ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2025 Математика и механика № 98
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Научная статья
УДК 517.54 MSC: 30C80, 30C45
doi: 10.17223/19988621/98/3

Оценки аналитических функций, области значений которых содержатся в круговой луночке

Федор Федорович Майер[1], Мейрамбек Габдуалиевич Тастанов[2], Анар Алтаевна Утемисова[3]

[1, 2, 3] Костанайский региональный университет им. А. Байтурсынова, Костанай, Казахстан
[1] maiyer@mail.ru
[2] tastao@mail.ru
[3] anar_utemisova@mail.ru

Аннотация. В классе аналитических функций, область значений которых содержится в круговой луночке, найдены точные оценки действительной части, модуля функции и модуля ее логарифмической производной, обобщающие известные результаты, используемые многими авторами на протяжении десятилетий. В качестве приложения получен радиус звездообразности класса дважды почти звездообразных функций, в частных случаях дающий ряд известных результатов.
Ключевые слова: оценки аналитических функций, почти звездообразные функции, радиусы звездообразности

Для цитирования: Майер Ф.Ф., Тастанов М.Г., Утемисова А.А. Оценки аналитических функций, области значений которых содержатся в круговой луночке // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 98. С. 28–43. doi: 10.17223/19988621/98/3

Original article

Estimates of analytical functions whose ranges of values are contained in a circular lune

Fedor F. Maiyer[1], Meyrambek G. Tastanov[2], Anar A. Utemissova[3]

[1, 2, 3] Kostanay Regional University named after A. Baitursynuly, Kostanay, Kazakhstan
[1] maiyer@mail.ru
[2] tastao@mail.ru
[3] anar_utemisova@mail.ru

Abstract. The article introduces a class of analytical functions in a unit circle that have missing terms in the power series expansion. Their range of values is contained in a circular lune located in the right half-plane relative to the imaginary axis and symmetric relative to the real axis, one of the vertices of which is located at point 0. In this class of functions, the problem of finding the exact upper boundary of the modulus of the logarithmic derivative

and the boundaries from below and above the real part and the modulus of the function is solved. Such results have always served as the basis for solving a number of extreme problems on subclasses of functions *f*(*z*), analytical in the unit circle and normalized by the condition $f(0)=f'(0)-1=0$. Some particular cases, when a circular lune degenerates into a circle or angle, yield well-known estimates established by such authors as T.H. MacGregor, R.M. Goel, D.B. Shaffer, and G.M. Shah and used by many researchers for decades to solve extreme problems.
As an example of applications of the main result, the radius of starlikeness of one wide class of doubly close-to-starlike functions is obtained, which in particular cases gives a number of well-known results obtained in recent years.
Keywords: estimates of analytical functions, close-to-starlike functions, radii of starlikeness

For citation: Maiyer, F.F., Tastanov, M.G., Utemissova, A.A. (2025) Estimates of analytical functions whose ranges of values are contained in a circular lune. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 98. pp. 28–43. doi: 10.17223/19988621/98/3

Введение

Пусть $\mathcal{A}$ – класс аналитических в круге $E=\{z:|z|<1\}$ функций φ, нормированных условием $\varphi(0)=1$, $\mathcal{A}_n$ – класс функций $\varphi\in\mathcal{A}$ с разложением вида $\varphi(z)=1+c_nz^n+c_{n+1}z^{n+1}+\ldots$, $n\geq 1$, и пусть $\mathcal{N}_n$ – класс аналитических в E функций f вида $f(z)=z+a_{n+1}z^{n+1}+a_{n+2}z^{n+2}+\ldots$, $n\geq 1$. Также будем считать, что если $\mathcal{M}_n$ – некоторый подкласс класса $\mathcal{A}_n$, то $\mathcal{M}:=\mathcal{M}_1$, и обратно, добавление нижнего индекса *n* у $\mathcal{M}$ будет означать, что функции подкласса $\mathcal{M}_n$ имеют разложение вида $\varphi(z)=1+c_nz^n+c_{n+1}z^{n+1}+\ldots$, $n\geq 1$.

Пусть $\mathcal{P}$ – класс Каратеодори, т.е. $\mathcal{P}\subset\mathcal{A}$ и $\operatorname{Re}\varphi(z)>0$, $z\in E$.

Хорошо известно, что многие экстремальные задачи для подклассов $\tilde{\mathcal{N}}_n$ класса $\mathcal{N}_n$ могут быть сведены к задачам минимизации или максимизации при $|z|=r<1$ функционалов

$$\operatorname{Re}\varphi(z),\ |\varphi(z)|,\ |\varphi'(z)|,\ \left|z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right|,\ \operatorname{Re}\left(\mu\varphi(z)+\eta z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right),\ \mu,\eta\geq 0,$$

на некоторых подклассах $\tilde{\mathcal{P}}_n$ класса $\mathcal{P}_n$, используемых при построении классов $\tilde{\mathcal{N}}_n$.

Впервые в статьях [1–3] границы $\operatorname{Re}\varphi(z)$, $|\varphi(z)|$, $|z\varphi'(z)/\varphi(z)|$ установлены в классе $\mathcal{P}_n$ и его подклассе функций, удовлетворяющих условию $|\varphi(z)-1|<1$. Немногим позже обобщение этих результатов на класс функций $\varphi\in\mathcal{A}$, удовлетворяющих условию $|\varphi(z)-a|<a$, $a\geq 1/2$, $z\in E$, были получены в [4], а для случая, когда $\varphi\in\mathcal{A}_n$ при $n\geq 1$ – в [5]. Оценка $|z\varphi'(z)/\varphi(z)|$ в подклассе класса $\mathcal{P}_n$, когда $\operatorname{Re}\varphi(z)>\alpha$, $z\in E$, была получена в [6].

В статье [7] решена задача минимизации при $|z| = r < 1$ функционала $\operatorname{Re}\left(\mu\varphi(z) + \eta z\varphi'(z)/\varphi(z)\right)$, $\mu,\eta \ge 0$, а также найдены границы для функционалов $\operatorname{Re}\varphi(z)$ и $|\varphi(z)|$ в классе

$$\mathcal{P}_n[A,B] = \left\{\varphi \in \mathcal{A}_n : \varphi(E) \subset \varphi_0(E),\ \ \varphi_0(z) = (1+Az)/(1+Bz),\ -1 \le B < A \le 1\right\}.$$

Описанные выше оценки на протяжении полувека, в том числе и в последние годы, применялись разными авторами (см., напр.: [8–12]) при решении экстремальных задач.

В [13] получены оценки $\operatorname{Re}\varphi(z)$, $|\varphi(z)|$, $|z\varphi'(z)/\varphi(z)|$ в классе $\mathcal{A}_n$ функций φ, удовлетворяющих условию $\left|\varphi^2(z) - 1\right| < 1$, $z \in E$. Обобщение этих результатов, а также точная оценка снизу функционала $\operatorname{Re}\left(\mu\varphi(z) + \eta z\varphi'(z)/\varphi(z)\right)$, $\mu,\eta \ge 0$, в классе $\mathcal{A}_n$ функций, для которых $\left|(\varphi(z))^{1/\gamma} - a\right| < a$, $a \ge 1/2$, $0 < \gamma \le 1$, $z \in E$, установлены в статье [14].

