Если $x, y \in h(R)$ и $xy = 0$, то $\forall r \in h(R)$ $(yrx)^2 = yr(xy)rx = 0$, откуда по gr -редуцированности $\forall r \in h(R)$ $yrx = 0$, $yRx = 0$, $yx = 0$, $\forall r \in h(R)$ $(xry)^2 = xr(yx)ry = 0$, откуда по gr -редуцированности $\forall r \in h(R)$ $xry = 0$ и $xRy = 0$. Поэтому $Ra_{s(1)}R \dots Ra_{s(n)}R = 0$. Пусть $a \in h(R)$ и $b \in h(r(a))$. Тогда $a^n b^n = 0$, откуда $(ab)^n = 0$, поэтому по gr -редуцированности $ab = 0$ и $r(a^n) \subset r(a) \subset r(a^n)$.

4) Обозначим $D = \{a \in h(R) \mid RBR \cap RaR = 0\}$. Легко проверить, что $D \subset r(RBR) \subset r(B)$ и $D \subset l(RBR) \subset l(B)$. По 1) $r(B) = l(B) \subset r(RBR)$. Пусть $a \in h(r(RBR))$. Тогда $(RaR \cap RBR)^2 = 0$. Так как R gr -редуцировано, то $RaR \cap RBR = 0$ и $r(RBR) \subset D$.

Кольца с градуированным ограниченным индексом нильпотентности

В теории колец с ограниченным индексом нильпотентности известны следующие утверждения.

Теорема [1. Теорема 6.38]. Пусть R — кольцо индекса нильпотентности $\leq n$.

1) Если X_1, \dots, X_n — такие подмножества R , что $X_i X_j = 0$ при $i \geq j$, то $X_1 X_2 \dots X_n = 0$.

2) Если B — нильподкольцо в R , то $(b^{n-1} \mathbf{Z} + Bb^{n-1} B)^2 = 0$ для всех $b \in B$.

3) Если B — нильподкольцо в R и $b \in B$, то b^{n-1} лежит в сумме всех нильпотентных идеалов нилькольца B .

4) Если B — конечно порожденное нильподкольцо в R , то нилькольцо B нильпотентно.

5) Если D — нильподкольцо в R , то D^n лежит в сумме всех нильпотентных идеалов кольца R , и поэтому D^n лежит в каждом полупервичном идеале кольца R .

6) Если e_1, e_2, \dots, e_{n+1} — ортогональные идемпотенты в R , то $e_1 R e_2 R \dots e_n R e_{n+1} = 0$.

7) $(X^n r(X^{n+1}))^{n+1} = 0$ для любого подмножества X кольца R .

Нам предстоит выяснить справедливость градуированных аналогов этих фактов.

Теорема. Существует градуированное кольцо с градуированным индексом нильпотентности 2, и его градуированные подмножества X_1 и X_2 такие, что $X_1^2 = X_2^2 = X_2 X_1 = 0$, $X_1 X_2 \neq 0$.

Доказательство. Рассмотрим некоммутативную ассоциативную алгебру $R = \mathbf{k}[x, y] / (x^2, y^2, yx)$ с $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$ -градуировкой:

$$R_{(0,0)} = \mathbf{k}, \quad R_{(0,1)} = \mathbf{k}x, \quad R_{(1,0)} = \mathbf{k}y, \quad R_{(1,1)} = \mathbf{k}xy.$$

Можно заметить, что она изоморфна подалгебре $M_3(\mathbf{k})$, состоящей из матриц, представимых в виде суммы скалярной и верхней нильтреугольной, причем элементу $a + bx + cy + dxy$ соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} a & b & d \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь градуированные подмножества $X_1 = \{x\}$, $X_2 = \{y\}$. Тогда $X_1^2 = X_2^2 = X_2X_1 = 0$, но $X_1X_2 = \{xy\} \neq 0$.

Градуированный аналог к утверждению 2 также оказался неверен.

