

В Е С Т Н И К
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2026

№ 99

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский
Томский государственный университет»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), И.А. Колесников (отв. секретарь по разделу «Математика»), А.Д. Сидоров (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, В.Г. Бутов, А.Ю. Веснин, А.Н. Ищенко, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, Е.Л. Лобода, Г.О. Рябова, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Е. А. Тимошенко, М.А. Шермет, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер.

EDITORIAL COUNCIL

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Ivan A. Kolesnikov (Executive Editor of the Mathematics Section), Aleksey D. Sidorov (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimatov, Aleksey M. Bubenichikov, Vladimir G. Butov, Igor M. Vasenin, Andrei Yu. Vesnin, Aleksandr N. Ishchenko, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Egor L. Loboda, Galina O. Ryabova, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Egor A. Timoshenko, Mikhail A. Sheremet, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесен в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферируется в MatSciNet.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36

Электронный адрес: <http://journals.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Садыгов М.А. О модификации понятия субдифференциала второго порядка	5
Зенков А.В., Лениук С.В. Примеры разрешимых групп с конечным числом упорядочений	22
Асоров Д.У., Бекбаев У.Дж., Рахимов И.С. Об эндо-коммутативных алгебраических структурах на двумерных векторных пространствах над произвольным полем	30

МЕХАНИКА

Акарачкин С.А., Полюшко Д.А. Расчет аэродинамической составляющей момента сопротивления вращению ротора управляющих двигателей-маховиков	50
Костюшин К.В., Глазунов А.А., Ларкин Д.О. Численное исследование нестационарных газодинамических процессов в регулируемых ракетных двигателях на твердом топливе с центральным телом	62
Тырышкин И.М., Жильцов К.Н., Костюшин К.В., Еремин И.В., Глазунов А.А. Численное исследование процесса метания инертных тел и определение характеристик их свободного механического движения	77
Афонин А.Г., Бутов В.Г., Кулешов А.А., Солоненко В.А., Ящук А.А. К расчету видимого блеска околоземных космических объектов	93
Гарин А.С., Козулин А.А., Байгонакова Г.А., Марченко Е.С. Структура и механические свойства пористых сплавов TiNi, полученных методом СВС	109
Дегилевич Е.А., Смирнов А.С. Динамический анализ балочного маятника в составе модели погрузочного крана	125
Иванычев Д.А. Решение неосесимметричной первой основной стационарно-динамической задачи теории упругости для анизотропного тела вращения	138
Козин В.М. Влияние ледовых условий на эффективность разрушения ледяного покрова резонансным методом	154
Петров П.О., Козулин А.А., Савиных А.С., Гаркушин Г.В., Жуков И.А. Определение динамической прочности на растяжение образцов из тяжелого бетона при ударно-волновом нагружении	162

CONTENTS

MATHEMATICS

Sadygov M.A. On modification of the concept of the second-order subdifferential	5
Zenkov A.V., Lenyuk S.V. On solvable groups with a finite number of orderings	22
Asrorov D.U., Bekbaev U.Dj., Rakhimov I.S. On endo-commutative algebraic structures on two-dimensional vector spaces over an arbitrary field	30

MECHANICS

Akarachkin S.A., Polyushko D.A. Calculation of the aerodynamic component of the rotor drag torque in reaction wheel actuators	50
Kostyushin K.V., Glazunov A.A., Larkin D.O. A numerical study of unsteady gas-dynamic processes in controllable solid-propellant rocket motors with a central body	62
Tyryshkin I.M., Zhil'tsov K.N., Kostyushin K.V., Eremin I.V., Glazunov A.A. Numerical investigation of the launching process for inert bodies and determination of free mechanical motion characteristics	77
Afonin A.G., Butov V.G., Kuleshov A.A., Solonenko V.A., Yashchuk A.A. On the calculation of the apparent brightness of near-Earth space objects	93
Garin A.S., Kozulin A.A., Baygonakova G.A., Marchenko E.S. Structure and mechanical properties of the porous TiNi alloys obtained by SHS method	109
Degilevich E.A., Smirnov A.S. Dynamic analysis of a beam pendulum as a part of a loading crane model	125
Ivanychev D.A. Solution of the first fundamental non-axisymmetric stationary-dynamic problem of elasticity theory for an anisotropic body of revolution	138
Kozin V.M. The impact of ice conditions on the efficiency of ice cover destruction using the resonance method	154
Petrov P.O., Kozulin A.A., Savinykh A.S., Garkushin G.V., Zhukov I.A. Determination of dynamic tensile strength of heavyweight concrete specimens under shock-wave loading	162

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья

УДК 517.9

doi: 10.17223/19988621/99/1

MSC: 90C26; 90C30

**О модификации понятия субдифференциала
второго порядка****Мисрадин Аллахверди оглы Садыгов***Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан, misredden08@rambler.ru*

Аннотация. Показано, что если функция удовлетворяет 2-липшицеву условию, то производная второго порядка по направлению является бисублинейной функцией. Рассматривается производная второго порядка в направлении от максимума функции. Изучен ряд свойств субдифференциала второго порядка, и получен аналог теоремы Хермандера для бисублинейных функций. Получен ряд неравенств для квадрата функции расстояния. Показано, что при некоторых условиях квадрат функции расстояния удовлетворяет 2-липшицеву условию.

Ключевые слова: бисублинейная функция, субдифференциал, пространство, бивыпуклая функция

Для цитирования: Садыгов М.А. О модификации понятия субдифференциала второго порядка // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2026. № 99. С. 5–21. doi: 10.17223/19988621/99/1

Original article

**On modification of the concept of the second-order
subdifferential****Misraddin A. Sadygov***Baku State University, Baku, Azerbaijan, misredden08@rambler.ru*

Abstract. It is known that the derivative of higher order is an analogue of the first-order derivative. Although the second-order subdifferential is a generalization of the second-order derivative, the second-order subdifferential is not closely related to the first-order subdifferential. The article considers modifications of the concept of the second-order subdifferential. Like the first-order subdifferential, the second-order directional derivative plays an essential role in the study of the second-order subdifferential. The paper considers the second-order directional derivative which is a generalization of the first-order derivative in Penot's direction. It is proved that if a function satisfies the 2-Lipschitz condition in a neighborhood of a point, then the second-order directional derivative is a bisublinear

continuous symmetric function, i.e. it is a bipositively homogeneous biconvex continuous function. Using the tensor product, extensions of a bisublinear function on the space of the tensor product are considered. It is shown that the extension of a bisublinear even function on the space of the tensor product is a sublinear function. It is proved that if a bisublinear even function is continuous, then the sublinear function is also continuous. In this paper, it is shown that a bisublinear symmetric continuous function is an upper bound for a symmetric continuous bilinear function. In this paper, we study the second-order derivative in the direction of the maximum of a finite number of functions. We consider the subdifferential of the of continuous even bisublinear functions. We also consider a class of 2-Lipschitz functions in a neighborhood of a point. A number of properties of 2-Lipschitz functions are studied. The paper considers the square of the distance function of a set and studies when the square of the distance function of a set satisfies the 2-Lipschitz condition in a neighborhood of a point. It is shown that in a Hilbert space the square of the distance function of a convex closed set satisfies the global 2-Lipschitz condition with a coefficient of 6. The paper defines the bitangent bicone and the binormal cone. A number of their properties are studied. We consider the second-order subdifferential of the sum of a function that satisfies the 2-Lipschitz condition in the neighborhood of a point.

Keywords: bisublinear function, subdifferential, space, biconvex function

For citation: Sadygov, M.A. (2026) On modification of the concept of the second-order subdifferential. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 99. pp. 5–21. doi: 10.17223/19988621/99/1

1. Введение

Субдифференциал второго порядка изучался различными авторами, однако в настоящее время не существует однозначно принятого определения субдифференциала. Известно, что определение дифференциала второго порядка аналогично дифференциалу первого порядка. Однако в определениях субдифференциала второго порядка такие аналогии, как правило, в общем случае отсутствуют. Если рассмотреть субдифференциал Кларка, то можно получить различные аналоги субдифференциала второго порядка.

Пусть X – банахово пространство, $f : X \rightarrow R$. Рассмотрим для липшицевых функций в окрестности точки x_0 производную по направлению Φ . Кларка (см.: [1, 2]), П. Мишеля и Ж.П. Пеноте [3]

$$f^0(x_0; x) = \overline{\lim}_{z \rightarrow x_0, \lambda \downarrow 0} \frac{1}{\lambda} (f(z + \lambda x) - f(z)),$$

$$f^P(x_0; x) = \sup_{y \in X} \overline{\lim}_{\lambda \downarrow 0} \frac{1}{\lambda} (f(x_0 + \lambda y + \lambda x) - f(x_0 + \lambda y))$$

при $x \in X$, где $\overline{\lim}_{z \rightarrow x} g(z) = \limsup_{z \rightarrow x} g(z) \equiv \inf_{\delta > 0} \sup_{z \in B(x, \delta)} g(z)$, $B(x, \delta) = \{z \in X : \|z - x\| \leq \delta\}$,

$g : X \rightarrow R$. Положив

$$f^{00}(x_0; x_1, x_2) = \overline{\lim}_{z \rightarrow x_0, \lambda \downarrow 0} \frac{1}{\lambda} (f^0(z + \lambda x_2; x_1) - f^0(z; x_1))$$

(предположим, что верхний предел конечен), можно рассмотреть субдифференциал второго порядка следующего вида:

$$\partial_2^0 f(x_0) = \{b \in \bar{B}(X^2; R) : f^{00}(x_0; x_1, x_2) \geq b(x_1, x_2) \text{ при } (x_1, x_2) \in X^2\},$$

где через $\bar{B}(X^2; R)$ обозначаем множество всех непрерывных симметричных билинейных функций из X^2 в R , $X^2 = X \times X$.

Если для некоторого $\varepsilon > 0$ удовлетворяется неравенство

$$|f(x + x_1 + x_2) - f(x + x_1) - f(x + x_2) + f(x)| \leq K \|x_1\| \|x_2\|$$

при $x \in x_0 + \varepsilon B$ и $x_1, x_2 \in \varepsilon B$, где $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$, то функцию $f : X \rightarrow R$ назовем 2-липшицевой с постоянной K в окрестности точки x_0 .

Если функция $f : X \rightarrow R$ является 2-липшицевой в окрестности точки x_0 , то положим

$$f^{[2]}(x_0; x_1, x_2) = \overline{\lim}_{\substack{z \rightarrow x_0, \\ \lambda_1 \downarrow 0, \lambda_2 \downarrow 0}} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} (f(z + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - f(z + \lambda_1 x_1) - f(z + \lambda_2 x_2) + f(z))$$

и рассмотрим субдифференциал второго порядка (см.: [4–8])

$$\partial_2 f(x_0) = \{b \in \bar{B}(X^2; R) : f^{[2]}(x_0; x_1, x_2) \geq b(x_1, x_2) \text{ при } (x_1, x_2) \in X^2\}.$$

Аналогичные определение субдифференциала второго порядка рассматривается также в [9–11] (см. также ссылку на литературу в [11] по этой теме).

Отметим, что похожее определение субдифференциала второго порядка рассматривается в [12], но оно несколько отличается и с ним трудно работать.

Отметим, что

$$\begin{aligned} f^{00}(x_0; x_1, x_2) &= \overline{\lim}_{z \rightarrow x_0, t \downarrow 0} \frac{1}{t} (f^0(z + tx_2; x_1) - f^0(z; x_1)) = \\ &= \overline{\lim}_{z \rightarrow x_0, t \downarrow 0} \frac{1}{t} \left[\overline{\lim}_{v \rightarrow z + tx_2, \lambda \downarrow 0} \frac{1}{\lambda} (f(v + \lambda x_1) - f(v)) - \overline{\lim}_{w \rightarrow z, \lambda \downarrow 0} \frac{1}{\lambda} (f(w + \lambda x_1) - f(w)) \right] = \\ &= \overline{\lim}_{z \rightarrow x_0, t \downarrow 0} \frac{1}{t} \left[\overline{\lim}_{w \rightarrow z, \lambda \downarrow 0} \frac{1}{\lambda} (f(w + tx_2 + \lambda x_1) - f(w + tx_2)) - \overline{\lim}_{w \rightarrow z, \lambda \downarrow 0} \frac{1}{\lambda} (f(w + \lambda x_1) - f(w)) \right] \leq \\ &\leq \overline{\lim}_{z \rightarrow x_0, t \downarrow 0} \overline{\lim}_{w \rightarrow z, \lambda \downarrow 0} \frac{1}{t \lambda} [f(w + tx_2 + \lambda x_1) - f(w + tx_2) - f(w + \lambda x_1) + f(w)] \leq \\ &\leq \overline{\lim}_{w \rightarrow x_0, t \downarrow 0, \lambda \downarrow 0} \frac{1}{\lambda t} [f(w + tx_2 + \lambda x_1) - f(w + tx_2) - f(w + \lambda x_1) + f(w)] = f^{[2]}(x_0; x_1, x_2) \end{aligned}$$

при $(x_1, x_2) \in X^2$. Обозначим $U(x_0, \delta) = \{x \in X : \|x - x_0\| < \delta\}$. Если функция f и производная Фреше f' удовлетворяют условию Липшица на множестве $U(x_0, \delta)$, то

$$f^{00}(x_0; x_1, x_2) = \overline{\lim}_{z \rightarrow x_0, \lambda \downarrow 0} \frac{1}{\lambda} (f'(z + \lambda x_2)x_1 - f'(z)x_1).$$

Хотя производные по направлению $f^{00}(x_0; x_1, x_2)$ и $f^{[2]}(x_0; x_1, x_2)$ близкие, но они в общем случае не совпадают. Производная по направлению $f^{[2]}(x_0; x_1, x_2)$ имеет ряд хороших свойств. При некоторых условиях $(x_1, x_2) \rightarrow f^{[2]}(x_0; x_1, x_2)$ – бисублинейная функция (см.: [4]). Отметим, что бисублинейная функция является частным случаем бивыпуклых функций, бисубдифференцируемость которых изучалась в [7, 8].

В [6] рассматривается ряд свойств субдифференциала второго порядка, которому дается следующее определение. Положим (предполагая, что правая часть конечна)

$$f^{(2)+}(x_0; x) = \sup_{z \in X} \overline{\lim}_{\lambda \downarrow 0} \frac{1}{\lambda^2} (f(x_0 + \lambda z + 2\lambda x) - 2f(x_0 + \lambda z + \lambda x) + f(x_0 + \lambda z)),$$

$$f^{(2)-}(x_0; x) = \inf_{z \in X} \underline{\lim}_{\lambda \downarrow 0} \frac{1}{\lambda^2} (f(x_0 + \lambda z + 2\lambda x) - 2f(x_0 + \lambda z + \lambda x) + f(x_0 + \lambda z))$$

при $x \in X$.

Множество $D_2 f(x_0) = \{Q \in B_0(X) : f^{(2)-}(x_0; x) \leq Q(x) \leq f^{(2)+}(x_0; x) \text{ при } x \in X\}$ назовем бидифференциалом функции f в точке x_0 , где $B_0(X)$ – множество всех непрерывных квадратичных функций из X в R .

В работе [7] рассмотрено также другое определение субдифференциала произвольного порядка. В частности, из этой работы следует, что

$$f^{(2)}(x_0; x_1, x_2) = \sup_{z_1, z_2 \in X} \overline{\lim}_{\lambda_1 \downarrow 0, \lambda_2 \downarrow 0} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} (f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_1 x_1) - f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_2 x_2) + f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2))$$

и $\partial_{(2)} f(x_0) = \{b \in \overline{B}(X^2; R) : f^{(2)}(x_0; x_1, x_2) \geq b(x_1, x_2) \text{ при } (x_1, x_2) \in X^2\}$.

Если функция $f : X \rightarrow R$ является 2-липшицевой в окрестности точки x_0 , то $f^{(2)}(x_0; x_1, x_2) \leq f^{(2)}(x_0; x_1, x_2)$ при $(x_1, x_2) \in X^2$.

Настоящая работа состоит из четырех пунктов. В п. 2 изучен ряд свойств 2-субдифференциала $\partial_{(2)} f(x_0)$. Исследуется производная второго порядка по направлению функции, представленной в виде поточечного максимума конечного числа функций. В п. 3 получен ряд неравенств для квадрата функции расстояния. Определены бикасательный и бинормальный конусы к множеству в точке. В п. 4 с помощью тензорного произведения получен аналог теоремы Хермандера для четных бисублинейных функций и применен к изучению свойств 2-субдифференциала.

2. 2-субдифференциал

Пусть X – банахово пространство. Если функция $f : X \rightarrow R$ является 2-липшицевой в окрестности точки x_0 , то положим

$$f^{(2)}(x_0; x_1, x_2) = \sup_{z_1, z_2 \in X} \overline{\lim}_{\lambda_1 \downarrow 0, \lambda_2 \downarrow 0} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} (f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_1 x_1) - f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_2 x_2) + f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)),$$

$$f_{(2)}(x_0; x_1, x_2) = \inf_{z_1, z_2 \in X} \underline{\lim}_{\lambda_1 \downarrow 0, \lambda_2 \downarrow 0} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} (f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_1 x_1) - f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_2 x_2) + f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2))$$

при $(x_1, x_2) \in X^2$. Из определения непосредственно следует, что

$$f^{(2)}(x_0; x_1, x_2) = f^{(2)}(x_0; x_2, x_1), \quad f_{(2)}(x_0; x_1, x_2) = f_{(2)}(x_0; x_2, x_1),$$

$$f^{(2)}(x_0; -x_1, -x_2) = f^{(2)}(x_0; x_1, x_2), \quad f_{(2)}(x_0; -x_1, -x_2) = f_{(2)}(x_0; x_1, x_2)$$

при $(x_1, x_2) \in X^2$, т.е. $f^{(2)}(x_0; x_1, x_2)$ и $f_{(2)}(x_0; x_1, x_2)$ – четные и симметричные функции.

Отметим, что, положив $z_1 = y_1 - x_1$, $z_2 = y_2 - x_2$, где $y_1, y_2 \in X^2$, из определения $f^{(2)}(x_0; x_1, x_2)$ имеем, что $f^{(2)}(x_0; x_1, x_2) = f^{(2)}(x_0; -x_1, -x_2)$ при $(x_1, x_2) \in X^2$.

Непрерывный билинейный симметричный функционал b , удовлетворяющий неравенству $f^{(2)}(x_0; x_1, x_2) \geq b(x_1, x_2)$ при $(x_1, x_2) \in X^2$, назовем 2-субградиентом функции f в точке x_0 , а множество 2-субградиент в точке x_0 назовем 2-субдифференциалом функции f в точке x_0 и обозначим через $\partial_{(2)}f(x_0)$ (см.: [6]).

Используя определение $f_{(2)}(x_0; x_1, x_2)$ и заменив z_1 через $z_1 - x_1$, имеем

$$\begin{aligned} -f_{(2)}(x_0; x_1, x_2) &= \sup_{z_1, z_2 \in X} \overline{\lim}_{\lambda_1 \downarrow 0, \lambda_2 \downarrow 0} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} (-f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + \\ &+ f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_1 x_1) + f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_2 x_2) - f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)) = \\ &= \sup_{z_1, z_2 \in X} \overline{\lim}_{\lambda_1 \downarrow 0, \lambda_2 \downarrow 0} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} (f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 - \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 - \lambda_1 x_1) - \\ &- f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_2 x_2) + f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)) = f^{(2)}(x_0; -x_1, x_2). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $f_{(2)}(x_0; x_1, x_2) = -f^{(2)}(x_0; -x_1, x_2)$ при $(x_1, x_2) \in X^2$. Поэтому имеем, что если $b \in \partial_{(2)}f(x_0)$, то $f_{(2)}(x_0; x_1, x_2) \leq b(x_1, x_2) \leq f^{(2)}(x_0; x_1, x_2)$ при $(x_1, x_2) \in X^2$.

Пусть $g : X \times X \rightarrow R_{+\infty} = R \cup \{+\infty\}$ и $(x_1, x_2) \in X^2$. Если функции $x_1 \rightarrow g(x_1, x_2)$, $x_2 \rightarrow g(x_1, x_2)$ положительно однородные и $g(0, x_2) = g(x_1, 0) = 0$, то функцию g назовем биположительно однородной. Если функции $x_1 \rightarrow g(x_1, x_2)$, $x_2 \rightarrow g(x_1, x_2)$ выпуклые и положительно однородные и $g(0, x_2) = g(x_1, 0) = 0$, то функцию g назовем бисублинейной. Ясно, что $f^{(2)}(x_0; 0, x_2) = f^{(2)}(x_0; x_1, 0) = 0$ и $f_{(2)}(x_0; 0, x_2) = f_{(2)}(x_0; x_1, 0) = 0$.

Теорема 1. Если $f : X \rightarrow R$ – 2-липшицева функция с постоянной K в окрестности точки x_0 , то функция $f^{(2)}(x_0; x_1, x_2)$ бисублинейна, отдельно непрерывна и выполняется неравенство $|f^{(2)}(x_0; x_1, x_2)| \leq K \|x_1\| \|x_2\|$ при $(x_1, x_2) \in X^2$.

Доказательство. По определению $f^{(2)}(x_0; x_1, x_2)$ имеем, что

$$\begin{aligned} f^{(2)}(x_0; y_1 + y_2, x_2) &= \sup_{z_1, z_2 \in X} \overline{\lim}_{\lambda_1 \downarrow 0, \lambda_2 \downarrow 0} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} (f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_1 (y_1 + y_2) + \lambda_2 x_2) - \\ &- f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_1 (y_1 + y_2)) - f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_2 x_2) + f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)) \leq \\ &\leq \sup_{z_1, z_2 \in X} \overline{\lim}_{\lambda_1 \downarrow 0, \lambda_2 \downarrow 0} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} (f(x_0 + \lambda_1 (z_1 + y_2) + \lambda_2 z_2 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 x_2) - \\ &- f(x_0 + \lambda_1 (z_1 + y_2) + \lambda_2 z_2 + \lambda_1 y_1)) - \\ &- f(x_0 + \lambda_1 (z_1 + y_2) + \lambda_2 z_2 + \lambda_2 x_2) + f(x_0 + \lambda_1 (z_1 + y_2) + \lambda_2 z_2) + f(x_0 + \lambda_1 (z_1 + y_2) + \\ &+ \lambda_2 z_2 + \lambda_2 x_2) - f(x_0 + \lambda_1 (z_1 + y_2) + \lambda_2 z_2) - f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_2 x_2) + f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)) \leq \\ &\leq \sup_{z_1, z_2 \in X} \overline{\lim}_{\lambda_1 \downarrow 0, \lambda_2 \downarrow 0} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} (f(x_0 + \lambda_1 (z_1 + y_2) + \lambda_2 z_2 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 x_2) - f(x_0 + \lambda_1 (z_1 + y_2) + \lambda_2 z_2 + \lambda_1 y_1)) - \\ &- f(x_0 + \lambda_1 (z_1 + y_2) + \lambda_2 z_2 + \lambda_2 x_2) + f(x_0 + \lambda_1 (z_1 + y_2) + \lambda_2 z_2)) + \end{aligned}$$

$$+ \sup_{z_1, z_2 \in X} \overline{\lim}_{\lambda_1 \downarrow 0, \lambda_2 \downarrow 0} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} (f(x_0 + \lambda_1(z_1 + y_2) + \lambda_2 z_2 + \lambda_2 x_2) - f(x_0 + \lambda_1(z_1 + y_2) + \lambda_2 z_2) - f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_2 x_2) + f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)) = f^{(2)}(x_0; y_1, x_2) + f^{(2)}(x_0; y_2, x_2)$$

при $y_1, y_2, x_2 \in X$, т.е. $x_1 \rightarrow f^{(2)}(x_0; x_1, x_2)$ субаддитивна.

Аналогично проверяется, что $x_2 \rightarrow f^{(2)}(x_0; x_1, x_2)$ субаддитивна. Легко проверяется, что $f^{(2)}(x_0; \alpha x_1, x_2) = \alpha f^{(2)}(x_0; x_1, x_2)$ при $\alpha \geq 0$ и $f^{(2)}(x_0; x_1, \beta x_2) = \beta f^{(2)}(x_0; x_1, x_2)$ при $\beta \geq 0$. Поэтому функция $f^{(2)}(x_0; x_1, x_2)$ бисублинейна.

По условию получим, что удовлетворяется неравенство $|f^{(2)}(x_0; x_1, x_2)| \leq K \|x_1\| \|x_2\|$ при $(x_1, x_2) \in X^2$.

Из теоремы 3.2.1 [13. С. 181] также имеем, что функции $x_1 \rightarrow f^{(2)}(x_0; x_1, x_2)$ при $x_2 \in X$ и $x_2 \rightarrow f^{(2)}(x_0; x_1, x_2)$ при $x_1 \in X$ непрерывны. Поэтому функция $f^{(2)}(x_0; x_1, x_2)$ раздельно непрерывна. Теорема доказана.

Из условия теоремы 1 следует, что функция $(x_1, x_2) \rightarrow f^{(2)}(x_0; x_1, x_2)$ непрерывна (см.: [7. С. 21]).

Лемма 1. Если f удовлетворяет 2-липшицеву условию с постоянной K в окрестности точки x_0 , то множество $\partial_{\{2\}} f(x_0)$ ограничено.

Доказательство. Если $b \in \partial_{\{2\}} f(x_0)$, то $-f^{(2)}(x_0; -x_1, x_2) \leq b(x_1, x_2) \leq f^{(2)}(x_0; x_1, x_2)$ при $(x_1, x_2) \in X^2$. Поэтому $-K \|x_1\| \|x_2\| \leq b(x_1, x_2) \leq K \|x_1\| \|x_2\|$ при $(x_1, x_2) \in X^2$. Отсюда следует, что множество $\partial_{\{2\}} f(x_0)$ ограничено. Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть J – конечное множество, функции $f_i : X \rightarrow R$ непрерывны и удовлетворяют 2-липшицеву условию в окрестности точки x_0 при $i \in J$; $f(x) = \max_{i \in J} f_i(x)$ при $x \in X$. Тогда $f^{(2)}(x_0; x_1, x_2) \leq \max_{i \in J(x_0)} f_i^{(2)}(x_0; x_1, x_2)$ при $(x_1, x_2) \in X^2$, где $J(x_0) = \{i \in J : f_i(x_0) = f(x_0)\}$.

Доказательство. Покажем, что существует $\alpha > 0$ такое, что $J(y) \subset J(x_0)$ при $\|y - x_0\| \leq \alpha$. Случай $J(x_0) = J$ тривиален. Пусть $J(x_0) \neq J$ и $a = f(x_0) - \max_{i \in J \setminus J(x_0)} f_i(x_0) > 0$,

$\varepsilon = \frac{a}{3}$ и $\alpha > 0$ такое, что для всякого $i \in J$ выполнено $|f_i(y) - f_i(x_0)| \leq \varepsilon$ при

$\|y - x_0\| \leq \alpha$. Легко можно проверить, что $|f(y) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ при $\|y - x_0\| \leq \alpha$. Если $j \in J(y)$, то

$$f_j(x_0) \geq f_j(y) - \varepsilon = f(y) - \varepsilon \geq f(x_0) - 2\varepsilon = \max_{i \in J \setminus J(x_0)} f_i(x_0) + a - 2\varepsilon > \max_{i \in J \setminus J(x_0)} f_i(x_0).$$

Поэтому $j \in J(x_0)$. Возьмем $z_1, z_2 \in X$ и $x_1, x_2 \in X$. Пусть $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ такие, что $\|\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2\| \leq \alpha$. Ясно, что $J(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) \subset J(x_0)$. Аналогично имеем, что существует $\delta > 0$ такое, что $J(y) \subset J(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)$ при $\|y - x_0 - \lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2\| \leq \delta$. Пусть $\mu > 0$ – достаточно малое число такое, что $\|\lambda_1 \mu x_1 + \lambda_2 \mu x_2\| \leq \delta$.

$$\begin{aligned}
 & f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_1 \mu x_1 + \lambda_2 \mu x_2) - f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_1 \mu x_1) - \\
 & \quad - f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_2 \mu x_2) + f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) = \\
 & = \max_{i \in J(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)} (f_i(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_1 \mu x_1 + \lambda_2 \mu x_2) + f_i(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)) - \\
 & \quad - \max_{i \in J} f_i(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_1 \mu x_1) - \max_{i \in J} f_i(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_2 \mu x_2) \leq \\
 & \leq \max_{i \in J(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)} (f_i(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_1 \mu x_1 + \lambda_2 \mu x_2) + f_i(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)) - \\
 & \quad - f_i(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_1 \mu x_1) - f_i(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_2 \mu x_2) \leq \\
 & \leq \max_{i \in J(x_0)} (f_i(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_1 \mu x_1 + \lambda_2 \mu x_2) + f_i(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)) - \\
 & \quad - f_i(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_1 \mu x_1) - f_i(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_2 \mu x_2).
 \end{aligned}$$

Поэтому получим, что

$$\begin{aligned}
 f^{(2)}(x_0; \mu x_1, \mu x_2) \leq d = \sup_{z_1, z_2 \in X} \inf_{\substack{\alpha > 0, \\ \beta > 0}} \max_{i \in J(x_0)} \sup_{\substack{0 < \lambda_1 \leq \alpha, \\ 0 < \lambda_2 \leq \beta}} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} (f_i(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_1 \mu x_1 + \lambda_2 \mu x_2) - \\
 - f_i(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_1 \mu x_1) - f_i(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_2 \mu x_2) + f_i(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)).
 \end{aligned}$$

Из определения супремума следует, что для $\varepsilon > 0$ существуют $z_1^\varepsilon, z_2^\varepsilon \in X$ такие, что

$$\begin{aligned}
 \inf_{\substack{\alpha > 0, \\ \beta > 0}} \max_{i \in J(x_0)} \sup_{\substack{0 < \lambda_1 \leq \alpha, \\ 0 < \lambda_2 \leq \beta}} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} (f_i(x_0 + \lambda_1 z_1^\varepsilon + \lambda_2 z_2^\varepsilon + \lambda_1 \mu x_1 + \lambda_2 \mu x_2) - f_i(x_0 + \lambda_1 z_1^\varepsilon + \lambda_2 z_2^\varepsilon + \lambda_1 \mu x_1) - \\
 - f_i(x_0 + \lambda_1 z_1^\varepsilon + \lambda_2 z_2^\varepsilon + \lambda_2 \mu x_2) + f_i(x_0 + \lambda_1 z_1^\varepsilon + \lambda_2 z_2^\varepsilon)) > d - \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\begin{aligned}
 \inf_{\substack{\alpha > 0, \\ \beta > 0}} \sup_{\substack{0 < \lambda_1 \leq \alpha, \\ 0 < \lambda_2 \leq \beta}} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} (f_i(x_0 + \lambda_1 z_1^\varepsilon + \lambda_2 z_2^\varepsilon + \lambda_1 \mu x_1 + \lambda_2 \mu x_2) - f_i(x_0 + \lambda_1 z_1^\varepsilon + \lambda_2 z_2^\varepsilon + \lambda_1 \mu x_1) - \\
 - f_i(x_0 + \lambda_1 z_1^\varepsilon + \lambda_2 z_2^\varepsilon + \lambda_2 \mu x_2) + f_i(x_0 + \lambda_1 z_1^\varepsilon + \lambda_2 z_2^\varepsilon)) \leq f_i^{(2)}(x_0; \mu x_1, \mu x_2)
 \end{aligned}$$

при $i \in J(x_0)$. Поэтому для $\varepsilon > 0$ существуют $\alpha_i^\varepsilon > 0, \beta_i^\varepsilon > 0$ такие, что

$$\begin{aligned}
 \sup_{\substack{0 < \lambda_1 \leq \alpha_i^\varepsilon, \\ 0 < \lambda_2 \leq \beta_i^\varepsilon}} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} (f_i(x_0 + \lambda_1 z_1^\varepsilon + \lambda_2 z_2^\varepsilon + \lambda_1 \mu x_1 + \lambda_2 \mu x_2) - f_i(x_0 + \lambda_1 z_1^\varepsilon + \lambda_2 z_2^\varepsilon + \lambda_1 \mu x_1) - \\
 - f_i(x_0 + \lambda_1 z_1^\varepsilon + \lambda_2 z_2^\varepsilon + \lambda_2 \mu x_2) + f_i(x_0 + \lambda_1 z_1^\varepsilon + \lambda_2 z_2^\varepsilon)) \leq f_i^{(2)}(x_0; \mu x_1, \mu x_2) + \varepsilon
 \end{aligned}$$

при $i \in J(x_0)$. Положив $\alpha^\varepsilon = \min_{i \in J(x_0)} \alpha_i^\varepsilon, \beta^\varepsilon = \min_{i \in J(x_0)} \beta_i^\varepsilon$ получим

$$\begin{aligned}
 d - \varepsilon < \max_{i \in J(x_0)} \sup_{\substack{0 < \lambda_1 \leq \alpha^\varepsilon, \\ 0 < \lambda_2 \leq \beta^\varepsilon}} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} (f_i(x_0 + \lambda_1 z_1^\varepsilon + \lambda_2 z_2^\varepsilon + \lambda_1 \mu x_1 + \lambda_2 \mu x_2) - \\
 - f_i(x_0 + \lambda_1 z_1^\varepsilon + \lambda_2 z_2^\varepsilon + \lambda_1 \mu x_1) - f_i(x_0 + \lambda_1 z_1^\varepsilon + \lambda_2 z_2^\varepsilon + \lambda_2 \mu x_2) + \\
 + f_i(x_0 + \lambda_1 z_1^\varepsilon + \lambda_2 z_2^\varepsilon)) \leq \max_{i \in J(x_0)} f_i^{(2)}(x_0; \mu x_1, \mu x_2) + \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Так как $f^{(2)}(x_0; \mu x_1, \mu x_2) \leq d$, то отсюда следует, что

$$f^{(2)}(x_0; \mu x_1, \mu x_2) < \max_{i \in J(x_0)} \sup_{\substack{0 < \lambda_1 \leq \alpha^\varepsilon, \\ 0 < \lambda_2 \leq \beta^\varepsilon}} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} (f_i(x_0 + \lambda_1 z_1^\varepsilon + \lambda_2 z_2^\varepsilon + \lambda_1 \mu x_1 + \lambda_2 \mu x_2) -$$

$$f_i(x_0 + \lambda_1 z_1^\varepsilon + \lambda_2 z_2^\varepsilon + \lambda_1 \mu x_1) - f_i(x_0 + \lambda_1 z_1^\varepsilon + \lambda_2 z_2^\varepsilon + \lambda_2 \mu x_2) + \\ + f_i(x_0 + \lambda_1 z_1^\varepsilon + \lambda_2 z_2^\varepsilon) + \varepsilon \leq \max_{i \in J(x_0)} f_i^{(2)}(x_0; \mu x_1, \mu x_2) + 2\varepsilon.$$

Отсюда при $\varepsilon \rightarrow 0$ получим $f^{(2)}(x_0; \mu x_1, \mu x_2) \leq \max_{i \in J(x_0)} f_i^{(2)}(x_0; \mu x_1, \mu x_2)$. Поэтому $f^{(2)}(x_0; x_1, x_2) \leq \max_{i \in J(x_0)} f_i^{(2)}(x_0; x_1, x_2)$ при $(x_1, x_2) \in X^2$. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $f(x) = \max_{i \in J} b_i(x, x)$, где b_i – симметричный непрерывный билинейный функционал, J -конечное множество. Тогда

$$f^{(2)}(x_0; x_1, x_2) \leq 2 \max_{i \in J(x_0)} b_i(x_1, x_2),$$

где $J(x_0) = \{i \in J : f(x_0) = b_i(x_0, x_0)\}$.

Пусть $U \subset X$ – открытое множество, и функция f непрерывно дифференцируема в U , т.е. функция f принадлежит $C^1(U)$. Скажем, что градиент $f'(x)$ этой функции удовлетворяет условию Липшица на множестве U с константой $L \geq 0$, если $|f'(x) - f'(y)| \leq L\|x - y\|$ при всех $x, y \in U$. Класс таких функций будем обозначать через $C^{1,1}(U)$.

