

Научная статья

УДК 532.135

doi: 10.17223/19988621/98/12

## Влияние реологических характеристик полимерных расплавов на кинематику их течений в сходящихся каналах

Михаил Сергеевич Павлов<sup>1</sup>, Юрий Алексеевич Павлюк<sup>2</sup>,  
Григорий Владимирович Пышнограй<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Томский политехнический университет, Томск, Россия

<sup>2</sup> Алтайский государственный педагогический университет, Барнаул, Россия

<sup>3</sup> Алтайский государственный технический университет

им. И.И. Ползунова, Барнаул, Россия

<sup>1</sup> mspavlov@tpu.ru

<sup>2</sup> pawlyk1996@yandex.ru

<sup>3</sup> pyshnograi@mail.ru

**Аннотация.** Проведено сравнение неоднородных двумерных течений полимерных расплавов с различной структурой макромолекул в каналах с прямоугольным сечением и внезапным сужением. Показано, что при моделировании течения полимера с разветвленной структурой в области входа в щелевой канал возникает возвратное течение, чего не наблюдается в случае течения линейного полимера с близким значением начальной сдвиговой вязкости. Для расчетов использовалась реологическая модель Виноградова–Покровского, поля скоростей и напряжений были получены методом конечных элементов. Полученные результаты демонстрируют хорошее соответствие между теоретическими и экспериментальными данными.

**Ключевые слова:** реология, вязкость, расплавы полимеров, вихревое течение, реологическое уравнение состояния, двумерные течения, метод конечных элементов

**Благодарности:** Авторы выражают свою признательность Центру вычислительной механики и компьютерного инжиниринга при ТПУ за помощь в проведении вычислений с использованием вычислительной среды COMSOL Multiphysics.

**Для цитирования:** Павлов М.С., Павлюк Ю.А., Пышнограй Г.В. Влияние реологических характеристик полимерных расплавов на кинематику их течений в сходящихся каналах // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 98. С. 136–150. doi: 10.17223/19988621/98/12

Original article

## Effect of rheological properties of polymer melts on kinematics of their flows in converging channeles

Mikhail S. Pavlov<sup>1</sup>, Yuriy A. Pavlyuk<sup>2</sup>, Grigoriy V. Pyshnograi<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Tomsk Polytechnical University, Tomsk, Russian Federation

<sup>2</sup> Altai State Pedagogical University, Barnaul, Russian Federation

<sup>3</sup>Altai State Technical University, Barnaul, Russian Federation

<sup>1</sup>mspavlov@tpu.ru

<sup>2</sup>pawlyk1996@yandex.ru

<sup>3</sup>pyshnograi@mail.ru

**Abstract.** This study uses a modified Vinogradov–Pokrovsky rheological model to investigate two-dimensional flows of polymer melts with different molecular structures in channels with a rectangular cross-section and a sudden contraction. The effect of the polymer structure on the flow behavior is analyzed. It is shown that the branched polymer exhibits a reverse flow in the entrance region of the slit channel, whereas the linear polymer does not induce secondary flows. This effect is found to be governed by the polymer relaxation time, i.e., the Weissenberg number.

The profiles of the  $x$ - and  $y$ -components of the velocity vector are examined in several cross-sections upstream of the slit channel and within the channel. For the branched polymer, the  $x$ -component of the velocity takes both positive and negative values, and the  $y$ -component is directed away from the channel axis, which indicates the presence of a reverse flow. The branched polymer demonstrates a non-parabolic velocity profile in the slit channel, in contrast to the linear polymer, whose velocity distribution is close to parabolic.

In all the considered cases, the computed velocity profiles are compared with the experimental data. The obtained results confirm the applicability of the modified Vinogradov–Pokrovsky rheological model for describing non-uniform flows of polymer melts, as well as the efficiency of finite-element-based computational methods for simulating unsteady two-dimensional flows of nonlinear viscoelastic media with a rheological law written in a differential form.

**Keywords:** rheology, viscosity, polymer melts, vortex flow, rheological equation of state, two-dimensional flows, finite element method

**Acknowledgments:** The authors express their gratitude to the Center for Computational Mechanics and Computer Engineering at Tomsk Polytechnical University for their assistance in performing computations using the COMSOL Multiphysics computing environment.

**For citation:** Pavlov, M.S., Pavlyuk, Yu.A., Pyshnograi, G.V. (2025) Effect of rheological properties of polymer melts on kinematics of their flows in converging channels. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 98. pp. 136–150. doi: 10.17223/19988621/98/12

## Введение

В процессе переработки большинство полимерных материалов находится в вязкотекучем состоянии. Одна из причин изучения вторичных течений при входе в канал связана с тем, что при экструзии полимерных расплавов часто используются каналы с изменяющейся геометрией. Это приводит к образованию вторичных течений, в которых расплав медленно вращается. Длительное пребывание в таком состоянии может вызвать нежелательное термическое разложение, что негативно влияет на качество конечного продукта. Для успешной переработки полимеров необходимо тщательно проектировать штампы и переходные элементы, а также выбирать подходящие материалы и условия обработки, чтобы предотвратить нежелательные эффекты.

Помимо этого, вихревые потоки связаны с изменениями гидродинамической структуры расплава. Когда энергия упругости во вторичном течении достигает критического уровня напряжения, скорость перед выходом из емкости увеличивается

по сравнению со скоростью выхода. Таким образом, проточная система способствует аккумуляции энергии (усиливается вторичный поток), что в конечном итоге приводит к формированию струй расплава, которые попадают в основной поток, вызывая случайные дефекты экструдата.

Работа [1] была одной из первых, где теоретический анализ двумерного течения был проведен независимо от экспериментов по визуализации. Исследовалось течение в сходящемся канале, образованном двумя параллельными плоскостями, которые сходятся к вершине прямоугольного конуса. Дальнейшие исследования этой проблемы с применением вязкоупругих реологических моделей и процедур возмущений были проведены в работах [2–6]. В этих исследованиях авторы получили схожие результаты, которые отличаются в деталях, вероятно, из-за алгебраических погрешностей. В работе [7] были получены численные решения для областей с закругленными и выступающими углами, что привело к возникновению угловых вторичных течений.

