

## МЕХАНИКА

## MECHANICS

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/98/5

**Построение определяющих соотношений нелинейно-упругих  
сред с помощью механико-геометрической модели  
с диагональными связями**

**Даниил Анатольевич Азаров**

*Донской государственный технический университет,  
Ростов-на-Дону, Россия, danila\_az@mail.ru*

**Аннотация.** На основе механико-геометрической модели в виде параллелепипеда предлагаются новые определяющие соотношения для высокоэластичного сжимаемого материала. Механические свойства сплошной среды обеспечиваются составляющими элементами модели на этапе ее построения. Построены определяющие соотношения, связывающие инженерные напряжения с главными кратностями удлинений. Выведена функция удельной потенциальной энергии деформации сжимаемого нелинейно упругого материала. Получены формы функции энергии как для анизотропной, так и для изотропной сплошных сред. Построены графики функции энергии изотропной среды для трех случаев напряженно-деформированных состояний.

**Ключевые слова:** высокоэластичные материалы, определяющие соотношения, гиперупругость, удельная потенциальная энергия деформации, упругий потенциал, сплошная среда, механико-геометрическая модель, несжимаемость

**Благодарности:** Автор выражает благодарность доценту кафедры теории упругости Института механики, математики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета кандидату физико-математических наук А.М. Колесникову и заведующему лабораторией А.В. Попову за предоставленные результаты экспериментов.

**Для цитирования:** Азаров Д.А. Построение определяющих соотношений нелинейно-упругих сред с помощью механико-геометрической модели с диагональными связями // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 98. С. 51–61. doi: 10.17223/19988621/98/5

Original article

## Formulation of constitutive relations for nonlinear elastic media using a mechanical–geometric model with diagonal bonds

Daniil A. Azarov

*Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation, danila\_az@mail.ru*

**Abstract.** The formulation of constitutive relations for hyperelastic materials is one of the important problems of nonlinear mechanics. A new approach—the method of mechanical–geometric modeling—is proposed. This method makes it possible to derive constitutive relations for a nonlinear medium based on a chosen geometry of the model and specified mechanical parameters. The properties embedded in the model at the construction stage are subsequently transferred to the simulated continuum. This enables the formulation of a strain energy density function of the continuum corresponding to the selected model.

This paper presents an algorithm for such construction using the model in the form of a rectangular parallelepiped as a case study. The initial stages of the model development are described, such as the selection of geometry and mechanical parameters that determine the properties of the model. The explicit constitutive relations connecting the nominal (engineering) stresses with the principal elongation ratios are obtained. The strain energy density function is then derived for a compressible nonlinear elastic material in terms of a symmetric dependence on three principal elongation ratios. Forms of the energy function are presented for both anisotropic and isotropic elastic media. Graphs of the strain energy function for an isotropic medium are plotted for several stress–strain states, i.e., uniaxial, biaxial, and equibiaxial tension, under the incompressibility constraint. References are given to the articles describing other initial geometric shapes and mechanical parameters of the model, which lead to different types of strain energy density functions. Possible directions for the further development of the mechanical–geometric modeling method are outlined.

**Keywords:** hyperelastic materials, constitutive relations, hyperelasticity, strain energy density, elastic potential, continuous medium, mechanical-geometric model, incompressibility

**Acknowledgments:** The author expresses gratitude to Associate Professor of the Department of Elasticity Theory at the I.I. Vorovich Institute of Mechanics, Mathematics and Computer Sciences of the Southern Federal University, A.M. Kolesnikov, and to the Head of the Laboratory, A.V. Popov, for providing the experimental results.

**For citation:** Azarov, D.A. (2025) Formulation of constitutive relations for nonlinear elastic media using a mechanical–geometric model with diagonal bonds. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 98. pp. 51–61. doi: 10.17223/19988621/98/5

### Введение

Построение функции удельной потенциальной энергии деформации сплошной среды при больших деформациях – одна из важных задач нелинейной теории упругости.

Традиционно существует несколько способов построения потенциалов (удельной потенциальной энергии деформирования) нелинейно упругих тел. Начиная с середины XX в. основным способом является разложение функции энергии в ряд по степеням первого и второго инвариантов тензора деформации Коши-Грина  $\mathbf{G}$ .

