ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2025 Математика и механика № 98
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Научная статья
УДК 512.54 MSC: 20F99
doi: 10.17223/19988621/98/4

Признак непростоты группы с конечным элементом

Владимир Иванович Сенашов

Институт вычислительного моделирования Сибирского отделения Российской академии наук, Красноярск, Россия, sen1112home@mail.ru

Аннотация. Изучаются бесконечные группы с условиями конечности для системы подгрупп. Доказано, что группа G без инволюций, не имеющая слойно конечной периодической части, с M-конечным элементом a простого порядка, где M – нормализатор максимальной слойно конечной подгруппы, содержащей периодическую часть группы $N_G(\langle a\rangle)$, в случае когда нормализатор любой конечной нетривиальной подгруппы обладает бесконечной слойно конечной периодической частью, имеет вид: $G = F \leftthreetimes N_G\langle a\rangle$, и $F \leftthreetimes \langle a\rangle = \langle a^G\rangle$ – группа Фробениуса с ядром F и дополнением $\langle a\rangle$.
Ключевые слова: слойно конечная группа, конечный элемент, условия конечности, признак непростоты, группа Фробениуса

Благодарности: Работа выполнена в рамках госзадания ИВМ СО РАН (базовый проект FWES-2024-0025). Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (соглашение № 075-02-2025-1790).

Для цитирования: Сенашов В.И. Признак непростоты группы с конечным элементом // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 98. С. 44–50. doi: 10.17223/19988621/98/4

Original article

A criterion of nonsimplicity of a group with a finite element

Vladimir I. Senashov

Institute of Computing Modelling of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Krasnoyarsk, Russian Federation, sen1112home@mail.ru

Abstract. Infinite groups with finiteness conditions traditionally include periodic groups and locally finite groups. Later, in the Krasnoyarsk school on infinite groups, new finiteness conditions for a system of subgroups appeared: conjugately biprimitive finite groups, weakly conjugately biprimitive finite groups, biprimitive finite groups, weakly biprimitive finite groups, introduced by V.P. Shunkov, in which subgroups generated by pairs of elements (pairs of conjugate elements, pairs of elements of the same order, pairs of such elements in sections of the group by finite subgroups) were assumed to be finite. Infinite groups with finiteness conditions for a system of subgroups include groups with a finite element, introduced by A.I. Sozutov. An element a of a group G is called a finite element if groups of the form $\langle a, g^{-1}ag\rangle$, $g \in G$, are finite. It is proved that the group G without

© В.И. Сенашов, 2025

involutions, not having a layer-finite periodic part, with M-finite element a of prime order, where M is the normalizer of a maximal layer-finite subgroup containing the periodic part of the group $N_G(\langle a\rangle)$, in the case when the normalizer of any finite non-trivial subgroup has an infinite layer-finite periodic part, has the form $G = F\lambda N_G(\langle a\rangle)$ and $F\lambda\langle a\rangle = \langle a^G\rangle$ is a Frobenius group with the kernel F and the complement $\langle a\rangle$.

Keywords: layer-finite group, finite element, finiteness conditions. sign of non-simplicity, Frobenius group

Acknowledgments: The work was performed in the framework of the state assignment of ICM SB RAS, project no. FWES-2024-0025. This work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement No. 075-02-2025-1790).

For citation: Senashov, V.I. (2025) A criterion of nonsimplicity of a group with a finite element. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 98. pp. 44–50. doi: 10.17223/19988621/98/4

Введение

Под условием конечности в теории групп понимается любое такое свойство, присущее всем конечным группам, что существуют бесконечные группы, которые этим свойствам не обладают. К бесконечным группам с условиями конечности традиционно относят периодические группы, локально конечные группы, локально нормальные группы, группы с конечными классами сопряженных элементов. Позднее в Красноярской школе по бесконечным группам появились новые классы групп с условиями конечности для системы подгрупп: сопряженно бипримитивно конечные группы, слабо сопряженно бипримитивно конечные группы, бипримитивно конечные группы, слабо бипримитивно конечные группы, введенные В.П. Шунковым [1], в которых конечными полагались подгруппы, порожденные парами элементов (парами сопряженных элементов, парами элементов одного порядка, парами таких элементов в сечениях группы по конечным подгруппам). К группам с такими условиями конечности относятся изучаемые нами группы с конечным элементом. Термин «конечный элемент» введен А.И. Созутовым в работе [2].