В настоящей статье вводится класс функций $\varphi \in \mathcal{A}_n$, множество значений которых содержится в круговой луночке, расположенной в правой полуплоскости и симметричной относительно действительной оси. В данном классе решена задача определения точных границ $\operatorname{Re}\varphi(z)$, $|\varphi(z)|$, $|z\varphi'(z)/\varphi(z)|$ и минимизации функционала $\operatorname{Re}\left(\mu\varphi(z) + \eta z\varphi'(z)/\varphi(z)\right)$, $\mu,\eta \ge 0$, при $|z| = r < 1$. Эти результаты могут быть применены для решения ряда новых экстремальных задач на подклассах класса $\mathcal{N}_n$. В качестве примера применения данных оценок найден радиус звездообразности одного класса дважды почти звездообразных функций. В некоторых частных случаях полученные оценки совпадают с оценками, полученными в вышеперечисленных результатах.

1. Подчиненность, симметризация и внутренний радиус области

Многие классы аналитических функций могут быть определены в терминах подчиненности функций. Функция $\varphi \in \mathcal{A}$ называется подчиненной функции $\varphi_0 \in \mathcal{A}$, если существует функция $\omega \in \mathcal{A}$ такая, что $|\omega(z)| < 1$ в круге E и $\omega(0) = 0$, для которой $\varphi(z) = \varphi_0(\omega(z))$. Факт подчиненности функций обозначается в виде $\varphi(z) \prec \varphi_0(z)$. В случае когда функция φ_0 является однолистной в E, факт подчиненности имеет простой геометрический смысл: $\varphi(E) \subset \varphi_0(E)$ и $\varphi(0) = \varphi_0(0)$.

Важное значение для приложений имеет тот факт, что если функция φ имеет разложение вида $\varphi(z) = c_0 + c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \dots$, $n \ge 1$, то из соотношения $\varphi(E) \subset \varphi_0(E)$ следует, что

$$\varphi(|z| \le r) \subset \varphi_0(|z| \le r^n) \text{ при любом } r,\ 0 \le r < 1. \qquad (1)$$

Используя геометрические характеристики области $\varphi_0(|z| < r)$, на основе соотношения (1) несложно получить точные оценки $\operatorname{Re}\varphi(z)$, $\operatorname{Im}\varphi(z)$, $|\varphi(z)|$, $|\arg\varphi(z)|$.

Для нахождения оценок $|\varphi'(z)|$ и $|z\varphi'(z)/\varphi(z)|$ эффективно применяется следующее утверждение [15], сформулированное в терминах внутреннего радиуса области [16].

Лемма 1 [15]. *Пусть функция* $\Phi(z)=c_0+c_n z^n+c_{n+1}z^{n+1}+\dots$, $n\ge 1$, *является аналитической в круге* E *и* $\Phi(z)\prec\Phi_0(z)$, *где функция* Φ_0 *однолистна* в E. *Тогда при* $|z|=r<1$ *имеет место точная оценка*

$$|\Phi'(z)|\le\frac{nr^{n-1}}{1-r^{2n}}R\big(D_0,\Phi(z)\big), \tag{2}$$

где $D_0=\Phi_0(E)$, $R\big(D_0,\Phi(z)\big)$ *– внутренний радиус области* D_0 *относительно точки* $\Phi(z)$. *Оценка* (2) *точная и достигается для функции* $\Phi(z)=\Phi_0(e^{i\alpha}z^n)$, *где* $\alpha\in\mathbf{R}$ *– произвольная постоянная.*

Как показано в [16], если функция $w=\Phi_0(z)$ однолистно и конформно отображает круг E на область D_0, то внутренний радиус $R\big(D_0,w\big)$ области $D_0=\Phi_0(E)$ относительно точки $w=\Phi_0\left(z\right)$ вычисляется по формуле

$$R(D_0,\Phi_0(z))=\left|\Phi_0'\left(z\right)\right|\left(1-|z|^2\right). \tag{3}$$

Кроме этого, воспользуемся некоторыми элементами метода симметризации [17] области относительно прямой (симметризации Штейнера). Так как при расширении или симметризации области ее внутренний радиус не уменьшается, то из этого свойства вытекает следующая лемма.

Лемма 2. Пусть область D симметрична относительно действительной оси, и после осуществления симметризации области D относительно действительной оси получается область $D^*=D$. Тогда для любой точки $w\in D$ выполняется неравенство

$$R\big(D,w\big)\le R\big(D,u\big),\ \text{где}\ u=\operatorname{Re} w.$$

Из леммы 2 следует, что если область D не изменяется при ее симметризации относительно действительной оси и имеет ограниченный максимальный внутренний радиус, то его максимальное значение достигается в точке (в точках) области D, лежащих на действительной оси. То есть в этом случае для нахождения максимального внутреннего радиуса достаточно исследовать $R\big(D,w\big)$ в точках действительной оси, принадлежащих области D.

2. Класс функций $\mathcal{A}_n(a,\gamma)$ и его описание

Определение 1. Будем считать, что аналитическая в E функция φ принадлежит классу $\mathcal{A}_n(a,\gamma)$ тогда и только тогда, когда $\varphi\in\mathcal{A}_n$ и выполняется условие

$$\left|\arg\left(\varphi^{-1}(z)-a\right)\right|<\gamma\pi/2,\ 0<\gamma\le 1,\ 0\le a<1,\ z\in E. \tag{4}$$

Лемма 3. *Функция* φ *принадлежит классу* $\mathcal{A}_n(a,\gamma)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\varphi(z)\prec\varphi_0(z)=\frac{(1+z)^{\gamma}}{(1-a)(1-z)^{\gamma}+a(1+z)^{\gamma}}. \tag{5}$$

При этом область значений $\varphi(E)$ *содержится в круговой луночке* $\varphi_0(E)$ *, расположенной в правой полуплоскости относительно мнимой оси и симметричной относительно действительной оси, с угловыми точками* 0 *и* $1/a$ *и внутренними углами, равными* $\gamma\pi$.

Доказательство. Условие (4) равносильно неравенству

$$\left|\arg\frac{\varphi^{-1}(z)-a}{1-a}\right| \le \frac{\gamma\pi}{2} \text{ или } \frac{\varphi^{-1}(z)-a}{1-a} \prec w_0(z) = \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\gamma}.$$

Поэтому существует функция ω, удовлетворяющая условию леммы Шварца и такая, что

$$\frac{\varphi^{-1}(z)-a}{1-a} = w_0\left(\omega(z)\right) \text{ или } \varphi(z) = \frac{1}{(1-a)w_0(\omega(z))+a} = \varphi_0(\omega(z)),$$

а это равносильно (5). Поскольку $\varphi^{-1}(z) = \left(1-a\right)w_0\left(\omega(z)\right)+a$, то $\varphi^{-1}(z) \prec \varphi_0^{-1}(z) = (1-a)w_0(z)+a$, причем $\varphi_0^{-1}(E)$ есть угол $\left|\arg(w-a)\right| \le \gamma\pi/2$ величины $\gamma\pi$ с вершиной в точке a , симметричный относительно действительной оси. Отсюда получается второе утверждение леммы 3.