Такому подходу дали начало работы Муни [1] и Ривлина [2], в которых впервые были предложены выражения для функции удельной потенциальной энергии деформации резин и каучуков. Впоследствии в этом направлении шли исследования Бидермана, Йео [3] и других авторов. Одновременно возникали формы потенциалов, основанные на выражении энергии через главные кратности удлинений  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Это обосновано тем, что главные кратности удлинений хорошо определяются по результатам простых экспериментов. Таковы, например, потенциалы Бартенева–Хазановича, Блэйтца и Ко [4], Черных–Шубиной, Огдена [5]. Затем появились и другие способы построения потенциалов, уже связанные с внутренней структурой и строением высокоэластичных тел. Это потенциалы Арруды–Бойс [6], Джента [7] и др. Существует также подход, основанный на моделировании экспериментальной кривой, например одноосного растяжения материала, с попыткой построить функцию, наиболее близко описывающую эту кривую. При этом каких бы то ни было физических и механических обоснований выбора, как правило, не приводится. В [8, 9] собран обзор основных потенциалов нелинейной теории упругости.

Вышперечисленные подходы обладают существенным недостатком: полученные в результате выражения могут не удовлетворять важным свойствам, присущим удельной потенциальной энергии, таким как, например, выпуклость или сильная эллиптичность.

Эти свойства приходится доказывать дополнительно, что в большинстве случаев трудно, если вообще возможно [10]. Невыполнение для функции удельной потенциальной энергии таких свойств может привести к определенным проблемам при моделировании нелинейных материалов, поскольку эти материалы могут не демонстрировать эффекты, возникающие в реальных телах, такие как потеря устойчивости, эффект Пойнтинга [11] и т.д. В случае же с механико-геометрической моделью большинство этих свойств выполняется для нее априори в силу того, что они присущи изначально составляющим модель элементам.

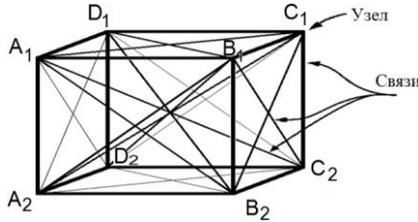
В предлагаемой работе по методике, аналогичной [12, 13], изложен другой возможный вариант геометрической формы модели – в виде прямоугольного параллелепипеда.

### Механико-геометрическое моделирование

Построение механико-геометрической модели состоит из нескольких этапов. На первом этапе задается геометрия модели. Рассмотрим элементарный объем сплошной среды совместно с механико-геометрической моделью (МГМ) в виде 3D графа, вершины которого – узлы модели – прикреплены к граням элементарного объема. При деформации элементарного объема под действием приложенной к нему по трем ортогональным направлениям системы сил происходит изменение его формы и будет изменяться взаимное расположение узлов МГМ. Модель позволяет связать изменение расстояний между узлами с приложенными внешними силами. В данной работе рассматривается расположение узлов в вершинах элементарного параллелепипеда. На рис. 1 узлы МГМ обозначены точками А, В, С, D. В работе [12] рассмотрена другая геометрия, когда узлы прикреплены к серединам граней элементарного объема.

Ребра графа рис. 1 будем называть связями модели. Связи соединяют узлы модели, которую можно представлять как стержневую фермоподобную конструкцию.

Сила, приложенная к узлу, передается на другие узлы только по направлениям связей, исходящих из этого узла. Узел модели может непосредственно взаимодействовать с другим узлом только при наличии связи между ними. Необходимым условием при этом должна быть односвязность (в смысле теории графов) модели. С точки зрения механики узлы модели являются шарнирами, через которые крутящий момент не передается.



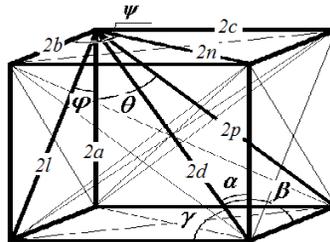
**Рис. 1.** Геометрия модели  
**Fig. 1.** Geometry of the model

Пространственный трехмерный характер новой модели является основополагающим. Это дает возможность непосредственно получить зависимости, описывающие функцию поперечной деформации (зависимость поперечных удлинений от продольного – нелинейный аналог коэффициента Пуассона).

