

Научная статья

УДК 532.529

doi: 10.17223/19988621/98/10

## Исследование двухфазного течения в соплах РДТТ

Дмитрий Олегович Ларкин<sup>1</sup>, Иван Владимирович Еремин<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> *Томский государственный университет, Томск, Россия*

<sup>1</sup> *d.m.i.t.r.y.l.a.r.k.i.n@mail.ru*

<sup>2</sup> *iveremin@niipmm.tsu.ru*

**Аннотация.** Представлены результаты исследования двухфазного стационарного квазиодномерного течения в сопле Лаваля с учетом процессов коагуляции, дробления и вращения капель конденсированной фазы. Математическая модель основана на использовании многожидкостной модели сплошной среды и метода квазиустановления. Проведены численные исследования характеристик двухфазной среды. Проанализированы зависимости двухфазных потерь от различных функций распределения конденсированной фазы во входном сечении сопла. Показано, что для ряда течений использование распределений, отличных от нормально-логарифмических, оказывает заметное влияние на структуру потока.

**Ключевые слова:** сопло Лаваля, двухфазное квазиодномерное течение, функция распределения, двухфазные потери, математическое моделирование

**Благодарности:** Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России, проект № FSWM-2025-0004.

**Для цитирования:** Ларкин Д.О., Еремин И.В. Исследование двухфазного течения в соплах РДТТ // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 98. С. 108–119. doi: 10.17223/19988621/98/10

Original article

## Investigation of a two-phase flow in the nozzles of solid-propellant rockets

Dmitriy O. Larkin<sup>1</sup>, Ivan V. Eremin<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> *Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*

<sup>1</sup> *d.m.i.t.r.y.l.a.r.k.i.n@mail.ru*

<sup>2</sup> *iveremin@niipmm.tsu.ru*

**Abstract.** This study presents numerical results for a steady quasi-one-dimensional two-phase flow in a Laval nozzle, accounting for the coagulation, breakup, and rotation of droplets in the condensed phase. The mathematical model is based on a multicomponent continuum approach combined with a quasi-steady solution method; second-order numerical schemes are used for spatial integration. Several inlet droplet-size distributions obtained

from an intrachamber combustion simulation are examined to assess their impact on the two-phase losses and flow structure. Comparisons with the lognormal and truncated logarithmic laws show that, for some flow regimes, deviations from the classical lognormal distribution have little effect on thrust characteristics, whereas in other cases the influence is significant. The results show that both the mass fraction of the condensed phase and the choice of inlet distribution shape can noticeably affect the reduction of the specific impulse. The study illustrates the evolution of droplet sizes along the nozzle and identifies the conditions under which the impact of the distribution shape becomes important. Future work will extend the proposed approach to the entire internal flow path of a solid-propellant rocket motor.

**Keywords:** Laval nozzle, two-phase quasi-one-dimensional flow, distribution function, two-phase losses, mathematical modeling

**Acknowledgments:** This work was carried out within the framework of the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No. FSWM-2025-0004).

**For citation:** Larkin, D.O., Eremin, I.V. (2025) Investigation of a two-phase flow in the nozzles of solid-propellant rockets. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 98. pp. 108–119. doi: 10.17223/19988621/98/10

## Введение

Широкое применение ракетных двигателей на твердом топливе (РДТТ) в космических исследованиях обуславливают их дальнейшее совершенствование. Для определения энерго-тяговых характеристик у разрабатываемого двигателя необходимо знать распределение газодинамических параметров во всем его тракте. Из исследований двухфазных течений в подобных установках следует, что на энерго-тяговые характеристики двигателя существенное влияние оказывает распределение конденсированной фазы (к-фазы) продуктов сгорания на входе в сопловой блок. Для большинства применяемых смесевых твердых топлив (СТТ) принято задавать распределение частиц на входе в сопло на основе нормально-логарифмического закона [1]. Такое распределение формируется, исходя из начальной функции распределения на поверхности горения топлива и ее дальнейшей эволюции в камере сгорания. Это весьма сложная многофакторная задача, которая зависит от состава топлива, условий горения, времени пребывания продуктов сгорания в камере сгорания и других факторов. Решению этой задачи посвящено много экспериментальных и теоретических исследований [2–7]. К настоящему времени такие исследования продолжаются, так как пока многие процессы изучены не полностью и возникает ряд противоречивых данных. Так, в работе [8] показано, что нормально-логарифмический закон распределения не соответствует распределению на входе в сопло для рассматриваемых авторами СТТ. Отмечено, что использование подхода случайных блоков и новых моделей агломерации позволяет получать более качественную информацию о распределении частиц на входе в сопло.

В работе [9] выполнено исследование распределения по размерам впрыскивающих капель на картину двухфазного течения в камере сгорания. Показано, в частности, влияние этих распределений на параметры потока на входе в сопло. Приведены как гистограммы состава алюминия, так и распределения параметров потока в поперечном сечении на входе в сопло.