Лемма 4. *Пусть функция* φ_0 *определена в соотношении* (5). *Тогда*

$$\max_{|z|=r} \operatorname{Re} \varphi_0(z) = \max_{|z|=r}\left|\varphi_0(z)\right| = \varphi_0(r) , \tag{6}$$

$$\min_{|z|=r} \operatorname{Re} \varphi_0(z) = \min_{|z|=r}\left|\varphi_0(z)\right| = \varphi_0(-r) . \tag{7}$$

Доказательство. Запишем функцию φ_0 в виде $\varphi_0(z) = \dfrac{1}{\left(1-a\right)w_0(z)+a}$, где $w_0(z) = \left((1-z)/(1+z)\right)^{\gamma}$. Поскольку $\left|w_0(z)\right| \ge \left|w_0(r)\right| = \left((1-r)/(1+r)\right)^{\gamma}$ при $|z| = r < 1$, то с учетом геометрических свойств линейного отображения $w = \left(1-a\right)w_0 + a$ получаем, что $\left|\varphi_0(z)\right| \le \dfrac{1}{(1-a)\left|w_0(r)\right|+a} = \varphi_0(r)$, причем знак равенства достигается в точке $z = r$. В силу этого $\max\limits_{|z|=r}\left|\varphi_0(z)\right| = \varphi_0(r)$. Равенство $\min\limits_{|z|=r}\left|\varphi_0(z)\right| = \varphi_0(-r)$ доказывается аналогично с учетом того, что $\left|w_0(z)\right| \le \left|w_0(-r)\right| = \left((1+r)/(1-r)\right)^{\gamma}$.

Равенство $\max\limits_{|z|=r} \operatorname{Re} \varphi_0(z) = \varphi_0(r)$ следует из того, что $\operatorname{Re} \varphi_0(z) \le \left|\varphi_0(z)\right| \le \varphi_0(r)$ и $\max\limits_{|z|=r} \operatorname{Re} \varphi_0(z)$ достигается в точке $z = r$. Чтобы доказать равенство $\min\limits_{|z|=r} \operatorname{Re} \varphi_0(z) = \varphi_0(-r)$, предположим противное. То есть предположим, что $\min\limits_{|z|=r} \operatorname{Re} \varphi_0(z)$ достигается не в точке $z = -r$, а в точке $z = re^{i\theta_0}$, $\theta_0 \in (0;\pi)$, и $\min\limits_{|z|=r} \operatorname{Re} \varphi_0(z) < \varphi_0(-r)$. Тогда в силу свойства симметрии функции φ_0 относительно действительной оси получим, что $\min\limits_{|z|=r} \operatorname{Re} \varphi_0(z) = \operatorname{Re} \varphi_0(re^{\pm i\theta_0}) < \varphi_0(-r)$. Поэтому отрезок, соединяющий точки

$\varphi_0(re^{i\theta_0})$ и $\varphi_0(re^{-i\theta_0})$, целиком не будет принадлежать замкнутой области $\varphi_0(|z|\le r)$, так как не содержит точки $\varphi_0(-r)$ этой области, что противоречит выпуклости области $\varphi_0(|z|<r)$ при любом r, $0\le r<1$. Следовательно, $\min\limits_{|z|=r}\mathrm{Re}\,\varphi_0(z)=\varphi_0(-r)$.

3. Оценки в классе $\mathcal{A}_n(a,\gamma)$

Теорема 1. *Если* $\varphi\in\mathcal{A}_n(a,\gamma)$, *то при* $|z|=r<1$ *имеют место оценки*

$$\frac{(1-r^n)^\gamma}{(1-a)(1+r^n)^\gamma+a(1-r^n)^\gamma}\le\mathrm{Re}\,\varphi(z)\le|\varphi(z)|\le\frac{(1+r^n)^\gamma}{(1-a)(1-r^n)^\gamma+a(1+r^n)^\gamma}, \tag{8}$$

$$\left|z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right|\le M(r^n;a,\gamma) \tag{9}$$

и для любых $\mu,\eta\ge 0$

$$\mu\,\mathrm{Re}\,\varphi(z)+\eta\,\mathrm{Re}\left(z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right)\ge\mu\frac{(1-r^n)^\gamma}{(1-a)(1+r^n)^\gamma+a(1-r^n)^\gamma}-\eta\,M(r^n;a,\gamma), \tag{10}$$

где

$$M(r;a,\gamma)=\frac{2\gamma(1-a)nr}{1-r^2}\frac{(1+r)^\gamma}{(1-a)(1+r)^\gamma+a(1-r)^\gamma}. \tag{11}$$

Оценки точные и достигаются для функции $\varphi(z)=\varphi_0(z^n)$, *где функция* φ_0 *определена в* (5).

Доказательство. Поскольку $\varphi\in\mathcal{A}_n(a,\gamma)$, то в силу леммы 3 имеет место подчиненность (5), и с учетом разложения $\varphi(z)=1+c_nz^n+c_{n+1}z^{n+1}+\ldots$, $n\ge1$, выполняется соотношение (1). Поэтому на основе (6)

$$\mathrm{Re}\,\varphi(z)\le|\varphi(z)|\le\max_{|z|=r^n}|\varphi_0(z)|=\varphi_0(r^n)=\frac{(1+r^n)^\gamma}{(1-a)(1-r^n)^\gamma+a(1+r^n)^\gamma},$$

т.е. получили правые оценки в (8). Аналогично с учетом (7) получаем левые оценки в (8):

$$|\varphi(z)|\ge\mathrm{Re}\,\varphi(z)\ge\min_{|z|=r^n}\mathrm{Re}\,\varphi_0(z)=\varphi_0(-r^n)=\frac{(1-r^n)^\gamma}{(1-a)(1+r^n)^\gamma+a(1-r^n)^\gamma}.$$

Докажем оценку (9). Поскольку в силу (5) $\Phi(z)=\ln\varphi(z)\prec\Phi_0(z)=\ln\varphi_0(z)$, то при $|z|=r<1$ выполняется неравенство (2), в силу которого

$$\left|z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right|\equiv|z\Phi'(z)|\le\frac{nr^n}{1-r^{2n}}R\big(D_0,\Phi(z)\big), \tag{12}$$

где $D_0=\Phi_0(E)$. Поскольку

$$\Phi_0'(z)=\frac{\varphi_0'(z)}{\varphi_0(z)}=\frac{2\gamma(1-a)}{1-z^2}\frac{(1-z)^\gamma}{(1-a)(1-z)^\gamma+a(1+z)^\gamma}, \tag{13}$$

то по формуле (3) получаем

$$R\left(D_0,\Phi_0(z)\right)=\frac{2\gamma(1-a)}{\left|1-z^2\right|}\left|\frac{(1-z)^{\gamma}}{(1-a)(1-z)^{\gamma}+a(1+z)^{\gamma}}\right|\left(1-|z|^2\right). \qquad (14)$$

Поскольку в силу леммы 3 область $\varphi_0(E)$ является круговой луночкой, симметричной относительно действительной оси, с углами в угловых точках $w=0$ и $w=1/a$, равными $\gamma\pi$, $0<\gamma\le 1$, то пересечением области $\varphi_0(E)$ с любой окружностью $|w|=\rho$, $0<\rho<1/a$, является дуга окружности, симметричная относительно вещественной оси и содержащая точку вещественной полуоси.