В выбранной геометрии модели имеется 8 узлов, 12 «продольных» связей и 16 «диагональных» связей. Продольные связи направлены вдоль ребер параллелепипеда, т.е. соединяют противоположные грани, а диагональные связи соединяют остальные грани.

На втором этапе построения модели каждой связи придается определенное механическое свойство (способность деформироваться). Кроме рассмотренного ниже линейного закона упругости можно выбирать и нелинейные зависимости напряжения и деформации для отдельных связей, а также и неупругие случаи, такие как вязкость, пластичность или их сочетания. Потеря устойчивости связей, рассматриваемых как стержни (или пружины), при сжатии не рассматривается.

Для записи соотношений удобно ввести условные размеры (рис. 2): начальные длины связей, которые в определяющие соотношения войдут в виде отношений друг к другу. Основными изначально задаваемыми геометрическими параметрами являются длины продольных связей  $2a$ ,  $2b$ ,  $2c$ , через которые выражаются длины диагональных связей и все соответствующие углы между связями.



**Рис. 2.** Геометрические параметры МГМ: длины связей и углы  
**Fig. 2.** Geometric parameters of the mechanical–geometric model (MGM): lengths of bonds and angles

Диагонали граней параллелепипеда равны  $2l$ ,  $2n$  и  $2p$  и, а пространственная диагональ –  $2d$ . По ним рассчитываются  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  – углы между диагональю  $2d$  и продольными связями  $2a$ ,  $2b$ ,  $2c$ ,  $\varphi$  – угол между  $2a$  и  $2l$ ,  $\psi$  – угол между  $2b$  и  $2n$ , а  $\theta$  – угол между  $2a$  и  $2p$ . Значения длин связей не являются принципиальными, важно лишь их соотношение, т.е. углы между ними, задающие основную форму геометрии модели.

Рассмотрим деформацию элементарного объема с «заклоченной» в него конструкцией модели силами разной величины по трем ортогональным направлениям. Силы  $F_a$ ,  $F_b$  и  $F_c$  на каждой грани при трехосном растяжении–сжатии распределяются по узлам соответствующей грани:  $F_a/4$ ,  $F_b/4$  и  $F_c/4$ .

Составим уравнения равновесия внешних сил и реакций связей модели в каждом узле. Сила реакции каждой связи рассчитывается, исходя из постулируемых механических свойств, присущих этой связи. Как уже сказано выше, в данной работе принимается прямо-пропорциональная зависимость силы реакции связи  $R_i$  от удлинения этой же связи  $\Delta_i$ :

$$R_i = k_i \Delta_i$$

где параметр  $k_i$  – коэффициент жесткости (упругости) связи, индекс  $i$  обозначает соответствующую связь  $i = a, b, c, l, p, n, d$ .

### Построение определяющих соотношений

В уравнениях равновесия перейдем от зависимостей «сила–удлинение» к зависимостям в терминах «напряжение–деформация». Вместо абсолютных удлинений продольных связей модели  $\Delta_i$  используем главные кратности удлинений:

$\lambda_1 = \frac{a + \Delta_a}{a}$ ,  $\lambda_2 = \frac{b + \Delta_b}{b}$ ,  $\lambda_3 = \frac{c + \Delta_c}{c}$ . Кроме этого, перейдем от сил к номиналь-

ным (инженерным) напряжениям на гранях элементарного объема  $\sigma_1 = \frac{F_a}{s_1}$ ,

$\sigma_2 = \frac{F_b}{s_2}$ ,  $\sigma_3 = \frac{F_c}{s_3}$ , где  $s_i$  – площадь соответствующей грани параллелепипеда

в начальном состоянии.