Лемма 2. Если функция f принадлежит $C^{1,1}(U)$ и $|f'(x) - f'(y)| \leq L\|x - y\|$ при всех $x, y \in U$, где $L \geq 0$, то для каждой точки $x_0 \in U$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$|f(z + x + y) - f(z + x) - f(z + y) + f(z)| \leq L\|x\|\|y\|$$

при $x, y \in \varepsilon B$, $z \in x_0 + \varepsilon B$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ такое, что $x_0 + 3\varepsilon B \subset U$. Тогда имеем

$$|f(z + x + y) - f(z + x) - f(z + y) + f(z)| = \left| \int_0^1 (f'(z + x + ty)y - f'(z + ty)y) dt \right| \leq \\ \leq \int_0^1 \|(f'(z + x + ty)y - f'(z + ty)y)\| dt \leq \int_0^1 \|(f'(z + x + ty) - f'(z + ty))\|\|y\| dt \leq \\ \leq \int_0^1 L\|x\|\|y\| dt = L\|x\|\|y\|$$

при $x, y \in \varepsilon B$, $z \in x_0 + \varepsilon B$. Лемма доказана.

Отметим, что если функция f принадлежит $C^1(U)$ и

$$|f(z + x + y) - f(z + x) - f(z + y) + f(z)| \leq L\|x\|\|y\|$$

при $z, z + x, z + y, z + x + y \in U$, то легко проверяется, что $|f'(x) - f'(y)| \leq L\|x - y\|$ при всех $x, y \in U$.

Множество всех дважды непрерывно дифференцируемых функций из $U(x_0, \delta)$ в R обозначим через $C^2(U(x_0, \delta))$. Если $f \in C^2(U(x_0, \delta))$, то аналогично лемме 2 проверяется, что $f^{(2)}(x_0; x_1, x_2) = f''(x_0)(x_1, x_2)$ при $(x_1, x_2) \in X^2$.

Если функция $f : X \rightarrow R$ достигает локального минимума в пространстве X в точке x_0 , то

$$f^{(2)}(x_0; x, x) \geq \limsup_{\lambda \downarrow 0} \frac{1}{\lambda^2} (f(x_0 + \lambda x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \lambda x)) \geq 0$$

при $x \in X$.

Отметим, что аналогично в [7] и [8] можно рассмотреть геометрические аспекты 2-субдифференциала.

3. Бикасательные и бинормальные конусы

Пусть X – банахово пространство и $C \subset X$. Положим $d_C(y) = \inf\{\|y - z\| : z \in C\}$.

Для простоты положим $d(y) = d_C(y)$ и $d_2(y) = d^2(y)$.

Лемма 3. Если C – непустое замкнутое выпуклое подмножество гильбертова пространства H , то при любых $z, x, y \in H$ выполняется соотношение

$$|d_2(z + x + y) - d_2(z + x) - d_2(z + y) + d_2(z)| \leq 6\|x\|\|y\|,$$

т.е. C – непустое замкнутое выпуклое подмножество гильбертова пространства H , то $y \rightarrow d_2(y)$ удовлетворяет глобальному 2-липшицеву условию с постоянной 6.

Доказательство. Пусть $x, y \in H$ и $\|y\| \leq \|x\|$. По теореме 2.1.2 [14. С. 48] существуют $c_1, c_2 \in C$ такие, что

$$d(z + x) = \|z + x - c_1\| \text{ и } d(z + y) = \|z + y - c_2\|.$$

По предложению 2.2.4 [14. С. 50] получим, что $\|c_2 - c_1\| \leq \|y - x\|$.

Так как $\|x\|^2 - \|y\|^2 = \langle x + y, x - y \rangle$, то

$$\begin{aligned} d_2(z + x + y) - d_2(z + x) - d_2(z + y) + d_2(z) &\leq \|z + x + y - c_1\|^2 - \|z + x - c_1\|^2 - \|z + y - c_2\|^2 + \\ &+ \|z - c_2\|^2 = \langle y, 2z + 2x + y - 2c_1 \rangle - \langle y, 2z + y - 2c_2 \rangle = \langle y, 2x - 2c_1 + 2c_2 \rangle \leq \\ &\leq \|y\|\|2x - 2c_1 + 2c_2\| \leq \|y\|(\|2x\| + 2\|c_2 - c_1\|) \leq \|y\|(\|2x\| + 2\|y - x\|) \leq 6\|y\|\|x\|. \end{aligned}$$

Пусть $\|y\| \leq \|x\|$ и $v_1, v_2 \in C$ такие, что $d(z + x + y) = \|z + x + y - v_1\|$ и $d(z) = \|z - v_2\|$.

Из предложения 2.2.4 [14. С. 50] следует, что $\|v_2 - v_1\| \leq \|y + x\|$. Поэтому

$$\begin{aligned} d_2(z + x + y) - d_2(z + x) - d_2(z + y) + d_2(z) &\geq \|z + x + y - v_1\|^2 - \|z + x - v_1\|^2 - \|z + y - v_2\|^2 + \\ &+ \|z - v_2\|^2 = \langle y, 2z + 2x + y - 2v_1 \rangle - \langle y, 2z + y - 2v_2 \rangle = \langle y, 2x - 2v_1 + 2v_2 \rangle \geq \\ &\geq -\|y\|\|2x - 2v_1 + 2v_2\| \geq -\|y\|(\|2x\| + 2\|v_2 - v_1\|) \geq -\|y\|(\|2x\| + 2\|y + x\|) \geq -6\|y\|\|x\|. \end{aligned}$$

Тогда получим, что $|d_2(z + x + y) - d_2(z + x) - d_2(z + y) + d_2(z)| \leq 6\|x\|\|y\|$ при $x, y \in H$.

Лемма доказана.

Лемма 4. Если C – непустое замкнутое выпуклое подмножество гильбертова пространства H , то

$$\begin{aligned} |d_2(z + x + y) - d_2(z + x) - d_2(z + y) - d_2(z + v + w) + d_2(z + v) + d_2(z + w)| &\leq \\ &\leq 2\|x - v\|^2 + 3\|x - v\|(\|y\| + \|w\|) + 2\|y - w\|^2 + 3\|y - w\|(\|x\| + \|v\|) \end{aligned}$$

при $z, x, y, v, w \in H$.

Доказательство. Если $z, x, y, v, w \in H$, то существуют $c_1, c_2, c_3 \in C$ такие, что

$$d(z + v + w) = \|z + v + w - c_1\|, \quad d(z + x) = \|z + x - c_2\|, \quad d(z + y) = \|z + y - c_3\|.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 & d_2(z+x+y) - d_2(z+x) - d_2(z+y) - d_2(z+v+w) + d_2(z+v) + d_2(z+w) \leq \\
 & \leq \|z+x+y-c_1\|^2 - \|z+x-c_2\|^2 - \|z+y-c_3\|^2 - \|z+v+w-c_1\|^2 + \|z+v-c_2\|^2 + \|z+w-c_3\|^2 \leq \\
 & \leq \langle x+y-v-w, 2z+x+y+v+w-2c_1 \rangle + \langle v-x, 2z+x+v-2c_2 \rangle + \langle w-y, 2z+y+w-2c_3 \rangle = \\
 & = \langle x-v, 2z+x+y+v+w-2c_1 \rangle + \langle y-w, 2z+x+y+v+w-2c_1 \rangle + \langle v-x, 2z+x+v-2c_2 \rangle + \\
 & + \langle w-y, 2z+y+w-2c_3 \rangle = \langle x-v, y+w-2c_1+2c_2 \rangle + \langle y-w, x+v-2c_1+2c_3 \rangle \leq \\
 & \leq \|x-v\|(\|y\| + \|w\| + 2\|c_2 - c_1\|) + \|y-w\|(\|x\| + \|v\| + 2\|c_3 - c_1\|) \leq \\
 & \leq \|x-v\|(\|y\| + \|w\| + 2\|v+w-x\|) + \|y-w\|(\|x\| + \|v\| + 2\|v+w-y\|) \leq \\
 & \leq \|x-v\|(\|y\| + 3\|w\| + 2\|v-x\|) + \|y-w\|(\|x\| + 3\|v\| + 2\|w-y\|) \leq \\
 & \leq 2\|x-v\|^2 + 3\|x-v\|(\|y\| + \|w\|) + 2\|y-w\|^2 + 3\|y-w\|(\|x\| + \|v\|).
 \end{aligned}$$

Если $z, x, y, v, w \in H$, то существуют $e_1, e_2, e_3 \in C$ такие, что $d(z+x+y) = \|z+x+y-e_1\|$, $d(z+v) = \|z+v-e_2\|$, $d(z+w) = \|z+w-e_3\|$. Поэтому

$$\begin{aligned}
 & d_2(z+x+y) - d_2(z+x) - d_2(z+y) - d_2(z+v+w) + d_2(z+v) + d_2(z+w) \geq \\
 & \geq \|z+x+y-e_1\|^2 - \|z+x-e_2\|^2 - \|z+y-e_3\|^2 - \|z+v+w-e_1\|^2 + \|z+v-e_2\|^2 + \\
 & + \|z+w-e_3\|^2 \geq \langle x+y-v-w, 2z+x+y+v+w-2e_1 \rangle + \langle v-x, 2z+x+v-2e_2 \rangle + \\
 & + \langle w-y, 2z+y+w-2e_3 \rangle = \langle x-v, 2z+x+y+v+w-2e_1 \rangle + \\
 & + \langle y-w, 2z+x+y+v+w-2e_1 \rangle + \langle v-x, 2z+x+v-2e_2 \rangle + \langle w-y, 2z+y+w-2e_3 \rangle = \\
 & = \langle x-v, y+w-2e_1+2e_2 \rangle + \langle y-w, x+v-2e_1+2e_3 \rangle \geq \\
 & \geq -\|x-v\|(\|y\| + \|w\| + 2\|e_2 - e_1\|) - \|y-w\|(\|x\| + \|v\| + 2\|e_3 - e_1\|) \geq \\
 & \geq -\|x-v\|(\|y\| + \|w\| + 2\|x+y-v\|) - \|y-w\|(\|x\| + \|v\| + 2\|x+y-w\|) \geq \\
 & \geq -\|x-v\|(3\|y\| + \|w\| + 2\|x-v\|) - \|y-w\|(3\|x\| + \|v\| + 2\|y-w\|) \geq \\
 & \geq -2\|x-v\|^2 - 3\|x-v\|(\|y\| + \|w\|) - 2\|y-w\|^2 - 3\|y-w\|(\|x\| + \|v\|).
 \end{aligned}$$

Поэтому получим справедливость леммы. Лемма доказана.

Из теоремы 2.1.2 [14. С. 48] и из предложения 2.2.4 [14. С. 50] следует, что если C – непустое полное выпуклое подмножество предгильбертова пространства H , то леммы 3 и 4 также верны.

Лемма 5. Если C – непустое подмножество банахова пространства X , то

$$|d_2(z+x+y) - d_2(z+x) - d_2(z+y) + d_2(z)| \leq 4\|x\|\|y\|$$

при $x, y \in X$ и $z \in C$.

Доказательство. Если $x, y \in X$, $\|y\| \leq \|x\|$ и $z \in C$, то $d(z) = 0$ и

$$\begin{aligned}
 & |d_2(z+x+y) - d_2(z+x) - d_2(z+y) + d_2(z)| = \\
 & = |d^2(z+x+y) - d^2(z+x) - d^2(z+y) + d^2(z)| \leq \\
 & \leq |(d(z+x+y) - d(z+x))(d(z+x+y) + d(z+x))| + \\
 & + |(d(z) - d(z+y))(d(z) + d(z+y))| \leq \\
 & \leq \|y\|(\|x+y\| + \|x\|) + \|y\|^2 \leq \|y\|(2\|x\| + \|y\|) + \|y\|^2 \leq 4\|x\|\|y\|.
 \end{aligned}$$

Получим, что $|d_2(z+x+y) - d_2(z+x) - d_2(z+y) + d_2(z)| \leq 4\|x\|\|y\|$ при $x, y \in X$ и $z \in C$.

Лемма доказана.

Положим

$$Q_C(x_0) = \{(x_1, x_2) \in X \times X : d_2^{(2)}(x_0; x_1, x_2) \leq 0\},$$

$$\Omega_C(x_0) = \{b \in \bar{B}(X^2; R) : b(x_1, x_2) \leq 0 \text{ при } (x_1, x_2) \in Q_C(x_0)\}.$$

Множество $Q_C(x_0)$ назовем бикасательным конусом, а множество $\Omega_C(x_0)$ – бинормальным конусом к C в точке x_0 .

Лемма 6. Если $d_C^2(x)$ удовлетворяет 2-липшицеву условию в окрестности точки x_0 , то $\bigcup_{\lambda > 0} \lambda \partial_{(2)} d_2(x_0) \subset \Omega_C(x_0)$.

Доказательство. Пусть $b \in \bigcup_{\lambda > 0} \lambda \partial_{(2)} d_2(x_0)$. Тогда существует $\lambda > 0$ такое, что

$$b \in \lambda \partial_{(2)} d_2(x_0). \text{ Поэтому } \frac{b}{\lambda} = b_1 \in \partial_{(2)} d_2(x_0) \text{ и } d_2^{(2)}(x_0; x_1, x_2) \geq b_1(x_1, x_2) \text{ при } (x_1, x_2) \in X \times X.$$

Так как из $(x_1, x_2) \in Q_C(x_0)$ следует, что $d_2^{(2)}(x_0; x_1, x_2) \leq 0$, то $b_1(x_1, x_2) \leq 0$ при $(x_1, x_2) \in Q_C(x_0)$. Тогда имеем, что $b(x_1, x_2) = \lambda b_1(x_1, x_2) \leq 0$ при $(x_1, x_2) \in Q_C(x_0)$. Отсюда следует, что $b \in \Omega_C(x_0)$, т.е. $\bigcup_{\lambda > 0} \lambda \partial_{(2)} d_2(x_0) \subset \Omega_C(x_0)$. Лемма доказана.

В доказательстве леммы 6 условие, что $d_C^2(x)$ удовлетворяет 2-липшицеву условию в окрестности точки x_0 , не используется. Если $d_C^2(x)$ удовлетворяет 2-липшицеву условию в окрестности точки x_0 , то $\partial_{(2)} d_2(x_0)$ непусто.

Отметим, что множество $K \subset X \times X$ называется биконусом (см.: [8]), если для любого $(x, y) \in K$ множества $K_y = \{z : (z, y) \in K\}$ и $K_x = \{u : (x, u) \in K\}$ выпуклые конусы.

Лемма 7. Если $d_C^2(x)$ удовлетворяет 2-липшицеву условию в окрестности точки x_0 , то $Q_C(x_0)$ является биконусом.

Доказательство. Пусть $(x, y) \in Q_C(x_0)$. Покажем, что $K_y = \{z \in X : (z, y) \in Q_C(x_0)\}$ является конусом.

Если $x \in K_y$ и $\lambda \geq 0$, то имеем, что $d_2^{(2)}(x_0; \lambda x, y) = \lambda d_2^{(2)}(x_0; x, y) \leq 0$, т.е. $\lambda x \in K_y$. Если $x_1, x_2 \in K_y$, то имеем, что $d_2^{(2)}(x_0; x_1 + x_2, y) \leq d_2^{(2)}(x_0; x_1, y) + d_2^{(2)}(x_0; x_2, y) \leq 0$. Отсюда следует, что $x_1 + x_2 \in K_y$. Получим, что K_y является конусом. Аналогично проверяется, что $K_x = \{u \in X : (x, u) \in Q_C(x_0)\}$ является конусом. Лемма доказана.

4. Ряд свойств симметричных четных бисублинейных функций

Пусть X – действительное линейное пространство. Обозначим через $X \Theta X$ пространство формальных линейных комбинаций (с действительными коэффициентами) элементов $X \times X$. Употребляя запись $x \Theta y$ вместо $1(x, y)$ для элементов естественного базиса в $X \Theta X$, рассмотрим множество $M \subset X \Theta X$ элементов любого из следующих видов:

$$(x_1 + x_2) \Theta y - x_1 \Theta y - x_2 \Theta y; x \Theta (y_1 + y_2) - x \Theta y_1 - x \Theta y_2; \lambda x \Theta \mu y - \lambda \mu x \Theta y; x \Theta y - y \Theta x,$$

взятых по всем $x_1, x_2, x, y_1, y_2, y \in X, \lambda, \mu \in R$. Введем обозначения $X \widehat{\otimes} X$ для факторпространства $X \Theta X / \text{Lin } M$ (см.: [8, 15]). Если $x, y \in X$, то класс эквивалентности, содержащий $x \Theta y$, обозначим $x \widehat{\otimes} y$, т.е. обозначим через $x \widehat{\otimes} y$ класс смежности $x \Theta y + \text{Lin } M$.

Пусть $q: X \times X \rightarrow R_{+\infty}$ и q – биположительно однородная функция. Если функция $p: X \rightarrow R_{+\infty}$ выпукла, положительно однородна и $p(0) = 0$, то функцию p назовем сублинейной.

Если $v = X \widehat{\otimes} X$, то положим

$$\widehat{q}(v) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n q(x^i, y^i) : v = \sum_{i=1}^n x^i \widehat{\otimes} y^i, (x^i, y^i) \in X \times X, n \in N \right\},$$

$$\widehat{q}(x \widehat{\otimes} y) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n q(x^i, y^i) : x \widehat{\otimes} y = \sum_{i=1}^n x^i \widehat{\otimes} y^i, (x^i, y^i) \in X \times X, n \in N \right\}.$$

Лемма 8. Если $q: X \times X \rightarrow R$ – симметричная четная бисублинейная функция, то $\widehat{q}(x \widehat{\otimes} y) = q(x, y)$ при $(x, y) \in X \times X$, и $\widehat{q}: X \widehat{\otimes} X \rightarrow R$ – сублинейная функция.

Доказательство. Так как $X \widehat{\otimes} X = X \Theta X / \text{Lin } M$, то $x \widehat{\otimes} y = \sum_{i=1}^n x^i \widehat{\otimes} y^i$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^n x^i \Theta y^i \in x \Theta y + \text{Lin} \{ (x_1 + x_2) \Theta y - x_1 \Theta y - x_2 \Theta y, x \Theta (y_1 + y_2) - x \Theta y_1 - x \Theta y_2, \\ \lambda x \Theta \mu y - \lambda \mu x \Theta y, x \Theta y - y \Theta x : x_1, x_2 \in X; y_1, y_2 \in X; \lambda, \mu \in R \}.$$

Поэтому

$$\widehat{q}(x \widehat{\otimes} y) = \inf \{ q(x, y) + \sum_{i=1}^n q(x_1^i + x_2^i, y^i) + \sum_{i=1}^n q(-x_1^i, y^i) + \sum_{i=1}^n q(-x_2^i, y^i) + \sum_{i=1}^m q(z^j, y_1^j + y_2^j) + \\ + \sum_{j=1}^m q(z^j, (-y_1^j)) + \sum_{j=1}^m q(z^j, (-y_2^j)) + \sum_{s=1}^k q(\lambda^s u^s, \mu^s v^s) + \sum_{s=1}^k q(-\lambda^s \mu^s u^s, v^s) + \sum_{\tau=1}^d q(\tilde{u}^\tau, \tilde{v}^\tau) + \\ + \sum_{\tau=1}^d q(-\tilde{v}^\tau, \tilde{u}^\tau) : x_1^i, x_2^i, z^j, u^s, \tilde{u}^\tau; y^i, y_1^j, y_2^j, v^s, \tilde{v}^\tau \in X; \lambda^s, \mu^s \in R; n, m, k, d \in N \cup \{0\} \}.$$

Так как q – бисублинейная функция, то

$$\sum_{i=1}^n q(x_1^i + x_2^i, y^i) + \sum_{i=1}^n q(-x_1^i, y^i) + \sum_{i=1}^n q(-x_2^i, y^i) \geq 0,$$

$$\sum_{i=1}^m q(z^j, y_1^j + y_2^j) + \sum_{j=1}^m q(z^j, (-y_1^j)) + \sum_{j=1}^m q(z^j, (-y_2^j)) \geq 0$$

при $x, x_1^i, x_2^i, z^j; y, y^i, y_1^j, y_2^j \in X$. Так как q – бисублинейная четная функция, то $\sum_{s=1}^k q(\lambda^s u^s, \mu^s v^s) + \sum_{s=1}^k q(-\lambda^s \mu^s u^s, v^s) \geq 0$ при $u^s, v^s \in X$. Так как q – симметричная

бисублинейная четная функция, то $\sum_{\tau=1}^d q(\tilde{u}^\tau, \tilde{v}^\tau) + \sum_{\tau=1}^d q(-\tilde{v}^\tau, \tilde{u}^\tau) \geq 0$ при $\tilde{u}^\tau, \tilde{v}^\tau \in X$.

Тогда получим, что $\widehat{q}(x \widehat{\otimes} y) = q(x, y)$ при $(x, y) \in X \times X$.

Ясно, что

$$\begin{aligned} \widehat{q}(v_1 + v_2) &= \inf\left\{\sum_{i=1}^n q(u^i, v^i) : v_1 + v_2 = \sum_{i=1}^n u^i \widehat{\otimes} v^i, (u^i, v^i) \in X \times X, n \in N\right\} \leq \\ &\leq \inf\left\{\sum_{i=1}^k q(x^i, y^i) : v_1 = \sum_{i=1}^k x_1^i \widehat{\otimes} y_1^i, (x_1^i, y_1^i) \in X \times X, k \in N\right\} + \\ &+ \inf\left\{\sum_{i=1}^m q(x_2^i, y_2^i) : v_2 = \sum_{i=1}^m x_2^i \widehat{\otimes} y_2^i, (x_2^i, y_2^i) \in X \times X, m \in N\right\} = \widehat{q}(v_1) + \widehat{q}(v_2) \end{aligned}$$

при $v_1, v_2 \in X \widehat{\otimes} X$. Так как q – бисублинейная четная функция, то

$$\begin{aligned} \widehat{q}(\lambda v) &= \inf\left\{\sum_{i=1}^k q(\lambda x^i, y^i) : \lambda v = \sum_{i=1}^k \lambda x^i \widehat{\otimes} y^i, (x^i, y^i) \in X \times X, k \in N\right\} = \\ &= \lambda \inf\left\{\sum_{i=1}^k q(x^i, y^i) : v = \sum_{i=1}^k x^i \widehat{\otimes} y^i, (x^i, y^i) \in X \times X, k \in N\right\} = \lambda \widehat{q}(v) \end{aligned}$$

при $\lambda \geq 0$. Поэтому $\widehat{q} : X \widehat{\otimes} X \rightarrow R$ – сублинейная функция. Лемма доказана.

Теорема 3. Пусть X – линейное пространство, $q : X \times X \rightarrow R$ – бисублинейная четная симметричная функция, X_1 – векторное подпространство в X , задана билинейная симметричная функция b_0 из $X_1 \times X_1$ в R , и $b_0(x_1, y_1) \leq q(x_1, y_1)$ для всех $(x_1, y_1) \in X_1 \times X_1$. Тогда существует билинейная симметричная функция $b(x, y)$, определенная на $X \times X$ и такая, что $b(x_1, y_1) = b_0(x_1, y_1)$ для $(x_1, y_1) \in X_1 \times X_1$ и $b(x, y) \leq q(x, y)$ при $(x, y) \in X \times X$.

Доказательство. Ясно, что $X_1 \widehat{\otimes} X_1 = \text{Lin}\{x \widehat{\otimes} y \in X \widehat{\otimes} X : (x, y) \in X_1 \times X_1\}$ – линейное подпространство в $X \widehat{\otimes} X$. Если $v \in X_1 \widehat{\otimes} X_1$, $\bar{v} \in X \widehat{\otimes} X$ и $v = \bar{v}$, то имеем, что $\bar{v} \in v + \text{Lin } M$. Тогда аналогично лемме 8 проверяется, что

$$\begin{aligned} \widehat{q}(\bar{v}) &= \inf\left\{\sum_{i=1}^{\bar{n}} q(\tilde{x}^i, \tilde{y}^i) + \sum_{i=1}^n q(x_1^i + x_2^i, y^i) + \sum_{i=1}^n q(-x_1^i, y^i) + \sum_{i=1}^n q(-x_2^i, y^i) + \right. \\ &+ \sum_{j=1}^m q(z^j, y_1^j + y_2^j) + \sum_{j=1}^m q(z^j, (-y_1^j)) + \sum_{j=1}^m q(z^j, (-y_2^j)) + \sum_{s=1}^k q(\lambda^s u^s, \mu^s v^s) + \\ &+ \sum_{s=1}^k q(-\lambda^s \mu^s u^s, v^s) + \sum_{\tau=1}^d q(\tilde{u}^\tau, \tilde{v}^\tau) + \sum_{\tau=1}^d q(-\tilde{v}^\tau, \tilde{u}^\tau) : \tilde{x}^i, x_1^i, x_2^i, z^j, u^s, \tilde{u}^\tau; \\ &\left. \tilde{y}^i, y^i, y_1^j, y_2^j, v^s, \tilde{v}^\tau \in X; \lambda^s, \mu^s \in R; n, m, k, d \in N \cup \{0\}, v = \sum_{i=1}^{\bar{n}} \tilde{x}^i \widehat{\otimes} \tilde{y}^i\right\}, \end{aligned}$$

$$(\tilde{x}^i, \tilde{y}^i) \in X_1 \times X_1, \bar{n} \in N\} = \inf\left\{\sum_{i=1}^n q(x^i, y^i) : v = \sum_{i=1}^n x^i \widehat{\otimes} y^i, (x^i, y^i) \in X_1 \times X_1, n \in N\right\} = \widehat{q}(v).$$

Так как $b_0(x_1, y_1) \leq q(x_1, y_1)$ для всех $(x_1, y_1) \in X_1 \times X_1$, то отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^n b_0(x^i, y^i) \leq \sum_{i=1}^n q(x^i, y^i) \text{ при } v = \sum_{i=1}^n x^i \widehat{\otimes} y^i, \text{ где } (x^i, y^i) \in X_1 \times X_1, n \in N.$$

Обозначив $u(v) = \sum_{i=1}^n b_0(x^i, y^i)$ при $v = \sum_{i=1}^n x^i \widehat{\otimes} y^i$, имеем, что $u(v) \leq \widehat{q}(v)$ при $v \in X_1 \widehat{\otimes} X_1$.

Ясно, что $u(x \widehat{\otimes} y) = b_0(x, y) \leq q(x, y)$ при $(x, y) \in X_1 \times X_1$. По теореме Хана–Бана-

ха (см.: [16. С. 156]) существует линейная функция \tilde{u} , определенная на $X \widehat{\otimes} X$ такая, что $\tilde{u}(v) = u(v)$ при $v \in X_1 \widehat{\otimes} X_1$ и $\tilde{u}(v) \leq \widehat{q}(v)$ при $v \in X \widehat{\otimes} X$. Ясно, что $b(x, y) = \tilde{u}(x \widehat{\otimes} y) \leq \widehat{q}(x \widehat{\otimes} y) = q(x, y)$ для любого $(x, y) \in X \times X$, $b(x, y) = \tilde{u}(x \widehat{\otimes} y)$ – билинейная симметричная функция в $X \times X$, и $b(x_1, y_1) = b_0(x_1, y_1)$ при $(x_1, y_1) \in X_1 \times X_1$. Теорема доказана.

Если X – банахово пространство и $v \in X \widehat{\otimes} X$, то положим

$$\|v\|_p = \inf\left\{\sum_{i=1}^n \|x^i\| \|y^i\| : v = \sum_{i=1}^n x^i \widehat{\otimes} y^i, (x^i, y^i) \in X \times X, n \in N\right\}.$$

Очевидно, что $\|\cdot\|_p$ – норма в $X \widehat{\otimes} X$ (см.: [15]). Она называется проективной нормой в $X \widehat{\otimes} X$.

Отметим, что если $X \widehat{\otimes} X$ наделено проективной топологией, то $(X \widehat{\otimes} X)^* = \overline{B}(X^2, R)$.

Если $\widehat{q} : X \widehat{\otimes} X \rightarrow R$ – полунепрерывная снизу сублинейная функция, то из предложения 4.1.1 [13. С. 203] имеем, что $\widehat{q}(v) = \sup\{b(v) : b \in \partial \widehat{q}\}$, где

$$\partial \widehat{q} = \{b \in \overline{B}(X^2, R) : \widehat{q}(v) \geq b(v) \text{ при } v \in X \widehat{\otimes} X\}.$$

Так как при условии леммы 8 $\widehat{q}(x \widehat{\otimes} y) = q(x, y)$ при $(x, y) \in X \times X$, то имеем, что $q(x, y) = \sup\{b(x, y) : b \in \partial_2 q\}$, где

$$\partial_2 q = \{b \in \overline{B}(X^2, R) : q(x, y) \geq b(x, y) \text{ при } (x, y) \in X \times X\}.$$

Лемма 9. Если X – банахово пространство, $q : X \times X \rightarrow R$ – симметричная четная бисублинейная непрерывная функция, то $\widehat{q} : X \widehat{\otimes} X \rightarrow R$ – непрерывная функция.

Доказательство. Легко проверяется, что выпуклая оболочка $\overline{B} = co(B \widehat{\otimes} B)$, где $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$, является единичным шаром в $X \widehat{\otimes} X$. По условию q – бисублинейная непрерывная функция, поэтому по лемме 2.8 [7. С. 21] существует $M > 0$ такое, что $|q(x, y)| \leq M \|x\| \|y\|$ при $(x, y) \in X \times X$. Тогда имеем, что $q(x, y) \leq M$ для любого $(x, y) \in B \times B$. Если $v \in co(B \widehat{\otimes} B)$, то существуют $x_i, y_i \in B$ и $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ при $i = 1, \dots, k$ такие, что $v = \sum_{i=1}^k \lambda_i (x_i \widehat{\otimes} y_i)$, где $k \in N$. Тогда из равенства $\widehat{q}(x_i \widehat{\otimes} y_i) = q(x_i, y_i) \leq M$ и сублинейности функции \widehat{q} имеем, что $\widehat{q}(v) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i \widehat{q}(x_i \widehat{\otimes} y_i) \leq M$, т.е. $\widehat{q}(v) \leq M$ при $v \in co(B \widehat{\otimes} B)$. Так как $\widehat{q}(0) = 0$, то по теореме 3.2.1 [13. С. 181] получим, что \widehat{q} – непрерывная функция. Лемма доказана.

Если X – банахово пространство, $f : X \rightarrow R$, то положим

$$\partial_2 f(x_0) = \{b \in B(X^2, R) : f^{(2)}(x_0; x, y) \geq b(x, y) \text{ при } x, y \in X\},$$

где через $B(X^2; R)$ обозначено множество всех непрерывных билинейных функций из X^2 в R .

Следствие 2. Если X – банахово пространство, $f : X \rightarrow R$ – 2-липшицевая функция в окрестности точки x_0 , то

$$f^{(2)}(x_0; x, y) = \sup\{b(x, y) : b \in \bar{\partial}_2 f(x_0)\} = \sup\{b(x, y) : b \in \partial_2 f(x_0)\}.$$

Доказательство. Если f – 2-липшицевая функция в окрестности точки x_0 с постоянной L , то $f^{(2)}(x_0; x, y)$ – бисублинейная симметрическая четная функция, и $|f^{(2)}(x_0; x, y)| \leq L\|x\|\|y\|$ при $(x, y) \in X \times X$. Положив $q(x, y) = f^{(2)}(x_0; x, y)$, аналогично лемме 9 имеем, что $\hat{q} : X \hat{\otimes} X \rightarrow R$ – непрерывная функция. Тогда справедливость следствия 2 следует из предложения 4.1.1 [13. С. 203] и леммы 8. Следствие доказано.

Если $f_1 : X \rightarrow R$ и $f_2 : X \rightarrow R$ удовлетворяют 2-липшицеву условию с постоянной K в окрестности точки x_0 , то непосредственно проверяется, что

$$(f_1 + f_2)^{(2)}(x_0; x_1, x_2) \leq f_1^{(2)}(x_0; x_1, x_2) + f_2^{(2)}(x_0; x_1, x_2)$$

при $x_1, x_2 \in X$. Поэтому $\partial_{(2)}(f_1 + f_2)^{(2)}(x_0) \subset \partial_{(2)}(f_1^{(2)}(x_0; \cdot) + f_2^{(2)}(x_0; \cdot))$, где

$$\begin{aligned} \partial_{(2)}(f_1^{(2)}(x_0; \cdot) + f_2^{(2)}(x_0; \cdot)) = \\ = \{b \in \bar{B}(X^2, R) : f_1^{(2)}(x_0; x_1, x_2) + f_2^{(2)}(x_0; x_1, x_2) \geq b(x_1, x_2) \text{ при } x_1, x_2 \in X\}. \end{aligned}$$

Если $A \subset \bar{B}(X^2, R)$, то S -оболочкой множества A назовем множество

$$SA = \{b \in \bar{B}(X^2, R) : \sup\{\tilde{b}(x_1, x_2) : \tilde{b} \in A\} \geq b(x_1, x_2) \text{ при } x_1, x_2 \in X\}.$$

Используя S -оболочку множества, имеем, что

$$\partial_{(2)}(f_1 + f_2)^{(2)}(x_0) \subset S(\partial_{(2)}f_1(x_0) + \partial_{(2)}f_2(x_0)).$$

Множество $d_{(2)}f(x_0) = \{Q \in B_0(X) : f_{(2)}(x_0; x, x) \leq Q(x) \leq f^{(2)}(x_0; x, x) \text{ при } x \in X\}$ назовем также бидифференциалом функции f в точке x_0 .

Отметим, что аналогично можно изучить свойства бидифференциала $d_{(2)}f(x_0)$.

Список источников

1. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.
2. Clarke F. Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control. London: Springer-Verlag, 2013. 591 p.
3. Penot J.-P. Calculus Without Derivatives, Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer, 2013. 524 p.
4. Садыгов М.А. Необходимое условие экстремума высших порядков для негладких функций // Известия Академии наук Азербайджанской ССР. Сер. физико-технических и математических наук. 1989. № 6. С. 33–47.
5. Садыгов М.А. Экстремальные задачи для негладких систем. Баку: Элм, 1996. 148 с.
6. Садыгов М.А. Негладкий анализ и его приложения к экстремальной задаче для включения типа Гурса–Дарбу. Баку: Элм, 1999. 135 с.
7. Садыгов М.А. Исследование негладких оптимизационных задач. Баку: Элм, 2002. 125 с.

8. Садыгов М.А. Субдифференциал высшего порядка и оптимизация. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2014. 359 с.
9. Cominetti R., Correa R. A generalized second-order derivative in nonsmooth optimization // *SIAM Journal on Control and Optimization*. 1990. V. 28. P. 789–809.
10. Ioffe A., Milosz T. On characterization of $C^{1,1}$ functions // *Системный анализ*. 2002. № 3. С. 3–13.
11. Rockafellar R.T., Wets R. J-B. *Variational Analysis*. Berlin; Heidelberg: Springer, 2009. 733 p.
12. Бедельбаев А.А. О субдифференциалах второго порядка и их приложениях в вариационном исчислении : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Алма-Ата, 1986. 14 с.
13. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 479 с.
14. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. М.: Мир, 1975. 496 с.
15. Хелемский А.Я. Гомология в банаховых и топологических алгебрах. М.: Изд-во МГУ, 1986. 288 с.
16. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989. 623 с.

References

1. Clarke F.H. (1983) *Optimization and Nonsmooth Analysis*. New York: John Wiley & Sons.
2. Clarke F.H. (2013) *Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control*. London: Springer-Verlag.
3. Penot J.-P. (2013) *Calculus without Derivatives*. New York: Springer.
4. Sadygov M.A. (1989) Neobkhodimoye usloviye ekstremuma vysshikh poryadkov dlya negladkikh funktsiy [Necessary condition of the high order extremum for nonsmooth functions]. *Izvestiya Akademii nauk Azerbaydzhanskoj SSR. Seriya fiziko-matematicheskikh i tekhnicheskikh nauk*. 6. pp. 33–47.
5. Sadygov M.A. (1996) *Ekstremal'nyye zadachi dlya negladkikh sistem* [Extremum problems for nonsmooth systems]. Baku: Elm.
6. Sadygov M.A. (1999) *Negladkiy analiz i yego prilozheniya k ekstremal'noy zadache dlya vklucheniya tipa Gursa – Darbu* [Nonsmooth analysis and its applications to the extremum problem for the Goursat–Darboux type inclusion]. Baku: Elm.
7. Sadygov M.A. (2002) *Issledovaniye negladkikh optimizatsionnykh zadach* [Investigation of nonsmooth optimization problems]. Baku: Elm.
8. Sadygov M.A. (2014) *Subdifferential of High Orders and Optimization*. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing.
9. Cominetti R., Correa R. (1990) A generalized second-order derivative in nonsmooth optimization. *SIAM Journal on Control and Optimization*. 28. pp. 789–809.
10. Ioffe A., Milosz T. (2002) On a characterization of $C^{1,1}$ -functions. *Cybernetics and Systems Analysis*. 38(3). pp. 313–322.
11. Rockafellar R.T., Wets R.J.-B. (2009) *Variational Analysis*. Berlin: Springer.
12. Bedel'bayev A.A. (1986) *O subdifferentsialakh vtorogo poryadka i ikh prilozheniyakh v variatsionnom ischislenii* [On second order subdifferentials and their applications in variational calculus]. Dissertation. Academy of Sciences of Kazakh SSR, Institute of Mathematics and Mechanics.
13. Ioffe A.D., Tihomirov V.M. (1979) *Theory of Extremal Problems*. Amsterdam: North Holland Publishing Company.
14. Laurent P.J. (1972) *Approximation et Optimisation*. Paris: Herrman.
15. Khelemskiy A.Ya. (1986) *Gomologiya v banakhovykh i topologicheskikh algebrakh* [Homology in Banach and topological spaces]. Moscow: Moscow State University.
16. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. (2012) *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*. Mansfield Center: Martino Fine Books.