В работе [8] было проведено первое систематическое теоретическое исследование вторичных течений на входе для расплавов полимеров. В ходе исследования изучался процесс плоского резкого сжатия несжимаемой жидкости с высокой сдвиговой вязкостью. Это касалось как ньютоновских, так и неньютоновских жидкостей со степенным законом. Исследователи обнаружили, что в ньютоновской жидкости в углу резервуара формируется небольшой и слабый вихрь. Однако уменьшение сдвиговой вязкости приводит к уменьшению размеров и интенсивности вихря. Практические расчеты не подтвердили усиление слабого углового вихря, как это наблюдалось в эксперименте. Для преодоления вычислительных трудностей авторы использовали две упрощенные реологические модели, основанные на экспериментальных данных о течении на входе и выходе для типичного образца расплава полистирола [9]. Обе модели имели сдвиговую вязкость, которая зависела от скорости деформации и соответствовала модели Карро.

Хотя вторичные потоки возникают из-за вязкоупругих напряжений, в экспериментах основное внимание уделялось визуализации поля скоростей. Это связано с тем, что изучение области вблизи входящего угла представляет собой сложную задачу [10–14].

В исследовании [15] была использована реологическая модель Гизекуса с восемью параметрами в изотермических условиях для анализа осесимметричного течения несжимаемого полимера LDPE. Авторы провели сравнение ньютоновского (первая итерация – слабое ньютоновское вторичное течение на входе) и полностью вязкоупругого (сходящееся – большое упругое вторичное течение на входе) решений. Результаты были представлены в виде графиков вдоль центральной линии и поперек капилляра. На графиках были показаны сдвиговые и нормальные вязкоупругие дополнительные напряжения вблизи входящего угла. Примечательно, что максимальное значение нормальных напряжений в ньютоновском решении примерно в 12 раз больше, чем в сходящемся решении с вторичными течениями. Из-за столь высокого поперечного нормального напряжения происходила рециркуляция части расплава.

Разработка модели Pom-Pom стала важным шагом в развитии реологических теорий [16]. Модель была протестирована на простых сдвиговых и одноосных растяжениях. Хотя результаты были многообещающими, остались вопросы относительно того, насколько хорошо модель сможет предсказывать более сложные течения [16–24].

В работах [25, 26] проведены расчеты течений с различными геометрией и реологическими свойствами. Было изучено плоское течение вязкой несжимаемой жидкости в Т-образном канале [25] и трубе с внезапным сужением [26].

В работе [27] была применена модифицированная модель Виноградова–Покровского, адаптированная для анализа трехмерного потока полимерных расплавов LDPE и LLDPE через щель с резким входом 14:1. Эта модель была применена к экспериментальным данным [14]. В ходе исследования [27] было установлено, что выбранная реологическая модель успешно предсказывает особенности течения на входе для обоих расплавов, включая вторичное течение в случае LDPE.

Таким образом, для более глубокого понимания происходящих процессов требуется изучение влияния реологических характеристик полимерного расплава (его начальной сдвиговой вязкости и начального времени релаксации) на гидродинамическую структуру течения в сходящемся канале как в области входа, так и в самом щелевом канале. Это является целью настоящей работы.

### Реологическая модель Виноградова–Покровского

Система уравнений динамики на основе модифицированной модели Виноградова–Покровского была сформулирована ранее [28–30]:

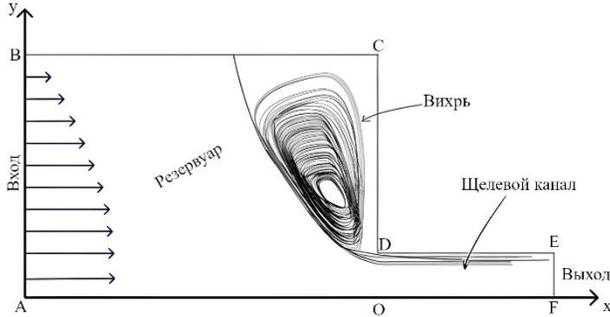
$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ \text{Re} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta_1}{\eta_0} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{\partial a_{11}}{\partial x} + \frac{\partial a_{12}}{\partial y} \right), \\ \text{Re} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\eta_1}{\eta_0} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{\partial a_{12}}{\partial x} + \frac{\partial a_{22}}{\partial y} \right), \\ \text{Wi} \left( \frac{d}{dt} a_{11} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} a_{11} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} a_{12} \right) + (1 + (\kappa - \beta)I) a_{11} &= 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \text{Wi} \beta (a_{11}^2 + a_{12}^2), \\ \text{Wi} \left( \frac{d}{dt} a_{22} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} a_{12} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} a_{22} \right) + (1 + (\kappa - \beta)I) a_{22} &= 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \text{Wi} \beta (a_{22}^2 + a_{12}^2), \\ \text{Wi} \left( \frac{d}{dt} a_{12} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} a_{12} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} a_{22} \right) &= \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \text{Wi} \beta (a_{11} a_{12} + a_{12} a_{22}). \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\text{Re} = \rho U l / \eta_0$  – числа Рейнольдса;  $\text{Wi} = (\tau_0 U) / l$  – число Вайсенберга;  $U = Q / (\rho l^2)$  – характерная скорость;  $l$  – характерная длина;  $Q$  – массовый расход;  $\tau_0$  – начальное время релаксации;  $p$  – гидростатическое давление;  $\eta_0$  – начальное значение сдвиговой вязкости;  $\eta_1$  – остаточная сдвиговая вязкость полимера ( $\eta_1 \ll \eta_0$ );  $a_{ik}$  – симметричный тензор анизотропии второго ранга;  $I = a_{11} + a_{22} + a_{33}$  – первый инвариант тензора анизотропии  $a_{ik}$ ;  $\kappa = 1.2\beta$  и  $\beta = \beta(I) = (\beta_0 + p_0 I) / (1 + \sqrt{p_0 I})$  – феноменологические параметры модели, которые зависят от первого инварианта тензора анизотропии [31] и учитываются в уравнениях динамики макромолекулы размеры и форму молекулярного клубка.

Эти уравнения далее будут применяться для моделирования течений полимерных расплавов.

### Расчетная область

На рис. 1 показана расчетная область, которая состоит из половины резервуара с квадратным поперечным сечением и щелевой матрицы. Резервуар  $ABCO$  имеет размеры  $50 \times 7$  мм. Щелевой канал  $ODEF$  –  $40 \times 0.5$  мм. Расчетная область представляет собой половину экспериментальной установки, размеры которой соотносятся как 14:1, взятой из работы [10]. Длины прямоугольников были выбраны достаточно большими, чтобы избежать влияния областей входа в резервуар и выхода из щелевого канала на результаты решения.