Поскольку начальное распределение по размерам у поверхности топлива существенно влияет на распределение на входе в сопло, был выполнен ряд исследований по их определению. Можно отметить работу [10] в которой выполнено экспериментальное изучение распределения по размерам конденсируемых частиц в зависимости от геометрии образца, интервала времени закалки и уровня давления на основе бомбы закалки. Получено, что частицы имеют размеры от 0.1 до 300 мкм и их распределение трехмодальное. Аппроксимация полного распределения описана как сумма нормально-логарифмических распределений для каждой моды. С учетом изменения распределения частиц в газодинамическом тракте двигателя получена одномодальная функция на срезе сопла.

В работе [11] предложена динамическая модель агломерации, которая позволяет получить функцию распределения агломератов по размерам для разных начальных спектров частиц. Так же можно отметить работу [12], где была разработана и реализована комплексная физико-математическая модель двухфазного течения продуктов сгорания СТТ во всем газодинамическом тракте РДТТ. В данную модель включен ряд подмоделей, описывающих такие физические процессы, происходящие в продуктах сгорания двигателя, как агломерация, их газофазное горение и конденсация продуктов горения на частицы высокодисперсного оксида и на сами агломераты, динамика изменения параметров газовой фазы, агломератов и оксидов, химическое взаимодействие между Al и  $Al_2O_3$  в агломератах и ряд других процессов. В работах для модельных двигателей и условных составов топлива получены распределения основных параметров двухфазного течения в РДТТ. В частности, приведены распределения массовой функции плотности распределения агломератов как у поверхности топлива, так и на входе в сопло.

Следует отметить, что в этих работах для исследования течений продуктов сгорания, как правило, заложены модели, учитывающие основные физические процессы в камере сгорания. При расчете течений в сопле необходимо также учесть специфические процессы, происходящие в нем, и, как показывают исследования, они вносят существенный вклад в уровень двухфазных потерь удельного импульса.

Цель настоящей работы состоит в анализе влияния отличия функции распределения конденсированных частиц от общепринятого нормально-логарифмического закона на распределения параметров в сопле и на величину потерь удельного импульса на двухфазность.

### **Физико-математическая постановка задачи**

Рассматривается стационарное течение двухфазной среды, представляющей собой смесь газа и полидисперсной конденсированной фазы, являющейся жидкими каплями оксида алюминия, в сопле Лавала. В сопловом блоке важными процессами являются процессы коагуляции и дробления капель, приводящие к перераспределению фракций частиц по размерам. Процессы коагуляции смещают спектр по размерам в сторону более крупных фракций, увеличивая инерционное отставание капель относительно газовой фазы, и, как следствие, приводят к увеличению потерь удельного импульса. Одновременно с этим возрастает влияние аэродинамических сил, действующих на капли и приводящих к их деформации и дроблению. Дополнительным фактором, влияющим на развитие к-фазы, является вращение частиц, которое возникает при нецентральных столкновениях между каплями. При

больших угловых скоростях вращения капель возможно их разрушение за счет воздействия центробежных сил.

В настоящей работе используется многожидкостная модель полидисперсной среды [13]. В рамках этой модели стационарное квазиодномерное течение двухфазной среды с учетом коагуляции, дробления и вращения жидких капель описывается системой уравнений вида [14, 15]:

$$\frac{d\rho u F}{dx} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d\rho u^2 F}{dx} = -F \frac{dp}{dx} + F \sum_{i=1}^N \Phi_i^y \rho_i (u_i - u), \quad (2)$$

$$\frac{d\rho u H F}{dx} = F \sum_{i=1}^N \rho_i \left[ \Phi_i^0 c_p (T_i - T) + \Phi_i^y u_i (u_i - u) \right], \quad (3)$$

$$\frac{d}{dx} (\rho_i u_i F) = Q_{1i}, \quad (4)$$

$$\frac{d}{dx} (\rho_i u_i^2 F) = F Q_{2i} + F \Phi_i^y \rho_i (u - u_i), \quad (5)$$

$$\frac{d}{dx} (\rho_i u_i T_i F) = F Q_{3i} + F \Phi_i^0 \rho_i (T - T_i) \frac{c_p}{c_s}, \quad (6)$$

$$\frac{d}{dx} (n_i u_i F) = F Q_{4i}, \quad (7)$$

$$\frac{d}{dx} (n_i u_i M_i^2 F) = F Q_{5i} + F \Phi_i^M n_i M_i^2, \quad (8)$$

$$p = \rho \frac{R}{c_p} \left( H - \frac{u^2}{2} \right). \quad (9)$$

Расчет процесса взаимодействия частиц друг с другом производился в рамках непрерывного подхода методом «меченых частиц» [15]. С учетом полидисперсной модели осколков А.А. Шрайбера коагуляционные члены в уравнениях (5)–(8) имеют вид:

$$Q_{1i} = n_i \sum_{r_j < i} K_{ji} \Phi_{ji} \rho_j - \rho_i \sum_{r_j > i} K_{ij} n_j + \sum_{r_j > i} n_j \sum_{n_k < r_j} \alpha_{kji} K_{kj} P_k (1 - \Phi_{kj}), \quad (10)$$