Напомним некоторые необходимые определения.

Элемент a группы G называется *конечным элементом*, если группы вида $\langle a, g^{-1}ag\rangle$, $g \in G$, конечны.

В произвольной периодической группе с инволюциями (элементами второго порядка) любая инволюция является конечным элементом, так как в периодической группе любые две инволюции порождают конечную подгруппу.

Элемент a группы G называется *H-конечным элементом*, если для некоторой подгруппы H группы G группы вида $\langle a, g^{-1}ag\rangle$ для $g \in G \setminus H$ конечны.

Если рассмотреть группу G, составляющую со своей собственной подгруппой H пару Фробениуса (G, H), и выбрать из H элемент a конечного порядка, отличного от двух такой, что группы вида $\langle a, g^{-1}ag\rangle$ конечны для $g \in G \setminus H$ (т.е. a – H-конечный элемент), то А.И. Созутовым доказано [3. Теорема 2.11], что тогда группа G имеет строение $G = F \leftthreetimes H$, где F – периодическая группа, и $F \leftthreetimes \langle a\rangle$ – группа Фробениуса с ядром F и дополнением $\langle a\rangle$.

Слойно конечная группа – это группа, множество элементов любого заданного порядка которой конечно.

Слойно конечными группами являются все конечные группы, прямые произведения конечного числа квазициклических примарных групп по одному простому числу и прямые произведения бесконечного числа примарных квазициклических групп по разным простым числам. Строение слойно конечных групп может быть достаточно сложным. Наиболее полное описание свойств таких групп можно найти в монографии С.Н. Черникова [4. Глава 3].

Почти слойно конечная группа – это расширение слойно конечной группы при помощи конечной группы.

Напомним, что группа называется *черниковской*, если она является конечным расширением абелевой группы, удовлетворяющей условию минимальности. Легко указать пример черниковской группы, не являющейся слойно конечной. Почти слойно конечные группы имеют существенно более сложное строение, чем слойно конечные группы. В таких группах могут быть бесконечные слои элементов одного и того же порядка. В класс почти слойно конечных групп входят все черниковские группы. Примером почти слойно конечной нечерниковской группы служит расширение прямого произведения бесконечного числа квазициклических групп по разным простым числам при помощи циклической группы порядка два, инволюция из которой инвертирует все элементы из прямого произведения. В этой группе все слои элементов конечны, за исключением слоя элементов, состоящего из элементов порядка два. Более подробно свойства почти слойно конечных групп представлены в монографии автора [5].

Группа G называется *группой Фробениуса* с дополнением H и ядром F, если F и H – такие ее собственные подгруппы, что

1) $H \cap H^g = 1$ для любого элемента $g \in G \setminus H$;

2) $F = G \setminus \cup_{x \in G} (H \setminus \{1\})^x$;

3) $G = F \leftthreetimes H$.

Группа G и ее собственная подгруппа H называются *парой Фробениуса* (G, H), если $H \cap H^g = 1$ для любого элемента $g \in G \setminus H$.

Пусть G – группа, H – ее собственная подгруппа, и a – нетривиальный элемент из H. Элемент a называется *циклически H-фробениусовым элементом* группы G, если для любого элемента a^g, где $g \in G \setminus H$, подгруппа $L_g = \langle a, g^{-1}ag \rangle$ – группа Фробениуса с дополнением $\langle a \rangle$.

Элемент второго порядка называется *инволюцией*.

Под *периодической частью* группы мы понимаем множество ее элементов конечного порядка, если последняя является группой [6].

В работе доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть G – группа без инволюций, не имеющая слойно конечной периодической части, с M-конечным элементом a простого порядка, где M – нормализатор максимальной слойно конечной подгруппы, содержащей периодическую часть группы $N_G(\langle a \rangle)$. Если нормализатор любой конечной нетривиальной подгруппы группы G обладает бесконечной слойно конечной периодической частью, то $G = F \leftthreetimes N_G\langle a \rangle$ и $F \leftthreetimes \langle a \rangle = \langle a \rangle$ – группа Фробениуса с ядром F и дополнением $\langle a \rangle$.*

Ранее автор изучал группы Шункова с нормализаторами конечных нетривиальных подгрупп, обладающими слойно конечной периодической частью. В частности, доказал, что такая группа обладает слойно конечной периодической частью при условии, что любая периодическая локально разрешимая подгруппа слойно конечна [7].