Получаемые уравнения связывают номинальные (инженерные) напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  и главные кратности удлинений  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ . Количество параметров МГМ в этих формулах равно 10, из них семь механических параметров – коэффициенты  $k_a, k_b, k_c, k_l, k_n, k_p, k_d$  и три геометрических – начальные размеры модели  $a, b, c$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \frac{a}{bc} \left[ \lambda_1 (k_a + k_l + k_p + k_d) - \lambda_1 \left( \frac{lk_l}{\sqrt{a^2 \lambda_1^2 + b^2 \lambda_2^2}} + \frac{pk_p}{\sqrt{a^2 \lambda_1^2 + c^2 \lambda_3^2}} + \frac{dk_d}{\sqrt{a^2 \lambda_1^2 + b^2 \lambda_2^2 + c^2 \lambda_3^2}} \right) - k_a \right], \\ \sigma_2 = \frac{b}{ac} \left[ \lambda_2 (k_b + k_l + k_n + k_d) - \lambda_2 \left( \frac{lk_l}{\sqrt{a^2 \lambda_1^2 + b^2 \lambda_2^2}} + \frac{nk_n}{\sqrt{b^2 \lambda_2^2 + c^2 \lambda_3^2}} + \frac{dk_d}{\sqrt{a^2 \lambda_1^2 + b^2 \lambda_2^2 + c^2 \lambda_3^2}} \right) - k_b \right], \\ \sigma_3 = \frac{c}{ab} \left[ \lambda_3 (k_c + k_n + k_p + k_d) - \lambda_3 \left( \frac{nk_n}{\sqrt{b^2 \lambda_2^2 + c^2 \lambda_3^2}} + \frac{pk_p}{\sqrt{a^2 \lambda_1^2 + c^2 \lambda_3^2}} + \frac{dk_d}{\sqrt{a^2 \lambda_1^2 + b^2 \lambda_2^2 + c^2 \lambda_3^2}} \right) - k_c \right]. \end{array} \right.$$

Такие определяющие соотношения отражают анизотропные свойства среды. Традиционно анизотропия достигается выбором различных механических свойств (жесткостей) связей по разным направлениям. Но в МГМ анизотропия возникает также и из-за выбранной начальной геометрии с разными значениями размеров  $a \neq b \neq c$  по трем направлениям (и, следовательно, неравными углами между связями).

Таким образом, для описания анизотропных свойств высокоэластичных материалов в рамках МГМ использовано два механизма, которые приводят к различным откликам при деформировании по разным направлениям.

Геометрически изотропная модель определяется условиями равенства всех трех продольных связей  $a = b = c = 1$  и тогда, соответственно,  $l = p = n = \sqrt{2}$ ,  $d = \sqrt{3}$ . В этом случае первоначальная форма модели будет представлять собой куб. Механической изотропии соответствует выбор равных жесткостей трех продольных связей  $k_a = k_b = k_c$  и трех диагональных связей грани  $k_l = k_n = k_p$ . Жесткость пространственной диагональной связи модели равна  $k_d$ .

Если принять одновременно условия геометрической и механической изотропии, то придем к соотношениям

$$\begin{cases} \sigma_1 = \lambda_1(k_a + 2k_l + k_d) - k_a - \lambda_1 \left( \frac{k_l \sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} + \frac{k_l \sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_3^2}} + \frac{k_d \sqrt{3}}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}} \right), \\ \sigma_2 = \lambda_2(k_a + 2k_l + k_d) - k_a - \lambda_2 \left( \frac{k_l \sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} + \frac{k_l \sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2}} + \frac{k_d \sqrt{3}}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}} \right), \\ \sigma_3 = \lambda_3(k_a + 2k_l + k_d) - k_a - \lambda_3 \left( \frac{k_l \sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2}} + \frac{k_l \sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_3^2}} + \frac{k_d \sqrt{3}}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}} \right). \end{cases}$$

Эти выражения являются определяющими соотношениями изотропного сжимаемого нелинейно упругого материала. Они связывают напряжения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  (представляющие собой диагональные компоненты тензора напряжений Пиолы), с главными кратностями удлинений  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Количество параметров МГМ при выбранной геометрии равно трем: это коэффициенты упругости (жесткости) трех типов связей  $k_a, k_l$  и  $k_d$ .

### Построение функции удельной потенциальной энергии деформации

На основании приведенных выше определяющих соотношений можно получить явное выражение для удельной потенциальной энергии упругой деформации среды, описываемой механико-геометрической моделью. Считая эту удельную энергию функцией кратностей удлинений  $W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , восстановим ее в явном виде аналогично [13]. Напряжения  $\sigma_i$  являются частными производными от этой энергии по соответствующим главным кратностям удлинений. При выводе проверена выполнимость необходимых и достаточных условий существования полного дифференциала для функции энергии – попарного равенства смешанных производных второго порядка.