$$Q_{2i} = n_i \sum_{r_j < i} K_{ji} P_j [u_j - (1 - \Phi_{ji}) u_{jik}] - \\ - \rho_i u_i \sum_{r_j > i} K_{ij} n_j + \sum_{r_j > i} n_j \sum_{n_k < r_j} \alpha_{kji} K_{kj} P_k (1 - \Phi_{kj}) u_{kji}, \quad (11)$$

$$Q_{3i} = \left[ n_i \sum_{r_j < i} K_{ji} \rho_j [E_j - (1 - \Phi_{ji}) E_{jik}] - \rho_i E_i \sum_{r_j > i} K_{ij} n_j + \right. \\ \left. + \sum_{r_j > i} n_j \sum_{n_k < r_j} \alpha_{kji} K_{kj} P_k (1 - \Phi_{kj}) E_{kji} + \frac{q_i^2}{2} Q_{1i} - u_i Q_{2i} - v_i Q_{3i} - w_i Q_{4i} \right] \frac{1}{c_s}, \quad (12)$$

$$Q_{4i} = -n_i \sum_{r_j > i} K_{ij} n_j + \frac{n_i}{\rho_i} \sum_{r_j > i} n_j \sum_{n_k < r_j} \alpha_{kji} K_{kj} P_k (1 - \Phi_{kj}), \quad (13)$$

$$Q_{5i} = n_i \left( \sum_{r_j < i} 0,058 M_j^2 K_{ij} n_j - \sum_{r_j > i} K_{ij} n_j \Phi_{ij} M_i^2 \right), \quad (14)$$

где параметры с индексом  $i$  относятся к номерам фракций конденсированной фазы, а величины без индекса относятся к газовой фазе.  $u, p, T, \rho, H$  – скорость, давление, температура, плотность и энтальпия,  $c_s$  – теплоемкость вещества частиц,  $c_p$  – теплоемкость газа при постоянном давлении,  $n_i$  – количество частиц  $i$ -й фракции в единице объема,  $m$  – масса частицы,  $E$  – полная энергия,  $K_{ij}$  – константа взаимодействия,  $Q_i$  – коагуляционные члены,  $\Phi_{ji}$  – математическое ожидание отношения изменения массы крупной частицы к общей массе столкнувшихся с ней мелких частиц,  $\alpha_{kji}$  – массовая нормированная функция распределения по размерам сколков  $i$ , образовавшихся при столкновении частицы  $k$ -й фракции с  $j$ -й,  $\varphi_i^v, \varphi_i^0, \varphi_i^M$  – коэффициенты силового, теплового и вращательного взаимодействия между газовой фазой и частицами  $i$ -й фракции,  $F$  – сечение сопла;

### Метод решения

В большинстве работ для численного решения системы (1)–(9) применяется подход, основанный на решении обратной задачи [16]. Однако при использовании сопел сложной геометрии задание начального распределения параметра (например, давления), обеспечивающего соответствие восстановленного профиля с базовым, является затруднительным.

В настоящей работе применен *метод квазиустановления*, широко используемый при расчете осесимметричных и пространственных течений в соплах [17]. Суть метода заключается в использовании итерационного процесса, в котором общее стационарное решение формируется путем решения нестационарных уравнений газовой фазы в сочетании со стационарными уравнениями для фракций жидких капель. В связи с этим для газовой фазы на входе в сопло задается два граничных условия (энтропия и энтальпия), а на срезе сопла течение считается сверхзвуковым и граничные условия не задаются. Начальные поля газодинамических параметров определяются с использованием газодинамических функций в равновесном приближении.

Для численного интегрирования системы уравнений газовой фазы применялась схема Годунова второго порядка точности, а уравнения к-фазы интегрировались неявной разностной схемой также второго порядка точности [14, 15]. Итерации по временным шагам повторяются до достижения заданного критерия сходимости.

Реализация описанного метода квазиодномерного течения легла в основу разработанного специализированного программного обеспечения на языке C++ с использованием объектно-ориентированного подхода и многофайловой структуры проекта, обеспечивающей гибкость, расширяемость и удобство поддержки кода. Расчеты проводятся на основе отдельного файла-задания, в котором указываются все необходимые параметры моделирования, включая геометрию сопла, параметры газа и частиц, численные схемы, критерии сходимости и т.д. В программу интегрирована обширная база данных, позволяющая генерировать разно-

образные геометрии сопел, применять различные формы коэффициентов сопротивления, моделей дробления частиц и другие физические характеристики, что обеспечивает универсальность и адаптивность численной модели к различным задачам многофазных течений. Такой подход обеспечивает возможность дальнейшей модернизации разрабатываемого программного комплекса на задачи многомерных течений и моделирования процессов в камерах сгорания без необходимости кардинальной переработки его архитектуры.