Напомним, что группа G называется *группой Шункова*, если для любого простого числа p и для любой конечной подгруппы H из G любые два сопряженных элемента порядка p из фактор-группы $N_G(H)/H$ порождают конечную подгруппу.

Группы Шункова ранее назывались *сопряженно бипримитивно конечными группами*.

Группа G называется *слабо сопряженной бипримитивно конечной группой,* если любая пара сопряженных элементов простого порядка порождает конечную подгруппу.

Очевидно, что группа является слабо сопряженной бипримитивно конечной тогда и только тогда, когда все элементы простых порядков в ней конечны.

Доказательство основного результата

Для начала приведем некоторые результаты, используемые при доказательстве основного результата, которые мы будем называть предложениями с соответствующим номером.

1. **Теорема В.П. Шункова** [8. Теорема 1]. Локально конечная группа G тогда и только тогда почти слойно конечна, когда G удовлетворяет условию: нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы группы G является почти слойно конечной группой.

2. **Теорема Г. Фробениуса** [9]. Если в конечной группе G существует подгруппа H, совпадающая со своим нормализатором и взаимно простая со всеми сопряженными подгруппами, за исключением H, то множество элементов из G, не принадлежащих H и ни одной из подгрупп, сопряженных с H, вместе с единицей является инвариантной подгруппой группы G.

3. Пусть $G = F\lambda H$ – конечная группа Фробениуса, где F – ядро, а H – дополнение. Если $G = \langle a, k\rangle, a \in H$ и $|a| = |k| = p$ – простое число, то подгруппы $\langle a\rangle$, $\langle k\rangle$ сопряжены в G, причем если H не содержит инволюций, то $H = \langle a\rangle$ и $\langle k\rangle = \langle a^b\rangle$ для некоторого элемента $b \in F$ [3. Предложение 1.9].

4. **Теорема** [3. Теорема 3.1]. Пусть H – собственная подгруппа группы G, a – циклически H-фробениусовый элемент группы G и $a^2 \neq 1$. Тогда $G = F \rtimes N_G\langle a\rangle$ и $F \rtimes \langle a\rangle = \langle a^G\rangle$ – группа Фробениуса с ядром F и дополнением $\langle a\rangle$.

5. **Теорема С.Н. Черникова** [10]. Если локально конечная p-группа G содержит лишь конечное множество элементов какого-нибудь порядка, отличного от единицы, то она является черниковской p-группой.

6. В произвольной группе всякая подгруппа конечного индекса в группе обладает нормальной подгруппой в группе и конечного индекса в ней [11. С. 69].

7. **Теорема В.П. Шункова** [12. Предложение 8]. Пусть T – группа, D – ее локально конечная подгруппа с черниковскими примарными подгруппами; A, C – некоторые подгруппы из T.

Если D обладает такими подгруппами F, R ($R \leq F$), что индекс $| D : R |$ конечен и $A, D < N_T(F)$; $C, D < N_T(R)$, то в D существует подгруппа X конечного индекса в D и $A, C, D < N_T(X)$.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы.

Предположим, что G – группа без инволюций, не имеющая слойно конечной периодической части, и для любой нетривиальной конечной подгруппы X группы G ее нормализатор $N_G(X)$ обладает бесконечной слойно конечной периодической частью.

Любая локально конечная подгруппа группы G является слойно конечной группой.

Действительно, как следует из предложения 1, любая локально конечная подгруппа L группы G является почти слойно конечной. Тогда группа L содержит конечную нетривиальную нормальную подгруппу, и, следовательно, по условиям, наложенным на группу G, группа L является слойно конечной.

Любая слойно конечная подгруппа C группы G содержится в максимальной слойно конечной подгруппе группы G.