**Рис. 1.** Расчетная область  
**Fig. 1.** Computational region

На границах резервуара макромолекулы полимера прилипают к стенкам точного канала, поэтому на отрезках  $BC$ ,  $CD$  и  $DE$  скорости  $u = v = 0$ .

Отрезок  $AF$  является осью симметрии, поэтому при  $y = 0$  соответствующие частные производные равны нулю. На входе в резервуар компоненты скорости рассчитываются по формулам  $v(-50/l, y/7) = 0$  и  $u(-50/l, y/7) = 1.5(1 - (y/7)^2)$ , где  $y$  изменяется от 0 до 7. На выходе из щелевого канала  $FE$  использованы граничные условия  $p = 0$ ,  $\partial u/\partial x = 0$  и  $v = 0$ .

В начальный момент времени значения скоростей и напряжений равны нулю. После получения ненулевых значений эти значения использовались в качестве начальных для следующих итераций.

### Численный метод

Для нахождения решения использовался метод конечных элементов, который реализован в пакете *COMSOL Multiphysics*. Нелинейность задачи была преодолена путем использования многозадачного режима, что соответствует разделению на физические процессы: гидродинамический и вязкоупругий. В процессе решения гидродинамической задачи были определены поля скоростей и давлений, а в процессе решения вязкоупругой задачи поля дополнительных напряжений. Эти шаги повторяли до достижения необходимой точности, причем на каждой временной итерации требовалось от двух до шести повторений.

Для обоснования применения численного метода для решения систем уравнений в частных производных необходимо анализировать точность, стабильность и сходимость используемого алгоритма. Нередко решение таких задач вызывает не меньше сложностей, чем решение полученных систем нелинейных уравнений.

Поэтому оценку выполняли по упрощенной методике. Для этого выполняли расчеты на разных сетках триангулярного вида: 212, 848, 3 392 и 13 568 элементов. Контролировались площадь вихря и скорость потока в щелевом канале. Вторым параметром был учтен, потому что характеристики течения полимера меняются при переходе из резервуара в щелевой канал.

В табл. 1 представлены расчеты при  $Wi = 0.8$  и  $Re = 0.005$ .

Таблица 1

**Влияние числа элементов сетки на результаты моделирования**

Параметры	Число элементов			
	212	848	3 392	13 568
Площадь вихря	20.27	27.93	30.56	31.17
Значения скорости на оси канала	40.96	28	26	26.29

Поскольку грубая сетка имеет всего 212 элементов, то расчеты существенно отличаются от результатов, полученных с использованием более мелкой сетки. Однако использование более мелких сеток затрачивает значительно больше машинного времени – примерно на два порядка. Поэтому вычисления проводились на сетке с 848 элементами. Сетку с 3 392 элементами использовали для уточнения результатов.

Стабильность достигается неявной методикой и релаксацией при переходе к следующей итерации.

Безразмерное время варьирует от 0 до 100, а относительная точность – 0.001 на каждой временной итерации.

**Результаты**

Для сопоставления расчетов с экспериментальными данными обратимся к работам [10–14]. В этих работах в качестве материалов использовались два типа полиэтилена: LDPE (Lupolen 1840 H, Basell) и LLDPE (Escorene LLN 1201 XV, Exxon). LDPE обладает разветвленной молекулярной структурой, а LLDPE – линейной. Характеристические данные о материалах приведены в табл. 2, взятой из работы [14].

Таблица 2

**Характеристики материала**

Характеристики	LDPE	LLDPE
Плотность, $\rho$ (г/см <sup>3</sup> ), (25°C)	0.918	0.926
Молярная масса, $M_w$ (кг/моль)	245	150
Начальная сдвиговая вязкость, $\eta_0$ (Па), 150°C	54.500	25.500
Модуль упругости, $J_e^0$ (Па <sup>-1</sup> )	$7.7 \times 10^{-4}$	$< 8 \times 10^{-5}$
Время релаксации, $\eta_0 J_e^0$ (с)	$\sim 42$	$< 2$

Данные образцы по многим параметрам схожи между собой, однако полимер LLDPE имеет более низкую начальную вязкость и меньшее время релаксации по сравнению с LDPE.

Для выполнения расчетов течения подбирались параметры реологической модели  $k$ ,  $\beta$ ,  $\eta_0$  и  $\tau_0$ . Для этого использовались экспериментальные данные [14]. Для

образца LLDPE получены  $\eta_0 = 14\,500$  Па,  $\tau_0 = 0.01$  с, а для LDPE  $\eta_0 = 18\,500$  Па,  $\tau_0 = 0.45$  с. Значения для начальной сдвиговой вязкости отличаются от приведенных в табл. 2, потому что в экспериментах [14] измерения проводили при  $180^\circ\text{C}$ . Параметры  $\beta = 0.1$  и  $\kappa = 0.12$  оказались одинаковыми для обоих образцов полимеров. Значение плотности  $\rho$  для полимера LDPE составляет  $918$  кг/м<sup>3</sup>, для LLDPE –  $926$  кг/м<sup>3</sup>. Расчеты проводились при числах Вайсенберга  $Wi = 0.45$  для LDPE,  $Wi = 0.01$  для LLDPE, а также при числах Рейнольдса  $Re = 6 \cdot 10^{-6}$  для LDPE и  $Re = 4 \cdot 10^{-6}$  для LLDPE.

Сначала рассмотрим результаты расчетов для образца LDPE [10, 14]. В этом случае изменение поля скоростей в резервуаре перед входом в плоскую фильеру показано профилями  $x$ -компоненты вектора скорости  $u$  в различных сечениях:  $x = -1, -3, -5, -8$  (рис. 2). По мере приближения к входу в щелевой канал происходит деформация профиля скорости  $u$ . При этом максимальная скорость течения полимерного расплава увеличивается, а скорость в промежутке от 0.5 до 7 мм уменьшается и даже становится отрицательной. Результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными [10, 14].