### Численные исследования

При проведении численных исследований влияния функции распределения капель во входном сечении сопла рассматривались распределения, полученные в результате моделирования процессов горения, выполненные в работах [9, 12]. Во всех вариантах использовалась сетка, состоящая из  $N_x = 2\,000$  узлов и число фракций  $N = 25$ .

В работе [12] авторы провели численное моделирование течения многофазной среды и эволюции к-фазы в камере сгорания твердотопливного ракетного двигателя. Распределение формировалось на основе расчета траекторий частиц от поверхности горения до входного сечения сопла с учетом процессов горения, коагуляции (броуновской и турбулентной) и окисления алюминия.

На рис. 1 показано сравнение нормально-логарифмической функции с распределением, полученным в работе [12] при одинаковом среднем массовом диаметре капель  $d_{43} = 2.4$  мкм. Видно, что функция [12] характеризуется одинаково малым массовым содержанием к-фазы в асимптотических областях, в то время как в нормально-логарифмическом распределении характерна концентрация к-фазы вблизи моды распределения.

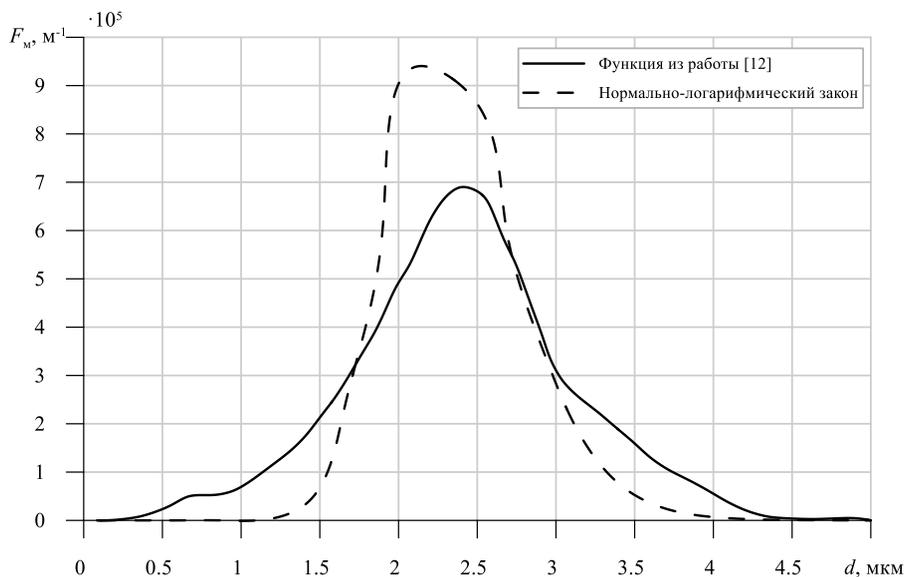


Рис. 1. Сравнение функций распределения к-фазы  
Fig. 1. Comparison of condensed-phase distribution functions

Проведены расчеты с использованием данных функций в качестве начального распределения во входном сечении сопла. На рис. 2 изображено сравнение распределений среднемассового диаметра капель вдоль сопла. Как показали расчеты, различие в форме распределения между функциями для рассматриваемого течения не оказывает большого влияния на структуру течения и энерго-тяговые характеристики потока. Двухфазные потери составили 1.95% для распределения [12] и 1.91% для нормально-логарифмического закона.