Поскольку область $\varphi_0(E)$ является выпуклой и симметричной относительно действительной оси, то при любом r, $0\le r<1$, область $\varphi_0(E_r)$, где $E_r=\{z:|z|<r\}$, $0\le r<1$, также является выпуклой и симметричной относительно действительной оси. Если пересечение $\varphi_0\left(E_r\right)\cap\left\{|w|=\rho\right\}$ не пусто, то оно также является дугой окружности (связным множеством), симметричной относительно действительной оси и содержащейся в дуге окружности $\varphi_0\left(E\right)\cap\left\{|w|=\rho\right\}$. Если предположить противное, т.е. что множество $\varphi_0\left(E_r\right)\cap\left\{|w|=\rho\right\}$ связным не является, то это приведет к тому, что пересечение области $\varphi_0(E)$ с окружностью $|w|=\rho$ не будет связным множеством.

Поэтому область $\Phi_0(E_r)$ на плоскости $u+iv=\ln w$ является симметричной относительно действительной оси, и ее пересечением с любой прямой $u=\ln\rho$, $0<\rho<1/a$, является интервал, симметричный относительно вещественной оси. Следовательно, после осуществления симметризации Штейнера [17] области $\Phi_0(E_r)$ относительно вещественной оси получится область $\left(\Phi_0(E_r)\right)^{*}=\Phi_0(E_r)$.

Поэтому в силу леммы 2

$$\max_{|z|\le r}R(D_0,\Phi_0(z))=\max_{-r\le t\le r}R(D_0,\Phi_0(t))=\max_{-r\le t\le r}R_0(t), \qquad (15)$$

где $R_0(t)=R(D_0,\Phi_0(t))$, $t\in(-1;1)$. Тогда в силу (14)

$$R_0(t)=2\gamma(1-a)\frac{(1-t)^{\gamma}}{(1-a)(1-t)^{\gamma}+a(1+t)^{\gamma}}=2\gamma(1-a)\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{\gamma}\varphi_0(t).$$

Покажем, что $R_0'(t)<0$ для всех $t\in(-1;1)$. После вычислений получаем

$$R_0'(t)=2\gamma(1-a)\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{\gamma}\left(\frac{\varphi_0'(t)}{\varphi_0(t)}-\frac{2\gamma}{1-t^2}\right)\varphi_0(t).$$

Отсюда, учитывая, что в силу (13) при $z=t$

$$\frac{\varphi_0'(t)}{\varphi_0(t)}-\frac{2\gamma}{1-t^2}=\frac{2\gamma}{1-t^2}\left(\frac{(1-a)(1-t)^{\gamma}}{\left(1-a\right)(1-t)^{\gamma}+a(1+t)^{\gamma}}-1\right)=-\frac{2\gamma a}{1-t^2}\varphi_0(t),$$

окончательно получаем, что $R_0'(t)=-\dfrac{4\gamma^2a(1-a)}{1-t^2}\left(\dfrac{1-t}{1+t}\right)^{\gamma}\left(\varphi_0(t)\right)^2$, $t\in(-1;1)$.

Поэтому $R_0'(t)<0$ для всех $t\in(-1;1)$, и внутренний радиус $R_0(t)$ является убывающей функцией на $(-1;1)$. В силу этого, с учетом (15)

$$\max_{|z|\le r} R\left(D_0,\Phi_0\left(z\right)\right)=R_0\left(-r\right)=2\gamma(1-a)\frac{(1+r)^{\gamma}}{(1-a)(1+r)^{\gamma}+a(1-r)^{\gamma}}\,. \qquad (16)$$

Поскольку $\Phi(z)\prec\Phi_0(z)$ и $\Phi\in\mathcal{A}_n$, то с учетом разложения функции Φ в ряд получаем, что $\Phi(|z|\le r)\subset\Phi_0(|z|\le r^n)$ при любом r, $0\le r<1$. Поэтому

$$\max_{|z|\le r} R\left(D_0,\Phi(z)\right)\le\max_{|z|\le r^n} R\left(D_0,\Phi_0(z)\right)=2\gamma(1-a)\frac{(1+r^n)^{\gamma}}{\left(1-a\right)(1+r^n)^{\gamma}+a(1-r^n)^{\gamma}}\,.$$

Следовательно, в силу (12) окончательно получаем оценку (9):

$$\left|z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right|=\left|z\Phi'(z)\right|\le M\left(r^n;a,\gamma\right)=\frac{2\gamma(1-a)nr^n}{1-r^{2n}}\frac{(1+r^n)^{\gamma}}{(1-a)(1+r^n)^{\gamma}+a(1-r^n)^{\gamma}}\,.$$

Оценка (10) вытекает из левой оценки (8) и оценки (9) с учетом неравенства

$$\left|\operatorname{Re}\left(z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right)\right|\le\left|z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right|\le M\left(r^n;a,\gamma\right).$$

Точность левой и правой оценок (8) следует из того, что для функции $\varphi(z)=\varphi_0(z^n)$, где φ_0 из (5), знаки равенства достигаются соответственно в точках $z=\sqrt[n]{-1}\,r$ и $z=r$. Точность оценок (9)–(10) следует из того, что для функции $\varphi(z)=\varphi_0(z^n)$ в силу (13)

$$z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}=\frac{2\gamma(1-a)nz^n}{1-z^{2n}}\frac{(1-z^n)^{\gamma}}{(1-a)(1-z^n)^{\gamma}+a(1+z^n)^{\gamma}}\,,$$

и в точке $z=\sqrt[n]{-1}\,r$ имеем $z\varphi'(z)/\varphi(z)=-M(r^n;a,\gamma)$.

Терема 1 доказана.

Следствие 1. *Пусть функция* $\varphi\in\mathcal{A}_n(a,\gamma)$ *и удовлетворяет условию*

$$\left|\varphi(z)-\frac{1}{2a}\right|<\frac{1}{2a},\ 0<a<1,\ z\in E\,. \qquad (17)$$

Тогда при $|z|=r<1$ *имеют место оценки*

$$\frac{1-r^n}{1+(1-2a)r^n}\le\operatorname{Re}\varphi(z)\le|\varphi(z)|\le\frac{1+r^n}{1-(1-2a)r^n}\,, \qquad (18)$$

$$\left|z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right|\le\frac{2(1-a)nr^n}{1-r^n}\frac{1}{1+(1-2a)r^n}\,. \qquad (19)$$

Оценки точные и достигаются для функции $\varphi(z)=\varphi_0(z^n)$, *где*

$$\varphi_0(z)=(1+z^n)/(1-\left(1-2a\right)z^n).$$

Доказательство. Положим в теореме 1 $\gamma=1$. Тогда условие (4) преобразуется в условие $\operatorname{Re}\varphi^{-1}(z)>a$ или (17), а луночка преобразуется в круг с центром в точке $1/(2a)$ радиуса $1/(2a)$. Поэтому все утверждения следствия 1 вытекают из теоремы 1.

При $n=1$ оценки (18)–(19) с учетом обозначений $c=1/(2a)$ получены в [4], а при $n\ge1$ – в статье [5]. Кроме того, случаи $a\to0$ ($\operatorname{Re}\varphi(z)>0$) и $a=1/2$ ($|\varphi(z)-1|<1$) условия (17) приводят к оценкам из [1–3].