Сведения об авторе:

Садыгов Мисраддин Аллахверди оглы – доктор физико-математических наук, профессор Бакинского государственного университета (Баку, Азербайджан). E-mail: misreddin08@rambler.ru

Information about the author:

Sadygov Misraddin A. (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Baku State University, Baku, Azerbaijan). E-mail: misreddin08@rambler.ru

Статья поступила в редакцию 27.11.2024; принята к публикации 05.02.2026

The article was submitted 27.11.2024; accepted for publication 05.02.2026

Научная статья

УДК 512.545

doi: 10.17223/19988621/99/2

MSC: 06F15; 08B15

Примеры разрешимых групп с конечным числом упорядочений

Алексей Владимирович Зенков¹, Сергей Викторович Ленюк²

¹ Алтайский государственный аграрный университет, Барнаул, Россия

² Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Россия

¹ alexey_zenkov@yahoo.com

² lenyuk1972@mail.ru

Аннотация. При изучении упорядочиваемых групп естественным образом возникает вопрос о мощности множества линейных порядков группы. Несложно заметить: если группа допускает конечное число упорядочений, то оно четное. Однако до сих пор неизвестно, для каждого ли четного $n = 2k$ найдется группа, допускающая n упорядочений.

Изучение разрешимых групп с конечным числом упорядочений берет свое начало в статье В.М. Копытова «О линейно упорядоченных разрешимых группах» (1973), в которой было доказано, что в неабелевой разрешимой группе с конечным числом порядков это число кратно 4, и были приведены примеры разрешимых групп степени 2 с конечным числом порядков. Как продолжение этой работы можно рассматривать статью В.В. Блудова и Л.Э. Бадмаевой «О способе построения упорядочиваемых разрешимых групп с конечным числом упорядочений» (2014), где приведены примеры разрешимых групп степени разрешимости 3 с конечным числом упорядочений. Настоящую работу можно рассматривать как продолжение работ, упомянутых выше. Именно, строятся примеры разрешимых групп степеней 4, 5 и 6, допускающие конечное число упорядочений.

Ключевые слова: разрешимая группа, линейный порядок

Для цитирования: Зенков А.В., Ленюк С.В. Примеры разрешимых групп с конечным числом упорядочений // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2026. № 99. С. 22–29. doi: 10.17223/19988621/99/2

Original article

On solvable groups with a finite number of orderings

Alexey V. Zenkov¹, Sergey V. Lenyuk²

¹ Altai State Agricultural University, Barnaul, Russian Federation

² Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russian Federation

¹ alexey_zenkov@yahoo.com

² lenyuk1972@mail.ru

Abstract. A group G is called orderable if it is possible to introduce on it a linear order relation that is stable under two-way multiplication. Obviously, if a group admits a finite number of orderings, then it is even. It is still unknown whether for every natural n there is a group admitting exactly $2n$ orderings.

For solvable groups, this issue was solved by V.M. Kopytov. Namely, it was shown that if a nonabelian solvable group admits a finite number of orders, then it is a multiple of 4, and for each natural number n an example of a solvable group with $4n$ orders is given. However, all these groups had a solvability class of 2. Therefore, the question of the existence (description) of solvable groups with a finite number of orderings and the solvability class greater than 2 seems natural. The study of such groups was started by V.V. Bludov and L.E. Badmaeva. They gave examples of solvable groups of class 3 with a finite number of orderings. In the proposed work, we construct solvable groups with a finite number of orderings the solvability class of which is 4, 5, and 6. These groups are constructed as a semidirect product of a free nilpotent group with two generators using an infinite cyclic group. We also note that calculations in a free nilpotent group are based on the standard calculus of basic commutators.

Keywords: solvable group, totally order

For citation: Zenkov, A.V., Lenyuk, S.V. (2026) On solvable groups with a finite number of orderings. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 99. pp. 22–29. doi: 10.17223/19988621/99/2

Введение

Напомним, что группа G называется *упорядочиваемой*, если на ней можно ввести отношение линейного порядка \geq , которое устойчиво относительно двухстороннего умножения, т.е.

для любых $x, y, z, t \in G$ неравенство $x \geq y$ влечет $tx \geq tyz$.

Ясно, если группа G упорядочена при помощи порядка \geq , то для нее имеет место и обратный порядок \geq' , т.е. $x \geq' y \Leftrightarrow y \geq x$. Стало быть, если группа допускает конечное число упорядочений, то оно четное. До сих пор неизвестно, для каждого ли натурального n найдется группа, допускающая ровно $2n$ упорядочений.

Для *разрешимых* групп этот вопрос решен В.М. Копытовым: им в работе [1] показано, что если разрешимая неабелева группа допускает конечное число упорядочений, то оно кратно 4, и для каждого натурального n приведен пример группы, имеющей $4n$ упорядочений. Однако все построенные группы имели степень разрешимости 2. Поэтому естественным представляется вопрос существования (описания) разрешимых групп с конечным числом упорядочений, степень разрешимости которых ≥ 3

Изучение таких групп начато В.В. Блудовым и Л.Э. Бадмаевой в [2]. Ими приведены примеры разрешимых группы степени 3 с конечным числом упорядочений.

В предлагаемой работе строятся разрешимые группы с конечным числом упорядочений, степени разрешимости которых 4, 5, 6.

Все необходимые сведения по теории упорядоченных групп можно найти в книге [3], по теории групп – в [4].

Предварительные сведения

Напомним некоторые понятия из теории групп и упорядоченных групп, которые нам необходимы. Подгруппа H группы G называется *изолированной*, если для любого $g \in G$ и натурального n включение $g^n \in H$ означает $g \in H$. Непосредственно из определения вытекает, что фактор-группа G/H группы G по изолированной нормальной подгруппе H не имеет кручения. Подгруппа H линейно упорядоченной группы G называется *выпуклой*, если для любых $h_1, h_2 \in H, g \in G$ неравенство $h_1 \leq g \leq h_2$ влечет $g \in H$. Подгруппа H упорядочиваемой группы G *относительно выпукла*, если она выпукла при некотором упорядочении группы G . Очевидно, что всякая относительно выпуклая подгруппа изолирована, и фактор-группа G/H упорядочиваемой группы G по относительно выпуклой нормальной подгруппе H упорядочиваема.

В упомянутой выше статье В.М. Копытова [1] приведен следующий критерий упорядочиваемости разрешимой группы *конечного* ранга.

Теорема 1. ([1. Теорема 3.1]) *Разрешимая группа G конечного ранга и без кручения упорядочиваема тогда и только тогда, когда она действует положительно на своей максимальной нормальной нильпотентной подгруппе.*

Понятие «действует положительно» разъясним на примере группы G_{c+1} , являющейся полупрямым произведением свободной c -степенно нильпотентной группы $N_{2,c}$ с двумя порождающими и бесконечной циклической группы (d) . Предположим, что

$$N_{2,c} = N'_1 \geq N'_2 \geq \dots \geq N'_t \geq N'_{t+1} = E \quad (1)$$

есть *неуплотняемый* центральный ряд в $N_{2,c}$, состоящий из нормальных в G_{c+1} и изолированных в $N_{2,c}$ подгрупп. Сопряжение элементом d в каждом факторе $\bar{N}'_k = N'_k / N'_{k+1}, k = 1, \dots, t$ естественным образом индуцирует линейное преобразование $\bar{\varphi}$ по правилу $(\bar{g})\bar{\varphi} = (g)^d N'_{k+1}$, где $\bar{g} = gN'_{k+1} \in N'_k$. Через V_k обозначим пополнение абелевой группы \bar{N}'_k . Ясно, что V_k есть векторное пространство над полем рациональных чисел \mathbf{Q} и что действие $\bar{\varphi}$ продолжается до линейного преобразования φ этого пространства. Неуплотняемость ряда (1) влечет неприводимость φ над \mathbf{Z} . С другой стороны, на φ можно смотреть и как на линейное преобразование векторного пространства V'_k , получающегося из V_k с помощью расширения \mathbf{Q} до поля алгебраических чисел. Если для каждого k найдется вектор $v_k \in V'_k$, собственный относительно φ , причем его собственные значения *вещественны и положительны*, то это и будет означать, что группа G_{c+1} действует положительно на $N_{2,c}$.

Отметим также, что вычисления в $N_{2,c}$ базируются на стандартном исчислении базисных коммутаторов (см., напр.: [4]).

Основной результат

Порождающие элементы $N_{2,c}$ обозначим через b_1, b_2 . Считаем, что $b_2 > b_1$, и это базисные коммутаторы веса 1. Сразу отметим, что упорядочение базисных коммутаторов следующее: 1) по весу; 2) внутри одного веса используется лексикографическое упорядочение.

Действие d на порождающих определим следующим образом:

$$b_2^d = b_1, b_1^d = b_2^{-1} b_1^m, \quad (2)$$

где целое $m > 4$.

Замечание. Формула (2) определяет действие во всех случаях.

Через N_k обозначим k -й член нижнего центрального ряда группы $N_{2,c}$. Хорошо известно (см., напр.: [4]), что базисные коммутаторы веса k образуют базис свободной абелевой группы

$\bar{N}_k = N_k / N_{k+1}$. Следовательно \bar{N}_k можно рассматривать как подпространство конечномерного векторного пространства над \mathbf{Z} , размерность которого, очевидно, определяется числом базисных коммутаторов веса k . Стало быть, для каждого k можно найти матрицу A_k линейного преобразования φ . Далее, через $f_k(\lambda)$ обозначим характеристический многочлен матрицы A_k .

Если все $f_k(\lambda)$ неприводимы над \mathbf{Z} и имеют хотя бы по одному положительному (иррациональному) корню, то нижний центральный ряд будет искомым. В случае приводимости $f_k(\lambda)$ соответствующий отрезок от N_k до N_{k+1} следует уплотнить при помощи нормальных в G_{c+1} и изолированных в $N_{2,c}$ подгрупп.

Случай G_4

Выпишем все базисные коммутаторы группы $N_{2,3}$ веса ≥ 2 . Коммутатор $b_{21} = [b_2, b_1]$ – единственный базисный коммутатор веса 2; коммутаторы $b_{212} = [b_{21}, b_2] > b_{211} = [b_{21}, b_1]$ образуют группу базисных коммутаторов веса 3. Запишем нижний центральный ряд:

$$N_{2,3} = N_1 \geq N_2 \geq N_3 \geq N_4 = E. \quad (3)$$

Образы базисных коммутаторов в факторах обозначаем как сами базисные коммутаторы, и вычисления в \bar{N}_k , разумеется, ведутся по модулю N_{k+1} . Например,

$$(b_{21})\varphi = ([b_2, b_1])\gamma = [b_1, b_2^{-1} b_1^m] = [b_1, b_2^{-1}] [b_1, b_1^m] = b_{21}. \quad (4)$$

Поступая аналогично, видим, что

$$(b_{212})\varphi = b_{211}, (b_{211})\varphi = b_{212}^{-1} b_{211}^m. \quad (5)$$

Полученные формулы позволяют утверждать, что

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & m \end{pmatrix}, A_2 = (1), A_3 = A_1.$$

Так как многочлен $f_1(\lambda) = \lambda^2 - m\lambda + 1$ неприводим над \mathbf{Z} и $f_2(\lambda) = \lambda - 1$, то ряд (3) неуплотняем. Далее, все корни характеристических многочленов положительны, и поэтому группа G_4 допускает ровно $2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 = 64$ порядка.

Случай G₅

Выпишем все базисные коммутаторы веса 4:

$$b_{2122} = [b_{212}, b_2] > b_{2112} = [b_{211}, b_2] > b_{2111} = [b_{211}, b_1].$$

Из формул (2) и (5) следует, что

$$(b_{2122})\varphi = b_{2111}, (b_{2112})\varphi = b_{2121}^{-1} b_{2111}^m, (b_{2111})\varphi = b_{2122} b_{2112}^{-m} b_{2121}^{-m} b_{2111}^{m^2}.$$

Следующая формула отмечена в [5] (Лемма 1)

$$b_{2121} = b_{2112}. \tag{6}$$

С учетом этой формулы получаем, что

$$(b_{2122})\varphi = b_{2111}, (b_{2112})\varphi = b_{2121}^{-1} b_{2111}^m, (b_{2111})\varphi = b_{2122} b_{2112}^{-2m} b_{2111}^{m^2}. \tag{7}$$

Стало быть,

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & m \\ 1 & -2m & m^2 \end{pmatrix}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$f_4(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + (2 - m^2)\lambda + 1) = (\lambda - 1)(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2),$$

где $\lambda_{1,2} = \frac{m^2 - 2 \pm \sqrt{m^4 - 4m^2}}{2}$ оба положительны. Приводимость $f_4(\lambda)$ означает,

что нижний центральный ряд группы $N_{2,4}$ следует уплотнить. Для этого рассмотрим

$N_4^* = \{g \in N_4 : g^d = g\}$. Ясно, что N_4^* есть подгруппа и она нормальна в G_5 .

Более того, из построения следует, что она изолирована в $N_{2,4}$. Таким образом строится следующий, уже неуплотняемый, ряд

$$N_{2,4} = N_1 \geq N_2 \geq N_3 \geq N_4 \geq N_4^* \geq N_5 = E. \tag{8}$$

Проведенные вычисления показывают, что группа G_5 допускает ровно $2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 = 512$ порядков.

Случай G₆

В группе $N_{2,5}$ рассмотрим ряд

$$N_{2,5} = N_1 \geq N_2 \geq N_3 \geq N_4 \geq N_4^* \geq N_5 \geq N_6 = E, \tag{9}$$

где N_5 – свободная абелева группа, порождающими которой являются базисные коммутаторы веса 5. Для удобства их записи введем еще одно обозначение. Это связано с тем, что коммутаторы данного веса могут быть получены не только по схеме «4 + 1», но и по схеме «3 + 2». Поэтому, например, $b_{21222} = [b_{2122}, b_2]$,

$$b_{212,21} = [b_{212}, b_{21}].$$

Лемма 1. *Имеет место следующая формула:*

$$b_{21221} = b_{21122} b_{212,21}, \quad b_{21121} = b_{21122} b_{211,21}. \tag{10}$$

Доказательство. Распишем коммутатор $b_{21221} = [b_{2122}, b_1] = b_{2122}^{-1} b_1^{-1} b_{212}^{-1} b_2^{-1} b_{212} b_2 b_1$.

Переставляя местами b_2 и b_1 , получаем, что $b_{21221} = b_{2122}^{-1} b_1^{-1} b_{212}^{-1} b_2^{-1} b_{212} b_1 b_2 b_{21}$. Теперь

переставляем b_{212} и b_1 . В результате имеем $b_{21221} = b_{2122}^{-1} b_1^{-1} b_{212}^{-1} b_2^{-1} b_1 b_{212} b_{2121} b_2 b_{21}$.

Передвигая влево b_2 с учетом формулы (6) приходим к записи

$b_{21221} = b_{2122}^{-1} b_1^{-1} b_{212}^{-1} b_2^{-1} b_1 b_{212} b_2 b_{2112} b_{21122} b_{21}$. Далее, учитывая веса участвующих в перестановках коммутаторов, одновременно передвигая влево b_2 и b_{21} , приходим к формуле $b_{21221} = b_{2122}^{-1} b_1^{-1} b_{212}^{-1} b_1 b_{12} b_{21} b_{212} b_{212,21} b_{2122} b_{2112} b_{21122}$.

Таким образом, $b_{21221} = b_{2122}^{-1} b_{2121}^{-1} b_{212,21} b_{2122} b_{2112} b_{21122}$. Используя опять формулу (6), убеждаемся в истинности первой формулы в (10). Вывод второй формулы осуществляется аналогично. #

Формула (10) с учетом ранее приведенных формул позволяет вычислить действие φ на базисных коммутаторах веса 5. Например,

$$(b_{21111})\varphi = [b_{2122} b_{2112}^{-2m} b_{2111}^{m^2}, b_2^{-1} b_1^m] = b_{21222}^{-1} b_{21122}^{2m} b_{21112}^{-m^2} b_{21221}^m b_{21121}^{-2m^2} b_{21111}^{m^3} = \\ = b_{21222}^{-1} b_{21122}^{3m} b_{21112}^{-3m^2} b_{21111}^{m^3} b_{212,21}^m b_{211,21}^{-2m^2}.$$

Поэтому

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & m & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2m & m^2 & 1 & 1 \\ -1 & 3m & -3m^2 & m^3 & m & -2m^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & m \end{pmatrix}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что $f_5(\lambda) = f_1^2(\lambda)(\lambda^2 + (3m - m^3)\lambda + 1)$.

Так как $f_5(\lambda)$ приводим над \mathbf{Z} , то ряд (9) следует уплотнить.

Для краткости переобозначим базисные коммутаторы веса 5 через x_i , где $i = 1, \dots, 6$, нумеруя их в соответствии с ранее введенным на них порядком, т.е.

$$x_1 = b_{21222}, x_2 = b_{21122}, x_3 = b_{21112}, x_4 = b_{21111}, x_5 = b_{212,21}, x_6 = b_{211,21}.$$

Рассмотрим элементы

$$x = x_1^m x_2^{-(m^2+1)} x_3^{2m} x_4^{-1}, y = x_1 x_2^{-m} x_3. \quad (11)$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$x^d = y x_5^m x_6^{2m(m+1)}, y^d = x^{-1} y^m x_5 x_6. \quad (12)$$

Через N_5^* обозначим нормальное замыкание в G_6 подгруппы, порожденной элементами x и x_5 . Напомним еще раз, что $x_5^d = x_6, x_6^d = x_5^{-1} x_6^m$. Стало быть, группа $N_5^{**} = \text{gr}(x_5, x_6)$ содержится в N_5^* . Более того, она нормальная в G_6 и изолированная в $N_{2,5}$.

Всякий элемент $g^* \in N_5^*$ имеет вид:

$$g^* = x^{d^{s_1} + \dots + d^{s_k}} x_5^{d^{q_1} + \dots + d^{q_r}}, \quad (13)$$

где $s_i, q_j \in \mathbf{Z}$.

Замечание. Элемент N_5^{**} в записи любого элемента из N_5^* , если нам не важна его точная запись, в дальнейшем обозначаем через g^{**} .

Так как для любого целого s имеет место

$$x^{d^s} = x^{f_s} y^{g_s} g^{**}, \quad (14)$$

где $f_s, g_s \in \mathbf{Z}$, то формула (13) приобретает вид:

$$g^* = x^{\sum f_{s_i}} y^{\sum g_{s_i}} g^{**}. \quad (15)$$

Предположим, нашлись $g \in G_6 \setminus N_5^*$ и целое $n \geq 2$ такие, что $g^n \in N_5^*$. Очевидно, что $g \in N_5$, и поэтому $g = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} x_4^{\alpha_4} g^{**}$, где $\alpha_i \in \mathbf{Z}, i = 1, \dots, 4$. В случае необходимости, переходя от g к $g(g^{**})^{-1}$, можно считать, что

$$g = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} x_4^{\alpha_4}.$$

Следовательно, $g^n = x_1^{\alpha_1 n} x_2^{\alpha_2 n} x_3^{\alpha_3 n} x_4^{\alpha_4 n}$. Отсутствие в последней записи g^n базисных коммутаторов x_5 и x_6 в силу формулы (15) дает равенство

$$x_1^{\alpha_1 n} x_2^{\alpha_2 n} x_3^{\alpha_3 n} x_4^{\alpha_4 n} = x^{\sum f_{s_i}} y^{\sum g_{s_i}}.$$

Вспоминая запись x и y через базисные коммутаторы (см. формулу (11)), приходим к следующей системе:

$$\begin{cases} \alpha_1 n = m \sum f_{s_i} + \sum g_{s_i}, \\ \alpha_2 n = -(m^2 + 1) \sum f_{s_i} - m \sum g_{s_i}, \\ \alpha_3 n = 2m \sum f_{s_i} + \sum g_{s_i}, \\ \alpha_4 n = -\sum f_{s_i}. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно α_1 и α_2 получаем, что

$$\begin{cases} \alpha_1 = m\alpha_4 + \alpha_3, \\ \alpha_2 = (1 - m^2)\alpha_4 - m\alpha_3. \end{cases}$$

Учитывая этот факт, видим, что

$$g = x_1^{m\alpha_4 + \alpha_3} x_2^{(1-m^2)\alpha_4 - m\alpha_3} x_3^{\alpha_3} x_4^{\alpha_4} = (x_1^m x_2^{(1-m^2)})^{\alpha_4} (x_1 x_2^{-m} x_3)^{\alpha_3} = g_0^{\alpha_4} y^{\alpha_3},$$

где $g_0 = x_1^m x_2^{(1-m^2)} x_4$. То, что $g_0 = x^{-1} y^{2m}$, проверяется непосредственно. Стало быть, $g = (x^{-1} y^{2m})^{\alpha_4} y^{\alpha_3}$, и мы приходим к противоречию.

Итак, показано, что N_5^* – изолированная подгруппа группы G_6 . Следующий ряд будет искомым:

$$N_{2,5} = N_1 \geq N_2 \geq N_3 \geq N_4 \geq N_4^* \geq N_5 \geq N_5^* \geq N_5^{**} \geq N_6 = E. \quad (16)$$

Действительно, характеристический многочлен N_5^{**} и фактора N_5^* / N_5^{**} суть $f_1(\lambda) = \lambda^2 - m\lambda + 1$; многочлен $\lambda^2 + (3m - m^3)\lambda + 1$ является характеристическим для фактора N_5 / N_5^* . Положительность и иррациональность корней этих многочленов, очевидны. Следовательно, группа G_6 допускает ровно $512 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 32\,768$ порядков.

Список источников

1. Копытов В.М. О линейно упорядоченных разрешимых группах // Алгебра и логика. 1973. Т. 12, № 6. С. 655–666.
2. Блудов В.В., Бадмаева Л.Э. О способе построения упорядочиваемых разрешимых групп с конечным числом упорядочений // Известия Иркутской государственной экономической академии. 2014. Т. 98, № 6. С. 152–158.

3. Копытов В.М. Решеточно упорядоченные группы. М.: Наука, 1984. 300 с.
4. Холл М. Теория групп. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 467 с.
5. Романьков В.А. Недистрибутивность решетки многообразий нильпотентных групп // Алгебра и логика. 1970. Т. 9, № 1.С. 67–72.

References

1. Kopytov V.M. (1973) On linearly ordered solvable groups. *Algebra and Logic*. 12(6). pp. 374–380.
2. Bludov V.V., Badmaeva L.E. (2014) О способе построения упорядочиваемых разрешимых групп с конечным числом упорядочений [On a method for constructing orderable solvable groups with a finite number of orderings]. *Izvestiya Irkutskoy Gosudarstvennoy Ekonomicheskoy Akademii – Izvestiya of Irkutsk State Economics Academy (Baikal State University of Economics and Law)*. 6. pp. 152–158.
3. Kopytov V.M., Medvedev N.Ya. (1996) *Pravouporядochennyye grupy* [Right-Ordered Groups]. Novosibirsk: Nauchnaya kniga.
4. Hall M. (1959) *The Theory of Groups*. London: Macmillan.
5. Romankov V.A. (1970) Nondistributivity of the lattice of varieties of nilpotent groups. *Algebra and Logic*. 9(1). pp. 41–44.

Сведения об авторах:

Зенков Алексей Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики, механики и инженерной графики Алтайского государственного аграрного университета (Барнаул, Россия). E-mail: alexey_zenkov@yahoo.com

Ленюк Сергей Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Московского физико-технического института (национального исследовательского университета) (Долгопрудный, Россия). E-mail: lenyuk1972@mail.ru

Information about the authors:

Zenkov Alexey V. (Candidate of Physics and Mathematics, Altai State Agricultural University, Barnaul, Russian Federation). E-mail: alexey_zenkov@yahoo.com

Lenyuk Sergey V. (Candidate of Physics and Mathematics, Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russian Federation). E-mail: lenyuk1972@mail.ru

The article was submitted 26.10.2024; accepted for publication 05.02.2026

Статья поступила в редакцию 26.10.2024; принята к публикации 05.02.2026

Original article

UDC 512.745.2

MSC: 17A30; 17A60; 17D99

doi: 10.17223/19988621/99/3

On endo-commutative algebraic structures on two-dimensional vector spaces over an arbitrary field

Diyorjon U. Asrorov¹, Ural Dj. Bekbaev², Isamiddin S. Rakhimov³

¹ Samarkand State University named after Sharof Rashidov, Samarkand, Uzbekistan

² Turin Polytechnic University in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan

³ Universiti Teknologi MARA (UiTM), Shah Alam, Malaysia

³ V.I. Romanovsky Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences,
Tashkent, Uzbekistan

¹ 96asrorovdiyorjon@mail.ru

² uralbekbaev@gmail.com

³ isamiddin@uitm.edu.my

Abstract. In this paper, we describe the class of all two-dimensional endo-commutative algebras over any base field. Thereby, we extend recent results of Takahasi, Shirayanagi, and Tsukada on description of the class of two-dimensional endo-commutative algebras to the case of an arbitrary field. The concept of an endo-commutative algebra was first introduced by aforementioned authors; in the same works, the motivations to study this class of algebras also were presented. In this paper, we present the canonical representatives of the isomorphism classes of two-dimensional endo-commutative algebras over an arbitrary field.

Keywords: endo-commutative algebra, isomorphism, matrix of structure constants, classification

Acknowledgments: The authors would like to thank the anonymous reviewer for very attentive reading the manuscript and the valuable suggestions made.

For citation: Asrorov, D.U., Bekbaev, U.Dj., Rakhimov, I.S. (2026) On endo-commutative algebraic structures on two-dimensional vector spaces over an arbitrary field. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 99. pp. 30–49. doi: 10.17223/19988621/99/3

Научная статья

Об эндо-коммутативных алгебраических структурах на двумерных векторных пространствах над произвольным полем

Диёржон Усманович Асроров¹, Урал Джумаевич Бекбаев²,
Исамиддин Саттарович Рахимов³

¹ Самаркандский государственный университет им. Шарофа Рашидова,
Самарканд, Узбекистан

² Туринский политехнический университет в Ташкенте, Ташкент, Узбекистан

³ Технологический Университет МАРА (UiTM), Шах Алам, Малайзия

³ Институт математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан,

Ташкент, Узбекистан

¹ 96asrorovdiorjon@mail.ru

² uralbekbaev@gmail.com

³ isamiddin@uitm.edu.my

Аннотация. Описывается класс всех двумерных эндо-коммутативных алгебр над любым полем. Обобщены недавние результаты Такахаси, Шираянаги и Цукады о классификации двумерных эндо-коммутативных алгебр до произвольного поля. Понятие эндо-коммутативной алгебры впервые было введено в работах вышеупомянутых авторов, там же приведены доводы для изучения этого класса алгебр. В данной работе будут представлены канонические представители классов изоморфизмов эндо-коммутативных алгебр размерности два над произвольным полем.

Ключевые слова: эндо-коммутативная алгебра, изоморфизм, матрица структурных констант, классификация

Благодарности: Авторы благодарят анонимного рецензента за очень внимательное прочтение рукописи и высказанные ценные предложения.

Для цитирования: Асrorов Д.У., Бекбаев У.Дж., Рахимов И.С. Об эндо-коммутативных алгебраических структурах на двумерных векторных пространствах над произвольным полем // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2026. № 99. С. 30–49. doi: 10.17223/19988621/99/3

1. Introduction

The classification problem for a given class of algebras, up to isomorphism, is one of the important and difficult problems of algebra. So far, two approaches are known to the solution of the problem. One of them is the structural (basis free, invariant) approach. For instance, the classifications of finite-dimensional simple and semi-simple associative algebras by Wedderburn and simple and semi-simple Lie algebras by Cartan are examples of such approach. But it is observed that this approach becomes more difficult when considering more general types of algebras. Another approach to the solution of the problem is coordinate-based. Many researchers have used this type of approach to classify various, mainly finite-dimensional, classes of algebras: associative [1–2], Lie [3–7], Jordan [8], and Leibniz [9–12]. These two approaches are somehow complementary to each other.

There were attempts to classify all fixed-dimensional algebras, for example, in [13] a classification of all 2-dimensional algebras, by the basis-free approach, was stated over any basic field. One disadvantage of the basis-free approach is that an application of the obtained classification result to classification of a given class of algebras is hardly possible. In this respect, the coordinate-based classification has advantage over it. For the coordinate-based approach in classification of all two-dimensional algebras over fields with some restrictions, one can see [14–16] and, in [17, 18], its different applications.

The concept of endo-commutative algebra was first introduced in [19] (also see [20, 21]), where the authors gave a complete classification of two-dimensional endo-commutative algebras over certain fields. In addition, these authors give a justification to study the class of endo-commutative algebras.

In this paper we provide a complete classification of all endo-commutative algebras structures on a two-dimensional vector space over any base field. The result of the paper is based on a result obtained recently in [22] on complete classification of all two-dimensional algebras over any base field. The result of the paper generalizes those obtained in [19–21].

The organization of the paper is as follows. The next section is Preliminaries, where we include the necessary definitions and results to be used throughout the paper. The main results of the paper are in Section 3 and onward. Subsections 3.1, 3., and 3.3 contain the description of all two-dimensional endo-commutative algebras over a field \mathbb{F} whose characteristic is neither 2 nor 3, characteristic 2 and characteristic 3, respectively. In Corollary 3.1 we recover the result obtained in [19]. Section 4 contains the classification of all two-dimensional curled algebras over any base field, and Section 5 is devoted to the description of two-dimensional endo-commutative curled algebras, where we show how to recover the result of [19] on the endo-commutative curled algebras.

2. Preliminaries

We begin with shortly recalling some concepts that are used in the paper.

Let A be an n -dimensional algebra over a field \mathbb{F} and $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ be a basis of the underlying vector space of A . Then on the basis e the algebra A is represented by an $n \times n^2$ matrix (called the matrix of structure constants, shortly MSC)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & \dots & a_{1n}^1 & a_{21}^1 & a_{22}^1 & \dots & a_{2n}^1 & \dots & a_{n1}^1 & a_{n2}^1 & \dots & a_{nn}^1 \\ a_{11}^2 & a_{12}^2 & \dots & a_{1n}^2 & a_{21}^2 & a_{22}^2 & \dots & a_{2n}^2 & \dots & a_{n1}^2 & a_{n2}^2 & \dots & a_{nn}^2 \\ \dots & \dots \\ a_{11}^n & a_{12}^n & \dots & a_{1n}^n & a_{21}^n & a_{22}^n & \dots & a_{2n}^n & \dots & a_{n1}^n & a_{n2}^n & \dots & a_{nn}^n \end{pmatrix}$$

as follows

$$e_i \cdot e_j = \sum_{k=1}^n a_{ij}^k \cdot e_k, \text{ where } i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Therefore, the product on A with respect to the basis e is written as follows:

$$x \cdot y = eA(x \otimes y) \tag{2.1}$$

for any $x = ex, y = ey$, where $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ and $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ are column coordinate vectors of x and y , respectively, $x \otimes y$ is the tensor (Kronecker) product of the vectors x and y . Now and onward for the product “ $x \cdot y$ ” on A we use the juxtaposition “ xy ”. Since in this paper we work with a basis, we do not distinguish an algebra A and its MSC A in a fixed basis.

If A is a two-dimensional algebra over a field \mathbb{F} and $e = (e_1, e_2)$ is a basis, then we take MSC of A as follows:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix}.$$

In the paper, we make use of the following results on classification, up to isomorphism, for all two-dimensional algebras over any base field \mathbb{F} . The results were obtained in [22] in terms of their MSC.

Theorem 1. Any nontrivial two-dimensional algebra over a field \mathbb{F} with $\text{Char}(\mathbb{F}) \neq 2, 3$ is isomorphic to only one of the following algebras listed by their matrices of structure constants:

- $A_1(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1+\alpha_2 & \alpha_4 \\ \beta_1 & -\alpha_1 & 1-\alpha_1 & -\alpha_2 \end{pmatrix}$, where $c = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \beta_1) \in \mathbb{F}^4$;

- $A_2(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 1 & \beta_2 & 1-\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where $c = (\alpha_1, \alpha_4, \beta_2) \in \mathbb{F}^3$ and $\alpha_4 \neq 0$;

- $A_3(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & \beta_2 & 1-\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & a^2\alpha_4 \\ 0 & \beta_2 & 1-\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where

$c = (\alpha_1, \alpha_4, \beta_2) \in \mathbb{F}^3$, $a \in \mathbb{F}$ and $a \neq 0$;

- $A_4(c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, where $c = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{F}^2$;

- $A_5(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\alpha_1-1 & 1-\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where $c = \alpha_1 \in \mathbb{F}$;

- $A_6(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 1 & 1-\alpha_1 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where $c = (\alpha_1, \alpha_4) \in \mathbb{F}^2$ and $\alpha_4 \neq 0$;

- $A_7(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & 1-\alpha_1 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & a^2\alpha_4 \\ 0 & 1-\alpha_1 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where

$c = (\alpha_1, \alpha_4) \in \mathbb{F}^2$, $a \in \mathbb{F}$ and $a \neq 0$;

- $A_8(c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, where $c = \beta_1 \in \mathbb{F}$;

- $A_9 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$;

- $A_{10}(c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1'(a) & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, where $c = \beta_1 \in \mathbb{F}$, $a \in \mathbb{F}$, the

polynomial $(\beta_1 t^3 - 3t - 1)(\beta_1 t^2 + \beta_1 t + 1)(\beta_1 t^3 + 6\beta_1 t^2 + 3\beta_1 t + \beta_1 - 2)$ has no root in \mathbb{F}

and $\beta_1'(t) = \frac{(\beta_1 t^3 + 6\beta_1 t^2 + 3\beta_1 t + \beta_1 - 2)^2}{(\beta_1 t^2 + \beta_1 t + 1)^3}$;

- $A_{11}(c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a^3\beta_1^{\pm 1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, where the polynomial $\beta_1 - t^3$

has no roots in \mathbb{F} , $a, c = \beta_1 \in \mathbb{F}$ and $a, \beta_1 \neq 0$;

- $A_{12}(c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ a^2\beta_1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, where $a, c = \beta_1 \in \mathbb{F}$ and $a \neq 0$;

- $A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Theorem 2. Any nontrivial two-dimensional algebra over a field \mathbb{F} with $\text{Char}(\mathbb{F}) = 2$ is isomorphic to only one of the following algebras listed by their matrices of structure constants:

- $A_{1,2}(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1+\alpha_2 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \alpha_1 & 1+\alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}$, where $c = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \beta_1) \in \mathbb{F}^4$;
- $A_{2,2}(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 1 & \beta_2 & 1+\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where $c = (\alpha_1, \alpha_4, \beta_2) \in \mathbb{F}^3$ and $\alpha_4 \neq 0$;
- $A_{2,2}(\alpha_1, 0, 1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1+\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where $\alpha_1 \in \mathbb{F}$;

- $A_{3,2}(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & \beta_2 & 1+\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & a^2\alpha_4 \\ 0 & \beta_2 & 1+\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where

$c = (\alpha_1, \alpha_4, \beta_2) \in \mathbb{F}^3$, $a \in \mathbb{F}$ and $a \neq 0$;

- $A_{4,2}(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 1+\alpha_1 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 + (1+\beta_2)a + a^2 & \beta_2 & 1+\alpha_1 & 1 \end{pmatrix}$, where

$c = (\alpha_1, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{F}^3$;

- $A_{5,2}(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 1 & 1+\alpha_1 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where $c = (\alpha_1, \alpha_4) \in \mathbb{F}^2$ and $\alpha_4 \neq 0$;

- $A_{5,2}(1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

- $A_{6,2}(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & 1+\alpha_1 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & a^2\alpha_4 \\ 0 & 1+\alpha_1 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where

$c = (\alpha_1, \alpha_4) \in \mathbb{F}^2$, $a \in \mathbb{F}$ and $a \neq 0$;

- $A_{7,2}(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 1+\alpha_1 & \alpha_1 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 + a\alpha_1 + a + a^2 & 1+\alpha_1 & \alpha_1 & 1 \end{pmatrix}$, where

$c = (\alpha_1, \beta_1) \in \mathbb{F}^2$ and $a \in \mathbb{F}$;

- $A_{8,2}(c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1'(a) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, where the polynomial

$(\beta_1 t^3 + t + 1)(\beta_1 t^2 + \beta_1 t + 1)$ has no root in \mathbb{F} , $a \in \mathbb{F}$ and $\beta_1'(t) = \frac{(\beta_1^2 t^3 + \beta_1 t + \beta_1)^2}{(\beta_1 t^2 + \beta_1 t + 1)^3}$;

- $A_{9,2}(c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a^3\beta_1^{\pm 1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, where $a, c = \beta_1 \in \mathbb{F}$ and $a \neq 0$, the

polynomial $\beta_1 + t^3$ has no root in \mathbb{F} ;

- $A_{10,2}(c) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 + a + a^2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, where $a, c = \beta_1 \in \mathbb{F}$;

- $A_{11,2}(c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ b^2(\beta_1 + a^2) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, where $a, b, c = \beta_1 \in \mathbb{F}$ and $b \neq 0$;
- $A_{12,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Theorem 3. Any non-trivial two-dimensional algebra over a field \mathbb{F} with $\text{Char}(\mathbb{F}) = 3$ is isomorphic to only one of the following algebras listed by their matrices of structure constants:

- $A_{1,3}(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_2 + 1 & \alpha_4 \\ \beta_1 & -\alpha_1 & 1 - \alpha_1 & -\alpha_2 \end{pmatrix}$, where $c = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \beta_1) \in \mathbb{F}^4$;
- $A_{2,3}(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 1 & \beta_2 & 1 - \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where $c = (\alpha_1, \alpha_4, \beta_2) \in \mathbb{F}^3$ and $\alpha_4 \neq 0$;
- $A_{3,3}(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & \beta_2 & 1 - \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & a^2 \alpha_4 \\ 0 & \beta_2 & 1 - \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where

$c = (\alpha_1, \alpha_4, \beta_2) \in \mathbb{F}^3$, $a \in \mathbb{F}$ and $a \neq 0$;

- $A_{4,3}(c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, where $c = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{F}^2$;
- $A_{5,3}(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\alpha_1 - 1 & 1 - \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where $c = \alpha_1 \in \mathbb{F}$;
- $A_{6,3}(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 1 & 1 - \alpha_1 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where $c = (\alpha_1, \alpha_4) \in \mathbb{F}^2$ and $\alpha_4 \neq 0$;
- $A_{7,3}(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & 1 - \alpha_1 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & a^2 \alpha_4 \\ 0 & 1 - \alpha_1 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where

$c = (\alpha_1, \alpha_4) \in \mathbb{F}^2$, $a \in \mathbb{F}$ and $a \neq 0$;

- $A_{8,3}(c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, where $c = \beta_1 \in \mathbb{F}$;
- $A_{9,3}(\beta_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1'(a) & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, where the polynomial

$(1 - t^3)(\beta_1 t^2 + \beta_1 t + 1)(\beta_1 t^3 + \beta_1 - 2)$ has no roots in \mathbb{F} , $a \in \mathbb{F}$ and $\beta_1'(t) = \frac{(\beta_1^2 t^3 + \beta_1 - 2)^2}{(\beta_1 t^2 + \beta_1 t + 1)^3}$;

- $A_{10,3}(c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a^3 \beta_1^{\pm 1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, where the polynomial $\beta_1 - t^3$ has no roots $a, c = \beta_1 \in \mathbb{F}$ and $a, \beta_1 \neq 0$;

- $A_{11,3}(c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ a^2 \beta_1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, where $a, c = \beta_1 \in \mathbb{F}$, $a \neq 0$;

$$\bullet A_{12,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\bullet A_{13,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definition 1. An algebra A is said to be endo-commutative if $x^2y^2 = (xy)^2$, for any $x, y \in A$.