Удельная энергия для анизотропной среды имеет вид:

$$W_{aniz} = \frac{16}{v_0} (a^2(k_a + k_l + k_p + k_d)\lambda_1^2 + b^2(k_b + k_l + k_n + k_d)\lambda_2^2 + c^2(k_c + k_n + k_p + k_d)\lambda_3^2 - 2dk_d\sqrt{a^2 \cdot \lambda_1^2 + b^2 \cdot \lambda_2^2 + c^2 \cdot \lambda_3^2} - 2lk_l\sqrt{a^2 \cdot \lambda_1^2 + b^2 \cdot \lambda_2^2} - 2pk_p\sqrt{a^2 \cdot \lambda_1^2 + c^2 \cdot \lambda_3^2} - 2nk_n\sqrt{b^2 \cdot \lambda_2^2 + c^2 \cdot \lambda_3^2} - 2a^2k_a\lambda_1 - 2b^2k_b\lambda_2 - 2c^2k_c\lambda_3) + K_0$$

где  $v_0 = 8abc$  – элементарный объем до деформации, а константа  $K_0$  является постоянной интегрирования и может быть найдена из условия равенства нулю энергии при отсутствии деформации, т.е. при  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ :

$$W_{aniz}(1,1,1) = 0 \Rightarrow K_0 = \frac{16}{v_0} (2d^2k_d + 2l^2k_l + 2p^2k_p + 2n^2k_n + a^2(k_a - k_l - k_p - k_d) + b^2(k_b - k_l - k_n - k_d) + c^2(k_c - k_n - k_p - k_d)).$$

Приняв условия геометрической и механической изотропии, получим упругий потенциал для полностью изотропной модели в виде:

$$W = 2(k_a + 2k_l + k_d)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) - 4\sqrt{3}k_d\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} - 4\sqrt{2}k_l(\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} + \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_3^2} + \sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2}) - 4k_a(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + 6(k_a + 2k_l + k_d).$$

Полученное выражение является симметричной функцией кратностей главных удлинений. Количество параметров модели равно 3. Это механические параметры  $k_a, k_l, k_d$  – жесткости связей.

Выражение для функции удельной потенциальной энергии деформации изотропного нелинейно-упругого тела, полученное на основе метода механико-геометрического моделирования, не встречалось в работах других авторов и является новым.

### Графики энергии для некоторых случаев напряженно-деформированных состояний (НДС)

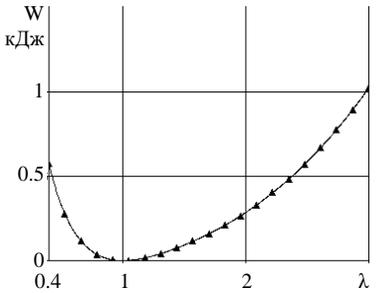
Продемонстрируем поведение полученного выражения удельной потенциальной энергии деформации для некоторых наиболее распространенных типов напряженно-деформированных состояний (НДС), которые обычно реализуются при испытаниях материалов.

При описании поведения высокоэластичных материалов чаще всего принимается допущение об их несжимаемости. Графики (рис. 3–5) построены при условии, обеспечивающем несжимаемость материала, которое можно записать через третий инвариант тензора деформации Коши–Грина как  $I_3 = 1$ , или в терминах кратностей удлинений  $\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 = 1$ .

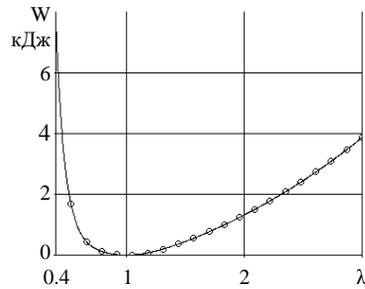
Механические параметры предлагаемой механико-геометрической изотропной модели  $k_a = 0,431$ ,  $k_l = -0,445$ ,  $k_d = 0,626$  определены по результатам обработки эксперимента на одноосное растяжение ленты из латексной резины. Диаграмма «деформация–напряжение» такого материала имеет характерную для высокоэластичных материалов так называемую s-образную форму. Испытания проведены на испытательной машине Shimadzu AGS-X на кафедре теории упругости Института механики, математики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного

федерального университета. Размеры образца: длина 150 мм, ширина 50 мм, толщина 0.5 мм. Максимальное удлинение 300%. Температура образца комнатная. Скорость деформации 1 000 мм/мин.