Теорема. *Существуют градуированное кольцо R градуированного индекса нильпотентности 2, его гр-нильподкольцо B и его однородный элемент b такие, что $(bZ + BbB)^2 \neq 0$.*

Доказательство. Рассмотрим некоммутативную ассоциативную алгебру R над полем \mathbf{k} вида $\mathbf{k}\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle / Y$, где Y – идеал, порожденный всеми выражениями вида y^2 , где

$$y = \prod_{i=1}^l x_{k_i}, \quad l \geq 1, \quad 1 \leq k_i \leq 4,$$

градуированную по группе $Z_2^* Z_2^* Z_2^* Z_2 = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4 \mid \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2 = e \rangle$, $R_e = \mathbf{k}$, $R_{\sigma_{k_1} \dots \sigma_{k_n}} = \mathbf{k}x_{k_1} \dots x_{k_n}$. Нетрудно заметить, что если взять в качестве B все многочлены из R с нулевым свободным членом, а в качестве b взять x_1 , то $(bZ + BbB)^2 \neq 0$, поскольку, например, $x_1x_2x_1x_3 \neq 0$.

Те же самые кольцо и его гр-нильподкольцо оказываются контрпримером к аналогам утверждений 3 и 4, как показывает

Теорема. *В кольце R гр-нильподкольцо B конечно порождено, но не нильпотентно и содержит элемент, не лежащий ни в одном нильпотентном градуированном идеале кольца B , а следовательно, и в их сумме.*

Доказательство. Назовем слово в произвольном алфавите *бесквдратным*, если ни одно его конечное подслово не содержится в нем два раза подряд. Рассмотрим элемент $x_1 \in B$. Он не может лежать в сумме нильпотентных градуированных идеалов кольца R , поскольку иначе он лежал бы хотя бы в одном из градуированных нильпотентных идеалов, содержащихся в гр-нилькольце B , а значит, и сам идеал Bx_1B был бы нильпотентен, что неверно в силу следующего варианта теоремы Туэ, доказательство которого можно найти в [2. С. 16].

Теорема. *Существует бесконечное бесквдратное слово в алфавите $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, начинающееся с x_2 , и в котором между любыми двумя символами x_1 находится не менее двух других символов.*

Заметим, что именно условие бесквдратности для конечного слова (m_1, \dots, m_k) , $1 \leq m_i \leq 4$, является критерием неравенства нулю произведения $\prod_{i=1}^k x_{m_i}$. Легко увидеть, что идеал $(Bx_1B)^m$ содержит моном, равный произведению элементов из начального подслова этого слова, заканчивающегося не на x_1 , но содержащего ровно m вхождений x_1 . Поскольку слово бесквдратное, этот моном не равен нулю; значит, ни при каком натуральном m идеал $(Bx_1B)^m$ не равен 0, то есть идеал Bx_1B ненильпотентен.

Контрпримером к градуированным аналогам утверждений 5, 6 и 7 будет градуированное кольцо $R = M_3(\mathbf{k})$, градуированное по группе Z^2 следующим образом:

$R_{(0,0)}$ состоит из диагональных матриц, $R_{(1,0)} = \mathbf{k}E_{12}$, $R_{(0,1)} = \mathbf{k}E_{23}$, $R_{(1,1)} = \mathbf{k}E_{13}$, $R_{(-1,0)} = \mathbf{k}E_{21}$, $R_{(0,-1)} = \mathbf{k}E_{32}$, $R_{(-1,-1)} = \mathbf{k}E_{31}$, $R_{(m,n)} = 0$ для остальных пар $(m,n) \in \mathbf{Z}$. Нетрудно заметить, что у этого кольца градуированный индекс нильпотентности равен 2.

Теорема. В кольце R существуют ортогональные идемпотенты e_1, e_2, e_3 такие, что $e_1 R e_2 R e_3 \neq 0$.

Доказательство. Возьмем $e_i = E_{ii}$ для $i = 1, 2, 3$. Тогда $e_1 E_{12} e_2 E_{23} e_3 = E_{13} \neq 0$.