Учитывая, что $\arg\varphi^{-1}(z) = -\arg\varphi(z)$, при $a \to 0$ из теоремы 1 получаем

Следствие 2. *Пусть функция* $\varphi \in \mathcal{A}_n$ *и удовлетворяет условию* $|\arg\varphi(z)| \le \gamma\pi/2$. *Тогда при* $|z| = r < 1$ *имеют место точные оценки*

$$\left(\frac{1-r^n}{1+r^n}\right)^{\gamma} \le \operatorname{Re}\varphi(z) \le |\varphi(z)| \le \left(\frac{1+r^n}{1-r^n}\right)^{\gamma}, \qquad \left|z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right| \le \frac{2\gamma n r^n}{1-r^{2n}}.$$

Экстремальная функция имеет вид: $\varphi(z) = ((1+z^n)/(1-z^n))^{\gamma}$.

Наряду с классом $\mathcal{A}_n(a,\gamma)$ введем класс $\widehat{\mathcal{A}}_n(a,\gamma)$ функций φ с разложением вида $\varphi(z) = 1 + c_n z^n + c_{n+1}z^{n+1} + \ldots$, $n \ge 1$, удовлетворяющих условию

$$|\arg(\varphi(z)-a)| < \gamma\pi/2,\ 0<\gamma\le 1,\ 0 \le a < 1,\ z \in E .$$

Между классами $\mathcal{A}_n(a,\gamma)$ и $\widehat{\mathcal{A}}_n(a,\gamma)$ имеется простая связь, выраженная соотношением

$$\varphi(z) \in \widehat{\mathcal{A}}_n(a,\gamma) \Leftrightarrow \ \psi(z) = \frac{1}{\varphi(-z)} \in \mathcal{A}_n(a,\gamma) .$$

При этом, $z\varphi'(z)/\varphi(z) = \zeta\psi'(\zeta)/\psi(\zeta)$, $\zeta = -z$. В силу этого прямым следствием теоремы 1 является

Следствие 3. *Пусть* $\varphi \in \widehat{\mathcal{A}}_n(a,\gamma)$ *и* $M(r;a,\gamma)$ *определено по формуле* (11). *Тогда при* $|z| = r < 1$ *имеют место точные оценки*

$$(1-a)\left(\frac{1-r^n}{1+r^n}\right)^{\gamma} + a \le \operatorname{Re}\varphi(z) \le |\varphi(z)| \le (1-a)\left(\frac{1+r^n}{1-r^n}\right)^{\gamma} + a,$$

$$\left|z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right| \le M(r^n;a,\gamma)$$

и для любых $\mu, \eta \ge 0$

$$\mu\operatorname{Re}\varphi(z) + \eta\operatorname{Re}\left(z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right) \le \mu\left((1-a)\left(\frac{1+r^n}{1-r^n}\right)^{\gamma} + a\right) + \eta M(r^n;a,\gamma) .$$

Экстремальная функция имеет вид $\varphi(z) = \varphi_0(z^n)$, *где*

$$\varphi_0(z) = (1-a)\left((1+z)/(1-z)\right)^{\gamma} + a.$$

При $\gamma = 1$, $n \ge 1$, т.е. для случая, когда $\operatorname{Re}\varphi(z) > a$, $0 \le a < 1$, следствие 3 приводит к результатам из [6], а при $a = 0$ – к результатам из [2]. При $\gamma = 1$, $n = 1$ получаем оценки из [18–20].

4. Радиусы звездообразности некоторых классов аналитических функций

Пусть S^* – класс функций $f \in \mathcal{N}$, звездообразных в круге E, и пусть $S_n^*(c,R) \subset S^*$ – класс звездообразных функций $f \in \mathcal{N}_n$ Якубовского [21], удовлетворяющих условию

$$\left| z\frac{f'(z)}{f(z)} - c \right| < R\,,\; z \in E\,,$$

причем $c, R \in \mathbf{R}$, $|c-1| < R \le c$.

Нетрудно установить, что $f \in S_n^*(a,b)$ тогда и только тогда, когда $f \in \mathcal{N}_n$ и выполняется условие

$$\varphi(z) = z\frac{f'(z)}{f(z)} \prec \psi_0(z) = \frac{R+(R^2-c^2+c)z}{R+(1-c)z}\,. \tag{20}$$

Если $c - R = \alpha - const$ и $R \to +\infty$, то получаем класс $S^*(\alpha) \subset S^*$ функций, удовлетворяющих условию $\mathrm{Re}\left(z\dfrac{f'(z)}{f(z)} \right) > \alpha$, $0 \le \alpha < 1$, $z \in E$, и называемых звездообразными порядка α. Очевидно, что $S^*(\alpha) \subset S^*(0) = S^*$.

Если функция $g \in S^*$, то функция $f \in \mathcal{N}$, связанная с g некоторым неравенством, содержащим отношение $f(z)/g(z)$, называется почти звездообразной функцией. Если же в отношении $f(z)/g(z)$ функция g сама является почти звездообразной, то функцию f называют дважды почти звездообразной функцией.

Определение 2. *Будем считать, что функция f из $\mathcal{N}_n$ принадлежит классу $CCS_n^*\left(a,\gamma,b,\delta,c,R\right)$ дважды почти звездообразных функций тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$\frac{f(z)}{g(z)} \in \mathcal{A}_n\left(a,\gamma\right),\; \frac{g(z)}{h(z)} \in \mathcal{A}_n\left(b,\delta\right),\ \textit{где функция}\ h \in S_n^*(c,R)\,.$$

Теорема 2. *Пусть функция $M(r;a,\gamma)$ определена по формуле* (11) *и* $M_1(r;c,R) = \dfrac{R-(R^2-c^2+c)r}{R-(1-c)r}$. *Тогда радиус звездообразности $r^*(\alpha)$ порядка α класса $CCS_n^*\left(a,\gamma,b,\delta,c,R\right)$ определяется как единственный на* $(0;1)$ *корень уравнения*

$$M_1(r^n;c,R) - M(r^n;a,\gamma) - M(r^n;b,\delta) - \alpha = 0\,. \tag{21}$$

Доказательство. Обозначим $\varphi(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$, $\psi(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$. Тогда $z\dfrac{f'(z)}{f(z)} = z\dfrac{h'(z)}{h(z)} + z\dfrac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} + z\dfrac{\psi'(z)}{\psi(z)}$. Поэтому в круге $|z| \le r$, $0 \le r < 1$, получаем

$$\mathrm{Re}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)} \right) \ge \min_{|z|\le r} \mathrm{Re}\left(z\frac{h'(z)}{h(z)} \right) - \max_{|z|\le r}\left| z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| - \max_{|z|\le r}\left| z\frac{\psi'(z)}{\psi(z)} \right|.$$

Поскольку $h \in S_n^*(c,R)$, то в силу подчиненности (20) в круге $|z| \le r$ имеет место оценка

$$\mathrm{Re}\left(z\frac{h'(z)}{h(z)} \right) \ge \min_{|z|\le r^n} \mathrm{Re}\,\psi_0(z) = \psi_0(-r^n) = M_1(r^n;c,R)\,.$$

В силу этого и оценки (9), примененной к функциям $\varphi \in \mathcal{A}_n(a,\gamma)$ и $\psi \in \mathcal{A}_n(b,\delta)$, находим

$$\operatorname{Re}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right) \ge M_1(r^n;c,R) - M(r^n;a,\gamma) - M(r^n;b,\delta) .$$

Если $r = r^*(\alpha)$ является корнем уравнения (21), то из последнего неравенства следует, что $\operatorname{Re}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right) \ge \alpha$, то есть $f(z)$ является звездообразной порядка α в круге $|z| \le r^*(\alpha)$.