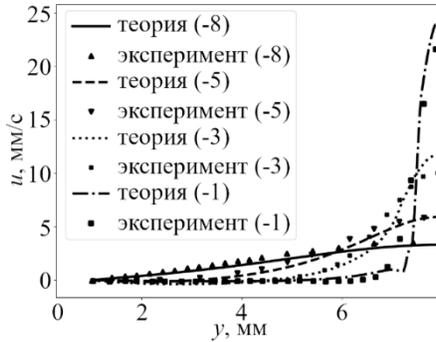


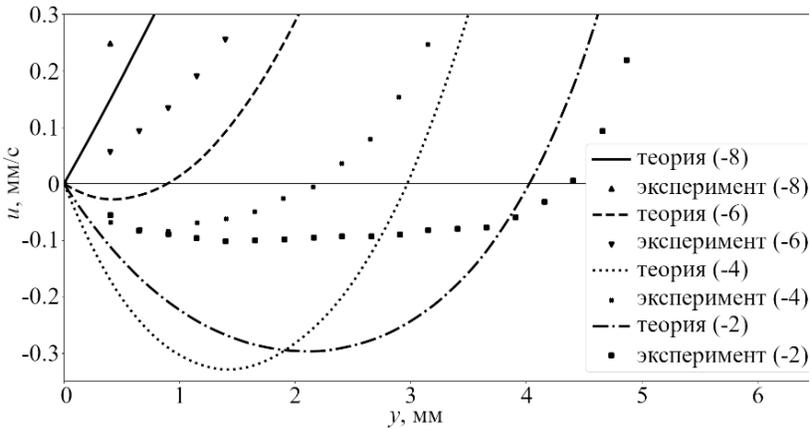
Рис. 2. Зависимость  $x$ -компоненты вектора скорости  $u$  при разных значениях  $x = -1, -3, -5, -8$

Fig. 2. Dependence of the  $x$ -component of velocity vector  $u$  at different values of  $x = -1, -3, -5, -8$

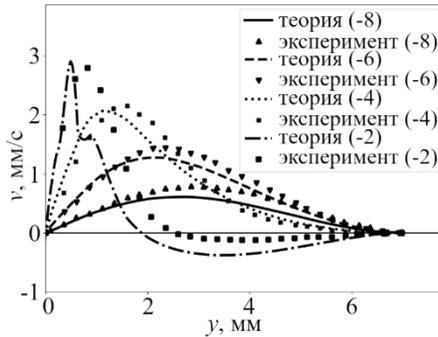
Для оценки малых скоростей профили продольной скорости в области входа в канал были воспроизведены в увеличенном масштабе (рис. 3).

Из рис. 3 видно, что существуют отрицательные значения  $x$ -компоненты вектора скорости. Изменение знака показывает, что эта часть расплава действительно меняет направление движения при приближении к щелевой матрице. То есть поток разворачивается в сторону, противоположную направлению экструзии. Это явление можно объяснить наличием вихрей над плоскостью входа, которые уже были обнаружены в экспериментах [10, 12].

Также для полимера LDPE были получены профили  $y$ -компоненты вектора скорости  $v$  в резервуаре (рис. 4). В верхней части канала поток закручивается против часовой стрелки, и поэтому  $y$ -компонента скорости принимает как положительные значения (при  $0 \leq y \leq 2$ ), так и отрицательные (при  $y > 2$ ). Значения скоростей на этих участках достигают 15% от значений, направленных к центру. Этот результат также указывает на наличие вихревого течения, обнаруженного в экспериментах [10, 12].



**Рис. 3.**  $x$ -компонента вектора скорости  $u$   
**Fig. 3.**  $x$ -component of velocity vector  $u$



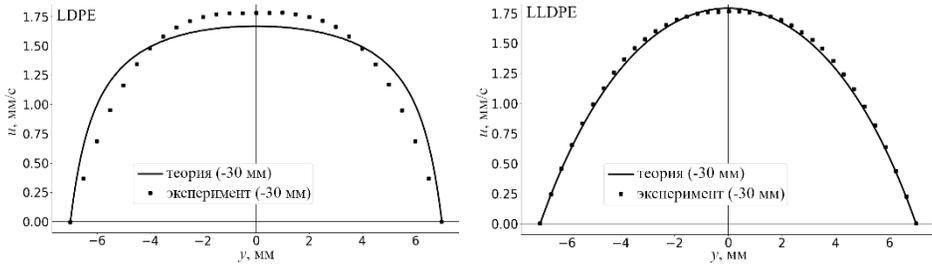
**Рис. 4.** Зависимость  $y$ -компоненты вектора скорости  $v$  при разных значениях  $x = -1, -3, -5, -8$   
**Fig. 4.** Dependence of the  $y$ -component of velocity vector  $v$  at different values of  $x = -1, -3, -5, -8$

Далее в ходе исследования были сопоставлены характеристики двух видов полимеров LDPE и LLDPE. Продемонстрировано, как структура полимера влияет на установившийся профиль скорости как в резервуаре, так и в щелевом канале [31].

На рис. 5 изображены поля скоростей для  $x$ -компоненты вектора скорости  $u$  полимеров LDPE и LLDPE в резервуаре при значении  $x = -30$  мм. На рис. 6 изображены поля скоростей для  $x$ -компоненты вектора скорости  $u$  полимеров LDPE и LLDPE в щелевом канале при значении  $x = 30$  мм.

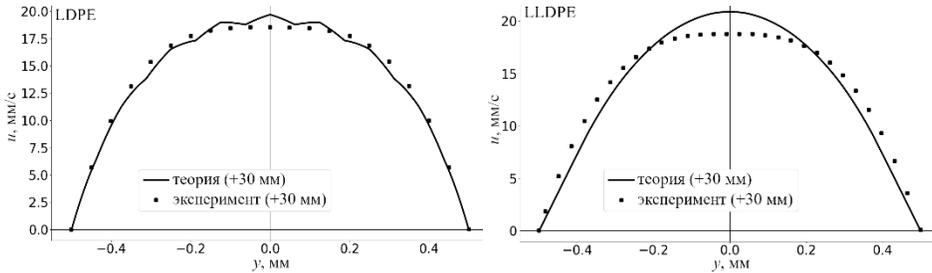
Во всех случаях наблюдается отклонение установившегося профиля скорости от параболического, который характерен для ньютоновских сред. При этом образец LDPE демонстрирует более сильное отклонение от параболического профиля, чем LLDPE. В этом случае полимер LDPE демонстрирует высокую степень соответствия между профилем скорости и экспериментальными данными [14].