Теорема. В кольце R существует градуированное подмножество X , для которого $(X^2 \mathfrak{r}(X^3))^3 \neq 0$.

Доказательство. X – градуированное подмножество R , состоящее из верхних нильтреугольных матриц, которое не удовлетворяет градуированному аналогу утверждения (7) п. 1. В самом деле, $X^2 = \mathbf{k}E_{13}$, $X^3 = 0$, $\mathfrak{r}(X^3) = R$, $(X^2 \mathfrak{r}(X^3))^3 = (X^2 R)^3 = X^2 R = \{a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + a_{13}E_{13} \mid a_{11}, a_{12}, a_{13} \in \mathbf{k}\} \neq 0$.

Гр-полупервичные кольца с ограниченным градуированным индексом нильпотентности

Сначала вспомним некоторые факты из теории полупервичных колец.

Теорема [1. Теорема 6.39]. Для полупервичного кольца R и любого натурального n равносильны следующие утверждения:

- 1) R – кольцо индекса $\leq n$;
 - 2) $X_1 X_2 \dots X_n = 0$ для любых таких подмножеств $X_1, \dots, X_n \subset R$, что $X_i X_j = 0$ при $i \geq j$;
 - 3) $\mathfrak{r}(X^n) = \mathfrak{r}(X^{n+1})$ для любого подмножества $X \subset R$;
 - 4) $\mathfrak{r}(x^n) = \mathfrak{r}(x^{n+1})$ для любого $x \in R$;
 - 5) $\mathfrak{r}(Tx^n) = \mathfrak{r}(Tx^{n+1})$ для любого $x \in R$ и для любого идеала $T \subset R$.
- Сформулируем градуированные аналоги данных утверждений.

- 1') R – кольцо градуированного индекса $\leq n$.
- 2') $X_1 X_2 \dots X_n = 0$ для любых таких градуированных подмножеств $X_1, \dots, X_n \subset R$, что $X_i X_j = 0$ при $i \geq j$;
- 3') $\mathfrak{r}(X^n) = \mathfrak{r}(X^{n+1})$ для любого градуированного подмножества $X \subset R$;
- 4') $\mathfrak{r}(x^n) = \mathfrak{r}(x^{n+1})$ для любого однородного $x \in R$;
- 5') $\mathfrak{r}(Tx^n) = \mathfrak{r}(Tx^{n+1})$ для любого однородного $x \in R$ и для любого градуированного идеала $T \subset R$.

Нетрудно проверить, что для гр-полупервичного кольца из 1') не следует 2'), контрпримером может послужить все то же самое $M_3(\mathbf{k})$ с \mathbf{Z}^2 -градуировкой из предыдущего параграфа. Утверждения же 2')–5') для гр-полупервичного кольца равносильны, и, более того, имеет место

Теорема. Для гр-полупервичных колец с градуированным индексом нильпотентности $\leq n$ выполнено

$$(1') \Leftrightarrow (2') \Leftrightarrow (3') \Leftrightarrow (4') \Leftrightarrow (5').$$

Доказательство. Докажем сначала $2') \Rightarrow 3')$. Обозначим $X_k = \mathfrak{r}(X^k)X^k$, $k = 1, \dots, n$. Тогда при $k \geq l$ $X_k X_l = \mathfrak{r}(X^k)X^{k-l}X^l \mathfrak{r}(X^l) = 0$. По предположению $0 = X_1 X_2 \dots X_n = \mathfrak{r}(X)(X \mathfrak{r}(X^2)) \dots (X^{n-1} \mathfrak{r}(X^n))X^n$. Поскольку правый градуированный идеал $X^n \mathfrak{r}(X^{n+1})$ лежит в $\mathfrak{r}(X) \cap X \mathfrak{r}(X^2) \cap \dots \cap X^{n-1} \mathfrak{r}(X^n)$, имеем $(X^n \mathfrak{r}(X^{n+1}))^{n+1} = 0$. Но поскольку наше кольцо гр-полупервично, выполняется $X^n \mathfrak{r}(X^{n+1}) = 0$, откуда $\mathfrak{r}(X^{n+1}) \subset \mathfrak{r}(X^n) \subset \mathfrak{r}(X^{n+1})$ и $\mathfrak{r}(X^n) = \mathfrak{r}(X^{n+1})$.