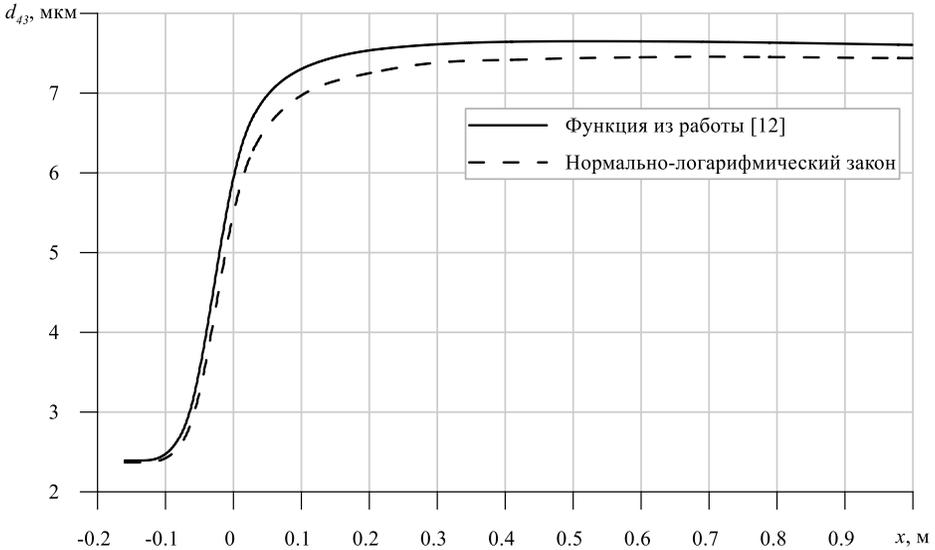
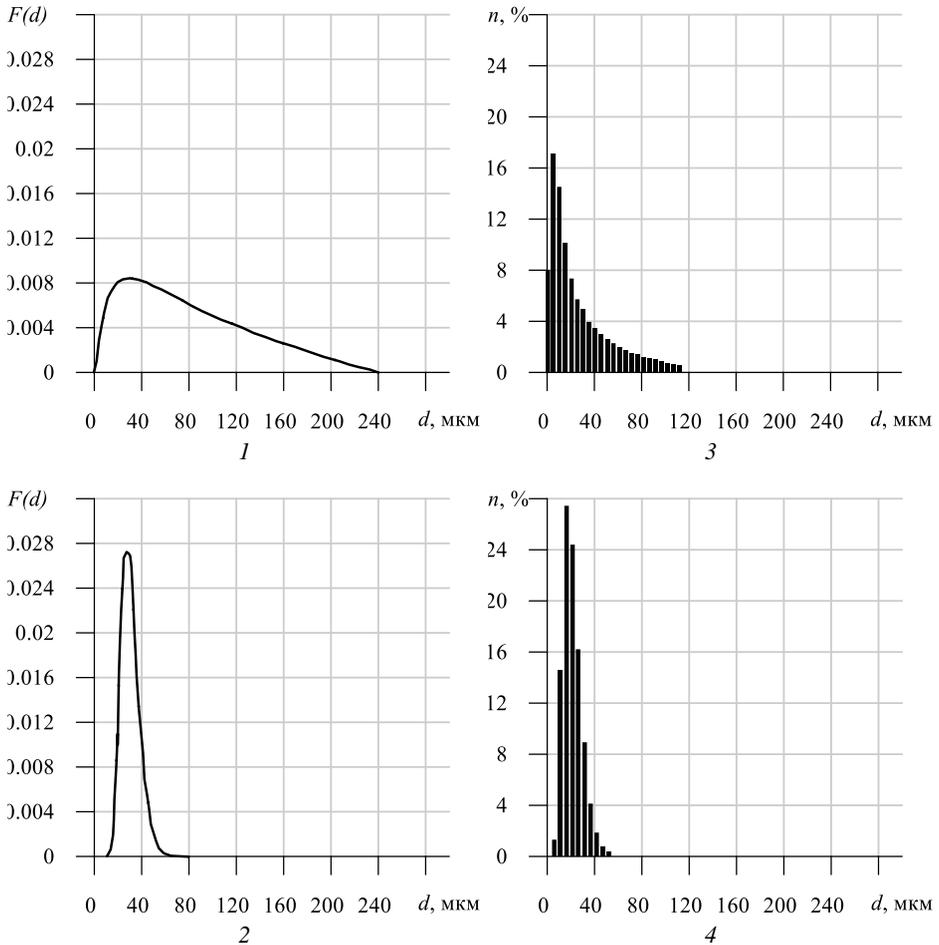


Рис. 2. Сравнение распределения  $d_{43}$  вдоль сопла  
Fig. 2. Comparison of  $d_{43}$  distribution along the nozzle

В работе [9] рассматривается эволюция распределения к-фазы в камере сгорания в зависимости от начальной функции распределения частиц алюминия в топливе. На рис. 3 показаны графики распределения капель на поверхности горения и на входе в сопло, при использовании усеченного (1, 3) и нормального (2, 4) логарифмических законов, полученные авторами [9].

Для проведения численных исследований в качестве входных данных для расчета течения в сопле использовались распределения к-фазы, соответствующие графикам 3 и 4 (см. рис. 3). Массовая доля составляла  $z = 0.18$ , а контур сопла взят из работы [9]. На рис. 4 показано распределение среднемассового диаметра  $d_{43}$  вдоль сопла. Поскольку авторы [9] использовали топливо с весьма крупными включениями частиц алюминия, то к-фаза во входном сечении сопла имеет значительно увеличенный среднемассовый диаметр по сравнению с работой [12]. В выходном сечении сопла  $d_{43}$  для обеих моделей практически совпадают. Такое поведение может быть частично обусловлено тем, что в настоящей работе не учитывается скоростное отставание во входном сечении сопла. В этих вариантах начальные функции распределения оказывают существенное влияние на двухфазные потери, которые составляют  $\xi = 3\%$  для усеченного логарифмического распределения и  $\xi = 3.5\%$  для нормально-логарифмического закона. Следует отметить, что из-за большого

начального размера капель активные процессы взаимодействия между к-фазой и газовой фазой происходят в дозвуковой части сопла. При увеличении массовой доли до  $z = 0.4$  качественная картина изменяется. В этом случае при использовании нормально-логарифмического закона двухфазные потери будут меньше, чем при усеченном логарифмическом распределении.