Lemma 1. An algebra A is endo-commutative if and only if

$$A(A \otimes A)(x^{\otimes 2} \otimes y^{\otimes 2} - (x \otimes y)^{\otimes 2}) = 0, \tag{2.2}$$

where A is MSC of A .

Proof. According to (2.1) we write

$$x^2 = eAx^{\otimes 2}, \quad y^2 = eAy^{\otimes 2}, \quad x^2y^2 = eA(Ax^{\otimes 2} \otimes Ay^{\otimes 2}) = eA(A \otimes A)(x^{\otimes 2} \otimes y^{\otimes 2})$$

and $(xy)^2 = eA(A(x \otimes y) \otimes A(x \otimes y)) = eA(A \otimes A)(x \otimes y)^{\otimes 2}$. Therefore, the equality $x^2y^2 = (xy)^2$ in terms of MSC and the coordinate vectors are written as follows

$$eA(A \otimes A)(x^{\otimes 2} \otimes y^{\otimes 2}) = eA(A \otimes A)(x \otimes y)^{\otimes 2} \text{ i.e.,}$$

$$A(A \otimes A)(x^{\otimes 2} \otimes y^{\otimes 2} - (x \otimes y)^{\otimes 2}) = 0$$

what is required to get.

In [19], the class of endo-commutative algebras was split into two classes: those of curled and straight algebras. One can find there a list of such curled algebras, up to isomorphism, over the field $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$ as well. The definition was given as follows:

Definition 2. An algebra A is said to be curled if $x^2 = \lambda(x)x$ for any $x \in A$, where $\lambda(x) \in \mathbb{F}$.

Let $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ be a basis of A . According to (2.1) one has $x^2 = eAx^{\otimes 2}$, $\lambda(x)x = e\lambda(x)x$ and, therefore, the equality $x^2 = \lambda(x)x$ in terms of MSC of A and the coordinate vector of x can be written as follows:

$$Ax^{\otimes 2} - \lambda(x)x = 0. \tag{2.3}$$

In Section 4 we give a complete classification of all two-dimensional curled algebras over any base field and then split them into curled and straight algebras. The lists of these algebras given in [19] come as a particular case.

First, we start with the classification of all two-dimensional endo-commutative algebras based on the result of Theorems 1–3.

Let now A be a two-dimensional algebra over a field \mathbb{F} and let

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix}$$

be its MSC on a basis $e = (e_1, e_2)$, $x = (x_1, x_2)$ and $y = (y_1, y_2)$. Then, (2.2) is nothing else than

$$\begin{cases} x_1^2 y_1 y_2 (A_3 - A_5) + x_1^2 y_2^2 (A_4 - A_6) + x_1 x_2 y_1 y_2 (A_6 - A_4 + A_{11} - A_{13}) \\ + x_1 x_2 y_1^2 (A_5 - A_3) + x_1 x_2 y_2^2 (A_{12} - A_{14}) + x_2^2 y_1^2 (A_{13} - A_{11}) + x_2^2 y_1 y_2 (A_{14} - A_{12}) = 0, \\ x_1^2 y_1 y_2 (B_3 - B_5) + x_1^2 y_2^2 (B_4 - B_6) + x_1 x_2 y_1 y_2 (B_6 - B_4 + B_{11} - B_{13}) \\ + x_1 x_2 y_1^2 (B_5 - B_3) + x_1 x_2 y_2^2 (B_{12} - B_{14}) + x_2^2 y_1^2 (B_{13} - B_{11}) + x_2^2 y_1 y_2 (B_{14} - B_{12}) = 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

where

$$\begin{aligned}
 A_3 &= \alpha_1^2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_2 \beta_3 + \alpha_3^2 \beta_1 + \alpha_4 \beta_1 \beta_3, & A_4 &= \alpha_1^2 \alpha_4 + \alpha_1 \alpha_2 \beta_4 + \alpha_3 \alpha_4 \beta_1 + \alpha_4 \beta_1 \beta_4, \\
 A_5 &= \alpha_1^2 \alpha_2 + \alpha_2^2 \beta_1 + \alpha_1 \alpha_3 \beta_2 + \alpha_4 \beta_1 \beta_2, & A_6 &= \alpha_1 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \beta_2 + \alpha_2 \alpha_3 \beta_2 + \alpha_4 \beta_2^2, \\
 A_{11} &= \alpha_1 \alpha_3^2 + \alpha_2 \alpha_3 \beta_3 + \alpha_3^2 \beta_3 + \alpha_4 \beta_3^2, & A_{12} &= \alpha_1 \alpha_3 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_3 \beta_4 + \alpha_3 \alpha_4 \beta_3 + \alpha_4 \beta_3 \beta_4, \\
 A_{13} &= \alpha_1^2 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_4 \beta_1 + \alpha_1 \alpha_3 \beta_4 + \alpha_4 \beta_1 \beta_4, & A_{14} &= \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_4 \beta_2 + \alpha_2 \alpha_3 \beta_4 + \alpha_4 \beta_2 \beta_4, \\
 B_3 &= \alpha_1 \alpha_3 \beta_1 + \alpha_1 \beta_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1 \beta_3 + \beta_1 \beta_3 \beta_4, & B_4 &= \alpha_1 \alpha_4 \beta_1 + \alpha_1 \beta_2 \beta_4 + \alpha_4 \beta_1 \beta_3 + \beta_1 \beta_4^2, \\
 B_5 &= \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 + \alpha_2 \beta_1 \beta_2 + \alpha_1 \beta_2 \beta_3 + \beta_1 \beta_2 \beta_4, & B_6 &= \alpha_2^2 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2^2 + \alpha_2 \beta_2 \beta_3 + \beta_2^2 \beta_4, \\
 B_{11} &= \alpha_3^2 \beta_1 + \alpha_3 \beta_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_3^2 + \beta_3^2 \beta_4, & B_{12} &= \alpha_3 \alpha_4 \beta_1 + \alpha_3 \beta_2 \beta_4 + \alpha_4 \beta_3^2 + \beta_3 \beta_4^2, \\
 B_{13} &= \alpha_1 \alpha_4 \beta_1 + \alpha_4 \beta_1 \beta_2 + \alpha_1 \beta_3 \beta_4 + \beta_1 \beta_4^2, & B_{14} &= \alpha_2 \alpha_4 \beta_1 + \alpha_4 \beta_2^2 + \alpha_2 \beta_3 \beta_4 + \beta_2 \beta_4^2.
 \end{aligned}$$

Note that the set of functions

$$\{x_1^2 y_1 y_2, x_1^2 y_2^2, x_1 x_2 y_1^2, x_1 x_2 y_1 y_2, x_1 x_2 y_1^2, x_1 x_2 y_2^2, x_2^2 y_1^2, x_2^2 y_1 y_2\}$$

is linearly independent. Therefore, system (2.4) in terms of A_i and B_j ($i, j = 3, 4, \dots, 14$) can be rewritten as follows:

$$\begin{cases} A_3 - A_5 = 0 & A_4 - A_6 = 0 & A_{12} - A_{14} = 0 & A_{13} - A_{11} = 0 \\ B_3 - B_5 = 0 & B_4 - B_6 = 0 & B_{12} - B_{14} = 0 & B_{13} - B_{11} = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

In terms of the structure constants α_i, β_j ($i, j = 1, 2, \dots, 4$), system (2.5) is written as follows:

$$\left\{ \begin{aligned} & (\alpha_1^2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_2 \beta_3 + \alpha_3^2 \beta_1 + \alpha_4 \beta_1 \beta_3) - (\alpha_1^2 \alpha_2 + \alpha_2^2 \beta_1 + \alpha_1 \alpha_3 \beta_2 + \alpha_4 \beta_1 \beta_2) = 0 \\ & (\alpha_1^2 \alpha_4 + \alpha_1 \alpha_2 \beta_4 + \alpha_3 \alpha_4 \beta_1 + \alpha_4 \beta_1 \beta_4) - (\alpha_1 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \beta_2 + \alpha_2 \alpha_3 \beta_2 + \alpha_4 \beta_2^2) = 0 \\ & (\alpha_1 \alpha_3 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_3 \beta_4 + \alpha_3 \alpha_4 \beta_3 + \alpha_4 \beta_3 \beta_4) - (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_4 \beta_2 + \alpha_2 \alpha_3 \beta_4 + \alpha_4 \beta_2 \beta_4) = 0 \\ & (\alpha_1^2 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_4 \beta_1 + \alpha_1 \alpha_3 \beta_4 + \alpha_4 \beta_1 \beta_4) - (\alpha_1 \alpha_3^2 + \alpha_2 \alpha_3 \beta_3 + \alpha_3^2 \beta_3 + \alpha_4 \beta_3^2) = 0 \\ & (\alpha_1 \alpha_3 \beta_1 + \alpha_1 \beta_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1 \beta_3 + \beta_1 \beta_3 \beta_4) - (\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 + \alpha_2 \beta_1 \beta_2 + \alpha_1 \beta_2 \beta_3 + \beta_1 \beta_2 \beta_4) = 0 \\ & (\alpha_1 \alpha_4 \beta_1 + \alpha_1 \beta_2 \beta_4 + \alpha_4 \beta_1 \beta_3 + \beta_1 \beta_4^2) - (\alpha_2^2 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2^2 + \alpha_2 \beta_2 \beta_3 + \beta_2^2 \beta_4) = 0 \\ & (\alpha_3 \alpha_4 \beta_1 + \alpha_3 \beta_2 \beta_4 + \alpha_4 \beta_3^2 + \beta_3 \beta_4^2) - (\alpha_2 \alpha_4 \beta_1 + \alpha_4 \beta_2^2 + \alpha_2 \beta_3 \beta_4 + \beta_2 \beta_4^2) = 0 \\ & (\alpha_1 \alpha_4 \beta_1 + \alpha_4 \beta_1 \beta_2 + \alpha_1 \beta_3 \beta_4 + \beta_1 \beta_4^2) - (\alpha_3^2 \beta_1 + \alpha_3 \beta_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_3^2 + \beta_3^2 \beta_4) = 0 \end{aligned} \right. \quad (2.6)$$

Further we refer to (2.6) as a general system of equations for two-dimensional endo-commutative algebras.

3. A complete classification of two-dimensional endo-commutative algebras

In this section and the following ones, we give canonical representatives of the isomorphism classes of two-dimensional endo-commutative algebras over a field \mathbb{F} whose characteristic is neither 2 nor 3, characteristic 2, and characteristic 3, respectively.

3.1. Classification over \mathbb{F} with $\text{Char}(\mathbb{F}) \neq 2, 3$.

The list of canonical representatives of the isomorphism classes of two-dimensional endo-commutative algebras over a field \mathbb{F} with $\text{Char}(\mathbb{F}) \neq 2, 3$ is given as follows.

Theorem 4. Any nontrivial two-dimensional endo-commutative algebra over a field \mathbb{F} with $\text{Char}(\mathbb{F}) \neq 2, 3$ is isomorphic to only one of the following listed by their matrices of structure constants, such algebras:

- $A_3(\alpha_1, 0, \beta_2) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 1 - \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where $\alpha_1, \beta_2 \in \mathbb{F}^2$;

- $A_3\left(\frac{1}{2}, \alpha_4, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, where $\alpha_4 \in \mathbb{F}$ and $\alpha_4 \neq 0$;

- $A_3\left(\frac{1}{2}, \alpha_4, -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, where $\alpha_4 \in \mathbb{F}$ and $\alpha_4 \neq 0$;

- $A_5(\alpha_1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\alpha_1 - 1 & 1 - \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where $\alpha_1 \in \mathbb{F}$;

- $A_7(\alpha_1, 0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha_1 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where $\alpha_1 \in \mathbb{F}$;

- $A_7\left(\frac{1}{2}, \alpha_4\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, where $\alpha_4 \in \mathbb{F}$ and $\alpha_4 \neq 0$;

- $A_9 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$;

- $A_{10}(\beta_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1'(a) & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, where $a, \beta_1 \in \mathbb{F}$, the poly-

nomial $(\beta_1 t^3 - 3t - 1)(\beta_1 t^2 + \beta_1 t + 1)(\beta_1 t^3 + 6\beta_1 t^2 + 3\beta_1 t + \beta_1 - 2)$ has no root in \mathbb{F} and

$$\beta_1'(t) = \frac{(\beta_1 t^3 + 6\beta_1 t^2 + 3\beta_1 t + \beta_1 - 2)^2}{(\beta_1 t^2 + \beta_1 t + 1)^3};$$

- $A_{11}(\beta_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a^3 \beta_1^{\pm 1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, where the polynomial $\beta_1 - t^3$ has

no root in \mathbb{F} , $a, \beta_1 \in \mathbb{F}$ and $a \neq 0$;

- $A_{12}(\beta_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ a^2 \beta_1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, where $a, \beta_1 \in \mathbb{F}$ and $a \neq 0$;

- $A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Proof. To classify the two-dimensional endo-commutative algebras, it suffices to solve the general system of equations (2.6) with respect to MSC of each A_i ($i = 1, 2, \dots, 13$) given in Theorem 1.

For $A = A_1(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1+\alpha_2 & \alpha_4 \\ \beta_1 & -\alpha_1 & 1-\alpha_1 & -\alpha_2 \end{pmatrix}$, where $c = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \beta_1) \in \mathbb{F}^4$, the system of equations (2.6) looks like

$$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha_1^2(1+\alpha_2) + \alpha_1\alpha_2(1-\alpha_1) + (1+\alpha_2)^2\beta_1 + \alpha_4\beta_1(1-\alpha_1)) - \\ \quad - (\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_2^2\beta_1 - \alpha_1^2(1+\alpha_2) - \alpha_1\alpha_4\beta_1) = 0 \\ (\alpha_1^2\alpha_4 - \alpha_1\alpha_2^2 + (1+\alpha_2)\alpha_4\beta_1 - \alpha_2\alpha_4\beta_1) - (\alpha_1\alpha_2^2 - \alpha_1\alpha_2^2 - \alpha_1\alpha_2(1+\alpha_2) - \alpha_4\alpha_1^2) = 0 \\ (\alpha_1(1+\alpha_2)\alpha_4 + (1+\alpha_2)\alpha_4(1-\alpha_1) - \alpha_2\alpha_4(1-\alpha_1)) - (\alpha_1\alpha_2\alpha_4 - \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_4\alpha_1\alpha_2) = 0 \\ \quad (\alpha_1^2\alpha_4 + \alpha_2\alpha_4\beta_1 + \alpha_1(1+\alpha_2)(-\alpha_2) - \alpha_4\beta_1\alpha_2) = \\ - (\alpha_1(1+\alpha_2)^2 + \alpha_2(1+\alpha_2)(1-\alpha_1) + (1+\alpha_2)^2(1-\alpha_1) - \alpha_4(1-\alpha_1)^2) = 0 \\ \quad (\alpha_1(1+\alpha_2)\beta_1 + (1+\alpha_2)\beta_1(1-\alpha_1) + \beta_1(1-\alpha_1)(-\alpha_2)) - \\ \quad - (\alpha_1\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\alpha_2\beta_1 + \beta_1(-\alpha_1)(-\alpha_2)) = 0 \\ \quad (\alpha_1\alpha_4\beta_1 - \alpha_1\alpha_2\beta_1 + \alpha_4\beta_1(1-\alpha_1) + \beta_1(-\alpha_2)^2) - \\ - (\alpha_1^2\beta_1 + \alpha_2(-\alpha_1)^2 + \alpha_2(-\alpha_1)(1-\alpha_1) + (-\alpha_1)^2(-\alpha_2)) = 0 \\ \quad ((1+\alpha_2)\alpha_4\beta_1 + (1+\alpha_2)(-\alpha_1)(-\alpha_2) + \alpha_4(1-\alpha_1)^2 + (1-\alpha_1)(-\alpha_2)^2) - \\ - (\alpha_2\alpha_4\beta_1 + \alpha_4(-\alpha_1)^2 + \alpha_2(1-\alpha_1)(-\alpha_2) - \alpha_1(-\alpha_2)^2) = 0 \\ \quad (\alpha_1\alpha_4\beta_1 - \alpha_1\alpha_4\beta_1 + \alpha_1(1-\alpha_1)(-\alpha_2) + \beta_1(-\alpha_2)^2) - \\ - ((1+\alpha_2)^2\beta_1 + (1+\alpha_2)(-\alpha_1)(1-\alpha_1) + (1+\alpha_2)(1-\alpha_1)^2 + (1-\alpha_1)^2(-\alpha_2)) = 0 \end{array} \right.$$

Simplifying, we get an inconsistent system of equations. Thus, there is no endo-commutative algebra among $A_1(c)$.

Similarly, if $A = A_2(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 1 & \beta_2 & 1-\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where $c = (\alpha_1, \alpha_4, \beta_2) \in \mathbb{F}^3$ and $\alpha_4 \neq 0$, then system (2.6) implies $\alpha_4 = 0$, which contradicts with $\alpha_4 \neq 0$. Hence, $A_2(c)$ also does not contain an endo-commutative algebra.

Let consider $A = A_3(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & \beta_2 & 1-\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where $c = (\alpha_1, \alpha_4, \beta_2) \in \mathbb{F}^3$. Then the system of equations (2.6) for $A_3(c)$ looks like

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1^2\alpha_4 - \alpha_4\beta_2^2 = 0 \\ \alpha_1^2\alpha_4 - (1-\alpha_1)^2\alpha_4 = 0 \\ (1-\alpha_1)^2\alpha_4 - \alpha_4\beta_2^2 = 0 \end{array} \right.$$

which has the following solutions: $(\alpha_1, 0, \beta_2)$, $(\frac{1}{2}, \alpha_4, -\frac{1}{2})$ and $(\frac{1}{2}, \alpha_4, \frac{1}{2})$. These solutions produce the endo-commutative algebras:

$$A_3(\alpha_1, 0, \beta_2) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 1-\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3\left(\frac{1}{2}, \alpha_4, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

and

$$A_3\left(\frac{1}{2}, \alpha_4, -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

where $\alpha_1, \alpha_4, \beta_2 \in \mathbb{F}$ and $\alpha_4 \neq 0$.

Letting $A = A_4(c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, where $c = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{F}^2$, we get an inconsistent system of equations.

If $A = A_5(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\alpha_1 - 1 & 1 - \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where $c = \alpha_1 \in \mathbb{F}$, then all the equations of system (2.6) become identities; therefore, all the algebras in this class are endo-commutative.

For $A = A_6(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 1 & 1 - \alpha_1 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where $c = (\alpha_1, \alpha_4) \in \mathbb{F}^2$ and $\alpha_4 \neq 0$, the system of equations (2.6) gives $\alpha_4 = 0$ which is a contradiction.

If $A = A_7(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & 1 - \alpha_1 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where $c = (\alpha_1, \alpha_4) \in \mathbb{F}^2$ then the system of equations (2.6) is equivalent to $\alpha_1^2\alpha_4 - \alpha_4(1 - \alpha_1)^2 = 0$ and we have the solutions $(\alpha_1, 0)$ and $(\frac{1}{2}, \alpha_4)$, where $\alpha_4 \neq 0$, i.e.,

$$A_7(\alpha_1, 0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha_1 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1 \in \mathbb{F}$$

and

$$A_7\left(\frac{1}{2}, \alpha_4\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 \neq 0 \in \mathbb{F}$$

are endo-commutative.

Letting

$$A = A_8(c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

where $c = \beta_1 \in \mathbb{F}$, we obtain an inconsistent system of equations.

Verifying the system of equations (2.6) for $A_9, A_{10}(c), A_{11}(c), A_{12}(c)$, and A_{13} , we get identities, i.e., all these algebras turn out to be endo-commutative algebras.

3.2. Classification over \mathbb{F} with $\text{Char}(\mathbb{F}) = 2, 3$.

The description of two-dimensional endo-commutative algebras over \mathbb{F} for the cases $\text{Char}(\mathbb{F}) = 2$ and $\text{Char}(\mathbb{F}) = 3$ can be obtained by using Theorems 2 and 3, respectively. The proof is similar to that of Theorem 4. Therefore, we give here the results without the proof.

Theorem 5. Any nontrivial two-dimensional endo-commutative algebra over a field \mathbb{F} with $\text{Char}(\mathbb{F}) = 2$ is isomorphic to only one of the following algebras listed by their matrices of structure constants:

- $A_{2,2}(\alpha_1, 0, 1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1+\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where $\alpha_1 \in \mathbb{F}$;
- $A_{3,2}(\alpha_1, 0, \beta_2) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 1+\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where $\alpha_1, \beta_2 \in \mathbb{F}$;
- $A_{4,2}(\alpha_1, \beta_1, 0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 1+\alpha_1 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 + a + a^2 & 0 & 1+\alpha_1 & 1 \end{pmatrix}$, where

$a, \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{F}$;

- $A_{5,2}(1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;
- $A_{6,2}(\alpha_1, 0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\alpha_1 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where $\alpha_1 \in \mathbb{F}$;
- $A_{7,2}(0, \beta_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 + a + a^2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, where $\beta_1, a \in \mathbb{F}$;
- $A_{8,2}(\beta_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1'(a) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, where the polynomial

$(\beta_1 t^3 + t + 1)(\beta_1 t^2 + \beta_1 t + 1)$ has no roots in \mathbb{F} , $a \in \mathbb{F}$ and $\beta_1'(t) = \frac{(\beta_1^2 t^3 + \beta_1 t + \beta_1)^2}{(\beta_1 t^2 + \beta_1 t + 1)^3}$;

- $A_{9,2}(\beta_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a^3 \beta_1^{\pm 1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, where $\beta_1, a \in \mathbb{F}$, $a \neq 0$ and the polynomial $\beta_1 + t^3$ has no roots in \mathbb{F} ;

- $A_{10,2}(\beta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 + a + a^2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, where $\beta_1, a \in \mathbb{F}$;

- $A_{11,2}(\beta_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ b^2(\beta_1 + a^2) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, where $a, b \in \mathbb{F}$ and $b \neq 0$;

- $A_{12,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

If $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$, we obtain the list of representatives of endo-commutative algebras over \mathbb{Z}_2 as a particular case of the theorem, as follows.

Corollary 3.1. Any nontrivial two-dimensional endo-commutative algebra over a field $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$ is isomorphic to only one of the following algebras listed by their matrices of structure constants:

$$\begin{aligned}
 \bullet A_{2,2}(0,0,1) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; & \bullet A_{2,2}(1,0,1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\
 \bullet A_{3,2}(0,0,0) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; & \bullet A_{3,2}(0,0,1) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \\
 \bullet A_{3,2}(1,0,0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; & \bullet A_{3,2}(1,0,1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\
 \bullet A_{4,2}(0,0,0) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; & \bullet A_{4,2}(0,1,0) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \\
 \bullet A_{4,2}(1,0,0) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; & \bullet A_{4,2}(1,1,0) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \\
 \bullet A_{5,2}(1,0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; & \bullet A_{6,2}(0,0) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\
 \bullet A_{6,2}(1,0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; & \bullet A_{7,2}(0,0) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \\
 \bullet A_{7,2}(0,1) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; & \bullet A_{8,2}(1) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \\
 \bullet A_{10,2}(0) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; & \bullet A_{10,2}(1) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \\
 \bullet A_{11,2}(0) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; & \bullet A_{12,2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Theorem 6. Any nontrivial two-dimensional endo-commutative algebra over a field \mathbb{F} with $\text{Char}(\mathbb{F}) = 3$ is isomorphic to only one of the following algebras listed by their matrices of structure constants:

$$\begin{aligned}
 \bullet A_{3,3}(\alpha_1, 0, \beta_2) &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 1 - \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ where } \alpha_1, \beta_2 \in \mathbb{F}; \\
 \bullet A_{3,3}(2, \alpha_4, 1) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & a^2\alpha_4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ where } a, \alpha_4 \in \mathbb{F} \text{ and } a, \alpha_4 \neq 0; \\
 \bullet A_{3,3}(2, \alpha_4, 2) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & a^2\alpha_4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ where } a, \alpha_4 \in \mathbb{F} \text{ and } a, \alpha_4 \neq 0; \\
 \bullet A_{5,3}(\alpha_1) &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\alpha_1 - 1 & 1 - \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ where } \alpha_1 \in \mathbb{F};
 \end{aligned}$$

- $A_{7,3}(\alpha_1, 0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha_1 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where $\alpha_1 \in \mathbb{F}$;
- $A_{7,3}(2, \alpha_4) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & a^2\alpha_4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, where $a, \alpha_4 \in \mathbb{F}$ and $a, \alpha_4 \neq 0$;
- $A_{9,3}(\beta_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1'(a) & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, where the polynomial

$(1-t^3)(\beta_1 t^2 + \beta_1 t + 1)(\beta_1^2 t^3 + \beta_1 - 2)$ has no roots in \mathbb{F} , $a \in \mathbb{F}$ and $\beta_1'(t) = \frac{(\beta_1^2 t^3 + \beta_1 - 2)^2}{(\beta_1 t^2 + \beta_1 t + 1)^3}$;

- $A_{10,3}(\beta_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a^3\beta_1^{\pm 1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, where polynomial $\beta_1 - t^3$ has no roots, $a, \beta_1 \in \mathbb{F}$ and $a, \beta_1 \neq 0$;
- $A_{11,3}(\beta_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ a^2\beta_1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, where $a, \beta_1 \in \mathbb{F}$ and $a \neq 0$;
- $A_{12,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;
- $A_{13,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Two-dimensional curled algebras

Let A be a two-dimensional algebra and

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' & \alpha_4' \\ \beta_1' & \beta_2' & \beta_3' & \beta_4' \end{pmatrix}$$

be its MSC with respect to a basis $e = (e_1, e_2)$. Then (2.3) in terms of the elements of A and the coordinate vector of x is written as follows:

$$\begin{cases} \alpha_1' x_1^2 + (\alpha_2' + \alpha_3') x_1 x_2 + \alpha_4' x_2^2 - \lambda(x_1, x_2) x_1 = 0, \\ \beta_1' x_1^2 + (\beta_2' + \beta_3') x_1 x_2 + \beta_4' x_2^2 - \lambda(x_1, x_2) x_2 = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

We consider two options:

(1) There exists a nonzero x such that $\lambda(x) \neq 0$. Since (4.1) is an identity, it must hold for any $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{F}^2$. Particularly, it must hold for $x = (0, x_2)$ and $x = (x_1, 0)$ as well. Therefore, $x_1 = 0, x_2 \neq 0$ ($x_1 \neq 0, x_2 = 0$) implies $\alpha_4' = 0$, $\lambda(0, x_2) = \beta_4' x_2$ (respectively, $\beta_1' = 0$, $\lambda(x_1, 0) = \alpha_1' x_1$) and (4.1) becomes

$$\begin{cases} \alpha_1' x_1^2 + (\alpha_2' + \alpha_3') x_1 x_2 - \lambda(x_1, x_2) x_1 = 0, \\ (\beta_2' + \beta_3') x_1 x_2 + \beta_4' x_2^2 - \lambda(x_1, x_2) x_2 = 0. \end{cases}$$

Thus, if $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$, then system (4.1) can be rewritten as follows:

$$\begin{cases} \alpha_1' x_1 + (\alpha_2' + \alpha_3') x_2 - \lambda(x_1, x_2) = 0, \\ (\beta_2' + \beta_3') x_1 + \beta_4' x_2 - \lambda(x_1, x_2) = 0. \end{cases}$$

This yields $(\alpha_1' - \beta_2' - \beta_3')x_1 + (\alpha_2' + \alpha_3' - \beta_4')x_2$ and, if $\text{Card}(\mathbb{F}) > 2$ (that is, $\mathbb{F} \neq \mathbb{Z}_2$), then the latter is nothing else than $\alpha_1' = \beta_2' + \beta_3', \beta_4' = \alpha_2' + \alpha_3'$. So, if $\mathbb{F} \neq \mathbb{Z}_2$, then we have $\alpha_1' x_1 + \beta_4' x_2 = \lambda(x_1, x_2)$, at least one of α_1', β_4' is not zero, and

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' & \beta_4' - \alpha_2' & 0 \\ 0 & \beta_2' & \alpha_1' - \beta_2' & \beta_4' \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

If $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$, then $\alpha_1' x_1 + (a - \beta_2' - \beta_3')x_2 = \lambda(x_1, x_2)$, at least one of $\alpha_1', a - \beta_2' - \beta_3'$ is not zero, and one has

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' & a - \alpha_1' - \alpha_2' & 0 \\ 0 & \beta_2' & \beta_3' & a - \beta_2' - \beta_3' \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

where $a = \lambda(1, 1)$.

(2) Let $\lambda(x)$ be identically zero on $\mathbb{F}^2 \setminus (0, 0)$. In this case, system (4.1) is equivalent to $\alpha_1' = \alpha_4' = \beta_1' = \beta_4' = \alpha_2' + \alpha_3' = \beta_2' + \beta_3' = 0$ and, therefore, we have

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2' & -\alpha_2' & 0 \\ 0 & \beta_2' & -\beta_2' & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

These types of algebras were said to be zeropotent (see [1, 20, 23, 24]). The forms (4.2), (4.3) and (4.4) for MSC are the conditions for A to be curled. Now having the conditions (4.2), (4.3) and (4.4) we can give the description of two-dimensional curled algebras by using Theorems 1, 2, and 3. For example, in the case of \mathbb{F} with $\text{Char}(\mathbb{F}) \neq 2, 3$, a two-dimensional algebra given by

$$A = A_1(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 + \alpha_2 & \alpha_4 \\ \beta_1 & -\alpha_1 & 1 - \alpha_1 & -\alpha_2 \end{pmatrix},$$

where $c = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \beta_1) \in \mathbb{F}^4$, is a curled algebra if and only if A has the following form:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' & \beta_4' - \alpha_2' & 0 \\ 0 & \beta_2' & \alpha_1' - \beta_2' & \beta_4' \end{pmatrix},$$

that is,

$$\begin{cases} \alpha_1' = \alpha_1 & \alpha_2' = \alpha_2 \\ \beta_4' - \alpha_2' = 1 + \alpha_2 & 0 = \alpha_4 \\ 0 = \beta_1 & \beta_2' = -\alpha_1 \\ \alpha_1' - \beta_2' = 1 - \alpha_1 & \beta_4' = -\alpha_2 \end{cases}$$

which takes place if and only if $\alpha_1 = \frac{1}{3}$, $\alpha_2 = -\frac{1}{3}$, $\alpha_4 = 0$, $\beta_1 = 0$. Therefore, among the algebras $A_1(c)$, only $A_1\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 0\right)$ is curled.

Going through $A_2(c) - A_{13}$ of Theorem 1 in this manner, one comes to the following result.

Theorem 7. Any nontrivial two-dimensional curled algebra over a field \mathbb{F} with $\text{Char}(\mathbb{F}) \neq 2, 3$ is isomorphic to only one of the following algebras listed by their matrices of structure constants:

- $A_1\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 0\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix};$
- $A_3(\alpha_1, 0, 2\alpha_1 - 1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha_1 - 1 & 1 - \alpha_1 & 0 \end{pmatrix},$ where $\alpha_1 \in \mathbb{F};$
- $A_7\left(\frac{1}{3}, 0\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$

Among the listed algebras, only $A_3(0, 0, 1)$ is zeropotent.

Similarly, in the cases of $\text{Char}(\mathbb{F}) = 2, 3$, the following results hold true.

Theorem 8. Any nontrivial two-dimensional curled algebra over a field $\mathbb{F} \neq \mathbb{Z}_2$ with $\text{Char}(\mathbb{F}) = 2$ is isomorphic to only one of the following algebras listed by their matrices of structure constants:

- $A_{1,2}(1, 1, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$
- $A_{3,2}(\alpha_1, 0, 1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 + \alpha_1 & 0 \end{pmatrix},$ where $\alpha_1 \in \mathbb{F};$
- $A_{6,2}(1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

And among them only $A_{3,2}(0, 0, 1)$ is zeropotent.

Theorem 9. Any nontrivial two-dimensional curled algebra over a field $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$ is isomorphic to only one of the following algebras listed by their matrices of structure constants:

- $A_{1,2}(1, 1, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$
- $A_{3,2}(\alpha_1, 0, 1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 + \alpha_1 & 0 \end{pmatrix},$ where $\alpha_1 \in \mathbb{Z}_2;$

- $A_{4,2}(\alpha_1, 0, 0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\alpha_1 & 1 \end{pmatrix}$, where $\alpha_1 \in \mathbb{Z}_2$;
- $A_{6,2}(1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;
- $A_{7,2}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- $A_{10,2}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Among these algebras, only $A_{3,2}(0, 0, 1)$ is zeropotent.