3') \Rightarrow 4') Тривиально.

4') \Rightarrow 1') Пусть x – однородный нильпотентный элемент в R . Тогда $r(x^m) = R$ для некоторого натурального $m > n$. По 4') $r(x^n) = r(x^{n+1}) = \dots = r(x^m) = R$, $x^n = 0$.

2') \Rightarrow 5') Обозначим $X_k = r(Tx^k)Tx^k$, $k = 1, \dots, n$. Если $k \geq 1$, то $X_k X_l = r(Tx^k)Tx^{k-l}Tx^l r(Tx^l) = 0$. По 2') $0 = X_1 X_2 \dots X_n = TX_1 X_2 \dots X_n = (Tr(Tx))(Tr(Tx^2)) \dots (Tx^{n-1}r(Tx^n))Tx^n$. Если $k \geq 0$, то $Tx^n r(Tx^{n+1}) = Tx^k x^{n-k} r(Tx^{n+1})$, $x^{n-k} r(Tx^{n+1}) \subset r(Tx^{n+1})$. Поэтому $Tx^n r(Tx^{n+1}) \subset Tx^k r(Tx^{k+1})$ для всех $k \geq 0$. Тогда $(Tx^n r(Tx^{n+1}))^{n+1} = 0$. Отсюда из gr-полупервичности R видим $Tx^n r(Tx^{n+1}) = 0$, а значит, $r(Tx^{n+1}) \subset r(Tx^n) \subset r(Tx^{n+1})$ и $r(Tx^n) = r(Tx^{n+1})$.

5') \Rightarrow 4') следует из того, что $r(x^n) = r(Rx^n) = r(Rx^{n+1}) = r(x^{n+1})$.

Gr-первичные кольца с градуированным ограниченным индексом нильпотентности

Определение. Кольцо называется *ортогонально (gr-)конечным*, если в нем существует бесконечного подмножества попарно ортогональных (однородных) идемпотентов, и *ортогонально (gr-)n-конечным*, если в нем максимальное подмножество попарно ортогональных (однородных) идемпотентов состоит ровно из n элементов.

Теорема [1. Теорема 6.41]. Для первичного кольца R индекса $\leq n$ верны следующие утверждения:

- 1) R – ортогонально n -конечное кольцо.
- 2) Каждая строго возрастающая цепь правых (левых) аннуляторов имеет не более n собственных включений.
- 3) R – кольцо с условиями максимальности и минимальности для правых и левых аннуляторов.
- 4) Каждый существенный правый идеал L в R содержит такой элемент s , что $r(s) = 0$.
- 5) В R каждый ненулевой идеал содержит делитель нуля.

Выпишем градуированные аналоги этих понятий и проверим, верны ли они для любого gr-первичного кольца R с градуированным индексом нильпотентности $\leq n$.

- 1') R – gr-ортогонально n -конечное кольцо.
- 2') Каждая строго возрастающая цепь нетривиальных правых (левых) градуированных аннуляторов имеет не более n собственных включений.
- 3') R – кольцо с условиями максимальности и минимальности для правых и левых градуированных аннуляторов.
- 4') Каждый gr-существенный правый идеал L в R содержит такой однородный элемент s , что $r(s) = 0$.
- 5') В R каждый ненулевой градуированный идеал содержит однородный делитель нуля.

Утверждения 1') и 3'), а следовательно, и 2'), оказались неверны, как показывает

Теорема. Существует gr-первичное кольцо с градуированным индексом нильпотентности 2, не удовлетворяющее условию ни минимальности, ни максимальности ни для правых, ни для левых градуированных аннуляторов.