Таким образом, профили скоростей для разветвленного полиэтилена LDPE существенно отличаются от параболического, в отличие от полиэтилена с макромолекулами LLDPE, обладающими линейной структурой.



**Рис. 5.** Зависимость  $x$ -компоненты вектора скорости  $u$  при  $x = -30$  мм для полимеров LDPE и LLDPE

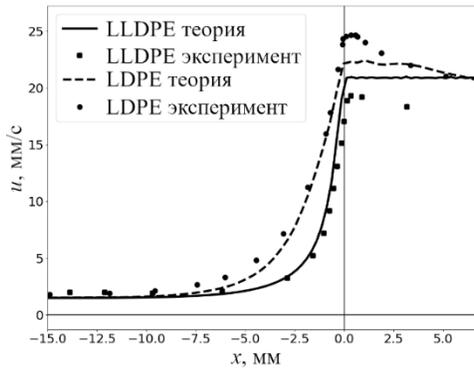
**Fig. 5.** Dependence of the  $x$ -component of velocity vector  $u$  at  $x = -30$  mm for LDPE and LLDPE polymers



**Рис. 6.** Зависимость  $x$ -компоненты вектора скорости  $u$  при  $x = 30$  мм для полимеров LDPE и LLDPE

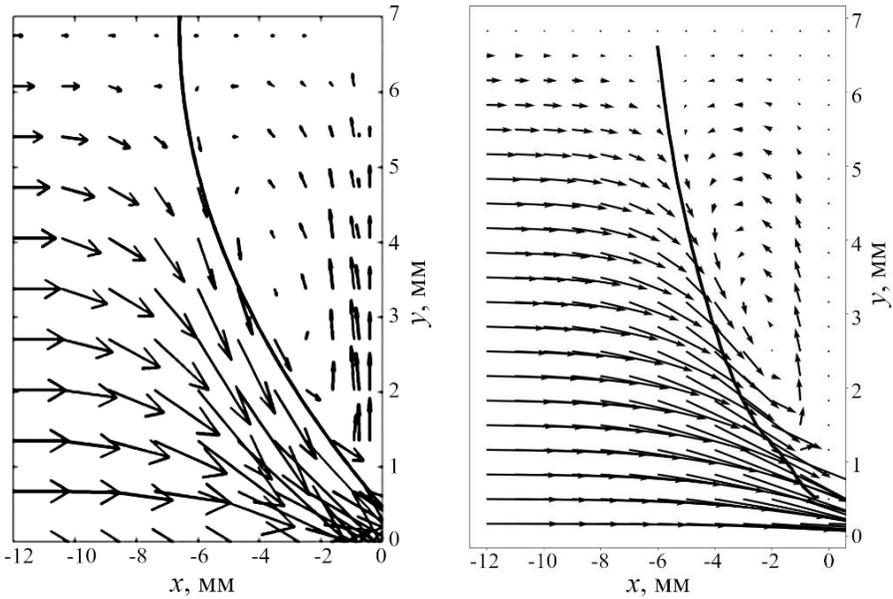
**Fig. 6.** Dependence of the  $x$ -component of velocity vector  $u$  at  $x = 30$  mm for LDPE and LLDPE polymers

Кроме того, интерес представляет распределение  $x$ -компоненты вектора скорости вдоль оси канала. На рис. 7 представлено сравнение  $x$ -компоненты вектора скорости вдоль оси симметрии канала с экспериментальными данными [14].

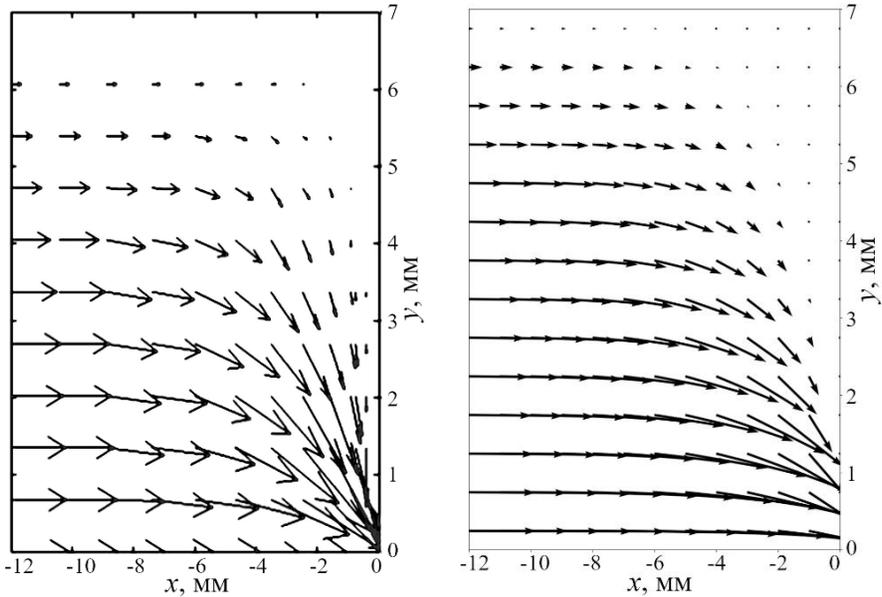


**Рис. 7.** Распределение  $x$ -компоненты вектора скорости вдоль оси канала для двух образцов полимеров

**Fig. 7.** Variation of the  $x$ -component of the velocity vector along the channel axis for two polymer samples



**Рис. 8.** Поле скоростей во входной области полимера LDPE в сечении  $z = 0$  мм: слева – эксперимент; справа – теория  
**Fig. 8.** Velocity field in section  $z = 0$  mm for LDPE polymer in the inlet region: experiment (on the left) and theory (on the right)



**Рис. 9.** Поле скоростей во входной области полимера LLDPE в сечении  $z = 0$  мм: слева – эксперимент; справа – теория  
**Fig. 9.** Velocity field in section  $z = 0$  mm for LLDPE polymer in the inlet region: experiment (on the left) and theory (on the right)

Из рис. 7 видно, что максимальная скорость на оси канала наблюдается в момент входа в щель. Более того, этот максимум выше для разветвленного полиэтилена LDPE. Полученные результаты качественно согласуются с экспериментами.