Средствами дифференциального исчисления нетрудно установить, что функции $M(r^n;a,\gamma)$, $M(r^n;b,\delta)$ возрастают по r на [0;1) от 0 до $+\infty$, а функция $M_1(r^n;c,R)$ убывает на [0;1] от $M_1(0;c,R) = 1$ до $M_1(1;c,R) = c - R \in [0;1]$. Поэтому уравнение (21) на (0;1) имеет единственный корень $r^*(\alpha)$.

Покажем, что радиус звездообразности $r^*(\alpha)$ является точным. Для этого рассмотрим функцию $f_0(z) = h_0(z)\varphi_0(z^n)\psi_0(z^n)$, где

$$\varphi_0(z) = \frac{(1+z)^\gamma}{(1-a)(1-z)^\gamma + a(1+z)^\gamma}, \quad \psi_0(z) = \frac{(1+z)^\delta}{(1-b)(1-z)^\delta + b(1+z)^\delta},$$

а функция h_0 определяется из уравнения

$$z\frac{h_0'(z)}{h_0(z)} = \frac{R + (R^2 - c^2 + c)z^n}{R + (1-c)z^n} .$$

Тогда, обозначив $g_0(z) = h_0(z)\psi_0(z^n)$, получаем, что $\dfrac{f_0(z)}{g_0(z)} = \varphi_0(z^n) \in \mathcal{A}_n(a,\gamma)$, $\dfrac{g_0(z)}{h_0(z)} = \psi_0(z^n) \in \mathcal{A}_n(b,\delta)$, где $h_0 \in S_n^*(c,R)$. Тогда $f_0 \in CCS_n^*\left(a,\gamma,b,\delta,c,R\right)$ и

$$z\frac{f_0'(z)}{f_0(z)} = \frac{R + (R^2 - c^2 + c)z^n}{R + (1-c)z^n} + nz^n\frac{\varphi_0'(z^n)}{\varphi_0(z^n)} + nz^n\frac{\psi_0'(z^n)}{\psi_0(z^n)},$$

где

$$nz^n\frac{\varphi_0'(z^n)}{\varphi_0(z^n)} = \frac{2\gamma(1-a)nz^n}{1-z^{2n}}\frac{(1-z^n)^\gamma}{(1-a)(1-z^n)^\gamma + a(1+z^n)^\gamma},$$

$$nz^n\frac{\psi_0'(z^n)}{\psi_0(z^n)} = \frac{2\delta(1-b)nz^n}{1-z^{2n}}\frac{(1-z^n)^\delta}{(1-b)(1-z^n)^\delta + b(1+z^n)^\delta}.$$

Поэтому в точке $z = \sqrt[n]{-1}\,r$, где $r = r^*(\alpha)$ – корень уравнения (21), имеем

$$\operatorname{Re}\left(z\frac{f_0'(z)}{f_0(z)}\right)\Bigg|_{z=\sqrt[n]{-1}r} = M_1(r^n;c,R) - M(r^n;a,\gamma) - M(r^n;b,\delta) = \alpha.$$

Следовательно, радиус звездообразности порядка α увеличить нельзя. Теорема 2 доказана.

Отметим, что при $\delta \to 0$ условие $\dfrac{g(z)}{h(z)} \in \mathcal{A}_n(b,\delta)$ становится тривиальным и приводит к тождеству $g(z) \equiv h(z)$. В этом случае класс $CCS_n^*\left(a,\gamma,b,\delta,c,R\right)$ преобразуется в класс почти звездообразных функций

$$CS_n^*\left(a,\gamma,c,R\right) = \left\{ f \in \mathcal{N}_n : \frac{f(z)}{h(z)} \in \mathcal{A}_n(a,\gamma),\ h(z) \in S_n^*(c,R) \right\}$$

и в теореме 2 выражение $M(r^n;b,\delta) = 0$.

Кроме того, при $\gamma = 1$, $a \to 0$ условие $\dfrac{f(z)}{g(z)} \in \mathcal{A}_n(a,\gamma)$ преобразуется в неравенство $\mathrm{Re}\dfrac{f(z)}{g(z)} > 0$, при $\gamma = 1$, $a = 1/2$ условие $\dfrac{f(z)}{g(z)} \in \mathcal{A}_n(a,\gamma)$ преобразуется в неравенство $\left|\dfrac{f(z)}{g(z)} - 1\right| < 1$, а при $\delta = 1$, $b \to 0$ условие $\dfrac{g(z)}{h(z)} \in \mathcal{A}_n(b,\delta)$ – в неравенство $\mathrm{Re}\dfrac{g(z)}{h(z)} > 0$. С учетом этого, если в теореме 2 положить: 1) $\gamma = 1$, $a \to 0$, $\delta = 1$, $b \to 0$, или 2) $\gamma = 1$, $a = 1/2$, $\delta = 1$, $b \to 0$ или 3) $\gamma = 1$, $a \to 0$, $\delta \to 0$, то получаем

Следствие 4. *Пусть* $f \in \mathcal{N}_n$ *и* $h \in S_n^*(c,R)$. *Тогда радиус звездообразности* $r^*(\alpha)$ *порядка* α *функции* f *определяется как единственный на* $(0;1)$ *корень уравнения*:

1) $\dfrac{R-(R^2-c^2+c)r^n}{R-(1-c)r^n} - \dfrac{4nr^n}{1-r^{2n}} - \alpha = 0$, *если* $\mathrm{Re}\dfrac{f(z)}{g(z)} > 0$ *и* $\mathrm{Re}\dfrac{g(z)}{h(z)} > 0$;

2) $\dfrac{R-(R^2-c^2+c)r^n}{R-(1-c)r^n} - \dfrac{nr^n(3+r^n)}{1-r^{2n}} - \alpha = 0$, *если* $\left|\dfrac{f(z)}{g(z)} - 1\right| < 1$ *и* $\mathrm{Re}\dfrac{g(z)}{h(z)} > 0$;

3) $\dfrac{R-(R^2-c^2+c)r^n}{R-(1-c)r^n} - \dfrac{2nr^n}{1-r^{2n}} - \alpha = 0$, *если* $\mathrm{Re}\dfrac{f(z)}{h(z)} > 0$.

При определенных значениях *c* и *R*, т.е. при конкретизации функции $h \in S_n^*(c,R)$, следствие 4 дает ряд известных классов функций $f \in \mathcal{N}$, описанным в статьях [3, 8–11].

Пусть $n = 1$.

Случай 1. $c = R$, $R \to \infty$. Тогда $\psi_0(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$, $h(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ и получаем классы

$\mathcal{F}_4 = \left\{ f : \mathrm{Re}\left(\dfrac{(1-z)^2}{z} f(z) \right) > 0 \right\}$ из [9] и $\Pi_1 = \left\{ f : \mathrm{Re}\dfrac{f(z)}{g(z)} > 0,\ \mathrm{Re}\left(\dfrac{(1-z)^2}{z} g(z) \right) > 0 \right\}$,

$\Pi_2 = \left\{ f : \left| \dfrac{f(z)}{g(z)} - 1 \right| < 1,\ \mathrm{Re}\left(\dfrac{(1-z)^2}{z} g(z) \right) > 0 \right\}$ из [8].