Доказательство. Рассмотрим кольцо R бесконечных вправо и вниз матриц с коэффициентами из поля \mathbf{k} , представимых в виде суммы скалярной и финитной

(т.е. такой, у которой лишь конечное число элементов отлично от нуля), градуированное по группе $\bigoplus_{i \in \mathbf{N}} \mathbf{Z}$ следующим образом: степень диагональной матрицы равна нулю,

$$\deg E_{ij} = \begin{cases} (0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, \overset{j-1}{1}, \overset{j}{0}, \dots), & i < j, \\ (0, \dots, \overset{j}{-1}, \dots, \overset{i-1}{-1}, \overset{i}{0}, \dots), & i > j. \end{cases}$$

Очевидно, градуированный индекс нильпотентности кольца равен 2. Это кольцо не gr -ортогонально конечно (и тем более не gr -ортогонально 2-конечно), поскольку имеется бесконечное множество ортогональных идемпотентов $\{E_{nn}\}_{n \in \mathbf{N}}$. Единственным нетривиальным градуированным идеалом этого кольца является идеал F , состоящий из финитных матриц из R , и поскольку $F^2 = F$, кольцо R gr -первично; но имеется строго возрастающая цепь правых градуированных аннуляторов $A_1 \subsetneq A_2 \dots \subsetneq A_k \subsetneq \dots$, где A_k состоит из матриц, в которых ненулевые только первые k строк, а также строго убывающая цепь правых градуированных аннуляторов $B_1 \supsetneq B_2 \dots \supsetneq B_k \supsetneq \dots$, где B_k состоит из матриц, у которых первые k строк нулевые. Аналогично с левыми аннуляторами с заменой строк на столбцы.

Утверждения 4') и 5') также оказались неверны, как показывает

Теорема. *Существует gr -первичное кольцо с градуированным индексом нильпотентности 2, в котором есть gr -существенный правый идеал L , у всех однородных элементов которого правый аннулятор ненулевой, и в котором есть ненулевой градуированный идеал, в котором все однородные элементы – делители нуля.*

Доказательство. Пусть R – некоммутативная ассоциативная \mathbf{k} -алгебра $\langle x, z \mid xzx = 0, z^2 = 1 \rangle$, градуированная по группе $D_\infty \cong \langle r, s \mid rs = sr^{-1}, s^2 = e \rangle$,

$$R_\sigma = \begin{cases} \mathbf{k}x^n, & \sigma = r^n, \\ \mathbf{k}zx^n z, & \sigma = r^{-n}, \\ \mathbf{k}x^n z, & \sigma = r^n s, \\ \mathbf{k}zx^n, & \sigma = sr^{-n} \end{cases}$$

(во всех четырех случаях $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$). Рассмотрим правый градуированный идеал $xR + zxR$ и заметим, что в нем есть все элементы вида $x^k, zx^k, x^k z$ и $zx^k z$ при $k > 1$, т.е. все необратимые однородные элементы; следовательно, этот правый идеал будет gr -существенным. Но у любого однородного элемента из этого идеала правый аннулятор будет содержать либо zx (для элементов вида x^k и zx^k), либо x (для элементов вида $x^k z$ и $zx^k z$). По той же самой причине все однородные элементы любого градуированного идеала в R являются делителями нуля.

Список источников

1. Туганбаев А.А. Теория колец. Арифметические модули и кольца. М.: МЦНМО, 2009. 472 с.
2. Саломая А. Жемчужины теории формальных языков. М.: Мир, 1986. 159 с.

References

1. Tuganbaev A.A. (2009) *Teoriya kolets. Arifmeticheskiye moduli i kol'tsa* [Theory of rings. Arithmetic modules and rings]. Moscow: Moscow Center for Continuous Mathematical Education.
2. Salomaa A. (1981) *Jewels of Formal Language Theory*. Computer Science Press.

Сведения об авторе:

Баженов Дмитрий Сергеевич – выпускник аспирантуры кафедры высшей алгебры Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. E-mail: trongsund@yandex.ru

Information about the author:

Bazhenov Dmitry S. (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation).
E-mail: trongsund@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 31.01.2025; принята к публикации 08.12.2025

The article was submitted 31.01.2025; accepted for publication 08.12.2025