Действительно, пусть $C < H_1 < \ldots < H_n < \ldots$ – цепочка слойно конечных подгрупп группы G, содержащих C. Тогда объединение V этой цепи является локально конечной группой, а потому, как мы показали выше, она является слойно конечной подгруппой из группы G. Используя лемму Цорна, заключаем, что подгруппа C содержится в максимальной слойно конечной подгруппе группы G.

Пусть F, K – две различные бесконечные максимальные слойно конечные подгруппы группы G. Тогда F, K пересекаются по единичной подгруппе.

Для доказательства этого утверждения заметим, что в любой локально конечной подгруппе группы G по предложению 5 примарные подгруппы черниковские.

Теперь предположим противное. Пусть некоторый неединичный элемент $b \in F \cap K$. Если пересечение $F \cap K$ имеет конечные индексы в подгруппах F и K, то по предложению 6 $F \cap K$ содержит подгруппу X_F, нормальную и конечного индекса в группе F. В свою очередь, группа X_F снова по предложению 6 содержит подгруппу X_K, нормальную и конечного индекса в группе K.

По предложению 7 локально конечная подгруппа $F \cap K$ с черниковскими примарными подгруппами содержит подгруппу X нормальную конечного индекса в F и в K. По условиям теоремы получаем противоречие с максимальностью F (по лемме Дицмана в слойно конечной группе X всегда найдется конечная характеристическая подгруппа).

Пусть тогда для одной из подгрупп, например для K, индекс $|K : K \cap F|$ бесконечен. Ввиду слойной конечности группы K в ней найдется подгруппа B такая, что $F \cap K = F \cap B$, $|B : F \cap B| < \infty$, и B содержит некоторый элемент из $K \setminus F$.

По предложению 6 $F \cap K$ содержит подгруппу Z_F, нормальную и конечного индекса в F. В свою очередь, Z_F снова по предложению 6 содержит подгруппу Z_B, нормальную и конечного индекса в B.

Снова по предложению 7 в локально конечной подгруппе $F \cap K$ с черниковскими примарными подгруппами существует подгруппа $Z \le B \cap F$, в нормализатор которой входят подгруппы F и B. Из-за максимальности подгруппы F получаем противоречие со слойной конечностью периодической части нормализатора $N_G(Z)$.

Таким образом, доказано, что различные бесконечные максимальные слойно конечные подгруппы группы G пересекаются по единичной подгруппе.

Обозначим через a M-конечный элемент простого порядка из группы G, где M – нормализатор максимальной слойно конечной подгруппы H, содержащей периодическую часть группы $N_G(\langle a\rangle)$. (Периодическая часть группы $N_G(\langle a\rangle)$ является бесконечной слойно конечной группой и, как показано выше, существует максимальная слойно конечная подгруппа H группы G, содержащая эту периодическую часть.) Периодическая часть группы $M = N_G(H)$ является слойно конечной группой, так как в слойно конечной группе H всегда найдется конечная характеристическая подгруппа, нормализатор которой по условиям теоремы обладает слойно конечной периодической частью. Заметим, что ввиду максимальности группы H периодическая часть группы M совпадает с группой H.

Пусть некоторый элемент g взят из разности $G \setminus M$. Поскольку подгруппы $H, g^{-1}Hg$ являются различными максимальными слойно конечными подгруппами группы G, то пересечение $H \cap g^{-1}Hg = 1$. Следовательно, пересечение $M \cap g^{-1}Mg$ не содержит нетривиальных элементов конечного порядка для любого элемента $g \in G \setminus M$. Тогда в конечной группе $\langle a, a^g\rangle$ (она конечна, поскольку a – M-конечный элемент группы G) собственная подгруппа $\langle a, a^g\rangle \cap H$ образует пару Фробениуса с $\langle a, a^g\rangle$, а сама группа $\langle a, a^g\rangle$ является группой Фробениуса по предложению 2.

По предложению 3 для любого элемента a^g, где $g \in G \setminus M$, подгруппа $L_g = \langle a, g^{-1}ag\rangle$ является группой Фробениуса с дополнением $\langle a\rangle$.

Таким образом, для собственной подгруппы M группы G элемент a является циклически M-фробениусовым элементом группы G.