Для полученных параметров механико-геометрической модели построен график удельной потенциальной энергии деформации сплошной среды при одноосном (uniaxial) растяжении–сжатии в области деформаций  $0,4 \leq \lambda \leq 3$  (см. рис. 3). Значение кратности удлинения  $\lambda = 1$  соответствуют отсутствию деформации.



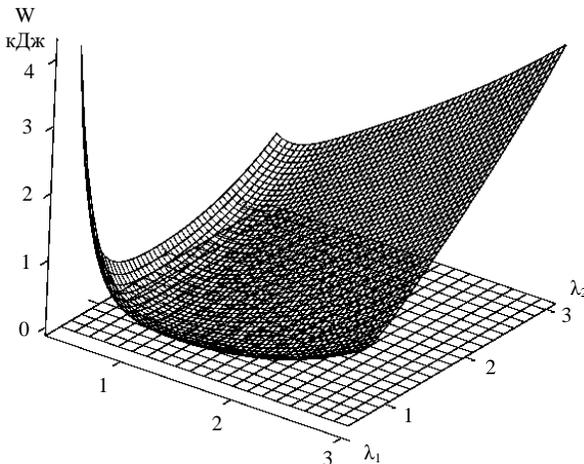
**Рис. 3.** Удельная потенциальная энергия при одноосном растяжении  
**Fig. 3.** Strain energy density under uniaxial tension



**Рис. 4.** Удельная потенциальная энергия при двухосном равномерном растяжении  
**Fig. 4.** Strain energy density under uniform biaxial tension

В той же области деформаций и с теми же параметрами модели построен график функции потенциала при двухосном равномерном (equibiaxial) растяжении–сжатии (см. рис. 4). Полученная форма графика является характерной для такого вида НДС. Как известно, удельная потенциальная энергия деформации при двухосной деформации возрастает быстрее, чем при одноосной, что подтверждается на приведенных графиках.

Также получен трехмерный график и для двухосного (biaxial) растяжения–сжатия в том же диапазоне изменения деформаций по каждому направлению (см. рис. 5).



**Рис. 5.** Удельная потенциальная энергия при двухосном растяжении  
**Fig. 5.** Strain energy density under biaxial tension

Все приведенные графики имеют характерную для потенциалов высокоэластичных нелинейно-упругих материалов форму. Они подтверждают физичность модели и соответствие полученного выражения для упругого потенциала требованиям механики сплошных сред. Графики являются выпуклыми функциями своих аргументов в приведенной области их изменения. Выражения для энергии являются неотрицательными функциями и единственное нулевое значение принимают при отсутствии деформации. Это является следствием соответствующих свойств одномерных элементов, составляющих трехмерную модель.

### Перспективы развития метода

Метод механико-механического моделирования имеет широкие возможности для развития. Особый интерес представляет введение в свойства связей модели более сложных, нелинейных зависимостей для описания реакции связей на растягивающие и сжимающие нагрузки  $R_i = f(\Delta_i)$ . В работе [14] была построена модель с кубической зависимостью сил реакции связей от удлинения, которая продемонстрировала большую гибкость при описании деформаций нелинейных тел.

На этапе построения модели можно задавать широкий спектр требуемых параметров материала, которые влияют на поведение трехмерной структуры модели в целом и формируют свойства моделируемой среды. При этом механические параметры МГМ не обязательно должны быть только упругими. В работе [15] с помощью МГМ было проведено моделирование вязкоупругого материала, где в качестве механических характеристик связей выбрано вязкоупругое стандартное линейное тело Зинера. Показано, что полученная таким образом модель демонстрирует все присущие вязкоупругим средам свойства: ползучесть, релаксацию, гистерезис.

### Заключение

Предложенная механико-геометрическая модель позволила получить новую форму потенциальной энергии деформации для нелинейно-упругих сред. Особенно интересны в смысле новизны полученных соотношений присутствующие в функции энергии квадратные корни из попарных сумм квадратов кратностей удлинений. Такие выражения в функциях нелинейно-упругих потенциалов в работах других авторов не встречались.

Полученные определяющие соотношения и функция упругой энергии адекватно отражают свойства нелинейно-упругих тел, а механические параметры модели однозначно идентифицируются по результатам основных опытов на одноосное растяжение, двухосное растяжение и простой сдвиг. Графики функции удельной потенциальной энергии деформации при разных типах НДС демонстрируют характерное для нелинейно-упругих потенциалов поведение и подобны аналогичным диаграммам для распространенных высокоэластичных материалов, например Муни–Ривлина и Йео [16].