**Рис. 3.** Эволюция к-фазы: 1, 2 – на поверхности горения; 3, 4 – во входном сечении сопла [9]

**Fig. 3.** Evolution of the condensed phase: (1, 2) on the burning surface and (3, 4) in the nozzle inlet section [9]

В настоящей работе численное исследование выполнено для усеченного логарифмического закона распределения. Профиль сопла остается неизменным, массовая доля принимается равной  $z = 0.3$ . На рис. 5 показано изменение среднemasового диаметра вдоль оси сопла при различных  $d_{43}$  на входе в сопло. Видно, что с увеличением  $d_{43}$  возрастает интенсивность взаимодействия к-фазы в области минимального сечения, что приводит к увеличению двухфазных потерь (таблица).

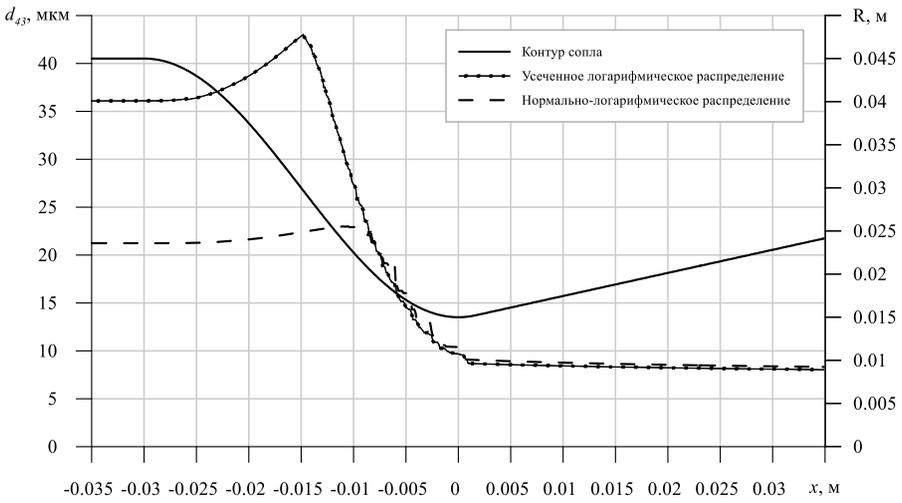


Рис. 4. Сравнение распределения  $d_{43}$  вдоль сопла  
 Fig. 4. Comparison of  $d_{43}$  distribution along the nozzle

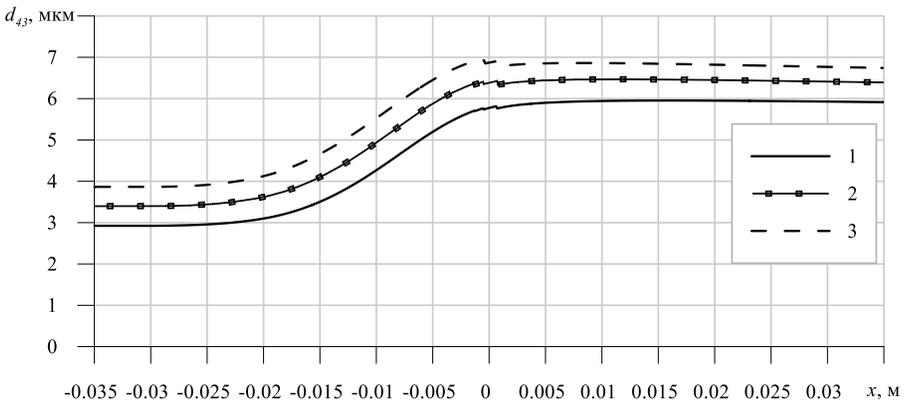


Рис. 5. Сравнение распределения  $d_{43}$  вдоль сопла  
 Fig. 5. Comparison of  $d_{43}$  distribution along the nozzle

Варианты расчетов

№	1	2	3
$d_{43вх}$ , МКМ	2.9	3.4	3.86
$d_{43вых}$ , МКМ	5.9	6.4	6.74
$\xi_2$ , %	3.8	4.2	4.5

Заключение

В работе выполнено математическое моделирование течения двухфазной полидисперсной среды в сопле с учетом процессов коагуляции, дробления и вращения капель к-фазы в стационарной квазиодномерной постановке. Для решения системы уравнений использовался метод квазиустановления. Получены зависимости

характеристик двухфазного течения для различных начальных функций распределения капель во входном сечении сопла. Проведенный анализ показал, что форма распределения к-фазы может оказывать существенное влияние на величину двухфазных потерь в зависимости от режима течения. В некоторых течениях различия между функциями малы, тогда как в других их влияние становится выраженным. Кроме того, выявлено, что массовая доля к-фазы с учетом выбора функции распределения оказывает заметное влияние на двухфазные потери удельного импульса.

Проведено численное исследование с использованием усеченного логарифмического закона распределения к-фазы во входном сечении сопла. Показано, что для данного течения при увеличении среднemasсового диаметра на входе в сопло двухфазные потери возрастают.

В дальнейшем планируется распространить данный подход для расчета течения во всем газодинамическом тракте РДТТ.