Theorem 10. Any nontrivial two-dimensional curled algebra over a field \mathbb{F} with $\text{Char}(\mathbb{F}) = 3$ is isomorphic to only one of the following algebras listed by their matrices of structure constants:

- $A_{3,3}(\alpha_1, 0, 2+2\alpha_1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2+2\alpha_1 & 1+2\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where $\alpha_1 \in \mathbb{F}$;
- $A_{4,3}(0, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;
- $A_{11,3}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Among the listed algebras, only $A_{3,3}(0, 0, 2)$ is zeropotent.

5. Two-dimensional endo-commutative curled algebras

In this section, we make use of the results of the last two sections to get a classification of two-dimensional endo-commutative curled algebras up to isomorphism.

Theorem 11. Any nontrivial two-dimensional endo-commutative curled algebra over a field \mathbb{F} with $\text{Char}(\mathbb{F}) \neq 2, 3$ is isomorphic to only one of the following algebras listed by their matrices of structure constants:

- $A_3(\alpha_1, 0, 2\alpha_1 - 1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha_1 - 1 & 1 - \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where $\alpha_1 \in \mathbb{F}$;
- $A_7\left(\frac{1}{3}, 0\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$.

Among them, only $A_3(0, 0, -1)$ is zeropotent.

Theorem 12. Any non-trivial two-dimensional endo-commutative curled algebra over a field $\mathbb{F} \neq \mathbb{Z}_2$ with $\text{Char}(\mathbb{F}) = 2$ is isomorphic to only one of the following, listed by their matrices of structure constants, such algebras:

- $A_{3,2}(\alpha_1, 0, 1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where $\alpha_1 \in \mathbb{F}$;

$$\bullet A_{6,2}(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Among the algebras listed above, only $A_{3,2}(0, 0, 1)$ is a zeropotent algebra.

Theorem 13. Any nontrivial two-dimensional endo-commutative curled algebra over a field $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$ is isomorphic to only one of the following algebras listed by their matrices of structure constants:

$$\bullet A_{3,2}(0,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \bullet A_{3,2}(1,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\bullet A_{4,2}(0,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \bullet A_{4,2}(1,1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\bullet A_{6,2}(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \bullet A_{7,2}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\bullet A_{10,2}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Here, only $A_{3,2}(0, 0, 1)$ is zeropotent.

Note that the endo-commutative curled algebras given in [19] can be found in Theorem 13 as $A_{3,2}(0,0,1) \cong C_4$, $A_{3,2}(1,0,1) \cong C_3$, $A_{4,2}(0,1,0) \cong C_{12}$, $A_{4,2}(1,1,0) \cong C_7$, $A_{6,2}(1,0) \cong C_2$, $A_{7,2}(0,0) \cong C_{13}$, and $A_{10,2}(0) \cong C_1$.

Theorem 14. Any nontrivial two-dimensional endo-commutative curled algebra over a field \mathbb{F} with $\text{Char}(\mathbb{F}) = 3$ is isomorphic to only one of the following algebras listed by their matrices of structure constants:

$$\bullet A_{3,3}(\alpha_1, 0, 2\alpha_1 - 1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha_1 - 1 & 1 - \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ where } \alpha_1 \in \mathbb{F};$$

$$\bullet A_{11,3}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Among the algebras listed above, only $A_{3,3}(0, 0, -1)$ is zeropotent.

References

1. Kobayashi Y., Shirayanagi K., Tsukada M., Takahasi S.-E. (2021) A complete classification of three-dimensional algebras over \mathbb{R} and \mathbb{C} ((visiting old, learn new). *Asian-European Journal of Mathematics*. 14(8). pp. 2150131 (25 pages). DOI: 10.1142/S179355712150131X.
2. Mazzola G. (1979) The algebraic and geometric classification of associative algebras of dimension five. *Manuscripta Mathematica*. 27. pp. 1–21.
3. Jacobson N. (1962) *Lie Algebras*. New York: Interscience.
4. Morozov V.V. (1958) Klassifikatsiya nil'potentnykh algebr Li shestogo poryadka [Classification of nilpotent Lie algebras of sixth order]. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*. 4(5). pp. 161–171.
5. Mubarakzhanov G.M. (1963) O razreshimykh algebrakh Li [On solvable Lie algebras]. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*. 32(1). pp. 114–123.
6. Mubarakzhanov G.M. (1963) Klassifikatsiya veshchestvennykh struktur algebr Li pyatogo poryadka [Classification of real structures of Lie algebras of fifth order]. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*. 34(3), pp. 99–106.

7. Mubarakzhanov G.M. (1963) Klassifikatsiya razreshimykh algebr Li shestogo poryadka s odnim nenil'potentnym bazisnym elementom [Classification of solvable Lie algebras of sixth order with a non-nilpotent basis element]. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika.* 35(4). pp. 104–116.
8. Kashuba I., Martin M.E. (2017) Geometric classification of nilpotent Jordan algebras of dimension five. *Journal of Pure and Applied Algebra.* S0022404917300889. DOI: 10.1016/j.jpaa.2017.04.018.
9. Albeverio S., Omirov B.A., Rakhimov I.S. (2006) Classification of 4-dimensional nilpotent complex Leibniz algebras. *Extracta Mathematicae.* 21(3). pp. 197–210.
10. Casas J.-M., Insua M.-A., Ladra M., Ladra S. (2012) An algorithm for the classification of 3-dimensional complex Leibniz algebras. *Linear Algebra and its Applications.* 9. pp. 3747–3756.
11. Demir I., Misra K.C., Stitzinger E. (2016) Classification of some solvable Leibniz algebras. *Algebras and Representation Theory.* 19. pp. 405–417.
12. Khudoyberdiyev A.Kh., Rakhimov I.S., Said Husain Sh.K. (2014) On classification of 5-dimensional solvable Leibniz algebras. *Linear Algebra and its Applications.* 457. pp. 428–454.
13. Petersson H.P. (2000) The classification of two-dimensional nonassociative algebras. *Results in Mathematics.* 37. pp. 120–154.
14. Ahmed H., Bekbaev U., Rakhimov I. (2017) Complete classification of two-dimensional algebras. *AIP Conference Proceedings.* 1830. 070016. DOI: 10.1063/1.4980965.
15. Goze M. and Remm E. (2011) 2-dimensional algebras. *African Journal of Mathematical Physics.* 10(1). pp. 81–91.
16. Kaygorodov I., Volkov Yu. (2019) The variety of 2-dimensional algebras over an algebraically closed field. *Canadian Journal of Mathematics.* 71(4). pp. 819–842.
17. Ahmed H., Bekbaev U., Rakhimov I. (2020) Identities of 2-dimensional algebras. *Lobachevskii Journal of Mathematics.* 41(9). pp. 1615–1629.
18. Ahmed H., Bekbaev U., Rakhimov I. (2020) Subalgebras, idempotents, ideals and quasi-units of two-dimensional algebras. *International Journal of Algebra and Computation.* 30(5). pp. 903–929.
19. Takahasi S.-E., Shirayanagi K., Tsukada M. (2022) A classification of two-dimensional endo-commutative algebras over \mathbb{F}_2 . arXiv:2211.04015v1 [math.RA].
20. Takahasi S.-E., Shirayanagi K., Tsukada M. (2023) A classification of endo-commutative curled algebras of dimension 2 over a non-trivial field. *Asian-European Journal of Mathematics.* 16(10). 2350191. DOI: 10.1142/S1793557123501917.
21. Takahasi S.-E., Shirayanagi K., Tsukada M. (2023) A classification of 2-dimensional endo-commutative straight algebras of rank 1 over a non-trivial field. *Mathematica Pannonica New Series.* 29/NS3(2). pp. 258–267. DOI: 10.1556/314.2023.00027.
22. Bekbaev U. (2023) Classification of two-dimensional algebras over any basic field. *AIP Conference Proceedings.* 2880. pp. 1–10.
23. Cedilnik A., Jerman M. (2020) Classification of three-dimensional zeropotent algebras. *International Electronic Journal of Algebra.* 27. pp. 127–146. DOI: 10.24330/ieja.662996.
24. Kobayashi Y., Shirayanagi K., Takahasi S., Tsukada M. (2017) Classification of three-dimensional zeropotent algebras over an algebraically closed field. *Communications in Algebra.* 45(12). pp. 5037–5052.

Information about the authors:

Asrorov Diyorjon U. (PhD Candidate at the Department of Algebra and Geometry, Samarkand State University named after Sharof Rashidov, Samarkand, Uzbekistan). E-mail: 96asrorovdiyorjon@mail.ru

Bekbaev Ural Dj. (Associate Professor, Turin Polytechnic University in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: uralbekbaev@gmail.com

Rakhimov Isamiddin S. (Professor, Universiti Teknologi MARA (UiTM), Shah Alam, Malaysia; Leading Scientific Researcher, V.I. Romanovski Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: isamiddin@uitm.edu.my

Сведения об авторах:

Асроров Дийёржон Усманович – базовый докторант (PhD) кафедры алгебры и геометрии Самаркандского государственного университета им. Шарофа Рашидова (Самарканд, Узбекистан). E-mail: 96asrorovdiorjon@mail.ru

Бекбаев Урал Джумаевич – доцент Туринского политехнического университета в г. Ташкенте (Ташкент, Узбекистан). E-mail: uralbekbaev@gmail.com

Рахимов Исамиддин Саттарович – профессор Технологического университета МАРА (UiTM) (Шах Алам, Малайзия); ведущий научный сотрудник Института математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (Ташкент, Узбекистан). E-mail: isamiddin@uitm.edu.my

The article was submitted 15.02.2025; accepted for publication 05.02.2026

Статья поступила в редакцию 15.02.2025; принята к публикации 05.02.2026

МЕХАНИКА

MECHANICS

Научная статья

УДК 531.383, 532.526.75

doi: 10.17223/19988621/99/4

**Расчет аэродинамической составляющей
момента сопротивления вращению ротора
управляющих двигателей-маховиков**

Сергей Анатольевич Акарачкин¹, Денис Александрович Полюшко²

^{1, 2} АО «НПЦ “Полюс”», Томск, Россия

^{1, 2} info@polus-tomsk.ru

Аннотация. В процессе изготовления управляющих двигателей-маховиков (ДМ) внутри их корпуса создается остаточное давление до 0.1 Па. Для расчета аэродинамической составляющей момента сопротивления вращению ротора ДМ выбрана математическая модель, описывающая поведение газовой среды вблизи стенок, используя понятия степени разряженности и коэффициента аккомодации касательного импульса. Модификация граничного условия прилипания на стенках с учетом частичного проскальзывания позволила определить влияние давления в гермокамере ДМ и скорости вращения ротора на аэродинамическую составляющую момента сопротивления вращению.

Ключевые слова: число Кнудсена, коэффициент аккомодации импульса, длина свободного пробега молекул, двигатель-маховик

Для цитирования: Акарачкин С.А., Полюшко Д.А. Расчет аэродинамической составляющей момента сопротивления вращению ротора управляющих двигателей-маховиков // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2026. № 99. С. 50–61. doi: 10.17223/19988621/99/4

Original article

**Calculation of the aerodynamic component of the rotor drag
torque in reaction wheel actuators**

Sergey A. Akarachkin¹, Denis A. Polyushko²

^{1, 2} JSC “NPC “Polus””, Tomsk, Russian Federation

^{1, 2} info@polus-tomsk.ru

Abstract. During manufacturing, a residual pressure of up to 0.1 Pa is provided inside the housing of the reaction wheel (RW) assemblies. Under these conditions, the assumption

of continuity of the medium ceases to be true. To calculate the aerodynamic component of the drag torque of the RW rotor, a mathematical model is adopted that describes the behavior of the gas medium in a non-equilibrium thermodynamic state near the walls using the concepts of rarefaction degree and tangential momentum accommodation coefficient. This model does not use the solution of the Boltzmann equation for statistical mechanics which requires significant computational resources.

Modification of the no-slip boundary condition at the walls to account for the partial slip made it possible to determine the effect of the pressure inside the sealed chamber of the RW and the rotor rotational speed on the aerodynamic component of the drag torque. The computed and experimental dependences for the aerodynamic component of the rotor drag torque demonstrate similar behavior.

Keywords: the Knudsen number, momentum accommodation coefficient, free path length, reaction wheel actuators

For citation: Akarachkin, S.A., Polyushko, D.A. (2026) Calculation of the aerodynamic component of the rotor drag torque in reaction wheel actuators. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 99. pp. 50–61. doi: 10.17223/19988621/99/4

Введение

Двигатели-маховики (ДМ) выполнены на основе управляемого бесконтактного двигателя постоянного тока и предназначены для использования в качестве исполнительного органа систем ориентации и стабилизации космических аппаратов. Функции маховой массы выполняет ротор с постоянными магнитами. ДМ имеет герметичное исполнение. В процессе изготовления внутри корпуса ДМ создается остаточное давление до 0.1 Па с целью снижения момента сопротивления вращению ротора и, как следствие, снижения уровня потребления электроэнергии. Все неметаллические элементы ДМ проходят предварительную термовакuumную обработку для снижения показателей газоразделения. Несмотря на предпринимаемые меры, в процессе изготовления и хранения ДМ с течением времени показатели момента сопротивления вращению ротора возрастают. Актуальной задачей является определение влияния величины давления в корпусе ДМ и его конструктивных размеров на момент сопротивления вращению ротора.

Математические модели для описания течения в разреженной среде

Выражения, описывающие поведение текучей среды, такие как уравнения Навье–Стокса, основанные на предположении неразрывности среды, являются определяющими в области аэро- и гидродинамики. Они позволяют получить точные численные результаты для сложных задач. При рассмотрении режимов течения в разреженной среде предположения о ее неразрывности перестают быть верными, требуется иное описание физики процессов. В разреженной среде движение молекул газа описывается уравнением Больцмана для статистической механики [1, 2].

Несмотря на необходимость проведения расчетов, требующих высоких вычислительных затрат, задачи течения в разреженной среде находят широкое применение в космонавтике, физике частиц и вакуумных систем [3–6].

Одно из основных направлений вычислительной гидродинамики разреженной среды – течение в замкнутом объеме. Решение задачи требует разработки новых

численных методов, так как решение уравнений Больцмана найдено только для ряда конкретных случаев [7, 8]. Таким образом, вычислительная гидродинамика для разреженных сред нацелена на поиск наиболее простого способа решения уравнений Больцмана. На ранних этапах разработки численных методов внутренние течения разреженных сред рассчитывались с применением упрощенных моделей [9, 10]. Впоследствии были разработаны численные методы, требующие меньших вычислительных мощностей [11–16]. Большинство полученных результатов удовлетворяло заданным критериям точности [17]. С ростом производительности компьютеров стало возможным применение метода прямого статистического вычисления Монте-Карло [18–21]. Этот метод позволяет производить расчет достаточно близко к реальному движению частиц [22, 23].

Указанные численные методы дают возможность получать решения только для конкретных частиц и требуют большого количества повторяющихся вычислений, что влечет значительные временные затраты. Поэтому потребовалась разработка упрощенного метода расчета, способного установить взаимосвязь между искомыми величинами. Поток в условиях разреженной среды можно описать, используя понятия степени разреженности и коэффициента аккомодации касательного импульса [1].

В газах из-за локальных неравновесных термодинамических состояний среды профиль скорости имеет участок, соответствующий проскальзыванию газа [24]. Скорость текучей среды вблизи стенок не равна скорости этих стенок. Существование проскальзывания в газах было описано Максвеллом. Величина проскальзывания зависит от степени разрежения газа. Для описания степени разрежения используется число Кнудсена, представляющее собой отношение длины свободного пробега молекул к характеристическому размеру области течения, например диаметру канала, $K_n = \lambda/D$.

Эквивалентная длина свободного пробега молекул определяется следующим выражением [2]:

$$\lambda = \frac{\mu}{p} \left(\frac{2RT}{M_n} \right)^{1/2}, \quad (1)$$

где p – давление среды, Па; T – температура среды, К; μ – динамическая вязкость среды, Па·с; R – универсальная газовая постоянная, Дж/(моль·К); M_n – молярная масса (кг/моль).

В зависимости от величины числа Кнудсена различают несколько режимов течения газа:

- течение неразрывной среды: $K_n \ll 1$ ($K_n < 0,01$);
- течение со скольжением – $0,01 < K_n < 0,1$;
- переходное течение – $0,1 < K_n < 10$;
- свободное молекулярное течение $K_n > 10$.

Отличие профиля скорости при режиме течения со скольжением от режима течения неразрывной среды представлено на рис. 1 [1, 24].

Скорость проскальзывания впервые была рассчитана Максвеллом для изотермического потока и определялась следующим выражением [24]:

$$V_s = L_s \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (2)$$

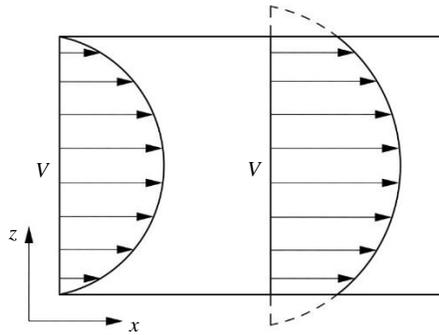


Рис. 1. Профиль скорости для режимов течения неразрывной среды (слева) и со скольжением (справа)

Fig. 1. Velocity profile for continuum (on the left) and slip (on the right) flow regimes

В выражении (2) обозначение L_s определяет длину проскальзывания. В свою очередь, длина проскальзывания определяется соотношением $L_s = \lambda(2 - \alpha)/\alpha$, где α – коэффициент, определяющийся отношением количества молекул, отраженных диффузионно (молекулы сталкиваются с соседними молекулами) от твердой стенки при расстоянии $z = 0$, к общему числу молекул. Часть молекул при этом отражается зеркально от стенки без взаимодействия с соседними молекулами.

Физический смысл скорости проскальзывания V_s и длины проскальзывания L_s показан на рис. 2 [24]. Скорость проскальзывания отличается от макроскопической средней скорости молекул вблизи стенки. Она определяется линейной экстраполяцией профиля скорости за пределами слоя Кнудсена – очень тонкого слоя газа в неравновесном термодинамическом состоянии, где не работают обычные уравнения Навье–Стокса. Толщина слоя Кнудсена одного порядка с длиной свободного пробега молекул.

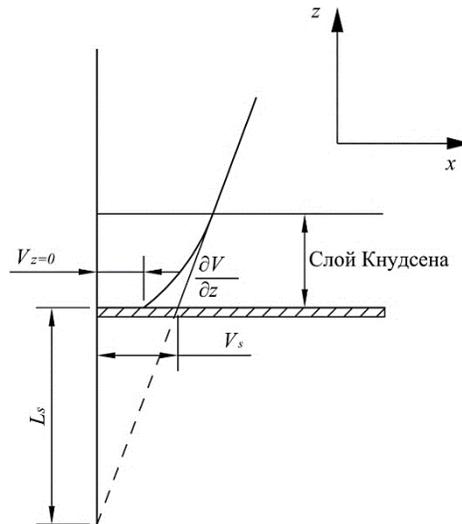


Рис. 2. Определение скорости и длины проскальзывания

Fig. 2. Definitions of the slip velocity and slip length

Коэффициент α учитывает количество молекул, отраженных от стенки в касательном и нормальном направлениях. Соответственно, в литературе определены термины коэффициента аккомодации касательного импульса α_t и нормального импульса α_n [2, 25]. Значения коэффициентов аккомодации для некоторых газов приведены в табл. 1 [2, 26].

Таблица 1

Значения коэффициентов аккомодации

Газы	α	α_t
He	0,888	0,882
Ne	0,858	0,849
Ar	0,921	0,916
Kr	0,996	0,997
Xe	1,000	1,014
H ₂	0,954	0,952
N ₂	0,915	0,911
CO ₂	0,993	0,993

Согласно введенному обозначению для коэффициента аккомодации касательного импульса α_t длина проскальзывания может быть определена следующим выражением [2]:

$$L_s = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \lambda \left(\frac{2 - \alpha_t}{\alpha_t} \right). \quad (3)$$

Расчет аэродинамической составляющей момента сопротивления вращению ротора

Расчет влияния давления в корпусе ДМ на аэродинамическую составляющую момента сопротивления вращению ротора проведен в программном комплексе ANSYS Fluent. В качестве объекта исследования выбраны ДМ с диаметром ротора 350 мм (ДМ1) и 300 мм (ДМ2). Минимальное рассматриваемое давление в камере ДМ не менее 1 Па, что обусловлено программными ограничениями ANSYS Fluent. Аэродинамическая задача решалась в стационарной постановке. Использовался тип решателя по плотности (Density-Based). Для описания течения среды внутри камеры ДМ использовалась модель ламинарного течения с дополнительным включением уравнений сохранения энергии для тепловой части задачи. Для учета теплопередачи излучением использовалась модель «от поверхности к поверхности» (S2S). Свойства воздушной среды описывались с применением модели идеального газа. Схема дискретизации по потоку Roe-FDS. На всех границах воздушной среды в параметрах граничного условия «стенка (wall)» для описания сдвиговых напряжений применялась настройка частичного проскальзывания для разреженного газа (Partial Slip for Rarefied Gases) с указанием коэффициента аккомодации импульса (Momentum Accommodation Coefficient), численно равного 0,911. Конечно-объемная модель ДМ1 состоит из 9 692 318 элементов, в случае ДМ2 количество элементов составляет 13 721 816. Размер элементов сетки в объемных областях течения задан величиной 2 мм, размер элементов на стенках 1 мм, полная высота призматических слоев вблизи стенок 1 мм при общем количестве разбиений по высоте, равном 10.

Итоговые настройки сетки определены оценкой скорости сходимости численного решения и влияния на расчетную величину момента сопротивления вращению ротора ДМ. В табл. 2 приведены результаты исследования сеточной сходимости на примере ДМ1 при скорости вращения ротора 6 000 об/мин и давлении 1.33 Па.

Таблица 2

Исследование сеточной сходимости

Размер элементов сетки, мм	4	2	2	1,5
Размер элементов сетки на стенках, мм	2	2	1	0,5
Количество элементов, шт.	5 090 858	8 170 368	9 692 318	19 022 234
Момент сопротивления вращению M , Н·м	0.0017	0.002	0.0022	0.0022

Поставленная задача решалась в 3D-постановке, что обусловлено необходимостью учета формы спиц, соединяющих вал ротора и обод маховика, формы и расположения постоянных магнитов индуктора.

Согласно документации Fluent скорость проскальзывания среды на стенке определяется выражением (4)

$$V_s = -\frac{2-\alpha}{\alpha\mu} \lambda \tau, \tag{4}$$

где α – коэффициент аккомодации импульса; τ – тангенциальная проекция тензора сдвиговых напряжений; μ – динамическая вязкость; λ – длина свободного пробега молекул.

В документации Fluent не указано однозначно, какой именно коэффициент аккомодации должен быть использован: полный α или тангенциальный α_t . Поскольку для расчета сдвиговых напряжений определяющим критерием является тангенциальная составляющая скорости, то в настройке граничного условия использовался коэффициент аккомодации касательного импульса α_t .

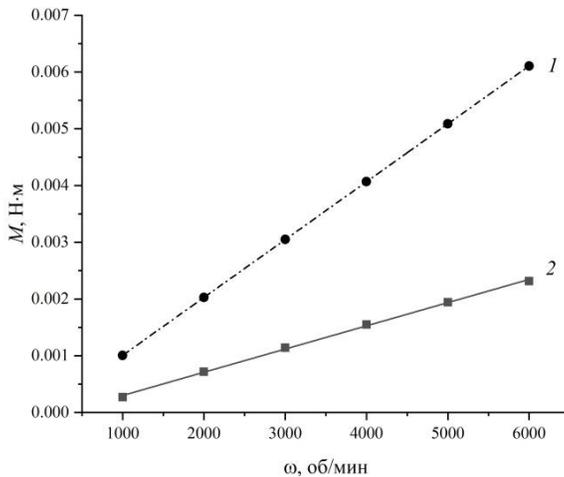


Рис. 3. Зависимость аэродинамической составляющей момента сопротивления от скорости вращения ротора: 1 – без учета скольжения, 2 – с учетом скольжения
Fig. 3. Aerodynamic component of the drag torque as a function of rotor rotational speed: (1) no-slip condition and (2) slip condition

На рис. 3 приведена зависимость аэродинамической составляющей момента сопротивления от скорости вращения ротора для ДМ1 с учетом и без учета проскальзывания для давления в корпусе 1.33 Па и начальной температуры 20°C.

На рис. 4 приведена зависимость аэродинамической составляющей момента сопротивления ротора ДМ1 от давления в корпусе при номинальной скорости вращения и начальной температуре 20°C.

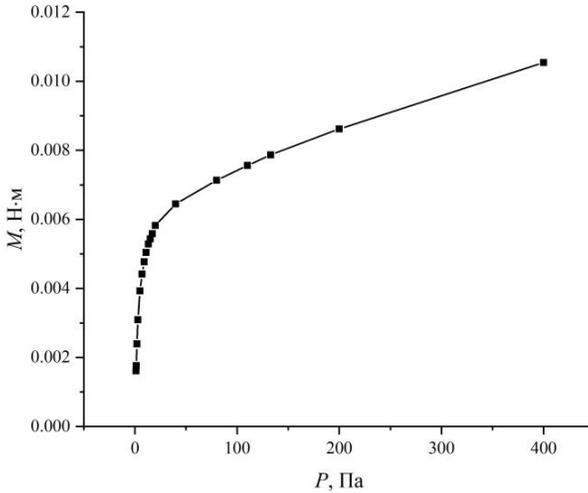


Рис. 4. Зависимость аэродинамической составляющей момента сопротивления вращению ротора от давления в корпусе

Fig. 4. Aerodynamic component of the rotor drag torque as a function of pressure in the housing

Кривую на рис. 4 можно разделить на три участка:

1. Давление от 1 до 20 Па – режим движения воздушной среды внутри корпуса ДМ1 со скольжением. Зависимость момента сопротивления вращению ротора может быть описана выражением $M = 0,0015\ln(P) + 0,0014$;

2. Переходный режим при давлении от 20 до 40 Па;

3. Режим течения неразрывной среды, описываемый стандартными уравнениями Навье–Стокса, при давлении выше 40 Па. Зависимость момента сопротивления вращению ротора может быть описана выражением $M = -1 \cdot 10^{-8}P^2 + 2 \cdot 10^{-5}P + 0,0059$.

Величина аэродинамической составляющей момента сопротивления в зависимости от зазора между ободом ротора и корпусом ДМ1 приведена на рис. 5. Данные рассчитаны для остаточного давления в корпусе 1.2 Па, начальной температуры 20°C и номинальной скорости вращения.

Для ДМ2 экспериментально определено влияние давления на суммарный момент сопротивления вращению ротора. Полученный результат уточнен с вычетом из общего момента сопротивления составляющих, отвечающих за трение в подшипниковых узлах и потери на вихревые токи в обмотке статора ДМ [27]. На рис. 6 приведены сравнительные данные по аэродинамической составляющей момента сопротивления вращению ротора, полученные расчетным способом и экспериментально.

Характер зависимостей на рис. 6, полученных расчетным и экспериментальным способом, аналогичный. На участке давления до 25 Па можно условно

выделить по аналогии с рис. 4 режим движения воздушной среды внутри корпуса ДМ2 со скольжением.

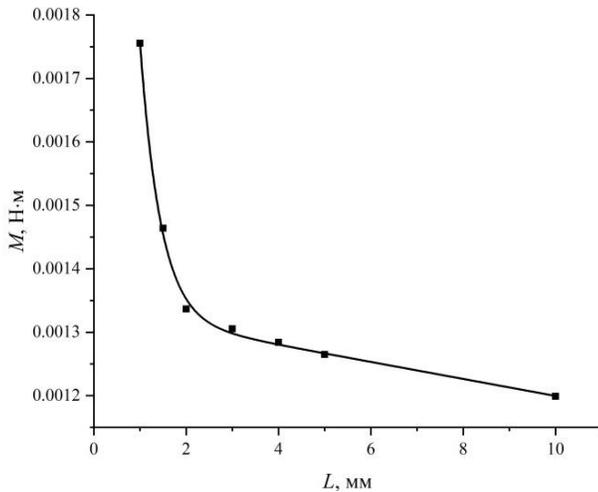


Рис. 5. Влияние зазора между ободом ротора и корпусом на аэродинамическую составляющую момента сопротивления вращению ротора

Fig. 5. Effect of the gap between the rotor rim and the housing on the aerodynamic component of the rotor drag torque

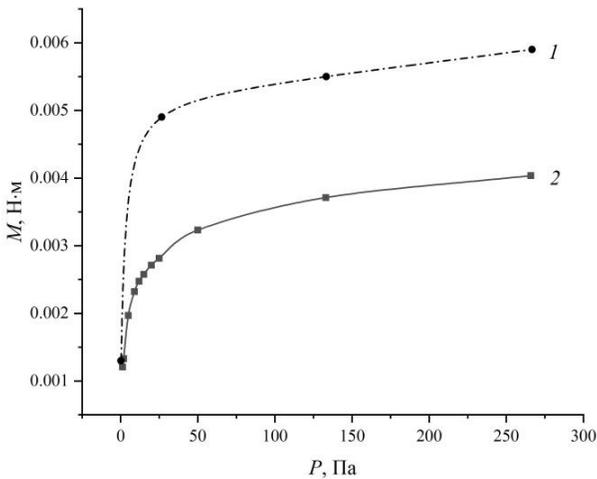


Рис. 6. Аэродинамическая составляющая момента сопротивления вращению ротора: 1 – экспериментальные данные, 2 – расчетные данные

Fig. 6. Aerodynamic component of the rotor drag torque: (1) experimental data and (2) calculated results

С ростом давления разница между кривыми 1 и 2 увеличивается, что может быть объяснено погрешностью аналитического расчета потерь на трение в подшипниковых узлах ДМ2 и потерь на вихревые токи в обмотке статора. Также стоит учитывать принятые упрощения геометрии ротора ДМ2 для улучшения сходимости

численного решения при использовании модели ламинарного течения воздушной среды.

Заключение

При рассмотрении течения воздушной среды в корпусе ДМ1 с учетом скольжения определено влияние геометрических размеров корпуса и давления внутри него на аэродинамическую составляющую момента сопротивления вращению ротора. На примере ДМ2 показано подобие экспериментальной и расчетной зависимостей давления в гермокамере на аэродинамическую составляющую момента сопротивления вращению.

Представлена возможность использования модифицированного граничного условия прилипания на стенках с поправкой на частичное скольжение для расчета аэродинамической составляющей момента сопротивления вращению ротора ДМ в диапазоне давлений в гермокамере от 1 до 20 Па.

Список источников

1. *Lee J.* Statistical assessment of tangential momentum accommodation coefficient using internal flow rate model based on rarefied gas conditions // *Results in Physics*. 2022. V. 43. Art. 106130. doi: 10.1016/j.rinp.2022.106130
2. *Sharipov F.* Data on the Velocity Slip and Temperature Jump Coefficients // *J. Phys. Chem. Ref. Data*. 2011. V. 40 (2). Art. 023101.
3. *Josyula E., Burt J.* Review of rarefied gas effects in hypersonic applications // *Models and Computational Methods for Rarefied Flows (RTO-EN-AVT-194)*. 2011.
4. *Li Y, Xu S-L.* DSMC simulation of vapor flow in molecular distillation // *Vacuum*. 2014. V. 110. P. 40–46. doi: 10.1016/j.vacuum.2014.08.001
5. *Malyshev O.B.* Gas dynamics modelling for particle accelerators // *Vacuum*. 2012. V. 86 (11). P. 1669–1681. doi: 10.1016/j.vacuum.2012.03.047
6. *Shoja-Sani A., Roohi E., Kahrom M., Stefanov S.* Investigation of aerodynamic characteristics of rarefied flow around NACA 0012 airfoil using DSMC and NS solvers // *Eur J Mech. B / Fluids*. 2014. V. 48. P. 59–74. doi: 10.1016/j.euromechflu.2014.04.008
7. *Krook M., Wu T.* Exact solutions of the Boltzmann equation // *Phys Fluids*. 1977. V. 20. P. 1589–1595. doi: 10.1063/1.861780
8. *Gressman P.T., Strain R.M.* Global classical solutions of the Boltzmann equation without angular cut-off // *J Am Math Soc*. 2010. V. 24. P. 771–847. doi: 10.1090/S0894-0347-2011-00697-8
9. *Cercignani C., Daneri A.* Flow of a rarefied gas between two parallel plates // *J Appl Phys*. 1963. V. 34. P. 3509–3513. doi: 10.1063/1.1729249
10. *Cercignani C., Sernagiotto F.* Cylindrical Poiseuille flow of a rarefied gas // *Phys Fluids*. 1966. V. 9 (40). doi: 10.1063/1.1761530
11. *Huang A.B.* Rarefied gas flow between parallel plates based on the discrete ordinate method // *Phys Fluids*. 1967. V. 10. P. 498–502. doi: 10.1063/1.1762143
12. *Loyalka S.K., Petrellis N., Storvick T.S.* Some exact numerical results for the BGK model: Couette, Poiseuille and thermal creep flow between parallel plates // *Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Physik ZAMP*. 1979. V. 30. P. 514–521. doi: 10.1007/BF01588895
13. *Loyalka S.K., Hickey K.A.* Kinetic theory of thermal transpiration and the mechanocaloric effect: Planar flow of a rigid sphere gas with arbitrary accommodation at the surface // *J Vac Sci Technol A*. 1991. V. 9. P. 158–163. doi: 10.1116/1.577119
14. *Cercignani C., Lampis M., Lorenzani S.* Variational approach to gas flows in microchannels // *Phys Fluids*. 2004. V. 16. P. 3426–3437. doi: 10.1063/1.1764700

15. Loyalka S.K. The Q_n and F_n integrals for the BGK model // *Transp Theory Stat Phys*. 1975. V. 4. P. 55–65. doi: 10.1080/00411457508247944
16. Ferziger J.H. Flow of a rarefied gas through a cylindrical tube // *Phys Fluids*. 1967. V. 10. P. 1448–1453. doi: 10.1063/1.1762304
17. Loyalka S.K. Kinetic theory of thermal transpiration and mechanocaloric effect // *J Chem Phys*. 1975. V. 63. P. 4054–4060. doi: 10.1063/1.431847
18. Gallis M., Torczynski J. Steady isothermal gas mass flow rate in a microscale tube from continuum to free-molecular conditions // 41st AIAA fluid dynamics conference and exhibit. Reston, VA: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2011. doi: 10.2514/6.2011-3994
19. Gallis M.A., Torczynski J.R. Direct simulation Monte Carlo-based expressions for the gas mass flow rate and pressure profile in a microscale tube // *Phys Fluids*. 2012. V. 24. Art. 012005. doi: 10.1063/1.3678337
20. Balaj M., Roohi E., Akhlaghi H., Myong R.S. Investigation of convective heat transfer through constant wall heat flux micro/nano channels using DSMC // *Int J Heat Mass Transf*. 2014. V. 71. P. 633–638. doi: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.12.053
21. Akhlaghi H., Roohi E. Generalized description of the Knudsen layer thickness in rarefied gas flows // *Phys Fluids*. 2021. V. 33. Art. 061701. doi: 10.1063/5.0052263
22. Stefanov S., Roohi E., Shoja-Sani A. A novel transient-adaptive subcell algorithm with a hybrid application of different collision techniques in direct simulation Monte Carlo (DSMC) // *Phys Fluids*. 2022. V. 34. Art. 092003. doi:10.1063/5.0104613
23. Taheri E., Roohi E., Stefanov S. A symmetrized and simplified Bernoulli trial collision scheme in direct simulation Monte Carlo // *Phys Fluids*. 2022. V. 34. Art. 012010. doi: 10.1063/5.0076025
24. Maali A. Slip length measurement of gas flow // *Nanotechnology*. 2016. V. 27 (37). Art. 374004.
25. Омелик А.И. Экспериментальное определение коэффициентов аккомодации нормального импульса для поверхностей из различных материалов // *Ученые записки ЦАГИ*. 1973. Т. IV, № 4. С. 128–130.
26. Porodnov B.T., Suetin P.E., Borisov S.F., Akinshin V.D. Experimental investigation of rarefied gas flow in different channels // *J. Fluid Mech*. 1974. V. 64, P. 417–437.
27. Гладышев Г.Н., Дмитриев В.С., Копытов В.И. Системы управления космическими аппаратами (исполнительные органы: назначение, принцип действия, схемы, конструкция): учеб. пособие. Томск: Изд-во ТПУ, 2000. 207 с.