Случай 2. $c-R=\dfrac{1}{2}$, $R\to\infty$. Тогда $\psi_0(z)=\dfrac{1}{1-z}$, $h(z)=\dfrac{z}{1-z}$ и получаем классы $\mathcal{F}_1=\left\{f:\ \operatorname{Re}\dfrac{f(z)}{g(z)}>0,\ \operatorname{Re}\left(\dfrac{1-z}{z}g(z)\right)>0\right\}$, $\mathcal{F}_2=\left\{f:\ \left|\dfrac{f(z)}{g(z)}-1\right|<1,\ \operatorname{Re}\left(\dfrac{1-z}{z}g(z)\right)>0\right\}$,

$\mathcal{F}_3=\left\{f:\operatorname{Re}\left(\dfrac{1-z}{z}f(z)\right)>0\right\}$ из [9].

Случай 3. $R^2-c^2+c=2(1-c)$, $0<c\le 1$, т.е. $R^2=(1-c)(2-c)\ge 0$. Тогда $\psi_0(z)=\dfrac{R+2(1-c)z}{R+(1-c)z}$ и $h(z)=z+\dfrac{1-c}{R}z^2$. Пусть $0\le\dfrac{1-c}{R}\le\dfrac{1}{2}$. Тогда $\operatorname{Re}\left(z\dfrac{h'(z)}{h(z)}\right)\ge\min\limits_{|z|<1}\operatorname{Re}\psi_0(z)=\psi_0(-1)=\dfrac{R+2(1-c)}{R+(1-c)}\ge 0$ и поэтому $h(z)=z+\dfrac{1-c}{R}z^2\in S^*$.

Если $\dfrac{1-c}{R}=\dfrac{1}{2}$, то $\psi_0(z)=\dfrac{1+z}{1+z/2}$ и $h(z)=z+\dfrac{z^2}{2}$. В этом случае получаем классы из [10] $\mathcal{F}_1=\left\{f:\operatorname{Re}\dfrac{f(z)}{g(z)}>0,\operatorname{Re}\dfrac{g(z)}{z+\dfrac{z^2}{2}}>0\right\}$, $\mathcal{F}_2=\left\{f:\left|\dfrac{f(z)}{g(z)}-1\right|<1,\ \operatorname{Re}\dfrac{g(z)}{z+\dfrac{z^2}{2}}>0\right\}$,

$\mathcal{F}_3=\left\{f:\operatorname{Re}\dfrac{g(z)}{z+\dfrac{z^2}{2}}>0\right\}$.

Если $c=1$, то $\psi_0(z)\equiv 1$ и $h(z)=z$. В этом случае получаем классы из [11] $\mathcal{F}_1=\left\{f:\operatorname{Re}\dfrac{f(z)}{g(z)}>0,\ \operatorname{Re}\dfrac{g(z)}{z}>0\right\}$, $\mathcal{F}_3=\left\{f:\left|\dfrac{f(z)}{g(z)}-1\right|<1,\ \operatorname{Re}\dfrac{g(z)}{z}>0\right\}$.

Для каждого из классов, приведенных выше, радиусы звездообразности порядка α, полученные в статьях [3, 8–11], являются частными случаями радиуса $r^*(\alpha)$ из следствия 4.

Пусть $n=2$. Положим $c=R$, $R\to\infty$. Тогда $\psi_0(z)=\dfrac{1+z^2}{1-z^2}$, $h(z)=\dfrac{z}{1-z^2}$ и получаем классы

$$\mathcal{K}_1=\left\{f:\ \operatorname{Re}\frac{f(z)}{g(z)}>0,\operatorname{Re}\left(\frac{(1-z^2)f(z)}{z}\right)>0\right\},$$

$$\mathcal{K}_2=\left\{f:\ \left|\frac{f(z)}{g(z)}-1\right|\le 1,\ \operatorname{Re}\left(\frac{(1-z^2)f(z)}{z}\right)>0\right\},\ \mathcal{K}_3=\left\{f:\ \operatorname{Re}\left(\frac{(1-z^2)f(z)}{z}\right)>0\right\},$$

исследованные в [12] для случая, когда $f\in\mathcal{N}$. При $n=2$, $c=R$, $R\to\infty$ из следствия 4 получаем радиусы звездообразности порядка α классов $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}_3$, уточняющие результаты из [4] на случай, когда $f''(0)=0$. То есть если $f\in\mathcal{N}_2$, то

$$r^*(\alpha,\ \mathcal{K}_1)=\left(\frac{2(1-\alpha)}{5+\sqrt{21+4\alpha^2}}\right)^{1/2},\ r^*(\alpha,\ \mathcal{K}_2)=\left(\frac{1-\alpha}{4+\sqrt{17-2\alpha+\alpha^2}}\right)^{1/2},$$

$$r^*(\alpha,\ \mathcal{K}_3)=\left(\frac{1-\alpha}{3+\sqrt{8+\alpha^2}}\right)^{1/2}.$$

Список источников

1. *MacGregor T.H.* Functions whose derivative has a positive real part // Trans. Amer. Math. Soc. 1962. V. 104. P. 532–537. doi: 10.1090/s0002-9947-1962-0140674-7
2. *MacGregor T.H.* The radius of univalence of certain analytic functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1963. V. 14, P. 514–520.
3. *MacGregor T.H.* The radius of univalence of certain analytic functions, II // Proc. Am. Math. Soc. 1963. V. 14. P. 521–524. doi: 10.1090/s0002-9939-1963-0148892-5
4. *Goel R.M.* A class of close-to-convex functions // Czechoslovak Math. J. 1968. V. 18 (93). P. 104–116. doi: 10.21136/CMJ.1968.100815
5. *Shaffer D.B.* Distortion theorems for a special class of analytic functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1973. V. 39 (2). P. 281–287. doi: 10.2307/2039632
6. *Shah G.M.* On the univalence of some analytic functions // Pacific J. Math. 1972. V. 43 (1). P. 239–250. doi: 10.2140/pjm.1972.43.239
7. *Anh V.V., Tuan P.D.* Extremal problems for a class of functions of positive real part and applications // Austral. Math. Soc. (Series A). 1986. V. 41. P. 152–164. doi: 10.1017/S1446788700033577
8. *El-Faqeer A.S.A., Mohd M.H., Ravichandran V., Supramaniam S.* Starlikeness of certain analytic functions // arXiv preprint. arXiv:2006.11734. 2020. doi 10.48550/arXiv.2006.11734. URL: https://arxiv.org/abs/2006.11734
9. *Sebastian A., Ravichandran V.* Radius of starlikeness of certain analytic functions // Math. Slovaca. 2021. V. 71 (1). P. 83–104. doi: 10.1515/ms-2017-0454
10. *Kanaga R., Ravichandran V.* Starlikeness for certain close-to-star functions // Hacet. J. Math. Stat. 2021. V. 50 (2). P. 414–432. doi: 10.15672/hujms.702703
11. *Ali R.M., Jain N.K., Ravichandran V.* On the radius constants for classes of analytic functions // arXiv preprint. arXiv:1207.4529v1 [math.CV]. 2012. doi: 10.48550/arXiv.1207.4529. URL: https://arxiv.org/abs/1207.4529
12. *Khatter K., Lee S.K., Ravichandran V.* Radius of starlikeness for classes of analytic functions // arXiv preprint. arXiv: 2006.11744. 2020. doi: 10.48550/arXiv.2006.11744. URL: https://arxiv.org/abs/2006.11744
13. *Rosihan M.A., Ravichandran V., Sharma K.* Starlikeness of analytic functions with subordinate ratios // Hindawi J. of Math. 2021. V. 2021. Art. 8373209. P. 1–8. doi: 10.1155/2021/8373209
14. *Майер Ф.Ф., Тастанов М.Г., Утемисова А.А., Ысмағұл Р.С.* Точные оценки регулярных функций и радиусы выпуклости и звездообразности некоторых классов звездообразных и почти звездообразных функций // Вестник Казахстанско-Британского технического университета. 2024. Т. 21, № 2. С. 127–138. doi: 10.55452/1998-6688-2024-21-2-127-138
15. *Митюк И.П.* Оценки в некоторых классах аналитических функций // Метрические вопросы теории функций. Киев: Наукова думка, 1980. С. 90–99.
16. *Haegi H.R.* Extremalprobleme und Ungleichungen konformer Gebietsgrößen // Compositio Mathematics. 1951. V. 8. P. 81–111.
17. *Полиа Г., Сегё Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962. 336 с.
18. *Shaffer D.B.* On bounds for the derivative of analytic functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1973. V. 37. P. 517–520.