### Список источников

1. *Mooney M.* A theory of large elastic deformation. // *Journal of Applied Physics*. 1940. V. 11 (9). P. 582–592.
2. *Rivlin R.S.* Large Elastic Deformations of Isotropic Materials. III. Some Simple Problems in Cylindrical Polar Co-Ordinates // *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*. 1948. V. 240 (823). P. 509–525.

3. Yeoh O.H. Some forms of the strain energy function for rubber // *Rubber Chemistry and technology*. 1993. V. 66, is. 5. P. 754–771.
4. Blatz P.J., Ko W.L. Application of finite elasticity to the deformation of rubbery materials // *Trans. Soc. Rheol.* 1962. V. 6. P. 223–251.
5. Ogden R.W. Large Deformation Isotropic Elasticity – On the Correlation of Theory and Experiment for Incompressible Rubberlike Solids // *Proc. Royal Soc. London. Series A*. 1972. V. 326 (1567). P. 565–584.
6. Arruda E.M., Boyce M.C. A three-dimensional model for the large stretch behavior of rubber elastic materials // *J. Mech. Phys. Solids*. 1993. V. 41 (2). P. 389–412.
7. Gent A.N. A new constitutive relation for rubber // *Rubber Chem. Technol.* 1996. V. 69. P. 59–61.
8. Bazkiaei A.K., Shirazi K.H., Shishesaz M. A framework for model base hyper-elastic material simulation // *J. Rubber Res.* 2020. V. 23. P. 287–299. doi: 10.1007/s42464-020-00057-5
9. de Bortoli D., Wrubleski E.G.M., Marczak R.J., Gheller J. Jr. Hyperfit – curve fitting software for incompressible hyperelastic material models // *Proceedings of COBEM 2011, 21st Brazilian Congress of Mechanical Engineering*, October 24–28, Natal, RN, Brazil. 2011.
10. Зингерман К.М. Проверка условия сильной эллиптичности для материала Мурнагана при всестороннем растяжении или сжатии. // *Вестник Тверского государственного университета. Сер. Прикладная математика*. 2003. № 1. С. 65–70.
11. Poynting J.H. On the changes in the dimensions of a steel wire when twisted and on the pressure of distortional waves in steel // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*. 1912. V. 86. P. 534–561.
12. Азаров А.Д., Азаров Д.А. Трехмерная механическая модель для описания больших упругих деформаций при одноосном растяжении // *Вестник Донского государственного технического университета*. 2011. Т 11, № 2 (53). С. 147–156.
13. Азаров Д.А., Зубов Л.М. Механико-геометрическое моделирование в нелинейной теории упругости // *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки*. 2016. № 3 (191). С. 5–12.
14. Азаров Д.А. Идентификация параметров механико-геометрической модели при одноосном растяжении высокоэластичного материала // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. 2017. № 1. С. 5–14.
15. Azarov A.D., Azarov D.A. Description of non-linear viscoelastic deformations by the 3D mechanical model // Chapter 49 in *Proceedings of the 2015 International Conference on “Physics, Mechanics of New Materials and Their Applications”, devoted to the 100th Anniversary of the Southern Federal University / I.A. Parinov, Shun-Hsyung, V.Yu. Topolov (eds.)*. New York: Nova Science Publishers, 2015. P. 367–375.
16. Азаров А.Д., Азаров Д.А. Сравнительный анализ потенциалов, полученных методом механико-геометрического моделирования с потенциалами Муни-Ривлина и Йоо // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сб. тр., Уфа, 19–24 авг. 2019 г. Уфа: Башкир. гос. ун-т, 2019. Т. 3. С. 42–44.