References

1. Lee J. (2022) Statistical assessment of tangential momentum accommodation coefficient using internal flow rate model based on rarefied gas conditions. *Results in Physics*. 43(106130). doi: 10.1016/j.rinp.2022.106130
2. Sharipov F. (2011) Data on the velocity slip and temperature jump coefficients. *Journal of Physical and Chemical Reference Data*. 40(2). Article 023101.
3. Josyula E., Burt J. (2011) Review of rarefied gas effects in hypersonic applications. *Models and Computational Methods for Rarefied Flows (RTO-EN-AVT-194)*.
4. Li Y., Xu S-L. (2014) DSMC simulation of vapor flow in molecular distillation. *Vacuum*. 110. pp. 40–46. doi: 10.1016/j.vacuum.2014.08.001
5. Malyshev O.B. (2012) Gas dynamics modelling for particle accelerators. *Vacuum*. 86(11). pp. 1669–1681. doi: 10.1016/j.vacuum.2012.03.047
6. Shoja-Sani A., Roohi E., Kahrom M., Stefanov S. (2014) Investigation of aerodynamic characteristics of rarefied flow around NACA 0012 airfoil using DSMC and NS solvers. *European Journal of Mechanics – B/Fluids*. 48. pp. 59–74. doi: 10.1016/j.euromechflu.2014.04.008
7. Krook M., Wu T. (1977) Exact solutions of the Boltzmann equation. *Physics of Fluids*. 20. pp. 1589–1595. doi: 10.1063/1.861780

8. Gressman P.T., Strain R.M. (2010) Global classical solutions of the Boltzmann equation without angular cut-off. *Journal of the American Mathematical Society*. 24. pp. 771–847. doi: 10.1090/S0894-0347-2011-00697-8
9. Cercignani C., Daneri A. (1963) Flow of a rarefied gas between two parallel plates. *Journal of Applied Physics*. 34. pp. 3509–3513. doi: 10.1063/1.1729249
10. Cercignani C., Sernagiotto F. (1966) Cylindrical Poiseuille flow of a rarefied gas. *Physics of Fluids*. 9(40). doi: 10.1063/1.1761530
11. Huang A.B. (1967) Rarefied gas flow between parallel plates based on the discrete ordinate method. *Physics of Fluids*. 10. pp. 498–502. doi: 10.1063/1.1762143
12. Loyalka S.K., Petrellis N., Storvick T.S. (1979) Some exact numerical results for the BGK model: Couette, Poiseuille and thermal creep flow between parallel plates. *Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Physik ZAMP*. 30. pp. 514–521. doi: 10.1007/BF01588895
13. Loyalka S.K., Hickey K.A. (1991) Kinetic theory of thermal transpiration and the mechanocaloric effect: Planar flow of a rigid sphere gas with arbitrary accommodation at the surface. *Journal of Vacuum Science & Technology A: Vacuum, Surfaces and Films*. 9. pp. 158–163. doi: 10.1116/1.577119
14. Cercignani C., Lampis M., Lorenzani S. (2004) Variational approach to gas flows in microchannels. *Physics of Fluids*. 16. pp. 3426–3437. doi: 10.1063/1.1764700
15. Loyalka S.K. (1975) The Q_n and F_n integrals for the BGK model. *Transport Theory and Statistical Physics*. 4. pp. 55–65. doi: 10.1080/00411457508247944
16. Ferziger J.H. (1967) Flow of a rarefied gas through a cylindrical tube. *Physics of Fluids*. 10. pp. 1448–1453. doi: 10.1063/1.1762304
17. Loyalka S.K. (1975) Kinetic theory of thermal transpiration and mechanocaloric effect. *The Journal of Chemical Physics*. 63. pp. 4054–4060. doi: 10.1063/1.431847
18. Gallis M., Torczynski J. (2011) Steady isothermal gas mass flow rate in a microscale tube from continuum to free-molecular conditions. In: *41st AIAA fluid dynamics conference and exhibit. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics*. doi: 10.2514/6.2011-3994
19. Gallis M.A., Torczynski J.R. (2012) Direct simulation Monte Carlo-based expressions for the gas mass flow rate and pressure profile in a microscale tube. *Physics of Fluids*. 2. Article 012005. doi: 10.1063/1.3678337
20. Balaj M., Roohi E., Akhlaghi H., Myong R.S. (2014) Investigation of convective heat transfer through constant wall heat flux micro/nano channels using DSMC. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 71. pp. 633–638. doi: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.12.053
21. Akhlaghi H., Roohi E. (2021) Generalized description of the Knudsen layer thickness in rarefied gas flows. *Physics of Fluids*. 33. Article 061701. doi: 10.1063/5.0052263
22. Stefanov S., Roohi E., Shoja-Sani A. (2022) A novel transient-adaptive subcell algorithm with a hybrid application of different collision techniques in direct simulation Monte Carlo (DSMC). *Physics of Fluids*. 34. Article 092003. doi: 10.1063/5.0104613
23. Taheri E., Roohi E., Stefanov S. (2022) A symmetrized and simplified Bernoulli trial collision scheme in direct simulation Monte Carlo. *Physics of Fluids*. 34. Article 012010. doi: 10.1063/5.0076025
24. Maali A. (2016) Slip length measurement of gas flow. *Nanotechnology*. 27(37). Article 374004.
25. Omelik A.I. (1973) Eksperimental'noe opredelenie koefitsientov akkomodatsii normal'nogo impul'sa dlya poverkhnostey iz razlichnykh materialov [Experimental investigation of normal accommodation coefficient for surfaces made from different materials]. *Uchenye zapiski TSAGI*. IV(4). pp. 128–130.
26. Porodnov B.T., Suetin P.E., Borisov S.F., Akinshin V.D. (1974) Experimental investigation of rarefied gas flow in different channels. *Journal of Fluid Mechanics*. 64. pp. 417–437.
27. Gladyshev G.N., Dmitriev V.S., Kopylov V.I. (2000) *Systemy upravleniya kosmicheskimi apparatami (Ispolnitelnye organy: naznachenie, printsyp deystviya, skhemy, konstruksiya)* [Control systems of space crafts (Actuators: purpose, principle of operation, schemes, and construction)]. Study guide. Tomsk: Tomsk Polytechnic University.

Сведения об авторах:

Акарачкин Сергей Анатольевич – кандидат технических наук, начальник отдела математического моделирования физических процессов АО «НПЦ “Полус”» (Томск, Россия).

E-mail: info@polus-tomsk.ru

Полюшко Денис Александрович – инженер-конструктор 2-й категории АО «НПЦ “Полус”» (Томск, Россия). E-mail: info@polus-tomsk.ru

Information about the authors:

Akarachkin Sergey A. (Candidate of Technical Sciences, JSC “NPC "Polus"”, Tomsk, Russian Federation). E-mail: info@polus-tomsk.ru

Polyushko Denis A. (Design Engineer, JSC “NPC "Polus"”, Tomsk, Russian Federation). E-mail: info@polus-tomsk.ru

Статья поступила в редакцию 27.01.2025; принята к публикации 05.02.2026

The article was submitted 27.01.2025; accepted for publication 05.02.2026

Научная статья

УДК 533.17; 519.62

doi: 10.17223/19988621/99/5

Численное исследование нестационарных газодинамических процессов в регулируемых ракетных двигателях на твердом топливе с центральным телом

Кирилл Владимирович Костюшин¹, Анатолий Алексеевич Глазунов²,
Дмитрий Олегович Ларкин³

^{1, 2, 3} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ kostushink@niipmm.tsu.ru

² gla@niipmm.tsu.ru

³ d.m.i.t.r.y.l.a.r.k.i.n@mail.ru

Аннотация. Проведены численные исследования нестационарных течений продуктов сгорания в регулируемых ракетных двигателях на твердом топливе для трех конфигураций двигателей с одинаковой площадью поверхности горения. Расчеты проводились для двух составов топлив. В расчетах варьировала скорость движения исполняющего элемента регулятора расхода. Показано, что максимальное отличие величины заброса тяги между расчетными конфигурациями при постоянной скорости регулирования составляет 5.5–7% от уровня тяги на начальном режиме.

Ключевые слова: осесимметричные регулируемые РДТТ, утолненное сопло, нестационарная газовая динамика, математическое моделирование, схема Годунова, подвижные расчетные сетки

Благодарности: Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России, проект № FSWM-2025-0004.

Для цитирования: Костюшин К.В., Глазунов А.А., Ларкин Д.О. Численное исследование нестационарных газодинамических процессов в регулируемых ракетных двигателях на твердом топливе с центральным телом // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2026. № 99. С. 62–76. doi: 10.17223/19988621/99/5

Original article

A numerical study of unsteady gas-dynamic processes in controllable solid-propellant rocket motors with a central body

Kirill V. Kostyushin¹, Anatoliy A. Glazunov², Dmitriy O. Larkin³

^{1, 2, 3} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ kostushink@niipmm.tsu.ru

² gla@niipmm.tsu.ru

³ d.m.i.t.r.y.l.a.r.k.i.n@mail.ru

Abstract. This study presents a numerical investigation of unsteady gas-dynamic processes in axisymmetric solid-propellant rocket motors equipped with a movable central body for thrust regulation. Three motor configurations with identical burning-surface areas but different chamber volumes and grain geometries were analyzed, including a design with a recessed nozzle. The nonstationary Euler equations were solved using the control-volume Godunov scheme on moving meshes incorporating a hybrid algorithm combining grid smoothing and local remeshing to track the motion of the flow-control element. Calculations were performed for two propellants with different burning-rate characteristics at varying velocity of the throttling mechanism.

The results show that rapid changes in the throat area induce strong transient restructuring of the flow in the transonic and supersonic zones, leading to short-term thrust overshoots or undershoots caused by the mismatch between chamber-pressure evolution and instantaneous critical-area variation. The magnitude of these thrust excursions increases with the throttling rate, whereas the duration of the transient process decreases. Transients during throttling from the maximum to the minimum thrust were 2–2.5 times shorter than in the reverse mode. For all configurations, the maximum difference in thrust-overshoot amplitude at a fixed throttling rate reached 5.5–7% of the initial thrust.

Keywords: axisymmetric controllable solid-propellant rocket motors, recessed nozzle, unsteady gas dynamics, mathematical modeling, Godunov scheme, moving computational grids

Acknowledgments: This work was carried out within the framework of the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No. FSWM-2025-0004).

For citation: Kostyushin, K.V., Glazunov, A.A., Larkin, D.O. (2026) A numerical study of unsteady gas-dynamic processes in controllable solid-propellant rocket motors with a central body. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 99. pp. 62–76. doi: 10.17223/19988621/99/5

Введение

При работе регулируемого двигателя на твердом топливе (РДТТ) в ряде случаев требуется изменять величину и направление вектора его тяги. Это связано с необходимостью обеспечения перевода космического летательного аппарата на требуемую орбиту, при разведении блоков у ракеты и т.д. К настоящему времени реализован ряд систем для управления вектором тяги [1].

В работе [2] описано пять различных вариантов регулирования РДТТ: предстартовое регулирование уровня параметров РДТТ и их разбросов, программированное регулирование параметров, регулирование вектора тяги в полете, отсечка тяги и РДТТ многократного включения. Отмечается, что наиболее простым способом регулирования массовых и расходных характеристик у двигателя является использование перемещающегося центрального тела. Эффективность данного способа повышается при приближении коэффициента ν в законе скорости горения к единице. В этом случае большая глубина регулирования обеспечивается незначительным изменением площади минимального сечения сопла.

Исследованию газодинамических процессов, протекающих в регулируемых по модулю тяги РДТТ, посвящено большое количество публикаций, включая [2–12]. В этих работах, как правило, исследования газодинамических процессов выполнены для фиксированных положений центрального тела относительно профиля сопла. В некоторых работах представлены методики и результаты расчетов нестационарных газодинамических процессов в регулируемых РДТТ преимущественно в одномерной постановке [13, 14].

В данной статье представлены результаты моделирования нестационарных газодинамических процессов в регулируемых РДТТ с центральным телом в осесимметричной постановке.

Постановка задачи

Рассматривается задача исследования нестационарных газодинамических процессов в регулируемых по модулю тяги для осесимметричных РДТТ. Регулирование осуществляется путем изменения площади минимального сечения сопла за счет перемещения регулятора расхода. Обеспечение требуемого уровня изменения тяги достигается изменением площади минимального сечения при заданной скорости перемещения регулятора расхода. Это приводит к существенной перестройке газодинамических характеристик течения и возможности образования нежелательных нестационарных «забросов» или «провалов» в величинах тяги.

Схема расчетной области показана рис. 1 и включает в себя: 1 – поверхность горения заряда топлива; 2 – переднее днище двигателя; 3, 7 – ось симметрии; 4–6 – регулятор расхода; 8, 9 – утопленное сопло; 10 – выходное сечение сопла.

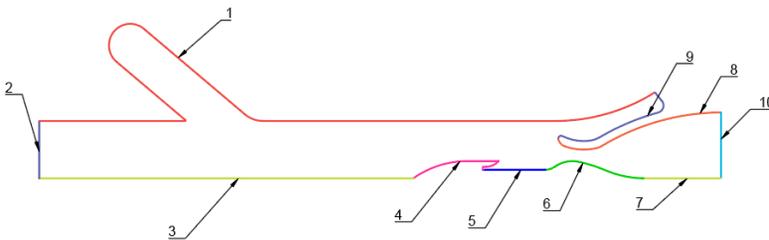


Рис. 1. Схема РДТТ с подвижным центральным телом
Fig. 1. Solid-propellant rocket motor scheme with a movable central body

Для моделирования течения газа используется нестационарная система уравнений Эйлера, которая решается методом контрольного объема с применением схемы Годунова. Математическая постановка задачи и описание использованных численных схем подробно изложены в работах [15, 16]. Настоящее исследование расширяет постановку работы [16] с учетом центрального тела, положение которого изменяется во времени.

Движение исполняющего элемента регулятора расхода реализовано с использованием гибридного алгоритма, основанного на комбинации алгоритмов сглаживания и локального перестроения расчетной сетки. Новое положение вершин ячеек на поверхности исполняющего элемента регулятора расхода (см. рис. 1, граница б) вычисляется следующим образом:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \mathbf{u}\Delta t, \quad (1)$$

где \mathbf{x} – координаты вершины подвижной грани ячейки, \mathbf{u} – скорость движения регулятора расхода.

Координаты вершин ячеек на деформируемых границах (см. рис 1, границы 5, 7) определяются из условия равномерного распределения

$$\mathbf{x}_i^{k+1} = \mathbf{x}_0^{k+1} + i\Delta\mathbf{x}, \quad (2)$$

где $\Delta\mathbf{x} = |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_N| / (N - 1)$ – длина грани расчетной ячейки, лежащей на деформируемой границе, нижний индекс i – номер вершины на границе, N – число вершин, лежащих на границе.

Для сохранения качества расчетной сетки в окрестностях деформируемых границ вводятся ограничения на максимальную и минимальную длины грани расчетной ячейки ($\Delta\mathbf{x}_{\max}$ и $\Delta\mathbf{x}_{\min}$ соответственно). Число вершин, лежащих на деформируемой границе, определяется из условия

$$N^{k+1} = \begin{cases} N^k + 1, & \Delta\mathbf{x} > \Delta\mathbf{x}_{\max}, \\ N^k - 1, & \Delta\mathbf{x} < \Delta\mathbf{x}_{\min}, \\ N^k, & \Delta\mathbf{x}_{\min} < \Delta\mathbf{x} < \Delta\mathbf{x}_{\max}. \end{cases} \quad (3)$$

При изменении числа вершин расчетная сетка в окрестности деформируемой границы перестраивается: удаляются ячейки, прилегающие к деформируемой границе, затем по заданному набору несвязанных граничных вершин в окрестности деформируемой границы строится триангуляция [18] с последующей интерполяцией параметров течения на новую расчетную сетку.

На этапах построения и перестроения расчетной сетки в качестве алгоритма триангуляции используется метод SweepLine [19]. Для сохранения качества расчетной сетки в области соплового блока применен алгоритм сглаживания [20]

$$\mathbf{x}^{k+1} = (1 - \alpha)\mathbf{x}^k + \alpha\mathbf{c}^k, \quad (4)$$

где α – коэффициент релаксации, \mathbf{c}^k – центрoид ячейки диаграммы Вороного, содержащей вершину \mathbf{x}^k .

Для двумерной расчетной сетки:

$$\mathbf{c}^k = \left(3 \sum_{i=0}^{n-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \right)^{-1} \times \left[\sum_{i=0}^{n-1} (x_i - x_{i+1})(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i), \sum_{i=0}^{n-1} (y_i - y_{i+1})(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \right]^T, \quad (5)$$

где n – число вершин ячейки диаграммы Вороного.

Для предотвращения искажений расчетной сетки используется алгоритм локального перестроения, включающий удаление ячеек низкого качества, уточнение сетки по второму алгоритму Чу [18] и последующую интерполяцию параметров течения. На каждом шаге по времени новые координаты вершин ячеек, лежащих на поверхности исполняющего элемента регулятора расхода и деформирующихся границах, определяются по соотношениям (1)–(3). Далее проводятся проверка критериев качества (ограничения на длины граней и минимальный угол), локальное перестроение ячеек, отмеченных для удаления, а также сглаживание сетки согласно (4), (5). Затем вычисляются площади и скорости движения граней, объемы подвижных ячеек и определяются локальные газодинамические параметры на новом временном слое.

С учетом изложенного алгоритма расчета движущего элемента разработан программный комплекс, позволяющий проводить осесимметричные расчеты нестационарных газодинамических процессов, протекающих в камере сгорания и сопловом блоке регулируемого по модулю тяги двигателя при изменяющейся геометрии расчетной области.

Численные исследования

Проведены численные исследования нестационарных течений продуктов сгорания в осесимметричных регулируемых РДТТ для трех модельных конфигураций двигателей в соответствии со схемой регулирования, рассмотренной в [13], со следующими параметрами: площадь поверхности горения – 5 м^2 ; площадь минимального сечения – на режиме минимальной тяги 0.0314 м^2 , на режиме максимальной тяги 0.0201 м^2 , ход исполняющего элемента регулятора расхода – 0.25 м . Конфигурации отличались объемом камеры сгорания и геометрией заряда топлива. В конфигурациях «Цилиндр 0.3 м» и «Цилиндр 0.2 м» использовался цилиндрический одночашечный заряд внутреннего горения, а в конфигурации «Зонт» – заряд топлива цилиндрической формы с наклонной проточкой. Кроме того, конфигурация типа «Зонт» отличалась наличием утопленного сопла. Схемы расчетных конфигураций показаны на рис. 2 и 3.

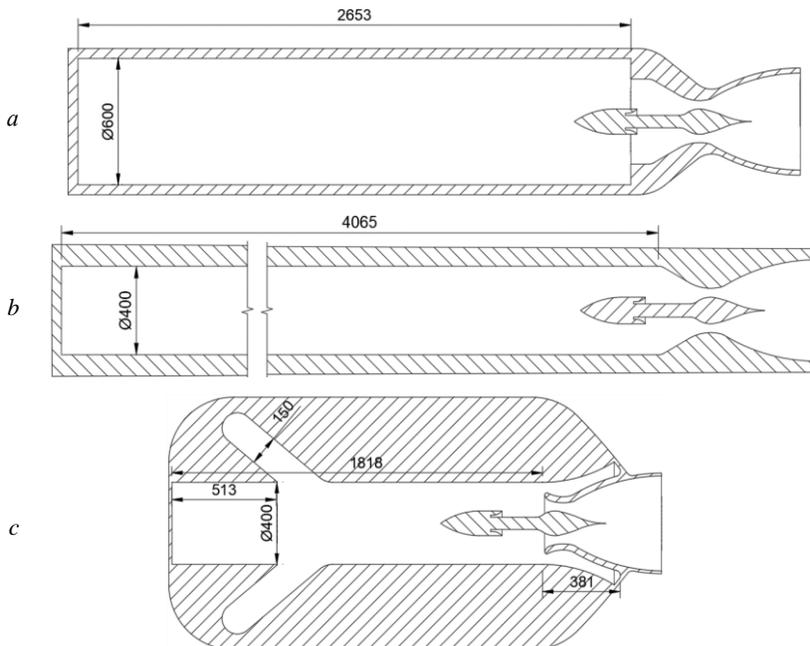


Рис. 2. Схемы конфигураций: «Цилиндр 0.3 м» (а), «Цилиндр 0.2 м» (б), «Зонт» (с)
Fig. 2. Configuration scheme: (a) “Cylinder 0.3 m”, (b) “Cylinder 0.2 m”, and (c) “Umbrella”

Расчеты проведены для двух модельных составов твердого топлива (ТТ): «Тип 1» и НЕС. Для состава «Тип 1» применялись следующие параметры: равновесный

показатель адиабаты $k = 1.16$, температура продуктов сгорания $T_r = 3\ 200\ \text{K}$, параметры степенного закона: $\nu = 0.35$, $u_0 = 0.002\ \text{м/с}$. Для состава HES принимались: $k = 1.24$, $T_r = 3\ 100\ \text{K}$, $\nu = 0.75$, $u_0 = 0.00055\ \text{м/с}$. Выбор характеристик твердого топлива и термодинамических параметров рабочего тела проводился в соответствии с данными [17]. Состав «Тип 1» обеспечивал глубину регулирования по расходу $\bar{m} = 1.98$, а состав HES – $\bar{m} = 3.81$.

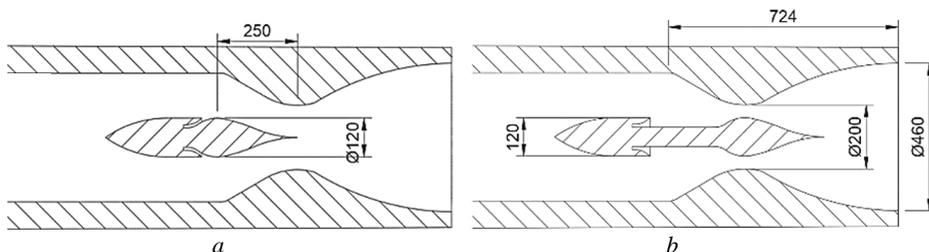


Рис. 3. Геометрия регулятора расхода: на режиме минимальной тяги (а), на режиме максимальной тяги (б)

Fig. 3. Flow regulator geometry at the: (a) minimum and (b) maximum thrust mode

В качестве граничных условий на всей поверхности заряда ТТ (см. рис. 1, граница 1) задавались локальный газоприток по нормали к поверхности горения и температура, на непроницаемых элементах конструкции РД (см. рис. 1, границы 2, 4, 6, 8 и 9) – условие непротекания, на границах 3 и 7 (см. рис. 1.) – условие осесимметрии. В качестве начальных условий во всей области течения задавалось распределение локальных параметров, соответствующее установившемуся течению в проточном тракте двигателя при фиксированном положении исполняющего элемента регулятора расхода. В начальный момент времени размер расчетной сетки составлял около 80 тыс. ячеек.

На рис. 4 показаны поля модуля скорости и давления в расчетной области для варианта расчетной конфигурации «Зонт» и состава топлива «Тип 1». Регулирование осуществлялось с режима минимальной на режим максимальной тяги со скоростью регулирования 5 м/с в моменты времени 0, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05 и 1 с. Видно, что в процессе движения исполняющего элемента поле скорости в окрестности зон трансзвукового и сверхзвукового течения существенно перестраивается. Наблюдается значительное изменение положения звуковой линии.

На рис. 5 показано изменение осредненного по объему модуля вектора скорости в камере сгорания (а) и сопловом блоке РД (б). Видно, что при регулировании с режима минимальной тяги на режим максимальной тяги средняя скорость течения в камере сгорания падает, а в сопловом блоке возрастает. Стоит отметить, что локальное распределение скорости и осредненная по объему скорость при изменении положения исполняющего элемента регулятора расхода перестраиваются практически мгновенно и соответствуют текущему положению регулятора расхода. Изменение осредненной по объему скорости в камере сгорания во временном промежутке между моментом окончания движения исполняющего элемента регулятора расхода (0.05 с) и моментом завершения регулирования (0.6 с) составляет не более 2.5%, а изменение осредненной по объему скорости в сопловом блоке – не более 3.5%.

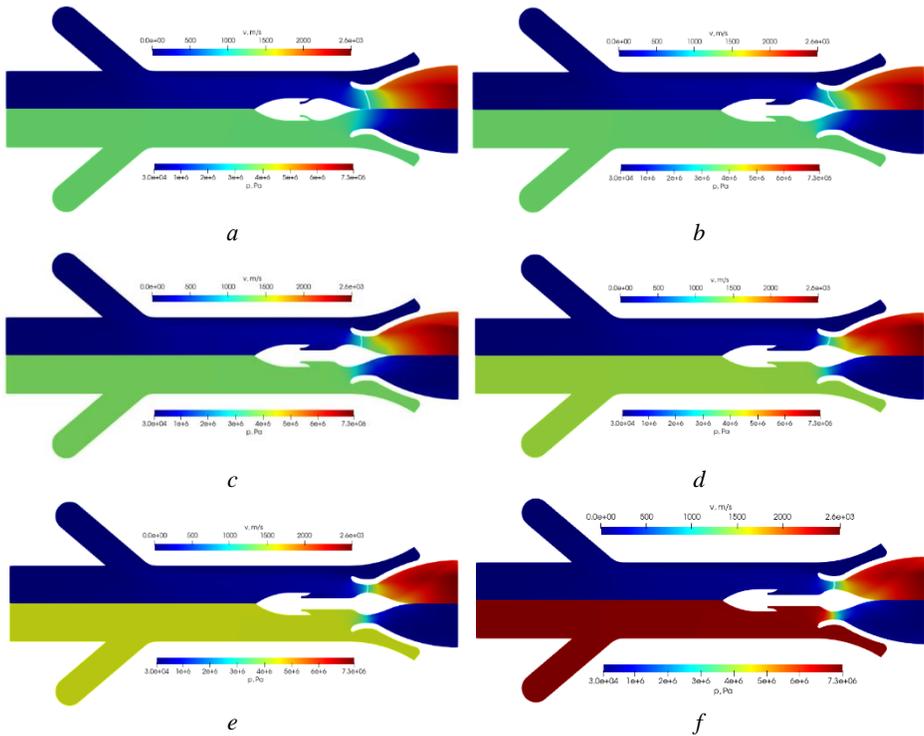


Рис. 4. Поле модуля скорости (сверху) и давления (снизу) для конфигурации «Зонт» и состава топлива «Тип 1» при регулировании с режима минимальной тяги на режим максимальной со скоростью регулирования 5 м/с, в моменты времени:

0 с (a), 0.02 с (b), 0.03 с (c), 0.04 с (d), 0.05 с (e), 1 с (f)

Fig. 4. Velocity magnitude (upper part) and pressure (lower part) fields for the “Umbrella” configuration with a “Type 1” propellant during throttling from the minimum to the maximum thrust mode at a throttling rate of 5 m/s at various time instants:

(a) 0, (b) 0.02, (c) 0.03, (d) 0.04, (e) 0.05, and (f) 1 s

На рис. 6 показан интеграл сил давления по внутренней поверхности РД для конфигурации «Зонт» и состава топлива «Тип 1» при регулировании с режима минимальной на режим максимальной тяги со скоростью регулирования 5 м/с. Видно, что время переходного процесса для рассматриваемой конфигурации составляло 0.37 с. Здесь под временем переходного процесса подразумевается период, когда тяга РД достигает значения, отличающегося от конечного, на 5% [13]. Также для рассматриваемой конфигурации наблюдается возникновение нестационарных нежелательных эффектов заброса тяги (пик или провал) в сторону, противоположную направлению регулирования. Забросы тяги обусловлены отставанием мгновенной скорости изменения давления в камере сгорания от скорости изменения площади критического сечения.

В процессе регулирования тяги можно отметить следующие особенности изменения газодинамических параметров. При изменении площади минимального сечения происходит быстрое перестроение поля скорости. Так, при регулировании с режима минимальной тяги на режим максимальной тяги происходит резкий рост средней по объему скорости течения в сверхзвуковой части сопла.

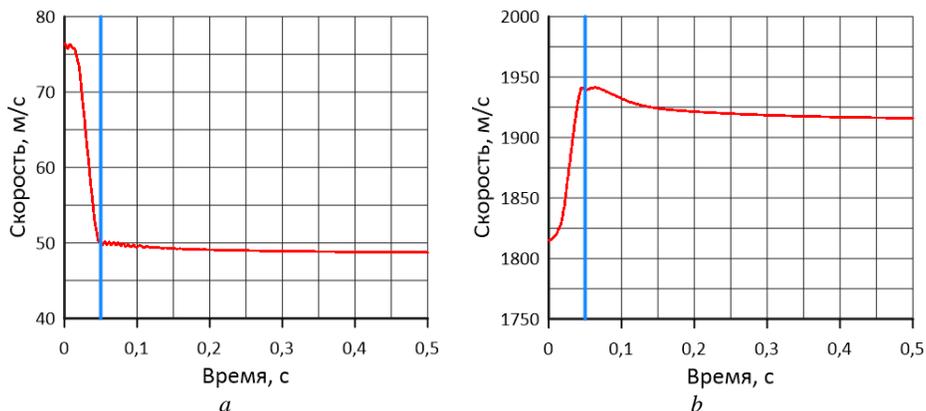


Рис. 5. Изменение осредненной по объему скорости для конфигурации «Зонт» и состава топлива «Тип 1» при регулировании с режима минимальной тяги на режим максимальной тяги со скоростью регулирования 5 м/с: в камере сгорания (а), в сопловом блоке (b)
Fig. 5. Variation of the volume-averaged velocity for the “Umbrella” configuration and “Type 1” propellant during throttling from the minimum to the maximum thrust mode at a throttling rate of 5 m/s in: (a) combustion chamber and (b) nozzle block

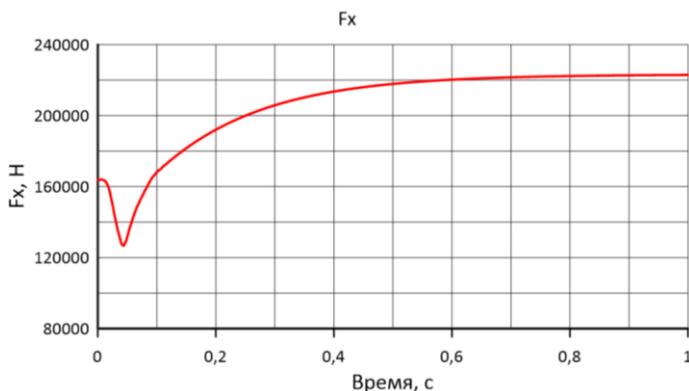


Рис. 6. Интеграл сил давления по внутренней поверхности РД для конфигурации «Зонт» и состава топлива «Тип 1» при регулировании с режима минимальной тяги на режим максимальной тяги со скоростью регулирования 5 м/с
Fig. 6. Integral of pressure forces over the internal surface of the rocket engine for the “Umbrella” configuration and “Type 1” propellant during throttling from the minimum to the maximum thrust mode at a throttling rate of 5 m/s

Давление в камере сгорания и газоприход с поверхности горения постепенно увеличиваются, но еще не соответствуют квазистационарному режиму течения при текущей площади минимального сечения. С другой стороны, увеличение скорости течения в сверхзвуковой части сопла приводит к снижению плотности (рис. 7) и давления в сопле и, как следствие, к уменьшению расхода газа на срезе сопла (рис. 8). Следствием такого процесса является возникновение эффекта заброса тяги.

Затем происходит выход значений плотности, давления (рис. 9) и газоприхода с поверхности горения (см. рис. 8) на номинальные значения, соответствующие текущему режиму работы двигателя.

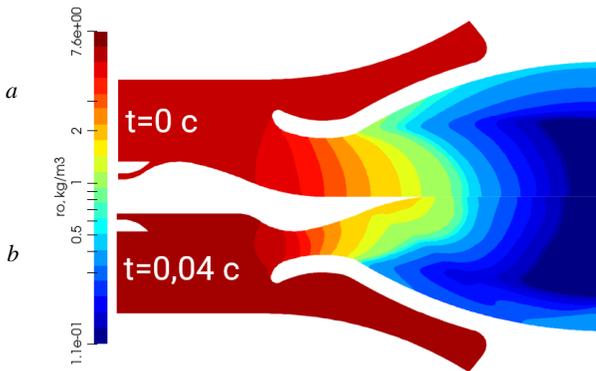


Рис. 7. Поле плотности для конфигурации «Зонт» и состава ТТ «Тип 1» при регулировании с режима минимальной тяги на режим максимальной тяги со скоростью регулирования 5 м/с в моменты времени: 0 с (а), 0,04 с (б)

Fig. 7. Density field for the “Umbrella” configuration and “Type 1” solid propellant during throttling from the minimum to the maximum thrust mode at a throttling rate of 5 m/s at a time instant of: (a) 0 and (b) 0.04 s

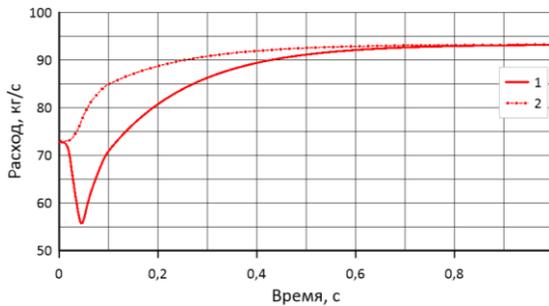


Рис. 8. Изменение расхода на срезе сопла и газопритока с поверхности горения для конфигурации «Зонт» и состава ТТ «Тип 1» при регулировании с режима минимальной тяги на режим максимальной тяги со скоростью регулирования 5 м/с:

1 – расход газа на срезе сопла, 2 – газоприток с поверхности горения

Fig. 8. Variation of the mass flow-rate at the nozzle exit and the gas generation rate from the burning surface for the “Umbrella” configuration and “Type 1” solid propellant during throttling from the minimum to the maximum thrust mode at a throttling rate of 5 m/s: (1) gas flow-rate at the nozzle exit and (2) gas generation from the burning surface

На рис. 10 показан интеграл сил давления по внутренней поверхности ракетного двигателя (РД) для скорости регулирования 1, 2 и 5 м/с с составом ТТ «Тип 1» при регулировании с режима минимальной тяги на режим максимальной тяги, а на рис. 11 – при регулировании с режима максимальной тяги на режим минимальной тяги. Видно, что максимальный заброс тяги наблюдается для конфигурации «Цилиндр 0.2 м». Максимальное отличие величины заброса тяги между расчетными конфигурациями при постоянной скорости регулирования составляет 5.5–7% от уровня тяги на начальном режиме. Минимальное время переходного процесса при регулировании с режима минимальной тяги на режим максимальной тяги наблюдается для конфигурации «Цилиндр 0.3 м», а при регулировании с режима максимальной тяги на режим минимальной тяги – для конфигурации «Зонт».

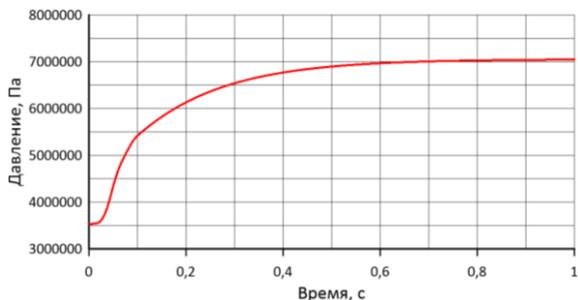


Рис. 9. Изменение осредненного по объему камеры давления для конфигурации «Зонт» и состава топлива «Тип 1» при регулировании с режима минимальной тяги на режим максимальной тяги со скоростью регулирования 5 м/с

Fig. 9. Variation of the volume-averaged chamber pressure for the “Umbrella” configuration and “Type 1” propellant during throttling from the minimum to the maximum thrust mode at a throttling rate of 5 m/s

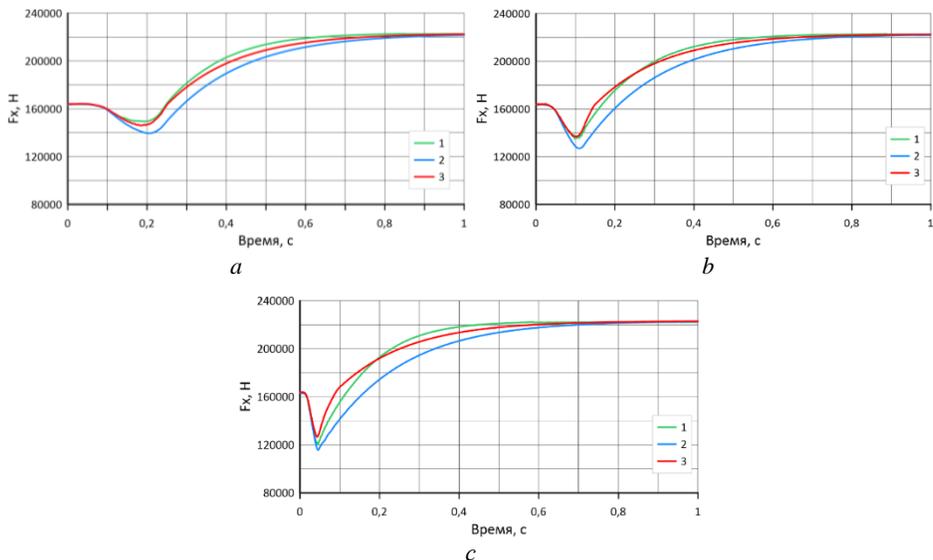


Рис. 10. Тяга F_x по внутренней поверхности двигателя для состава топлива «Тип 1» при регулировании с режима минимальной тяги на режим максимальной тяги со скоростью регулирования: 1 м/с (a), 2 м/с (b), 5 м/с (c) для конфигураций: 1 – «Цилиндр 0.3 м»; 2 – «Цилиндр 0.2 м»; 3 – «Зонт»

Fig. 10. Thrust F_x along the internal surface of the engine for the “Type 1” propellant during throttling from the minimum to the maximum thrust mode at a throttling rate of (a) 1, (b) 2, and (c) 5 m/s for the following configurations: (1) “Cylinder 0.3 m”, (2) “Cylinder 0.2 m”, and (3) “Umbrella”

Максимальное время переходного процесса на всех режимах регулирования наблюдается для конфигурации «Цилиндр 0.2 м». Так, при регулировании с режима минимальной тяги на режим максимальной тяги при скорости регулирования 1 м/с время переходного процесса для достижения 95% тяги составляло: 0.46 с –

для конфигурации «Цилиндр 0.3 м»; 0.53 с – для конфигурации «Зонт», 0.6 с – для конфигурации «Цилиндр 0.2 м».