Далее проведено сравнение вихревых зон для рассматриваемых полимерных образцов. Показано, что при течении полимера LDPE перед входом в щелевой канал образуется выраженный вторичный поток (рис. 8). Полимер LLDPE сохраняет стабильность потока, не создавая вторичных течений (рис. 9). Важно отметить, что значения вязкости у этих образцов отличаются незначительно, поэтому данный эффект связан с временным параметром  $\tau_0$ .

Все эти эффекты были выявлены в ходе численного моделирования и хорошо согласуются с результатами экспериментов [14].

### Заключение

Таким образом, выполнено исследование течения полимерного расплава в канале с прямоугольным сечением с внезапным сужением с применением реологической модели Виноградова–Покровского. Были определены  $x$ - и  $y$ -компоненты вектора скорости и проведено сравнение с экспериментальными данными.

Осуществлено сравнение характеристик двух полимерных образцов, имеющих различную молекулярную структуру. Исследовано влияние строения полимера на характер его течение. Выявлено, что при течении разветвленного полимера в углу резервуара над входом в щелевой канал образуется выраженный вторичный поток, который не наблюдается при течении линейного полимера. Установлено, что данный эффект связан с временем релаксации полимера.

Кроме того, в щелевом канале полимер с разветвленной молекулярной структурой имеет непараболический профиль продольной скорости в отличие от образца линейного полимера, имеющего профиль, близкий к параболическому. Согласно расчетам, профиль скорости формируется на значительном расстоянии от входа в щель. Это важно учитывать как при проведении измерений в узких частях каналов, так и при проведении вычислительных экспериментов.

Таким образом, исходя из полученных результатов, можно ожидать, что модифицированная реологическая модель Виноградова–Покровского окажется также применима и для других типов геометрии каналов, например Т-образного канала, цилиндрического канала, прямоугольного канала с препятствием и др., что будет сделано в будущих исследованиях. Кроме того, результаты показывают эффективность применения вычислительных методов, основанных на методе конечных элементов, для расчета нестационарных двумерных течений нелинейных вязкоупругих сред с реологическим законом поведения в дифференциальной форме. Также разработанная математическая модель может послужить отправной точкой для будущих исследований, направленных на изучение того, как геометрия канала, молекулярное строение полимера и температура влияют на характер течения в сужающихся каналах.

### Список источников

1. *Langlois W.E.* Steady flow of slightly visco-elastic fluids: Dissertation / Brown University, 1957.
2. *Schümmer P.* Zum Fließverhalten Nicht-Newtonscher Flüssigkeiten in konischen Düsen // *Rheologica Acta*. 1967. V. 6. P. 192–200. doi: 10.1007/BF01969173

3. Schümmer P. Die Strömung viskoelastischer Flüssigkeiten in einem konvergenten Kanal // *Rheologica Acta*. 1968. V. 7. P. 271–277. doi: 10.1007/BF01985789
4. Strauß K., Kinast R. Sekundärströmungseffekte beim Strömen viskoelastischer Flüssigkeiten durch Keilspaltdüsen // *Colloid and Polymer Science*. 1974. V. 252. P. 753–758. doi: 10.1007/BF01554502
5. Strauss K. Die Strömung einer einfachen viskoelastischen Flüssigkeit in einem konvergenten Kanal // *Acta Mechanica*. 1974. V. 20. P. 233–246. doi: 10.1007/BF01175926
6. Strauß K. Die Strömung einer einfachen viskoelastischen Flüssigkeit in einem konvergenten Kanal // *Acta Mechanica*. 1975. V. 21. P. 141–152. doi: 10.1007/BF01172833
7. Datta A.B., Strauß K. Slow flow of a viscoelastic fluid through a contraction // *Rheologica Acta*. 1976. V. 15. P. 403–410. doi: 10.1007/BF01574495
8. Mitsoulis E., Vlachopoulos J., Mirza F.A. Numerical simulation of entry and exit flows in slit dies // *Polymer Engineering & Science*. 1984. V. 24 (9). P. 707–715.
9. Mitsoulis E., Vlachopoulos J., Mirza F.A. A numerical study of the effect of normal stresses and elongational viscosity on entry vortex growth and extrudate swell // *Polymer Engineering & Science*. 1985. V. 25 (1). P. 677–689.
10. Münstedt H., Schwetz M., Heindl M., Schmidt M. Influence of molecular structure on secondary flow of polyolefin melts as investigated by laser-Doppler velocimetry // *Rheologica Acta*. 2001. V. 40. P. 384–394. doi: 10.1007/s003970000160
11. Mitsoulis E., Schwetz M., Münstedt H. Entry flow of LDPE melts in a planar contraction // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2003. V. 111 (1). P. 41–61. doi: 10.1016/s0377-0257(03)00012-0
12. Merten A., Schwetz M., Münstedt H. Laser-Doppler velocimetry – a powerful tool to investigate the flow behavior of polymer melts // *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. 2003. V. 8. P. 283–288.
13. Hertel D., Münstedt H. Dependence of the secondary flow of a low-density polyethylene on processing parameters as investigated by laser-Doppler velocimetry // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2008. V. 153 (2-3). P. 73–81. doi: 10.1016/j.jnnfm.2007.12.004
14. Hertel D., Valette R., Münstedt H. Three-dimensional entrance flow of a low-density polyethylene (LDPE) and a linear low-density polyethylene (LLDPE) into a slit die // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2008. V. 153 (2-3). P. 82–94. doi: 10.1016/j.jnnfm.2007.11.010
15. Hulsen M.A., van der Zanden J. Numerical simulation of contraction flows using a multi-mode Giesekus model // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 1991. V. 38 (2-3). P. 183–221. doi: 10.1016/0377-0257(91)83005-O
16. McLeish T.C.B., Larson R.G. Molecular constitutive equations for a class of branched polymers: the Pom-Pom polymer // *Journal of Rheology*. 1998. V. 42 (1). P. 81–110. doi: 10.1122/1.550933
17. Bishko G.B., McLeish T.C.B., Harlen O.G., Larson R.G. Theoretical molecular rheology of branched polymers in simple and complex flows: the Pom-Pom model // *Physical Review Letters*. 1997. V. 79 (12). P. 2352–2355. doi: 10.1103/PhysRevLett.79.2352
18. Bishko G.B., Harlen O.G., McLeish T.C.B., Nicholson T.M. Numerical simulation of the transient flow of branched polymer melts through a planar contraction using the ‘Pom-Pom’ model // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 1999. V. 82 (2-3). P. 255–273. doi: 10.1016/S0377-0257(98)00165-7
19. Clemeur N., Rutgers R., Debbaut B. Numerical evaluation of three dimensional effects in planar flow birefringence // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2004. V. 123 (2). P. 105–120. doi: 10.1016/j.jnnfm.2004.07.002
20. Sirakov I., Ainsler A., Haouche M., Guillet J. Three-dimensional numerical simulation of viscoelastic contraction flows using the Pom-Pom model differential constitutive model // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2005. V. 126 (2). P. 163–173. doi: 10.1016/j.jnnfm.2004.08.013