#### Список источников

1. *Стернин Л.Е.* Основы газодинамики двухфазных течений в соплах. М.: Машиностроение, 1974. 212 с.
2. *Attili A., Favini B., Di Giacinto M.* Numerical Simulation of Multiphase Flows in Solid Rocket Motors // 45th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit 2–5 August 2009, Denver, Colorado, AIAA Paper. 2009. P. 1–19.
3. *Dupays J., Fabignon Y., Villedieu P., Lavergne G., Estivalezes J.L.* Some Aspects of Two-Phase Flows in Solid-Propellant Rocket Motors // Progress in Astronautics and Aeronautics. AIAA Reston, VA. 2000. V. 185. P. 859–883.
4. *Де Лука Л.Т., Галфетти Л., Северный Ф., Меда Л., Марра Ж., Ворожцов А.Б., Седой В.С., Бабук В.А.* Горение смесевых твердых топлив с наноразмерным алюминием // Физика горения и взрыва. 2005. Т. 41, № 6. С. 80–94. doi: 10.1007/s10573-005-0080-5
5. *Hunter S.C., Cherry J.P., Kligel J.P., Waldman C.H.* Gas-particle nozzle flows with reaction and particle size change. Lecture notes in physics. // AIAA Paper. 1981. № 37. P. 1–14. doi: 10.2514/6.1981-37
6. *Глотов О.Г.* Конденсированные продукты горения алюминизированных топлив. II. Эволюция частиц при удалении от поверхности горения // Физика горения и взрыва. 2000. Т. 36, № 4. С. 66–78. doi: 10.1007/BF02699478
7. *Глотов О.Г., Ягодников Д.А., Воробьев В.С., Зарко В.Е., Симоненко В.Н.* Воспламенение, горение и агломерация капсулированных частиц алюминия в составе смесевого твердого топлива. II. Экспериментальные исследования агломерации // Физика горения и взрыва. 2007. Т. 43, № 3. С. 83–97. doi: 10.1007/s10573-007-0045-y
8. *Jackson T.L., Najjar F.M., Buckmaster J.* New Aluminum Agglomeration Models and Their Use in Solid-Propellant-Rocket Simulations // J. Propul. Power. 2005. V 21 (5). P. 925–936. doi: 10.2514/1.11888
9. *Najjar F.M., Ferry J.P., Haselbacher A., Balachandar S.* Simulations of Solid-Propellant Rockets: Effects of Aluminum Droplet Size Distribution // Journal of Spacecraft and Rockets. 2006. V. 43 (6). P. 1258–1270. doi: 10.2514/1.17326
10. *Jeenu R., Pinumalla K., Deepak D.* Size distribution of particles in combustion products of aluminized composite propellant // J. Propul Powe. 2010. V 26 (4). P. 715–723. doi: 10.2514/1.43482
11. *Рашковский С.А.* Модель нестационарного горения твердых топлив с накоплением конденсированных продуктов на поверхности горения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 86. С. 104–119. doi: 10.17223/19988621/86/8

12. Бабук В.А., Будный Н.Л., Куклин Д.И., Низяев А.А. Модель эволюции многофазного потока продуктов сгорания в камере двигательной установки и результаты ее численного анализа // Известия российской академии ракетных и артиллерийских наук. 2020. № 1 (111). С. 53–60.
13. Крайко А.Н., Нигматулин Р.И., Старков В.К., Стернин Л.Е. Механика многофазных сред // Итоги науки и техники. Гидромеханика. М.: ВИНТИ, 1972. № 6. С. 93–174.
14. Васенин И.М., Архипов В.А., Бутов В.Г., Глазунов А.А., Трофимов В.Ф. Газовая динамика двухфазных течений в соплах. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1986. 264 с.
15. Рычков А.Д. Математическое моделирование газодинамических процессов в каналах и соплах. Новосибирск: Наука, 1988. 222 с.
16. Пирумов У.Г. Обратная задача теории сопла. М.: Машиностроение, 1988. 240 с.
17. Ворожцов А.Б., Глазунов А.А., Де Лука Л.Т., Кувшинов Н.Е., Еремин И.В., Тырышкин И.М., Фассина М. Влияние применения наноалюминия на газодинамику высокоэнергетических установок // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 2 (28). С. 45–57.