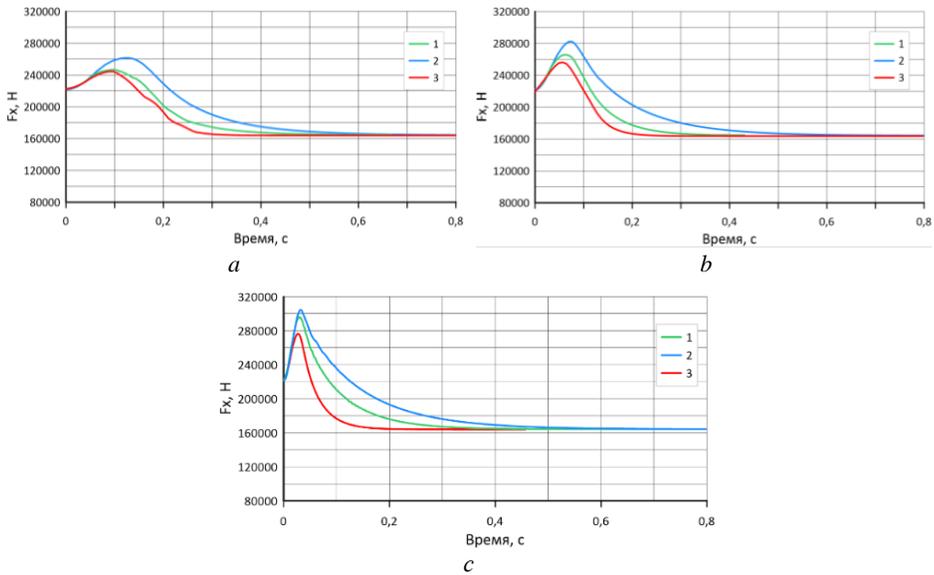


Рис. 11. Тяга F_x по внутренней поверхности двигателя для состава топлива «Тип 1» при регулировании с режима максимальной тяги на режим минимальной тяги со скоростью регулирования: 1 м/с (а), 2 м/с (б), 5 м/с (с) для конфигураций: 1 – «Цилиндр 0.3 м», 2 – «Цилиндр 0.2 м», 3 – «Зонт»

Fig. 11. Thrust F_x along the internal surface of the engine for the “Type 1” propellant during throttling from the maximum to the minimum thrust mode at a throttling rate of (a) 1, (b) 2, and (c) 5 m/s for the following configurations: (1) “Cylinder 0.3 m”, (2) “Cylinder 0.2 m”, and (3) “Umbrella”

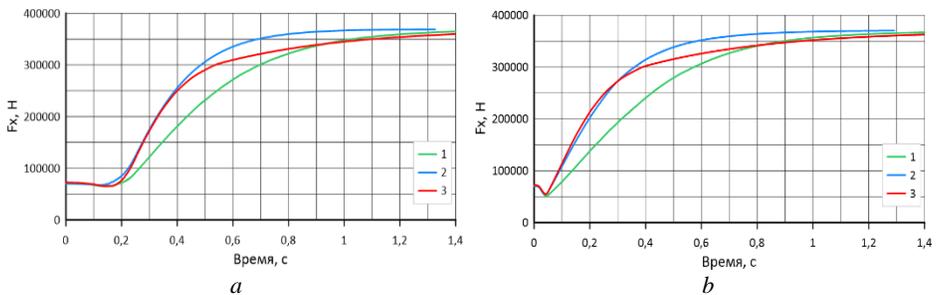


Рис. 12. Тяга F_x по внутренней поверхности двигателя для состава топлива HES при регулировании с режима минимальной тяги на режим максимальной тяги со скоростью регулирования: 1 м/с (а), 5 м/с (б) для конфигураций: 1 – «Цилиндр 0.3 м»; 2 – «Цилиндр 0.2 м»; 3 – «Зонт»

Fig. 12. Thrust F_x along the internal surface of the engine for the HES propellant during throttling from the minimum to the maximum thrust mode at a throttling rate of (a) 1 and (b) 5 m/s for the following configurations: (1) “Cylinder 0.3 m”, (2) “Cylinder 0.2 m”, and (3) “Umbrella”

На рис. 12 показан интеграл сил давления по внутренней поверхности двигателя для скорости регулирования 1 и 5 м/с с составом ТТ НЕС при регулировании с режима минимальной тяги на режим максимальной тяги, а на рис. 13 – при регулировании с режима максимальной тяги на режим минимальной тяги. Видно, что в отличие от результатов, полученных для модельного состава топлива «Тип 1», минимальный заброс тяги и минимальное время переходного процесса при регулировании с режима минимальной тяги на режим максимальной тяги наблюдаются для конфигурации «Цилиндр 0.2 м». При режиме регулирования с максимальной тяги на режим минимальной тяги минимальная величина заброса тяги соответствует конфигурации «Зонт», однако минимальное время переходного процесса наблюдается для конфигурации «Цилиндр 0.2 м», в то время как конфигурация «Зонт» соответствует максимальной длительности переходного процесса.

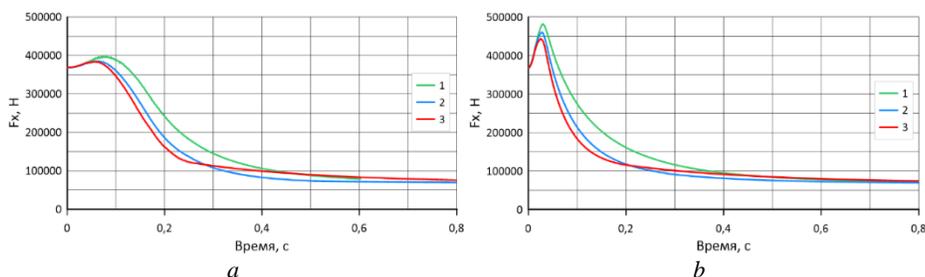


Рис. 13. Тяга F_x по внутренней поверхности двигателя для состава топлива НЕС при регулировании с режима максимальной тяги на режим минимальной тяги со скоростью регулирования: 1 м/с (а), 5 м/с (б)

для конфигураций: 1 – «Цилиндр 0.3 м», 2 – «Цилиндр 0.2 м», 3 – «Зонт»
Fig. 13. Thrust F_x along the internal surface of the engine for the HES propellant during throttling from the maximum to the minimum thrust mode at a throttling rate of (a) 1 and (b) 5 m/s for the following configurations: (1) “Cylinder 0.3 m”, (2) “Cylinder 0.2 m”, and (3) “Umbrella”

Для всех рассматриваемых конфигураций с увеличением скорости регулирования повышается величина забросов тяги. Время переходного процесса при регулировании с режима максимальной тяги на режим минимальной тяги меньше, чем при регулировании с режима минимальной тяги на режим максимальной тяги.

Заключение

Проведены численные исследования нестационарных течений продуктов сгорания в осесимметричных регулируемых РДТТ для трех конфигураций двигателей с одинаковой площадью поверхности горения. Расчеты проводились для двух составов топлив. В расчетах варьировала скорость движения исполняющего элемента регулятора расхода. Получено, что для всех рассматриваемых конфигураций с увеличением скорости регулирования повышается величина забросов тяги, а продолжительность переходного процесса уменьшается. Время переходного процесса, при регулировании с режима максимальной тяги на режим минимальной тяги в 2–2.5 раза меньше, чем при регулировании с режима минимальной тяги на режим максимальной тяги. Показано, что максимальное отличие величины

заброса тяги между расчетными конфигурациями при постоянной скорости регулирования составляет 5.5–7% от уровня тяги на начальном режиме.

Список источников

1. Губертов А.М., Миронов В.В., Борисов Д.М. и др. Газодинамические и теплофизические процессы в ракетных двигателях твердого топлива / под ред. А.С. Коротеева. М.: Машиностроение, 2004. 511 с.
2. Липанов А.М., Алиев А.В. Проектирование ракетных двигателей твердого топлива. М.: Машиностроение, 1995. 400 с.
3. Петренко В.И., Попов В.Л., Русак А.М., Феофилактов В.И. РДТТ с регулируемым модулем тяги. Миасс: ГРЦ «КБ им. акад. В.П. Макеева», 1994. 245 с.
4. Зезин В.Г., Петренко В.И., Попов В.Л. и др. Регулируемые твердотопливные двигательные установки. Миасс: ГРЦ «КБ им. акад. В. П. Макеева», 1996. 295 с.
5. Алиев А.В., Мищенко О.В., Черепов И.В. Нестационарные внутрикамерные процессы в твердотопливных регулируемых двигательных установках // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2016. № 4 (109). С. 24–39.
6. Бачурин А.Б., Русак А.М., Целищев В.А. Экспериментальные и теоретические исследования особенностей течения в регулируемых соплах с центральным телом // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. 2010. Т. 14, № 5 (40). С. 52–61.
7. Кирюшкин А.Е., Миньков Л.Л. Моделирование внутрикамерных процессов в ракетном двигателе на твердом топливе с учетом движения поверхности горения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 71. С. 90–105. doi: 10.17223/19988621/71/8
8. Бачурин А.Б., Литвинов Е.С., Стрельников Е.В., Целищев В.А. Система автоматического регулирования давления в камере сгорания РДТТ // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. 2013. Т. 17, № 3 (56). С. 26–33.
9. Смородинов А.П., Целищев В.А. Ракетный двигатель твердого топлива многократного включения с двумя подсистемами регулирования // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. 2010. Т. 14, № 1 (36). С. 3–10.
10. Кривошеев И.А., Целищев В.А., Бачурин А.Б., Стрельников Е.В. Опыт разработки комбинированного РДТТ многократного включения // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. 2012. Т. 16, № 2 (47). С. 174–188.
11. Бобылев В.М. Ракетный двигатель твердого топлива как средство управления движением ракет. М.: Машиностроение, 1992. 160 с.
12. Бабкин А.И., Белов С.И., Рutowский Н.Б., Соловьев Е.В. Основы теории управления ракетными двигательными установками. М.: Машиностроение, 1986. 456 с.
13. Петренко В.И. Управляемые энергетические установки на твердом ракетном топливе: учеб. пособие. М.: Машиностроение, 2003. 464 с.
14. Кимяев А.А., Петренко В.И., Попов В.Л., Ярушин С.Г. Регулируемые энергетические установки на твердом ракетном топливе. Пермь: Пермский гос. техн. ун-т, 1999. 168 с.
15. Кирюшкин А.Е., Миньков Л.Л. Параллельная реализация решения сопряженной задачи определения внутриваллистических характеристик двигателей на твердом топливе // Компьютерные исследования и моделирование. 2021. № 1 (13). С. 47–65. doi: 10.20537/2076-7633-2021-13-1-47-65
16. Костюшин К.В. Численное исследование нестационарных газодинамических процессов при старте твердотопливных ракет // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 67. С. 127–143. doi: 10.17223/19988621/67/12
17. Шишков А.А., Панин С.Д., Румянцев Б.В. Рабочие процессы в РДТТ. М.: Машиностроение, 1989. 240 с.

18. Shewchuk J.R. Delaunay Refinement Algorithms for Triangular Mesh Generation // Computational Geometry. 2002. V. 22, is. 1. P. 21–74.
19. Shamos M.I., Hoey D. Geometric intersection problems // Proc. 17th Annual Symposium on Foundations of Computer Science. Houston, 1976. P. 208–215.
20. Lloyd E. On triangulation of a set of points in the plain // MIT Lab. Comp. Sc. Tech. Memo. 1977. № 88. P. 1–56.

References

1. Gubertov A.M., Mironov V.V., Borisov D.M. (2004) *Gazodinamicheskie i teplofizicheskie protsessy v raketnykh dvigatelyakh tverdogo topliva* [Gas-dynamic and thermophysical processes in solid-propellant rocket engines]. Moscow: Mashinostroenie.
2. Lipanov A.M., Aliev A.V. (1995) *Proektirovanie raketnykh dvigateley tverdogo topliva* [Design of solid-propellant rocket engines]. Moscow: Mashinostroenie.
3. Petrenko V.I., Popov V.L., Rusak A.M., Feofilaktov V.I. (1994) *RDTT s reguliruemym modulem tyagi* [Solid-propellant rocket motors with a controllable thrust module]. Miass: GRC "KB im. akad. V.P. Makeeva".
4. Zezin V.G., Petrenko V.I., Popov V.L., Rusak A.M., Savchenko V.I., Simonov E.A., Feofilaktov V.I. (1996) *Reguliruemye tverdotoplivnye dvigatel'nye ustanovki* [Controllable solid-propellant propulsion systems]. Miass: GRTS "KB im. akad. V.P. Makeeva".
5. Aliev A.V., Mishchenkova O.V., Cherepov I.V. (2016) Nestatsionarnye vnutrikamernye protsessy v tverdotoplivnykh reguliruemyykh dvigatel'nykh ustanovkakh [Unsteady in-chamber processes in solid-propellant throttled propulsion systems]. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N.E. Baumana. Seriya Mashinostroenie – Bauman Moscow State Technical University Bulletin. Mechanical Engineering Series*. 4(109). pp. 24–39.
6. Bachurin A.B., Rusak A.M., Tselishchev V.A. (2010) Eksperimental'nye i teoreticheskie issledovaniya osobennostey techeniya v reguliruemyykh soplakh s tsentral'nym telom [Experimental and theoretical studies of flow features in controllable nozzles with a central body]. *Vestnik Ufimskogo gosudarstvennogo aviatsionnogo tekhnicheskogo universiteta – Bulletin of Ufa State Aviation Technical University*. 14(5). pp. 52–61.
7. Kiryushkin A.E., Min'kov L.L. (2021) Modelirovanie vnutrikamernyykh protsessov v raketnom dvigatele na tverdom toplive s uchedom dvizheniya poverkhnosti goreniya [Modeling of in-chamber processes in a solid-propellant rocket motor accounting for burning-surface motion]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 71. pp. 90–105. doi: 10.17223/19988621/71/8
8. Bachurin A.B., Litvinov E.S., Strel'nikov E.V., Tselishchev V.A. (2013) Sistema avtomaticheskogo regulirovaniya davleniya v kamere sgoraniya RDTT [Automatic pressure control system in the combustion chamber of solid-propellant rocket engines]. *Vestnik Ufimskogo gosudarstvennogo aviatsionnogo tekhnicheskogo universiteta – Bulletin of Ufa State Aviation Technical University*. 17(3). pp. 26–33.
9. Smorodinov A.P., Tselishchev V.A. (2010) Raketnyy dvigatel' tverdogo topliva mnogokratnogo vklyucheniya s dvumya podsistemami regulirovaniya [Solid-propellant rocket motor with multiple ignitions and two control subsystems]. *Vestnik Ufimskogo gosudarstvennogo aviatsionnogo tekhnicheskogo universiteta – Bulletin of Ufa State Aviation Technical University*. 14(1). pp. 3–10.
10. Krivosheev I.A., Tselishchev V.A., Bachurin A.B., Strel'nikov E.V. (2012) Opyt razrabotki kombinirovannogo RDTT mnogokratnogo vklyucheniya [Experience in development of a combined re-ignitable solid-propellant rocket motor]. *Vestnik Ufimskogo gosudarstvennogo aviatsionnogo tekhnicheskogo universiteta – Bulletin of Ufa State Aviation Technical University*. 16(2). pp. 174–188.
11. Bobylev V.M. (1992) *Raketnyy dvigatel' tverdogo topliva kak sredstvo upravleniya dvizheniem raket* [Solid-propellant rocket engine as a means of controlling rocket motion]. Moscow: Mashinostroenie.

12. Babkin A.I., Belov S.I., Rutovskiy N.B., Solov'ev E.V. (1986) *Osnovy teorii upravleniya raketnymi dvigatel'nyimi ustanovkami* [Fundamentals of control theory for rocket propulsion systems]. Moscow: Mashinostroenie.
13. Petrenko V.I. (2003) *Upravlyaemye energeticheskie ustanovki na tverdom raketnom toplive* [Controllable powerplants on solid rocket propellant]. Moscow: Mashinostroenie.
14. Kimyaev A.A., Petrenko V.I., Popov V.L., Yarushin S.G. (1999) *Reguliruemye energeticheskie ustanovki na tverdom raketnom toplive* [Controllable powerplants on solid rocket propellant]. Perm: Perm State Technical University.
15. Kiryushkin A.E., Min'kov L.L. (2021) Parallel'naya realizatsiya resheniya sopryazhennoy zadachi opredeleniya vnutriballisticheskikh kharakteristik dvigateley na tverdom toplive [Parallel implementation of a coupled solution for determining intra-ballistic characteristics of solid-propellant engines]. *Komp'yuternye issledovaniya i modelirovanie – Computer Research and Modeling*. 1(13). pp. 47–65. doi: 10.20537/2076-7633-2021-13-1-47-65
16. Kostyushin K.V. (2020) Chislennoe issledovanie nestatsionarnykh gazodinamicheskikh protsessov pri starte tverdotoplivnykh raket [Numerical study of unsteady gas-dynamic processes during solid-propellant rocket start-up]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 67. pp. 127–143. doi: 10.17223/19988621/67/12
17. Shishkov A.A., Panin S.D., Rummyantsev B.V. (1989) *Rabochie protsessy v RDIT* [Working processes in solid-propellant rocket engines]. Moscow: Mashinostroenie.
18. Shewchuk J.R. (2002) Delaunay refinement algorithms for triangular mesh generation. *Computational Geometry*. 22(1-3). pp. 21–74. doi: 10.1016/S0925-7721(01)00047-5
19. Shamos M.I., Hoey D. (1976) Geometric intersection problems. *Proceedings of the 17th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, Houston*. pp. 208–215. doi: 10.1109/SFCS.1976.16
20. Lloyd E. (1977) On triangulation of a set of points in the plain. *Proceedings of the 18th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*. 88. pp. 1–56. doi: 10.1109/SFCS.1977.21

Сведения об авторах:

Костюшин Кирилл Владимирович – кандидат физико-математических наук, старший научный Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: kostushink@niipmm.tsu.ru
Глазунов Анатолий Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: gla@niipmm.tsu.ru
Ларкин Дмитрий Олегович – инженер-исследователь Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: d.m.i.t.r.y.l.a.r.k.i.n@mail.ru

Information about the authors:

Kostyushin Kirill V. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kostushink@niipmm.tsu.ru
Glazunov Anatoly A. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: gla@niipmm.tsu.ru
Larkin Dmitriy O. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: d.m.i.t.r.y.l.a.r.k.i.n@mail.ru

Статья поступила в редакцию 10.12.2025; принята к публикации 05.02.2026

The article was submitted 10.12.2025; accepted for publication 05.02.2026

Научная статья

УДК 533.6

doi: 10.17223/19988621/99/6

Численное исследование процесса метания инертных тел и определение характеристик их свободного механического движения

Илья Михайлович Тырышкин¹, Константин Николаевич Жильцов²,
Кирилл Владимирович Костюшин³, Иван Владимирович Еремин⁴,
Анатолий Алексеевич Глазунов⁵

^{1, 2, 3, 4, 5} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ tyryshkin@niipmm.tsu.ru

² konstantin@niipmm.tsu.ru

³ kostushink@niipmm.tsu.ru

⁴ iveremin@niipmm.tsu.ru

⁵ gla@niipmm.tsu.ru

Аннотация. Представлены результаты численного исследования метания инертного твердого тела под углом к горизонту при воздействии внешних газодинамических сил. Движение тела определяется с учетом его геометрических размеров, массы и массопроцентных характеристик. Предложены математическая модель и методика расчета, которая позволяет определять силы, действующие на тело, момент вращения относительно его центра масс, угловые скорости и ускорения. Представлены результаты моделирования движения тела в плоской нестационарной постановке для различных углов метания и массопроцентных характеристик тела.

Ключевые слова: газовая динамика, математическое моделирование, траектория, угловое положение тела

Благодарности: Работа выполнена в рамках проекта Минобрнауки РФ № FSWM-2025-0004.

Для цитирования: Тырышкин И.М., Жильцов К.Н., Костюшин К.В., Еремин И.В., Глазунов А.А. Численное исследование процесса метания инертных тел и определение характеристик их свободного механического движения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2026. № 99. С. 77–92. doi: 10.17223/19988621/99/6

Numerical investigation of the launching process for inert bodies and determination of free mechanical motion characteristics

И'ya M. Tyryshkin¹, Konstantin N. Zhil'tsov², Kirill V. Kostyushin³,
Ivan V. Eremin⁴, Anatoliy A. Glazunov⁵

^{1, 2, 3, 4, 5} Tomsk State University, Tomsk, Tomsk, Russian Federation

¹ tyryshkin@niipmm.tsu.ru

² konstantin@niipmm.tsu.ru

³ kostushink@niipmm.tsu.ru

⁴ iveremin@niipmm.tsu.ru

⁵ gla@niipmm.tsu.ru

Abstract. This paper presents the results of a numerical study of the body launching at an angle to the horizon under external gas-dynamic forces. The motion of the body is determined considering its geometric dimensions, mass, and mass-centering characteristics. A mathematical model and a computational methodology are proposed for determining the forces acting on the body and their points of application, the body torque relative to its center of mass, as well as the angular velocities and angular accelerations of the body. Based on this methodology, an original user-defined code has been developed for the ANSYS Fluent software package using the C programming language. This paper presents the results of numerical simulation of the symmetric rectangular body motion in a two-dimensional unsteady formulation for various initial launch angles and different mass-center configurations of the body.

Keywords: gas dynamics, mathematical modeling, trajectory, angular position of the body

Acknowledgments: This work was carried out within the framework of the project of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project No. FSWM-2025-0004).

For citation: Tyryshkin, I.M., Zhil'tsov, K.N., Kostyushin, K.V., Eremin, I.V., Glazunov, A.A. (2026) Numerical investigation of the launching process for inert bodies and determination of free mechanical motion characteristics. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 99. pp. 77–92. doi: 10.17223/19988621/99/6

Введение

Исследование движения тел в среде – газе или жидкости – представляет собой отдельный класс задач внешней газо- и гидродинамики. Геометрия и массосредоточенные характеристики тела, свойства среды и структура обтекания, скорость движения и положение тела в пространстве – все эти факторы влияют на динамику тела [1].

Современные достижения в области вычислительной техники и численных методов позволяют проводить численные исследования пространственных задач внешней газо- и гидродинамики с учетом сложной геометрии обтекаемых тел, что

существенно повышает эффективность проектирования. Такой подход требует применения сложных моделей движения тела с учетом влияния внешних сил, а также предъявляет серьезные требования к вычислительным ресурсам, детальности подготовки модели и созданию качественной расчетной сетки [2], особенно в случае использования прикладных пакетов программ.

В настоящее время задачи моделирования движения тела под действием внешних сил рассматривают в трехмерном приближении в условиях стационарности или квазистационарности, что позволяет получить подробную картину обтекания, но не дает представления о изменении характера поведения тела со временем с учетом изменения внешних активных сил, приложенных к метаемому телу. Как правило, движение тела моделируют с учетом наличия плоскостей и осей симметрии в плоской или осесимметричной постановках. Можно отметить работу [3], в которой проведено пространственное моделирование задачи обтекания летательного аппарата под различными углами атаки в рамках квазистационарного приближения. В результате получены параметры аэродинамики тела под различными углами атаки. Большинство работ представляет двумерное приближение с рядом допущений. Так, в работах [4–7] изложены подходы по определению характеристик поступательного движения тел при шахтном пуске. В данных работах учитываются нагрузки на тело и его перемещение по шахте и на небольшом участке траектории, но не учитывается вращательное движение, которое может привести к отклонению траектории. В работе [8] представлены результаты численного моделирования поступательного и вращательного движения тел с учетом влияния внешних аэродинамических сил и реактивной силы самого тела. Но в данной работе расчеты проводятся в рамках модели материальной точки, а форма тел учитывается через заранее вычисленный коэффициент сопротивления. В работе [9] численно получены результаты моделирования полета пули. Моделирование проводится в осесимметричной постановке. Из представленного анализа литературы можно сделать вывод, что в настоящее время недостаточно работ по исследованию кинематических характеристик метаемого тела (МТ) в условиях свободного механического движения.

Цель настоящей работы – исследование нестационарного характера движения МТ в атмосфере у поверхности Земли, разработка методики численного исследования нестационарных газодинамических процессов и кинематических характеристик движения тела в газе под действием внешних газодинамических сил с учетом составляющих поступательного и вращательного движения, а также собственных моментов инерции тела и его массоцентровочных характеристик.

Физико-математическая постановка задачи

Рассматривается движение твердого тела, имеющего форму параллелепипеда, в газе в условиях земной атмосферы под различными начальными углами метания относительно горизонта. Тело начинает строго поступательное движение из состояния покоя с ускорением, имитируя вылет из пусковой установки под действием внешних газодинамических сил. В момент времени t_1 тело приобретает скорость $V = 100$ м/с, после чего движется свободно по траектории. С учетом массоцентровочных характеристик тело совершает поступательное и вращательное движение. Моделирование нестационарной задачи газовой динамики для сжимаемой среды

проводится на основе системы осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса, уравнения неразрывности, уравнения энергии и уравнения состояния идеального газа [10]. Система уравнений газовой динамики замыкается двухпараметрической моделью турбулентности $k-\varepsilon$ [11] и уравнениями движения тела заданной формы.

Для определения пространственных кинематических характеристик движения МТ (дальность, скорость, перегрузки, угловое положение) уравнения движения точек твердого тела под действием внешних сил в общем виде записываются следующим образом [12]:

$$m \left(\frac{d\vec{V}}{dt} \right) = \vec{F}, \quad \frac{d[\mathbf{I}\vec{\omega}]}{dt} = \vec{M}, \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a}, \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}, \quad (2)$$

где: m – масса МТ, \mathbf{I} – тензор инерции, \vec{V} и $\vec{\omega}$ – поступательная и угловая скорости движения центра масс МТ, \vec{a} и $\vec{\varepsilon}$ – ускорения поступательного и вращательного движений, \vec{F} и \vec{M} – соответственно результирующие внешних сил и моментов сил, действующих на МТ.

Для определения перемещения центра масс и углового положения тела используются следующие соотношения:

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{V}, \quad \frac{d\vec{\theta}}{dt} = \vec{\omega}. \quad (3)$$

Результирующая внешних аэродинамических сил, приложенных к телу, имеет вид:

$$\vec{F} = \vec{F}_A^{\text{тп}} + \vec{F}_A^p + \vec{F}_g, \quad (4)$$

где: $\vec{F}_A^{\text{тп}}$ – сила сопротивления, обусловленная взаимодействием потока газа с поверхностью обтекаемого тела; \vec{F}_A^p – сила сопротивления давления, определяемая распределением давления по поверхности обтекаемого тела; \vec{F}_g – сила тяжести.

Результирующий момент внешних сил, действующих на МТ, имеет вид:

$$\vec{M} = \vec{M}_A, \quad (5)$$

\vec{M}_A – момент силы сопротивления $\vec{F}_A = \vec{F}_A^{\text{тп}} + \vec{F}_A^p$ относительно ЦМ, действующей на МТ.

Переносная скорость кинетического момента твердого тела $[\mathbf{I}\vec{\omega}]$ в уравнении (1) обусловлена вращением связанного с телом базиса:

$$[\mathbf{I}\vec{\omega}] = \begin{cases} I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z, \\ I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z, \\ I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z. \end{cases} \quad (6)$$

Для связи тензора инерции с положением МТ в пространстве при повороте МТ относительно центра масс (ЦМ) запишем его матричное преобразование

$$\mathbf{I} = \mathbf{A} \mathbf{I}_C \mathbf{A}^T, \quad (7)$$

где: \mathbf{A} и \mathbf{A}^T – соответственно матрица вращения (матрица ориентации) и транспонированная матрица вращения, состоящие из последовательности поворотов вокруг осей координатной системы, \mathbf{I}_C – тензор инерции МТ относительно центрального базиса, связанного с ЦМ МТ.

Если представить производную вектора скорости по времени в разностном виде, то уравнение (1) для \vec{F} в проекциях на оси связанной с телом системы координат можно представить как систему кинематических уравнений относительно V_x^{n+1} , V_y^{n+1} , V_z^{n+1} :

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{\Delta t}\right)V_x^{n+1} + (0)V_y^{n+1} + (0)V_z^{n+1} = \frac{1}{\Delta t}V_x^n + \frac{1}{m}F_x^n, \\ (0)V_x^{n+1} + \left(\frac{1}{\Delta t}\right)V_y^{n+1} + (0)V_z^{n+1} = \frac{1}{\Delta t}V_y^n + \frac{1}{m}F_y^n, \\ (0)V_x^{n+1} + (0)V_y^{n+1} + \left(\frac{1}{\Delta t}\right)V_z^{n+1} = \frac{1}{\Delta t}V_z^n + \frac{1}{m}F_z^n. \end{cases} \quad (8)$$

Проводя аналогичные операции для уравнения (1) для \vec{M} , получим систему динамических уравнений Эйлера в разностном виде относительно K_x^{n+1} , K_y^{n+1} , K_z^{n+1} в проекциях на оси связанной с телом системы координат:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{\Delta t}\right)K_x^{n+1} + (0)K_y^{n+1} + (0)K_z^{n+1} = \frac{1}{\Delta t}K_x^n + M_x^n, \\ (0)K_x^{n+1} + \left(\frac{1}{\Delta t}\right)K_y^{n+1} + (0)K_z^{n+1} = \frac{1}{\Delta t}K_y^n + M_y^n, \\ (0)K_x^{n+1} + (0)K_y^{n+1} + \left(\frac{1}{\Delta t}\right)K_z^{n+1} = \frac{1}{\Delta t}K_z^n + M_z^n. \end{cases} \quad (9)$$

где $K = [\mathbf{I}\vec{\omega}]$.

Для связи угловой скорости твердого тела относительно центра масс с моментом внешних сил, действующих на него, записывается система уравнений

$$\begin{cases} I_{xx}\omega_x^{n+1} + I_{xy}\omega_y^{n+1} + I_{xz}\omega_z^{n+1} \\ I_{yx}\omega_x^{n+1} + I_{yy}\omega_y^{n+1} + I_{yz}\omega_z^{n+1} \\ I_{zx}\omega_x^{n+1} + I_{zy}\omega_y^{n+1} + I_{zz}\omega_z^{n+1} \end{cases} = \begin{cases} K_x^{n+1}, \\ K_y^{n+1}, \\ K_z^{n+1}. \end{cases} \quad (10)$$

Системы уравнений (8)–(10) образуют замкнутую систему уравнений, описывающую динамику поступательного и вращательного движения твердого тела под действием приложенных внешних сил и моментов. Совместное интегрирование уравнений позволяет определить траекторные параметры движения МТ.

Система трехмерных уравнений (1)–(3) и ее разностный аналог (8)–(10) легко сводятся к двумерному (плоскому или осесимметричному) случаю с учетом соответствующих компонент векторов в рассматриваемых направлениях, например в плоскости Oxy .

Методика расчета

Задача о движении тела в газе в полной пространственной постановке с учетом геометрии МТ является достаточно трудоемкой, требующей большого количества вычислительных ресурсов и физического времени счета. В данной работе исследование динамики изменения характеристик движения тела проводилось в плоской постановке на основе системы уравнений (8)–(10). МТ имеет форму прямоугольника и характеризуется такими параметрами, как масса, расположение ЦМ на пересечении плоскостей симметрии, длина L , высота B , собственные моменты инерции. Схема расчетной области представлена на рис. 1. В системе координат Ox_0y_0 определяется угловое положение МТ относительно горизонта с учетом действия силы тяжести. Система координат Ox_1y_1 – неподвижная стартовая система координат, в которой ось Ox_1 направлена вдоль плоскости симметрии МТ и определяет начальный угол атаки тела к горизонту.

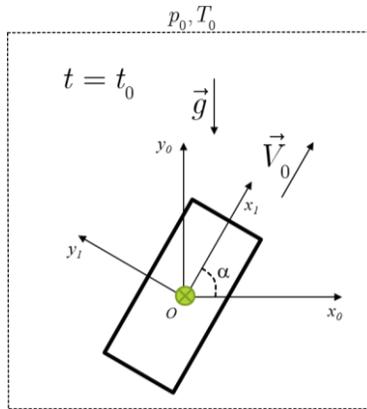


Рис. 1. Схема расчетной области

Fig. 1. Schematic diagram of a computational domain

Для решения задачи на внешних границах расчетной области задаются мягкие граничные условия; на твердых стенках МТ, которые являются гладкими непроницаемыми стенками, ставятся условия прилипания. В начальный момент времени для тела задаются скорость $\vec{V}_{x_1} = \vec{V}_{x_1}(t)$ и начальное положение тела относительно горизонта α .

При реализации методики расчета в рамках плоской постановки введен параметр «виртуальной ширины» («глубины» по оси Oz) тела H , который используется для определения интегралов сил давления. При определении нагрузок интеграл аэродинамической силы, полученный по стенкам, при пересчете домножается на соответствующий множитель площади поверхности, рассчитанной для заданной виртуальной ширины.

Для практической реализации и проведения параметрических численных исследований используется программный комплекс ANSYS Fluent. На языке Си написан авторский программный код, который реализует методику (1)–(10) расчета движения МТ. Программный код встраивается в программный комплекс

ANSYS Fluent с помощью пользовательских функций *UDF*. Авторский программный код позволяет расширить возможности программного комплекса расчета газовой динамики и проводить численные исследования взаимодействия газа с твердым телом в нестационарной постановке с учетом массосцентрированных характеристик МТ.

Математическое моделирование задачи движения МТ под действием внешних аэродинамических сил реализовано с привлечением технологий и алгоритмов расчета на основе динамических расчетных сеток типа «химера» на базе модуля *Overset*. Основная расчетная сетка покрывает всю расчетную область, в то время как метаемое тело связано с локальной вложенной подвижной сеткой, которая перемещается и поворачивается совместно с телом. Перестроение расчетных сеток происходит на каждом шаге по времени с учетом поступательной и угловой скорости, получаемой МТ от внешних газодинамических сил. Связывание сеток и полученных при расчете значений происходит за счет интерполяции из ячеек основной сетки на вложенную сетку (и в обратном направлении) в области перекрытия небольших областей сеток друг с другом.

Для расчета уравнений неразрывности, момента импульса и энергии используется решатель SIMPLE. Применяемые разностные схемы имеют второй порядок точности по пространству и первый порядок по времени, поскольку модуль динамических сеток *Overset* неприменим для использования разностных схем более высокого порядка по времени. Методические расчеты проводились с шагом интегрирования по времени, равном $1 \cdot 10^{-6}$ с.