21. Sousa P.C., Coelho P.M., Oliveira M.S.N., Alves M.A. Effect of the contraction ratio upon viscoelastic fluid flow in three-dimensional square-square contractions // *Chemical Engineering Science*. 2011. V. 66 (5). P. 998–1009. doi: 10.1016/j.ces.2010.12.011
22. Griebel M., Ruttgers A. Multiscale simulations of three-dimensional viscoelastic flows in a square-square contraction // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2014. V. 205. P. 41–63. doi: 10.1016/j.jnnfm.2014.01.004
23. Wang X., Chen R., Wang M., Jin G. Validation of double convected Pom-Pom model with particle image velocimetry technique // *Polymer Engineering and Science*. 2015. V. 55 (8). P. 1897–1905. doi: 10.1002/pen.24030
24. Clemeur N., Rutgers R.P., Debbaut B. On the evaluation of some differential formulations for the pom-pom constitutive model // *Rheologica Acta*. 2003. V. 42. P. 217–231. doi: 10.1007/s00397-002-0279-2
25. Борзенко Е.И., Дьякова О.А. Исследование течения вязкой жидкости в т-образном канале с условиями прилипания–скольжение на твердой стенке // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2016. № 4 (42). С. 58–69. doi: 10.17223/19988621/42/6
26. Борзенко Е.И., Рылцева К.Е., Шрагер Г.Р. Численное исследование характеристик течения неньютоновской жидкости в трубе с внезапным сужением // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2019. № 58. С. 56–70. doi: 10.17223/19988621/58/5
27. Кошелев К.Б., Пышиноград Г.В., Толстых М.Ю. Моделирование трехмерного течения полимерного расплава в сходящемся канале с прямоугольным сечением // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*. 2015. № 3. С. 3–11.
28. Мерзликина Д.А., Пышиноград Г.В., Пивоконский Р., Филип П. Реологическая модель для описания вискозиметрических течений расплавов разветвленных полимеров // *Инженерно-физический журнал*. 2016. Т. 89, № 3. С. 643–651.
29. Макарова М.А., Малыгина А.С., Пышиноград Г.В., Рудаков Г.О. Моделирование реологических свойств расплавов полиэтиленов при их одноосном растяжении // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2020. Т. 13, № 1. С. 73–82. doi: 10.7242/1999-6691/2020.13.1.6
30. Капустина Л.В., Павлюк Ю.А., Пышиноград Г.В. Гидродинамическая структура вторичных потоков расплавов полимеров в каналах с изменением геометрии // *Южно-Сибирский научный вестник*. 2023. № 6 (52). С. 101–105. doi: 10.25699/SSSB.2023.52.6.012
31. Гусев А.С., Макарова М.А., Пышиноград Г.В. Мезоскопическое уравнение состояния полимерных сред и описание динамических характеристик на его основе // *Инженерно-физический журнал*. 2005. Т. 78, № 5. С. 55–61.

### References

1. Langlois W.E. (1957) *Steady Flow of Slightly Visco-elastic Fluids*. Dissertation. Brown University.
2. Schümmer P. (1967) Zum Fließverhalten Nicht-Newtonscher Flüssigkeiten in konischen Düsen. *Rheologica Acta*. 6. pp. 192–200. doi: 10.1007/BF01969173
3. Schümmer P. (1968) Die Strömung viskoelastischer Flüssigkeiten in einem konvergenten Kanal. *Rheologica Acta*. 7. pp. 271–277. doi: 10.1007/BF01985789
4. Strauß K., Kinast R. (1974) Sekundärströmungseffekte beim Strömen viskoelastischer Flüssigkeiten durch Keilspaltdüsen. *Colloid and Polymer Science*. 252. pp. 753–758. doi: 10.1007/BF01554502
5. Strauss K. (1974) Die Strömung einer einfachen viskoelastischen Flüssigkeit in einem konvergenten Kanal. *Acta Mechanica*. 20. pp. 233–246. doi: 10.1007/BF01175926
6. Strauß K. (1975) Die Strömung einer einfachen viskoelastischen Flüssigkeit in einem konvergenten Kanal. *Acta Mechanica*. 21. pp. 141–152. doi: 10.1007/BF01172833