19. *McCarty C.P*. Functions with real part greater than α // Proc. Amer. Math. Soc. 1972. V. 35. P. 211–216.
20. *Libera R.J.* Some radius of convexity problems // Duke Math. J. 1964. V. 31. P. 143–158.
21. *Jakubowski Z.J.* On the coefficients of star-like functions of some classes // Ann. Polon. Math. 1972. V. 26/ P. 305–313.

References

1. MacGregor T.H. (1962) Functions whose derivative has a positive real part. *Transactions of the American Mathematical Society*. 104. pp. 532–537. DOI: 10.1090/s0002-9947-1962-0140674-7.
2. MacGregor T.H. (1963) The radius of univalence of certain analytic functions, *Proceedings of the American Mathematical Society*. 14. pp. 514–520.
3. MacGregor T.H. (1963) The radius of univalence of certain analytic functions, II. *Proc. Am. Math. Soc*. 14. pp. 521–524. doi: 10.1090/s0002-9939-1963-0148892-5
4. Goel R.M. (1968) A class of close-to-convex functions. *Czechoslovak Mathematical Journal*. 18(93). pp. 104–116. DOI: 10.21136/CMJ.1968.100815.
5. Shaffer D.B. (1973) Distortion theorems for a special class of analytic functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 39(2). pp. 281–287. DOI: 10.2307/2039632.
6. Shah G.M. (1972) On the univalence of some analytic functions. *Pacific Journal of Mathematics*. 43. pp. 239–250. DOI: 10.2140/pjm.1972.43.239.
7. Anh V.V., Tuan P.D. (1986) Extremal problems for a class of functions of positive real part and applications. *Journal of the Australian Mathematical Society. Series A*. 41. pp. 152–164. DOI: 10.1017/S1446788700033577.
8. El-Faqeer A.S.A., Mohd M.H., Ravichandran V., Supramaniam S. (2020) Starlikeness of certain analytic functions. *arXiv preprint arXiv:2006.11734, 2020 arxiv.org* DOI: 10.48550/arXiv.2006.11734.
9. Sebastian A., Ravichandran V. (2021) Radius of starlikeness of certain analytic functions. *Mathematica Slovaca*. 71(1). pp. 83–104. DOI: 10.1515/ms-2017-0454.
10. Kanaga R., Ravichandran V. (2021) Starlikeness for certain close-to-star functions. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*. 50(2). pp. 414–432. DOI: 10.15672/hujms.702703.
11. Ali R.M., Jain N.K., Ravichandran V. (2012) On the radius constants for classes of analytic functions. *arXiv:1207.4529v1 [math.CV] – 2012*. DOI: 10.48550/arXiv.1207.4529.
12. Khatter K., Lee S. K., Ravichandran V. (2020) Radius of starlikeness for classes of analytic functions. *arXiv preprint arXiv:2006.11744.* DOI: 10.48550/arXiv.2006.11744.
13. Rosihan M.A., Ravichandran V., Sharma K. (2021) Starlikeness of analytic functions with subordinate ratios. *Hindawi J. of Math*., Article ID 8373209. 2021, pp. 1-8. DOI: 10.1155/2021/8373209
14. Maiyer F.F., Tastanov M.G., Utemissova A.A., Ysmagul R.S. (2024) Tochnyye otsenki regulyarnykh funktsiy i radiusy vypuklosti i zvezdoobraznosti nekotorykh klassov zvezdoobraznykh i pochti zvezdoobraznykh funktsiy. [Exact estimates of regular functions and radii of convexity and starlikeness of some classes of starlike and close-to-starlike functions]. *Herald of the Kazakh-British technical university*. 21(2). pp. 127–138. DOI: 10.55452/1998-6688-2024-21-2-127-138.
15. Mityuk I.P. (1980) Otsenki v nekotorykh klassakh analiticheskikh funktsiy [Estimates in some classes of analytic functions]. *Metricheskiye voprosy teorii funktsiy*. Kiev: Naukova dumka.
16. Haegi H.R. (1951) Extremalprobleme und Ungleichungen konformer Gebietsgrößen. *Compositio Mathematics*. 8. pp. 81–111.
17. Pólya G., Szegő G. (1951) *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*. Princeton: Princeton University Press.
18. Shaffer D.B. (1973) On bounds for the derivative of analytic functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 37. pp. 517–520.

19. McCarty C.P. (1972) Functions with real part greater than α. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 35. pp. 211–216.
20. Libera R.J. (1964) Some radius of convexity problems. *Duke Mathematical Journal*. 31. pp. 143–158.
21. Jakubowski Z.J. (1972) On the coefficients of star-like functions of some classes. *Annales Polonici Mathematici*. 26. pp. 305–313.

***Сведения об авторах*:**
Майер Федор Федорович – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики и физики Костанайского регионального университета им. А. Байтурсынова (Костанай, Казахстан). E-mail: maiyer@mail.ru
Тастанов Мейрамбек Габдуалиевич – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики и физики Костанайского регионального университета им. А. Байтурсынова (Костанай, Казахстан). E-mail: tastao@mail.ru
Утемисова Анар Алтаевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и физики Костанайского регионального университета им. А. Байтурсынова (Костанай, Казахстан). E-mail: anar_utemisova@mail.ru

***Information about the authors*:**
Maiyer Fedor F. (Professor, Candidate of Physics and Mathematics, Kostanay Regional University named after A. Baitursynuly, Kostanay, Kazakhstan). E-mail: maiyer@mail.ru
Tastanov Meyrambek G. (Professor, Candidate of Physics and Mathematics, Kostanay Regional University named after A. Baitursynuly, Kostanay, Kazakhstan). E-mail: tastao@mail.ru
Utemissova Anar A. (Associate Professor, Candidate of Pedagogical Sciences, Kostanay Regional University named after A. Baitursynuly, Kostanay, Kazakhstan). E-mail: anar_utemisova@mail.ru

Статья поступила в редакцию 03.10.2024; принята к публикации 08.12.2025

The article was submitted 03.10.2024; accepted for publication 08.12.2025