Тогда по предложению 4 группа G имеет вид $G = F \leftthreetimes N_G\langle a\rangle$ и $F \leftthreetimes \langle a\rangle = \langle a^G\rangle$ – группа Фробениуса с ядром F и дополнением $\langle a\rangle$.

Теорема доказана.

Список источников

1. *Шунков В.П.* Об одном классе *p*-групп // Алгебра и логика. 1970. Т. 9, № 4. С. 484–496.
2. *Созутов А.И.* О группах с классом фробениусо-абелевых элементов // Алгебра и логика. 1995. Т. 34. С. 531–549.
3. *Попов А.М., Созутов А.И., Шунков В.П.* Группы с системами фробениусовых подгрупп. Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2004. 211 с.
4. *Черников С.Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. М.: Наука, 1980. 384 с.
5. *Сенашов В.И.* Почти слойно конечные группы. Saarbrucken: Lap Lambert Academic Pablishing, 2013. 106 с.
6. *Курош А.Г.* Теория групп. М.: Наука, 1967. 648 с.
7. *Сенашов В.И.* Группы со слойно конечной периодической частью // Сибирский математический журнал. 1997. Т. 38. С. 1374–1386.
8. *Сенашов В.И., Шунков В.П.* Почти слойная конечность периодической части группы без инволюций // Дискретная математика. 2003. Т. 15. С. 91–104.
9. *Frobenius G.* Über auflösbare Gruppen. IV // Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1901. S. 1216–1230.
10. *Черников С.Н.* О специальных *p*-группах // Математический сборник. 1950. Т. 27. С. 185–200.
11. *Шунков В.П.* О вложении примарных элементов в группе. Новосибирск: Наука, Сиб. изд. фирма, 1992. 133 с.
12. *Шунков В.П.* О локально конечных группах конечного ранга // Алгебра и логика. 1971. Т. 10. С. 199–225.

References

1. Shunkov V.P. (1970) On a class of *p*-groups. *Algebra and Logic*. 9(4). pp. 291–297.
2. Sozutov A.I. (1995) On groups with a class of Frobenius-Abelian elements. *Algebra and Logic*. 34(5). pp. 295–305.
3. Popov A.M., Sozutov A.I., Shunkov V.P. (2004) *Gruppy s sistemami podgrupp Frobeniusa* [Groups with systems of Frobenius subgroups]. Krasnoyarsk: Krasnoyarsk State Technical University.
4. Chernikov, S.N. (1980) *Gruppy s zadannymi svoystvami sistemy podgrupp* [Groups with Given Properties of a System of Subgroups]. Moscow: Nauka.
5. Senashov, V.I. (2013) *Pochti sloyno konechnyye gruppy* [Almost Layer-Finite Groups]. Germany: Lap Lambert Academic Publishing.
6. Kurosh A.G. (1967) Teoriya grupp [Group Theory]. Moscow: Nauka.
7. Senashov V.I. (1997) Groups with layer-finite periodic part. *Siberian Mathematical Journal*. 38(6). pp. 1196–1205.
8. Senashov V.I., Shunkov V.P. (2003) Almost layer-finiteness of the periodic part of groups without involutions. *Discrete Mathematics and Applications*. 13(4). pp. 391–404.
9. Frobenius G. (1901) Über auflösbare Gruppen, IV. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*. pp. 1216–1230.
10. Chernikov S.N. (1950) On special *p*-groups. *Matematicheskiy Sbornik – Sbornik Mathematics*. 69(2). pp. 185–200.
11. Shunkov V.P. (1992) *O vlozhenii primarnykh elementov v gruppu* [On embedding of primary elements in a group]. Novosibirsk: Nauka.
12. Shunkov V.P. (1971) On locally finite groups of finite rank. *Algebra and Logic*. 10(2). pp. 127–142.

***Сведения об авторе*:**
Сенашов Владимир Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института вычислительного моделирования Сибирского отделения Российской академии наук (Красноярск, Россия). E-mail: sen1112home@mail.ru

***Information about the author*:**
Senashov Vladimir I. (Professor, Leader Researcher of the Institute of Computing Modelling of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Krasnoyarsk, Russian Federation). E-mail: sen1112home@mail.ru

Статья поступила в редакцию 24.02.2025; принята к публикации 08.12.2025

The article was submitted 24.02.2025; accepted for publication 08.12.2025