7. Datta A.B., Strauß K. (1976) Slow flow of a viscoelastic fluid through a contraction. *Rheologica Acta*. 15. pp. 403–410. doi: 10.1007/BF01574495
8. Mitsoulis E., Vlachopoulos J., Mirza F.A. (1984) Numerical simulation of entry and exit flows in slit dies. *Polymer Engineering & Science*. 24(9). pp. 707–715. doi: 10.1002/pen.760240913
9. Mitsoulis E., Vlachopoulos J., Mirza F.A. (1985) A numerical study of the effect of normal stresses and elongational viscosity on entry vortex growth and extrudate swell. *Polymer Engineering & Science*. 25(1). pp. 677–689. doi: 10.1002/pen.760251106
10. Münstedt H., Schwetz M., Heindl M., Schmidt M. (2001) Influence of molecular structure on secondary flow of polyolefin melts as investigated by laser-Doppler velocimetry. *Rheologica Acta*. 40. pp. 384–394. doi: 10.1007/s003970000160
11. Mitsoulis E., Schwetz M., Münstedt H. (2003) Entry flow of LDPE melts in a planar contraction. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 111(1). pp. 41–61. doi: 10.1016/s0377-0257(03)00012-0
12. Merten A., Schwetz M., Münstedt H. (2003) Laser-Doppler velocimetry – a powerful tool to investigate the flow behavior of polymer melts. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. 8. pp. 283–288.
13. Hertel D., Münstedt H. (2008) Dependence of the secondary flow of a low-density polyethylene on processing parameters as investigated by laser-Doppler velocimetry. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 153(2-3). pp. 73–81. doi: 10.1016/j.jnnfm.2007.12.004
14. Hertel D., Valette R., Münstedt H. (2008) Three-dimensional entrance flow of a low-density polyethylene (LDPE) and a linear low-density polyethylene (LLDPE) into a slit die. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 153(2-3). pp. 82–94. doi: 10.1016/j.jnnfm.2007.11.010
15. Hulsen M.A., van der Zanden J. (1991) Numerical simulation of contraction flows using a multi-mode Giesekus model. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 38(2-3). pp. 183–221. doi: 10.1016/0377-0257(91)83005-O
16. McLeish T.C.B., Larson R.G. (1998) Molecular constitutive equations for a class of branched polymers: the Pom-Pom polymer. *Journal of Rheology*. 42(1). pp. 81–110. doi: 10.1122/1.550933
17. Bishko G.B., McLeish T.C.B., Harlen O.G., Larson R.G. (1997) Theoretical molecular rheology of branched polymers in simple and complex flows: the Pom-Pom model. *Physical Review Letters*. 79(12). pp. 2352–2355. doi: 10.1103/PhysRevLett.79.2352
18. Bishko G.B., Harlen O.G., McLeish T.C.B., Nicholson T.M. (1999) Numerical simulation of the transient flow of branched polymer melts through a planar contraction using the ‘Pom-Pom’ model. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 82(2-3). pp. 255–273. doi: 10.1016/S0377-0257(98)00165-7
19. Clemeur N., Rutgers R., Debbaut B. (2004) Numerical evaluation of three dimensional effects in planar flow birefringence. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 123(2). pp. 105–120. doi: 10.1016/j.jnnfm.2004.07.002
20. Sirakov I., Ainsler A., Haouche M., Guillet J. (2005) Three-dimensional numerical simulation of viscoelastic contraction flows using the Pom-Pom model differential constitutive model. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 126(2). pp. 163–173. doi: 10.1016/j.jnnfm.2004.08.013
21. Sousa P.C., Coelho P.M., Oliveira M.S.N., Alves M.A. (2011) Effect of the contraction ratio upon viscoelastic fluid flow in three-dimensional square-square contractions. *Chemical Engineering Science*. 66(5). pp. 998–1009. doi: 10.1016/j.ces.2010.12.011
22. Griebel M., Ruttgers A. (2014) Multiscale simulations of three-dimensional viscoelastic flows in a square-square contraction. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 205. pp. 41–63. doi: 10.1016/j.jnnfm.2014.01.004
23. Wang X., Chen R., Wang M., Jin G. (2015) Validation of double convected Pom-Pom model with particle image velocimetry technique. *Polymer Engineering and Science*. 55(8). pp. 1897–1905. doi: 10.1002/pen.24030

24. Clemeur N., Rutgers R.P., Debbaut B. (2003) On the evaluation of some differential formulations for the pom-pom constitutive model. *Rheologica Acta*. 42. pp. 217–231. doi: 10.1007/s00397-002-0279-2
25. Borzenko E.I., D'yakova O.A. (2016) Issledovanie techeniya вязкой zhidkosti v T-obraznom kanale s usloviyami prilipaniya - skol'zheniya na tverдой stenke [Investigation of viscous fluid flow in T-shaped channel with no slip/slip boundary conditions on the solid wall]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(42). pp. 58–69. doi: 10.17223/19988621/42/6
26. Borzenko E.I., Ryltseva K.E., Shrager G.R. (2019) Chislennoe issledovanie kharakteristik techeniya nen'yutonovskoy zhidkosti v trube s vnezapnym suzheniem [Numerical investigation of non-Newtonian fluid flow through a pipe sudden contraction]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 58. pp. 56–70. doi: 10.17223/19988621/58/5
27. Koshelev K.B., Pyshnograi G.V., Tolstykh M.Y. (2015) Modeling of the three-dimensional flow of polymer melt in a convergent channel of rectangular cross-section. *Fluid Dynamics*. 50(3). pp. 315–321. doi: 10.1134/S0015462815030011
28. Merzlikina D.A., Pyshnograi G.V., Pivokonsky R., Philip P. (2016) Rheological model for describing viscometric flows of melts of branched polymers. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 89. pp. 652–659. doi: 10.1007/s10891-016-1423-7
29. Makarova M.A., Malygina A.S., Pyshnograi G.V., Rudakov G.O. (2021) Simulation of rheological properties of polyethylene melts under uniaxial tension. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 62. pp. 1063–1071. doi: 10.1134/S0021894421070142
30. Kapustina L.V., Pavlyuk Yu.A., Pyshnograi G.V. (2024) Hydrodynamic structure of secondary polymer melt flows in channels with changing geometry. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. doi: 10.1134/S0040579524601006
31. Gusev A.S., Makarova M.A., Pyshnograi G.V. (2005) Mesoscopic equation of state of polymer systems and description of the dynamic characteristics based on it. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 78. pp. 892–898. doi: 10.1007/s10891-006-0009-1

#### **Сведения об авторах:**

**Павлов Михаил Сергеевич** – кандидат физико-математических наук, доцент Томского политехнического университета (Томск, Россия). E-mail: mspavlov@tpu.ru

**Павлюк Юрий Алексеевич** – аспирант Алтайского государственного педагогического университета (Барнаул, Россия). E-mail: pawlyk1996@yandex.ru

**Пышнограй Григорий Владимирович** – доктор физико-математических наук, профессор Алтайского государственного технического университета им. И.И. Ползунова (Барнаул, Россия). E-mail: pyshnograi@mail.ru

#### **Information about the authors:**

**Pavlov Mikhail S.** (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk Polytechnical University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: mspavlov@tpu.ru

**Pavlyuk Yuriy A.** (Altai State Pedagogical University, Barnaul, Russian Federation). E-mail: pawlyk1996@yandex.ru

**Pyshnograi Grigoriy V.** (Doctor of Physics and Mathematics, Altai State Technical University, Barnaul, Russian Federation). E-mail: pyshnograi@mail.ru

*Статья поступила в редакцию 11.12.2024; принята к публикации 08.12.2025*

*The article was submitted 11.12.2024; accepted for publication 08.12.2025*