### References

1. Mooney M. (1940) A theory of large elastic deformation. *Journal of Applied Physics*. 11(9). pp. 582–592. doi: 10.1063/1.1712836
2. Rivlin R.S. (1948) Large elastic deformations of isotropic materials. iii. some simple problems in cylindrical polar co-ordinates. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*. 240(823). pp. 509–525. doi: 10.1098/rsta.1948.0004
3. Yeoh O.H. (1993) Some forms of the strain energy function for rubber. *Rubber Chemistry and Technology*. 66(5). pp. 754–771. doi: 10.5254/1.3538343
4. Blatz P.J., Ko W.L. (1962) Application of finite elasticity to the deformation of rubbery materials. *Transaction of the Society of Rheology*. 6. pp. 223–251. doi: 10.1122/1.548937
5. Ogden R.W. (1972) Large deformation isotropic elasticity – on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*. 326(1567). pp. 565–584. doi: 10.1098/rspa.1972.0026

6. Arruda E.M., Boyce M.C. (1993) A three-dimensional model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 41(2). pp. 389–412. doi: 10.1016/0022-5096(93)90013-6
7. Gent A.N. (1996) A new constitutive relation for rubber. *Rubber Chemistry & Technology Journal*. 69. pp. 59–61.
8. Bazkiaei A.K., Shirazi K.H., Shishesaz M. (2020) A framework for model base hyper-elastic material simulation. *Journal of Rubber Research*. 23. pp. 287–299. doi: 10.1007/s42464-020-00057-5
9. De Bortoli D., Wrubleski E.G.M., Marczak R.J., Gheller J.Jr. (2011) Hyperfit – curve fitting software for incompressible hyperelastic material models. *Proceedings of COBEM 2011, 21st Brazilian Congress of Mechanical Engineering, Natal, Brazil*.
10. Zingerman K.M. (2003) Proverka usloviya sil'noy elliptichnosti dlya materiala Murnagana pri vsestoronnem rastyazhenii ili szhatii [Verification of the strong ellipticity condition for the Murnaghan material under uniform triaxial tension or compression]. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo universiteta, seriya Prikladnaya matematika – Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics*. 1. pp. 65–70.
11. Poynting J.H. (1912) On the changes in the dimensions of a steel wire when twisted and on the pressure of distortional waves in steel. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*. 86. pp. 534–561.
12. Azarov A.D., Azarov D.A. (2011) Trekhmernaya mekhanicheskaya model' dlya opisaniya bol'shikh uprugikh deformatsiy pri odnoosnom rastyazhenii [A three-dimensional mechanical model for describing large elastic deformations under uniaxial tension]. *Vestnik DGTU – Vestnik of Don State Technical University*. 11(2(53)). pp. 147–156.
13. Azarov D.A., Zubov L.M. (2016) Mekhaniko-geometricheskoe modelirovanie v nelineynoy teorii uprugosti [Mechanical-geometric modeling in the nonlinear theory of elasticity]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki – Bulletin of Higher Education Institutes. North Caucasus Region. Natural Sciences*. 3(191). pp. 5–12.
14. Azarov D.A. (2017) Identifikatsiya parametrov mekhaniko-geometricheskoy modeli pri odnoosnom rastyazhenii vysokoelastichnogo materiala [Identification of parameters of a mechanical–geometric model under uniaxial tension of a hyperelastic material]. *Ekologicheskii Vestnik Nauchnykh Tsentrov Chernomorskogo Ekonomicheskogo sotrudnichestva – Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*. 1. pp. 5–14.
15. Azarov A.D., Azarov D.A. (2015) *Description of Non-linear Viscoelastic Deformations by the 3D Mechanical Model. Chapter 49*. In: Proceedings of the 2015 International Conference on “Physics, Mechanics of New Materials and Their Applications”, devoted to the 100th Anniversary of the Southern Federal University. New York: Nova Science Publishers. pp. 367–375.
16. Azarov A.D., Azarov D.A. (2019) Sravnitel'nyy analiz potentsialov, poluchennykh metodom mekhaniko-geometricheskogo modelirovaniya s potentsialami Muni-Rivlina i Yeo [Comparative analysis of potentials obtained by the method of mechanical–geometric modeling with the Mooney-Rivlin and Yeo potentials]. *Proceedings of the XII All-Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics, Ufa*. 3. pp. 42–44.

**Сведения об авторе:**

Азаров Даниил Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика» Донского государственного технического университета (Ростов-на-Дону, Россия). E-mail: danila\_az@mail.ru

**Information about the author:**

Azarov Daniil A. (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation). E-mail: danila\_az@mail.ru

Статья поступила в редакцию 14.10.2024; принята к публикации 08.12.2025

The article was submitted 14.10.2024; accepted for publication 08.12.2025