### References

1. Sternin L.E. (1974) *Osnovy gazodinamiki dvukhfaznykh techeniy v soplakh* [Fundamentals of gas dynamics of two-phase flows in nozzles]. Moscow: Mashinostroenie.
2. Attili A., Favini B., Di Giacinto M. (2009) Numerical simulation of multiphase flows in solid rocket motors. *Proceedings of the 45th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, Denver, Colorado*. pp. 1–19.
3. Dupays J., Fabignon Y., Villedieu P., Lavergne G., Estivalezes J.L. (2000) Some aspects of two-phase flows in solid-propellant rocket motors. *Progress in Astronautics and Aeronautics. AIAA Reston*. 185. pp. 859–883. doi: 10.2514/5.9781600866562.0859.0883
4. De Luka L.T., Galfetti L., Severnyj F., Meda L., Marra ZH., Vorozhcov A.B., Sedoj B.C., Babuk V.A. (2005) Combustion of mixed solid fuels with nanoscale aluminum. *Physics of Combustion and Explosion*. 41(6). pp. 80–94. doi: 10.1007/s10573-005-0080-5
5. Hunter S.C., Cherry J.P., Kligel J.P., Waldman C.H. (1981) Gas-particle nozzle flows with reaction and particle size change. *Lecture Notes in Physics. AIAA Paper*. 37. pp. 1–14. doi: 10.2514/6.1981-37
6. Glotov O.G. (2000) Condensed combustion products of aluminized propellants. II. Evolution of particles with distance from the burning surface. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 36(4). pp. 476–487. doi: 10.1007/bf02699478
7. Glotov O.G., Yagodnikov D.A., Vorobev V.S., Zarko V.E., Simonenko V.N. (2007) Ignition, combustion, and agglomeration of encapsulated aluminum particles in a composite solid propellant. II. Experimental studies of agglomeration. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 43(3). pp. 320–333. doi: 10.1007/s10573-007-0045-y
8. Jackson T.L., Najjar F.M., Buckmaster J. (2005) New aluminum agglomeration models and their use in solid-propellant-rocket simulations. *Journal of Propulsion and Power*. 21(5). pp. 925–936. doi: 10.2514/1.11888
9. Najjar F.M., Ferry J.P., Haselbacher A., Balachandar S. (2006) Simulations of solid-propellant rockets: effects of aluminum droplet size distribution. *Journal of Spacecraft and Rockets*. 43(6). pp. 1258–1270. doi: 10.2514/1.17326
10. Jeenu R., Pinumalla K., Deepak D. (2010) Size distribution of particles in combustion products of aluminized composite propellant. *Journal of Propulsion and Power*. 26(4). pp. 715–723. doi: 10.2514/1.43482
11. Rashkovskiy S.A. (2023) Model' nestatsionarnogo gorenija tverdykh topliv s nakopleniem kondensirovannykh produktov na poverkhnosti gorenija [Model of non-stationary combustion of solid energetic materials with accumulation of condensed products on the burning surface]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 86. pp. 104–119. doi: 10.17223/19988621/86/8

12. Babuk V.A., Budnyy N.L., Kuklin D.I., Nizyaev A.A. (2020) Model' evolyutsii mnogofaznogo potoka produktov sgoraniya v kamere dvigatel'noy ustanovki i rezul'taty ee chislennogo analiza [A model of the evolution of a multiphase flow of combustion products in a propulsion system chamber and the results of its numerical analysis]. *Izvestiya rossiyaskoy akademii raketnykh i artilleriyskikh nauk – Proceedings of the Russian Academy of Rocket and Artillery Sciences*. 1 (111). pp. 53–60.
13. Krayko A.N., Nigmatulin R.I., Starkov V.K., Sternin L.E. (1972) Mekhanika mnogofaznykh sred [Mechanics of multiphase media]. *Gidromekhanika – Hydromechanics*. 6. pp. 93–174.
14. Vasenin I.M., Arkhipov V.A., Butov V.G., Glazunov A.A., Trofimov V.F. (1986) *Gazovaya dinamika dvukhfaznykh techeniy v soplakh* [Gas dynamics of two-phase flows in nozzles]. Tomsk: Tomsk State University.
15. Rychkov A.D. (1988) *Matematicheskoe modelirovanie gazodinamicheskikh protsessov v kanalakh i soplakh* [Mathematical modeling of gas dynamic processes in channels and nozzles]. Novosibirsk: Nauka.
16. Pirumov U.G. (1988) *Obratnaya zadacha teorii sopla* [The inverse problem of nozzle theory]. Moscow: Mashinostroenie.
17. Vorozhtsov A.B., Glazunov A.A., De Luka L.T., Kuvshinov N.E., Eremin I.V., Tyryshkin I.M., Fassina M. (2014) Vliyanie primeneniya nanoal'yuminiya na gazodinamiku vysokoenergeticheskikh ustanovok [The impact of application of nanoaluminum on gas dynamics of high-energy systems]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(28). pp. 45–57.

**Сведения об авторах:**

**Ларкин Дмитрий Олегович** – инженер-исследователь лаборатории 101 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: d.m.i.t.r.y.l.a.r.k.i.n@mail.ru

**Еремин Иван Владимирович** – кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией 101 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: iveremin@niipmm.tsu.ru

**Information about the authors:**

**Larkin Dmitriy O.** (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: d.m.i.t.r.y.l.a.r.k.i.n@mail.ru

**Eremin Ivan V.** (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: iveremin@niipmm.tsu.ru

*Статья поступила в редакцию 24.11.2025; принята к публикации 08.12.2025*

*The article was submitted 24.11.2025; accepted for publication 08.12.2025*