Валидация и верификация

На этапе отработки методики расчета для прямоугольного параллелепипеда проведены тесты на сеточную сходимость путем решения стационарной задачи обтекания тела потоком воздуха с постоянной скоростью: $V = 100$ м/с = const, $p_{atm} = 101325$ Па. Во всех расчетах использовалась структурированная неподвижная расчетная сетка с шагом 2 мм по координатам X и Y . Вложенная подвижная расчетная область, связанная с МТ, покрывалась неструктурированной расчетной сеткой со сгущением в окрестности стенок тела. Шаг подвижной расчетной сетки по осям X и Y в окрестности стенок метаемого тела представлен в таблице. Для оптимального использования вычислительных ресурсов проводилось разрежение подвижной расчетной сетки таким образом, чтобы в области перекрытия расчетных сеток шаг составлял 2 мм. Использовалась последовательность расчетных сеток, где каждая последующая расчетная сетка формировалась путем уменьшения характерного шага ячейки в окрестности метаемого тела в 2 раза, а минимальный шаг сетки в окрестности МТ был принят равным 0.1 мм. Результаты тестов на сеточную сходимость представлены в таблице 1.

Валидация математической модели для угла атаки тела $\alpha = 0^\circ$ проводилась в сравнении с известными формулами расчета величин подъемной силы и силы лобового сопротивления, действующих на тело [12]:

$$F_x = C_x \frac{\rho V_x^2}{2} S, \quad F_y = C_y \frac{\rho V_y^2}{2} S. \quad (11)$$

где C_x и C_y – безразмерные коэффициенты сопротивления.

Безразмерные коэффициенты C_x и C_y получены из экспериментальных данных при обдуве тел прямоугольной формы различного удлинения. Так, коэффициент сопротивления при дозвуковых скоростях от $0.3 M$ для подобных тел составляет $C_x = 1.2$, а коэффициент подъемной силы при угле атаки тела $\alpha = 0^\circ$ $C_y = 0.015$ [13]. При расчете с использованием формул (11) для представленных коэффициентов обтекания значения $F_x \approx 57$ Н и $F_y \approx 3$ Н. Результаты валидации представлены в таблице.

Результаты сходимости расчетной сетки

Сетки	Параметры		Расчетная F_x , Н	Расчетная F_y , Н	Ур. (11) F_x , Н	Ур. (11) F_y , Н
	Кол-во ячеек	Размер ячейки, мм				
Сетка X1	31 000	2.0	60.5	5.3	~57.0	~3.0
Сетка X2	37 000	1.0	64.0	4.1		
Сетка X3	64 000	0.5	54.7	3.9		
Сетка X4	126 000	0.25	49.2	3.6		
Сетка X5	447 000	0.1	48.0	2.8		

Из таблицы видно, что в случае сгущения расчетной сетки в 3 этапа шаг сетки в области поверхности МТ составляет 0.25 мм, что позволяет с достаточной точностью и сходимостью определять величину внешних аэродинамических сил и моментов, приложенных к МТ.

Результаты расчетов

Проведено исследование динамики изменения характеристик движения плоского инертного тела прямоугольной формы в воздухе с учетом сил тяжести. Масса тела 3 кг, длина тела $L = 0.222$ м, высота тела $B = 0.0506$ м, виртуальная ширина тела $H = 0.153$ м. Варьировал угол атаки при метании МТ относительно горизонта: $\alpha = 0, 30, 60, 90^\circ$. Исследование динамики изменения характеристик движения рассматривалось на дистанции 70 м в проекции перемещения центра масс метаемого тела на ось Ox_1 . Начальная скорость тела V за время t_1 увеличивается от 0 до 100 м/с.

На рис. 2 представлены характерные поля скорости в результате численного моделирования движения прямоугольного тела в среде в различные моменты времени, для $\alpha = 60^\circ$. В момент времени t_1 , когда тело достигает скорости $V = 100$ м/с, картина обтекания еще не сформировалась. Структура обтекания продолжает формироваться в последующие моменты времени t_2 и t_3 . В моменты t_4 и t_5 видно, как изменяется характер обтекания при изменении направления вращения тела. В момент t_6 тело поворачивается поперек потока, за ним возникает вихревая зона, а сила сопротивления в данный момент максимальна. В моменты времени t_7 и t_8 тело развернулось на 180° , но картина обтекания отличается от аналогичных положений тела, полученных в моменты времени t_4 и t_5 . В данные моменты времени тело имеет существенную поперечную скорость порядка 6 м/с, соответственно, результирующая скорость направлена уже не вдоль направления начального движения тела. В моменты времени t_9 и t_{10} тело завершает полный оборот вокруг своей оси.

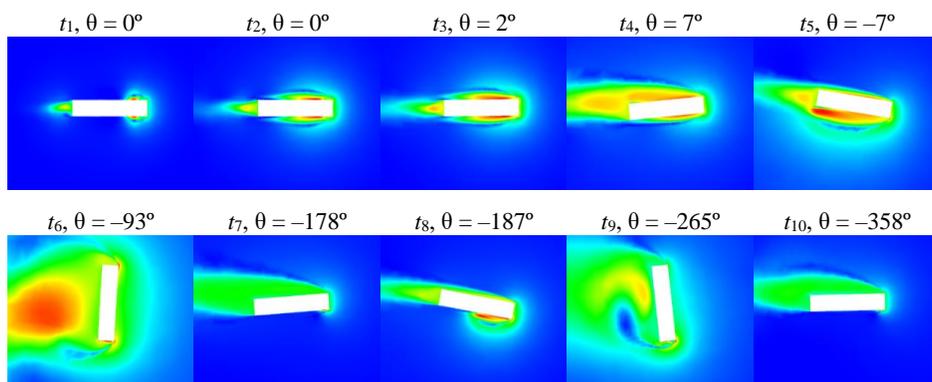


Рис. 2. Поля магнитуды скоростей газа в различные моменты времени движения МТ, $\alpha = 60^\circ$

Fig. 2. Velocity magnitude fields of gas at different time instants during the body motion at $\alpha = 60^\circ$

На рис. 3 представлены графики изменения составляющих скорости U_x и U_y центра масс тела, метаемого под различными углами к горизонту. На рис. 4, *a* показана динамика изменения от дистанции относительного угла поворота МТ вокруг своей оси. На рис. 4, *b* представлены графики перемещения центра масс тела в системе координат Ox_1y_1 в зависимости от дистанции. Из графиков на рис. 3, 4 видно, что МТ под действием внешних аэродинамических сил на дистанции $x = 70$ м теряет половину начальной скорости (см. рис. 3, *a*). За счет действия на тело силы тяжести оно приобретает ускорение по оси Oy_1 (см. рис. 3, *b*), а траектория движения приобретает характерный параболический вид (см. рис. 4, *b*). Колебательный процесс изменения составляющих скорости объясняется вращением тел (см. рис. 4, *a*).

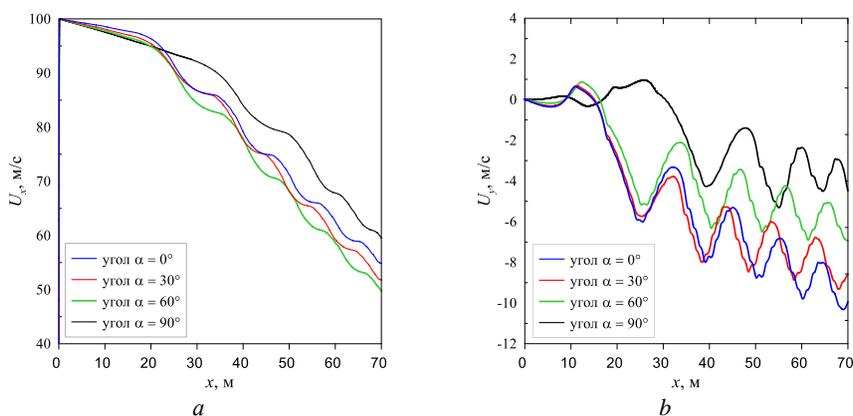


Рис. 3. Поступательная продольная скорость по оси Ox_1 (*a*) и поступательная поперечная скорость по оси Oy_1 (*b*) метаемого тела в зависимости от дистанции

Fig. 3. (*a*) Longitudinal (Ox_1 -axis) and (*b*) transverse (Oy_1 -axis) translational velocities of the body as a function of distance

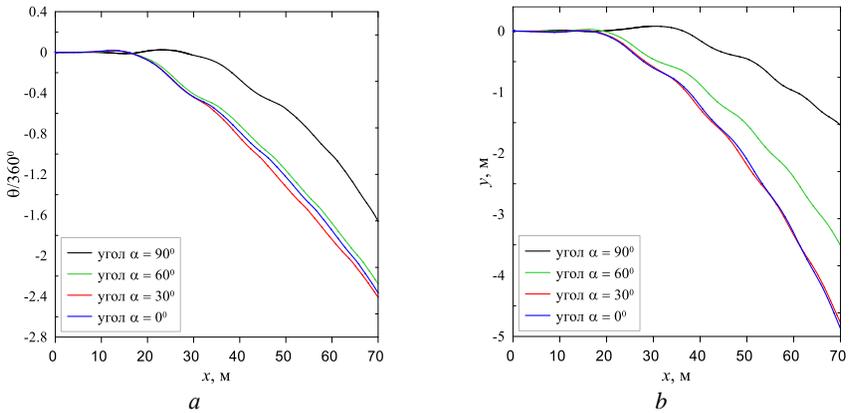


Рис. 4. Угол поворота тела в сечении тангажа (а) и перемещение центра масс ПЭ в системе координат Ox_1y_1 (b)

Fig. 4. (a) Body rotation angle in the pitch plane and (b) displacement of the body center of mass in Ox_1y_1 -coordinate system

Стоит отметить, что при угле атаки $\alpha = 90^\circ$ сила тяжести направлена строго в продольном направлении МТ, таким образом, отклонения тела в поперечном направлении могут быть равновероятны. Полученный в данной работе результат является следствием представленной методики метания МТ, при которой структура обтекания в момент начала свободного движения является несимметричной, что приводит впоследствии к возникновению неравномерного распределения поперечных сил и возникновению поперечной скорости ЦМ МТ.

На рис. 5 представлены графики изменения результирующей аэродинамической силы, действующей на центр масс тела, в зависимости от дистанции. На рис. 6 изображены графики изменения момента аэродинамической силы, действующей на центр масс тела, в зависимости от дистанции. Рисунок 7 демонстрирует графики изменения угловой скорости тела в зависимости от дистанции. Из графиков на рис. 5–7 видно, что сила аэродинамического сопротивления (см. рис. 5, а) всегда имеет отрицательную величину, при этом экстремум достигается в моменты, когда тело разворачивается к потоку под углом в $\theta = 90$ и 270° . Подъемная сила имеет как отрицательный, так и положительный экстремумы (см. рис. 5, б), поскольку при вращении формируется нестационарная картина обтекания, при которой возникают области перепада давления, приводящие к возникновению подъемной силы.

Изменения угловой скорости и момента вращения (см. рис. 6, 7) показывают, что МТ осуществляют вращение в одну сторону, при этом торможение тела приводит к затуханию колебаний угловой скорости и возникновению положительного момента вращения, который, однако, не способен привести к изменению направления вращения.

Из рассмотренных случаев начального угла положения тела относительно горизонта только тело, запущенное вертикально, показывает отличия на начальном этапе движения. В данном случае тело сохраняет устойчивость прямолинейного движения на большей дистанции. Как только тело теряет устойчивость, характер его движения повторяет характер поведения остальных рассмотренных тел.

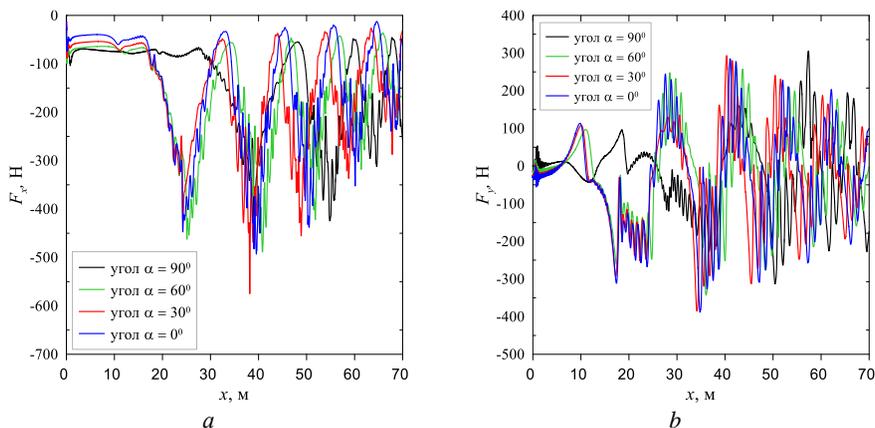


Рис. 5. Составляющая аэродинамической силы по оси Ox_1 (a) и составляющая аэродинамической силы по оси Oy_1 (б)

Fig. 5. Components of the aerodynamic force along: (a) Ox_1 - and (b) Oy_1 -axis

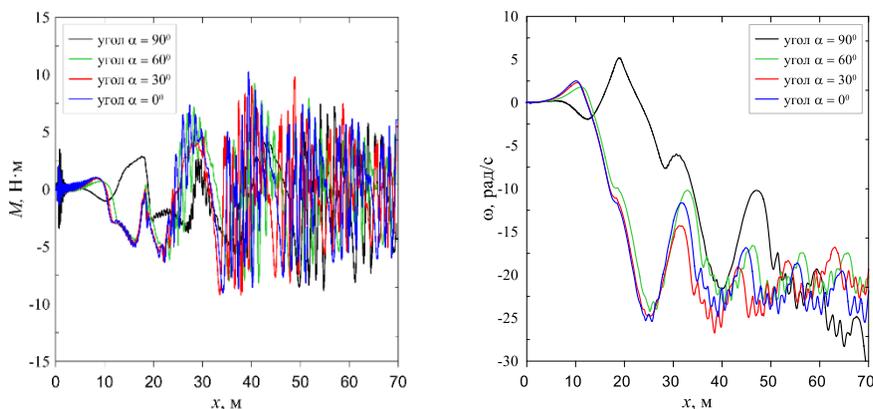


Рис. 6. Момент вращения центра масс метаемого тела в зависимости от пройденной дистанции

Рис. 6. Variation of the center-of-mass torque of the launched body with distance

Рис. 7. Угловая скорость метаемого тела в зависимости от пройденной дистанции

Рис. 7. Variation of the body's angular velocity with distance

Реальное метаемое тело представляет собой элемент, состоящий из нескольких составных частей, которые, в свою очередь, являются материалами с отличающимися друг от друга свойствами, а также тело может иметь неоднородную форму и несимметричную конструкцию. В таком случае необходимо определять положение центра масс таких тел и собственные моменты инерции, поскольку эти параметры могут существенно влиять на угловое положение тела на траектории. Анализ влияния неоднородности метаемого тела проводился из предположения, что центр масс МТ, рассматриваемого в данной статье, располагается ближе к кормовой части, где $C_1 = 1/4L$, а в обратном случае – в лобовой части, $C_2 = 3/4L$ (рис. 8). Тела с измененным центром масс располагались под углом к горизонту $\alpha = 60^\circ$.

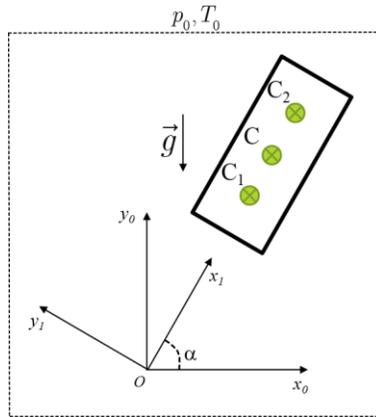


Рис. 8. Схема расположения центров масс МТ
Fig. 8. Arrangement diagram for the body's centers of mass

На рис. 9 приведены графики изменения составляющих скорости для метаемых тел в сравнении с телом, в котором центр масс расположен симметрично. На рис. 10, *a* представлены графики изменения угла поворота тел с измененными центрами масс в зависимости от дистанции, на рис. 10, *b* – графики перемещения центра масс тел в стартовой системе координат в сравнении с телом, в котором центр масс расположен симметрично.

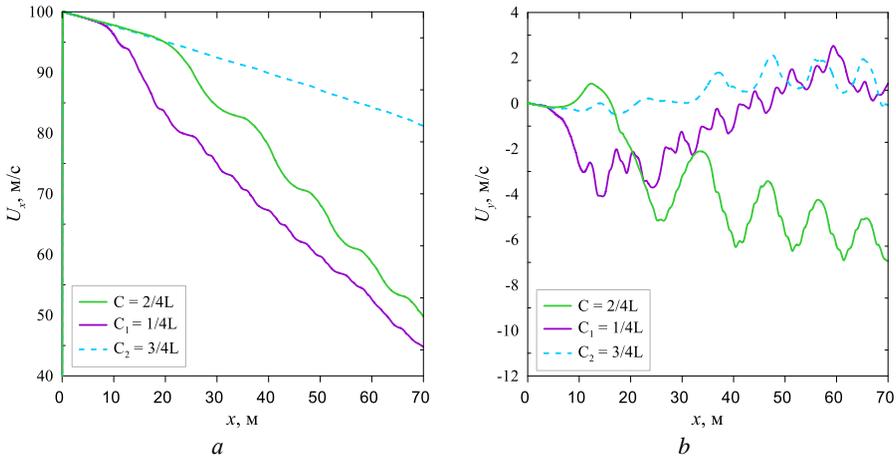


Рис. 9. Поступательная продольная скорость по оси Ox_1 (*a*) и поступательная поперечная скорость по оси Oy_1 (*b*) метаемых тел с измененным центром масс в зависимости от дистанции в сравнении с симметричным телом, угол к горизонту $\alpha = 60^\circ$
Fig. 9. Translational velocity components as a function of distance for the bodies with a shifted center of mass compared to a symmetric body ($\alpha = 60^\circ$): (*a*) longitudinal (Ox_1 -axis) and (*b*) transverse (Oy_1 -axis)

Из графиков на рис. 9–10 видно, что изменение массоцентровочных характеристик метаемого тела приводит к существенному изменению характера его поведения в движении. Тело с центром масс в лобовой части приобретает устойчивость,

данное тело не вращается (см. рис. 10, *a*). Отсутствие вращения приводит к минимальным потерям поступательной продольной скорости (см. рис. 9, *a*), а возникающая подъемная сила приводит к отклонению поперечного перемещения тела в противоположную сторону, т.е. тело на рассчитанном отрезке дистанции «взмывает» вверх (см. рис. 9, *b*, 10, *b*).

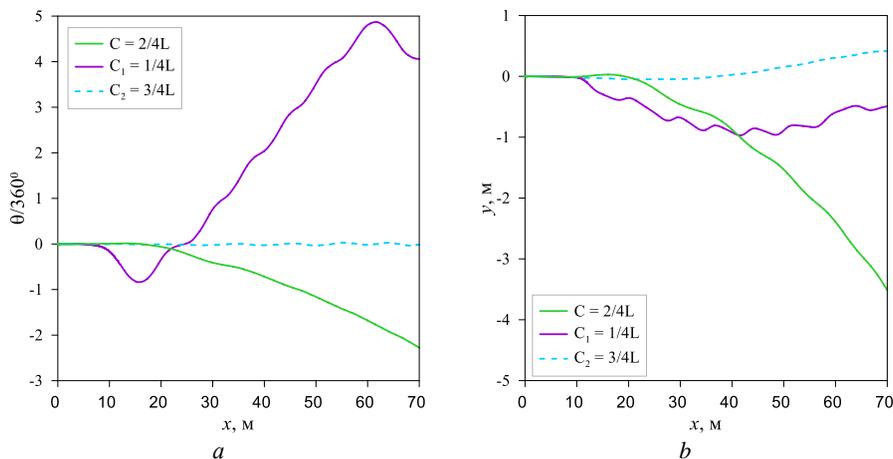


Рис. 10. Угол поворота тела в сечении тангажа (*a*) и перемещение центра масс ПЭ в системе координат Ox_1y_1 (*b*) метаемых тел с измененным центром масс в зависимости от дистанции в сравнении с симметричным телом, угол к горизонту $\alpha = 60^\circ$

Рис. 10. (*a*) Pitch angle and (*b*) payload center-of-mass displacement in Ox_1y_1 -coordinate system as a function of distance for the bodies with a shifted center of mass compared to a symmetric reference body ($\alpha = 60^\circ$)

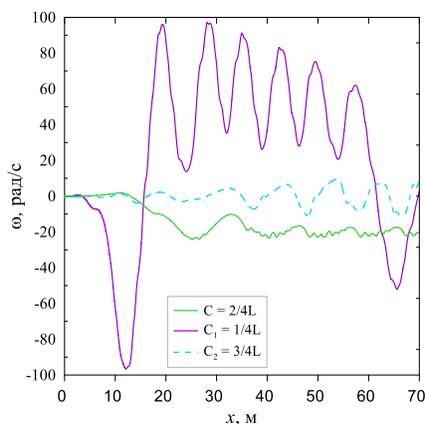


Рис. 11. Угловая скорость метаемых тел с измененным центром масс в зависимости от дистанции в сравнении с симметричным телом, угол к горизонту $\alpha = 60^\circ$

Fig. 11. Angular velocity as a function of distance for the bodies with a shifted center of mass compared to a symmetric reference body ($\alpha = 60^\circ$)

На рис. 11 приведены графики изменения угловой скорости тел с измененными центрами масс в зависимости от дистанции в сравнении с телом, в котором центр

масс расположен симметрично. Угловая скорость такого тела принимает как отрицательные, так и положительные значения (см. рис. 11), но на представленной дистанции они малы для придания телу постоянного вращения. Тело с центром масс в кормовой части, напротив, становится существенно неустойчивым. Данное тело за счет действия аэродинамических сил приобретает существенную угловую скорость уже на 10-м метре дистанции и начинает вращение по часовой стрелке, при этом оно существенно тормозится (см. рис. 9, а). В момент, когда $x = 15$ м, происходит изменение угловой скорости с отрицательных значений на положительные. Тело приобретает вращения против часовой стрелки и совершает 6 полных оборотов вокруг своей оси (см. рис. 10, а), прежде чем вновь изменит характер вращения на противоположный. Важно отметить, что поперечная поступательная скорость такого тела в какой-то момент приобретает положительное значение; это говорит о том, что подъемная сила превалирует над силой тяжести. Таким образом, вращение тела становится существенным, и возникает эффект силы Магнуса.

Заключение

В работе представлены результаты численного исследования движения инертного прямоугольного твердого тела в воздухе под действием внешних сил в плоской постановке. Для расчета движения метаемого тела разработана методика, которая позволяет на основании расчета известных математических моделей газодинамики определять внешнюю силу, действующую на движущееся твердое тело различной формы, и оценивать траекторию тела, его вращение и составляющие скорости на траектории с учетом собственных массоцентровочных характеристик тела и его формы. На основе методики реализован авторский программный код для программного комплекса ANSYS Fluent. С помощью представленной методики можно исследовать поведение тел различной формы на траектории, их угловое положение и характеристики движения, что позволяет сократить затраты на предварительную инженерную оценку конструктивных особенностей метаемых тел и элементов конструкций.

Список источников

1. Степанов В.П. Внешняя баллистика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2006. 1140 с.
2. Семенов И.В., Уткин П.С., Ахмедьянов И.Ф., Меньшов И.С. Применение многопроцессорной вычислительной техники для решения задач внутренней баллистики // Вычислительные методы и программирование. 2011. Т. 12. С. 183–193.
3. Катаева Л.Ю., Масленников Д.А., Михалев С.В., Киселева Н.Н. Поиск оптимальных режимов полета тела на основе аппроксимации результатов CFD-моделирования // Информатика и управление в технических и социальных системах. Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2019. № 4 (127). С. 27–35.
4. Пешков Р.А., Исмагилов Д.Р. Численное моделирование взаимодействия продуктов сгорания порохового аккумулятора давления с кислородом воздуха в пусковом контейнере // Вестник Концерна ВКО «Алмаз–Антей». 2019. № 1. С. 68–73.
5. Пешков Р.А., Сидельников Р.В. Анализ влияния конструктивных и газодинамических параметров ракет на ударно-волновые процессы в шахтной пусковой установке // Вестник Концерна ВКО «Алмаз–Антей». 2015. № 2. С. 55–60.
6. Пегов В.И., Мошкин И.Ю., Меркулов Е.С., Чешко А.Д. Численное моделирование гидродинамических нагрузок на стартующую ракету и подводную лодку // Вестник Концерна ВКО «Алмаз–Антей». 2016. № 3. С. 30–35.

7. Плюснин А.В., Бондаренко Л.А. Способы крупномасштабного моделирования систем газодинамического выброса // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2012. Спецвып. № 4. С. 111–122.
8. Волков В.Ф., Приданов В.Г. Моделирование движения тел в поле сил гравитации // Физическое образование в вузах. 2019. Т. 25, № 1. С. 36–54.
9. Иванов К.А., Горев А.А. Метод крупных частиц в моделировании полета снаряда со сверхзвуковой скоростью // Интеллектуальные системы в производстве. 2016. № 3 (30). С. 7–9.
10. Ламб Г. Гидродинамика. М.: ОГАИЗ, 1947. 929 с.
11. Launder B.E., Spalding D.B. The numerical computation of turbulent flows // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1974. № 3 (2). P. 269–289. doi: 10.1016/0045-7825(74)90029-2
12. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Леценко Д.Д. Эволюция движений твердого тела относительно центра масс. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исслед., 2015. 308 с.
13. Петров К.П. Аэродинамика тел простейших форм. М.: Факториал, 1998. 432 с.

References

1. Stepanov V.P. (2006) *Vneshnyaya ballistika* [External ballistics]. Tomsk: Izdatel'stvo Tomskogo universiteta.
2. Semenov I.V., Utkin P.S., Akhmedyanov I.F., Menshov I.S. (2011) Primenenie mnogoprotsessornoy vychislitel'noy tekhniki dlya resheniya zadach vnutrenney ballistiki [Application of multiprocessor computing technology for solving interior ballistics problems]. *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye – Computational Methods and Programming*. 12. pp. 183–193.
3. Kataeva L.Yu., Maslennikov D.A., Mikhalev S.V., Kiseleva N.N. (2019) Poisk optimal'nykh rezhimov poleta tela na osnove approksimatsii rezul'tatov CFD-modelirovaniya [Search for optimal body flight modes based on approximation of CFD simulation results]. *Informatika i upravlenie v tekhnicheskikh i sotsial'nykh sistemakh. Trudy NGTU im. R.E. Alekseeva – Computer Science and Control in Technical and Social Systems. Proceedings of R.E. Alekseev Nizhny Novgorod State Technical University*. 4(127). pp. 27–35.
4. Peshkov R.A., Ismagilov D.R. (2019) Chislennoe modelirovaniye vzaimodeystviya produktov sgoraniya porokhovogo akkumulyatora davleniya s kislorodom vozdukh v puskovom konteynere [Numerical simulation of the interaction of a solid-propellant pressure accumulator combustion products with air oxygen in a launch container]. *Vestnik Kontserna VKO «Almaz-Antey» – Journal of the "Almaz-Antey" Air and Space Defense Concern*. 1. pp. 68–73.
5. Peshkov R.A., Sidel'nikov R.V. (2015) Analiz vliyaniya konstruktivnykh i gazodinamicheskikh parametrov raket na udarno-volnovye protsessy v shakhtnoy puskovoy ustanovke [Analysis of the influence of design and gas-dynamic parameters of rockets on shock-wave processes in a silo launcher]. *Vestnik Kontserna VKO «Almaz-Antey» – Journal of the "Almaz-Antey" Air and Space Defense Concern*. 2. pp. 55–60.
6. Pegov V.I., Moshkin I.Yu., Merkulov E.S., Cheshko A.D. (2016) Chislennoe modelirovaniye gidrodinamicheskikh nagruzok na startuyushchuyu raketu i podvodnuyu lodku [Numerical simulation of hydrodynamic loads on a launching missile and a submarine]. *Vestnik Kontserna VKO «Almaz-Antey» – Journal of the "Almaz-Antey" Air and Space Defense Concern*. 3. pp. 30–35.
7. Plyusnin A.V., Bondarenko L.A. (2012) Sposoby krupnomasshtabnogo modelirovaniya sistem gazodinamicheskogo vybrosa [Methods of large-scale modeling of gas-dynamic ejection systems]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya «Estestvennye nauki» – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series "Natural Sciences"*. pp. 111–122.
8. Volkov V.F., Pridanov V.G. (2019) Modelirovaniye dvizheniya tel v pole sil gravitatsii [Modeling the motion of bodies in a gravity field]. *Fizicheskoe obrazovanie v vuzakh – Physics Education in Universities*. 25(1). pp. 36–54.

9. Ivanov K.A., Gorev A.A. (2016) Metod krupnykh chastits v modelirovanii poleta snaryada so sverkhzvukovoy skorost'yu [The particle-in-cell method in modeling the flight of a projectile at supersonic speed]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve – Intelligent Systems in Manufacturing*. 3(30). pp. 7–9.
10. Lamb H. (1947) *Gidrodinamika* [Hydrodynamics]. Moscow: OGAIZ.
11. Launder B.E., Spalding D.B. (1974) The numerical computation of turbulent flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 3(2). pp. 269–289. doi: 10.1016/0045-7825(74)90029-2
12. Chernous'ko F.L., Akulenko L.D., Leshchenko D.D. (2015) *Evolyutsiya dvizheniy tverdogo tela otositel'no tsentra mass* [Evolution of motions of a rigid body about its center of mass]. Moscow – Izhevsk: Izhevskiy institut komp'yuternykh issledovaniy.
13. Petrov K.P. (1998) *Aerodinamika tel prosteyshikh form* [Aerodynamics of bodies of the simplest forms]. Moscow: Faktorial.

Сведения об авторах:

Тырышкин Илья Михайлович – инженер-исследователь лаборатории 101 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: tyryshkin@niipmm.tsu.ru

Жильцов Константин Николаевич – научный сотрудник лаборатории 101 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: konstantin@niipmm.tsu.ru

Костюшин Кирилл Владимирович – старший научный сотрудник лаборатории 101 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: kostushink@niipmm.tsu.ru

Еремин Иван Владимирович – кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией 101 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: iveremin@niipmm.tsu.ru

Глазунов Анатолий Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией 105 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: gla@niipmm.tsu.ru

Information about the authors:

Tyryshkin Il'ya M. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tyryshkin@niipmm.tsu.ru

Zhil'tsov Konstantin N. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: Konstantin@niipmm.tsu.ru

Kostyushin Kirill V. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kostushink@niipmm.tsu.ru

Eremin Ivan V. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: iveremin@niipmm.tsu.ru

Glazunov Anatoly A. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: gla@niipmm.tsu.ru.

Статья поступила в редакцию 09.01.2026; принята к публикации 05.02.2026

The article was submitted 09.01.2026; accepted for publication 05.02.2026

Научная статья

УДК 520.82, 52-17, 004.9

doi: 10.17223/19988621/99/7

К расчету видимого блеска околоземных космических объектов

Антон Геннадьевич Афонин¹, Владимир Григорьевич Бутов²,
Артем Александрович Кулешов³, Виктор Александрович Солоненко⁴,
Алексей Александрович Ящук⁵

^{1, 2, 3, 4, 5} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ aag@niipmm.tsu.ru

² bvg@niipmm.tsu.ru

³ artem.kuleshov@niipmm.tsu.ru

⁴ vik@niipmm.tsu.ru

⁵ rainbow@niipmm.tsu.ru

Аннотация. Приводятся алгоритм и описание программы для моделирования видимого блеска (энергетической освещенности наблюдателя отраженным к нему светом) космических объектов (искусственные спутники, космический мусор и др.), основанные на использовании системы физически корректного рендеринга. Тестовые расчеты видимого блеска объектов простой формы (пластина, цилиндр, сфера), характерной для упрощенной формы космических аппаратов, показали хорошее совпадение с аналитическими результатами. Предполагается использование программы для анализа данных наблюдений изменения во времени видимого блеска космических объектов (кривых блеска).

Ключевые слова: космические объекты, космический мусор, видимый блеск, моделирование, физически корректный рендеринг, программа расчета

Благодарности: Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FSWM-2024-0005).

Для цитирования: Афонин А.Г., Бутов В.Г., Кулешов А.А., Солоненко В.А., Ящук А.А. К расчету видимого блеска околоземных космических объектов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2026. № 99. С. 93–108. doi: 10.17223/19988621/99/7

On the calculation of the apparent brightness of near-Earth space objects

Anton G. Afonin¹, Vladimir G. Butov², Artyom A. Kuleshov³,
Viktor A. Solonenko⁴, Aleksey A. Yashchuk⁵

^{1, 2, 3, 4, 5} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ aag@niipmm.tsu.ru

² bvg@niipmm.tsu.ru

³ artem.kuleshov@niipmm.tsu.ru

⁴ vik@niipmm.tsu.ru

⁵ rainbow@niipmm.tsu.ru

Abstract. This study focuses on modeling the apparent brightness of orbital objects using physically-based rendering. The authors developed a Python software that employed the Skyfield library to calculate the positions of the Sun, orbital objects, and observer, as well as the physically-based rendering system Mitsuba3 to calculate the reflected radiance. The software components allow accounting for the realistic geometry of the studied orbital object, optical properties of its surfaces, lighting conditions, and relative positions of the Sun, observer, and target.

The simulation procedure involves the calculation of the required direction vectors, construction of a 3D model containing the object under study, virtual camera, light source, and rendering and integration of the resulting radiance to determine the irradiance at the observer and apparent magnitudes.

A series of test calculations was conducted for simple geometric shapes (sphere, cylinder, and plate) with diffuse and specular surfaces. The results showed good agreement with analytical solutions: the relative error was less than 0.002% for diffuse surfaces and less than 1.2% for specular surfaces.

This paper also presents preliminary simulations of the apparent brightness of the geostationary satellite SIRIO-1, demonstrating that representing the satellite by a simple geometric shape, such as a cylinder, is insufficient to capture all features of its brightness variation. In future work, the developed software will be used to analyze the observed light curves of orbital objects.

Keywords: space objects, space debris, apparent brightness, simulation, physically-based rendering, computational software

Acknowledgments: This study was supported by the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation. (project No. FSWM-2024-0005).

For citation: Afonin, A.G., Butov, V.G., Kuleshov, A.A., Solonenko, V.A., Yashchuk, A.A. (2026) On the calculation of the apparent brightness of near-Earth space objects. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 99. pp. 93–108. doi: 10.17223/19988621/99/7

Введение

Моделирование видимого блеска космических объектов на околоземных орбитах (орбитальных объектов) представляет важную научную и практическую задачу, имеющую приложения в современной астрономии, космической инженерии

и системах наблюдения. Изменения видимого блеска объектов во времени (кривые блеска) могут дать ценную информацию для анализа их свойств (форма, ориентация, материалы), поведения и предназначения [1–11]. Актуальность задачи обусловлена рядом объективных ограничений и недостатков наблюдений с Земли: свет от объектов искажается атмосферой, изображения наблюдаемых объектов размываются, изменяется их яркость; наблюдения возможны только в относительно короткие интервалы времени; видимый блеск зависит от фазового угла, удаленности объекта от наблюдателя и других динамически меняющихся факторов, что затрудняет интерпретацию данных наблюдений. Моделирование видимого блеска позволяет преодолеть эти ограничения, предоставляя возможность прогнозировать его изменения с учетом формы, ориентации, материалов, условий освещения объекта и выявить влияние каждого из этих факторов [1–11].

Увеличение плотности объектов на околоземных орбитах, включая действующие спутники, нефункционирующие аппараты и фрагменты космического мусора, повышает вероятность столкновений, представляющих угрозу для космических аппаратов [12]. Моделирование кривых блеска может помочь интерпретировать данные наблюдений, классифицировать объекты, определить ориентацию и форму объектов и лучше прогнозировать их траектории, выявлять необычное поведение [2–8]. Это востребовано для обеспечения космической безопасности, планирования мероприятий по активному удалению мусора, контроля выполнения международных соглашений и предотвращения потенциальных угроз [2, 4].

Один из вызовов современной астрономии – появление и рост крупных спутниковых группировок, таких как Starlink, OneWeb и других проектов глобального Интернета. Они состоят из большого количества спутников, которые могут создавать помехи для наземных астрономических наблюдений. Яркие спутники, пересекающие поле зрения телескопов, оставляют следы на изображениях, что снижает качество данных, увеличивает затраты на их сбор, затрудняет изучение слабых астрономических объектов, негативно сказывается на научной продуктивности аппаратуры и затрудняет открытия [13–17]. Моделирование видимого блеска может помочь спрогнозировать влияние спутников и их группировок на наблюдения [1, 18, 19], оценить масштаб проблемы и разработать меры для ее минимизации (более эффективные алгоритмы планирования наблюдений, программное обеспечение для удаления следов спутников на изображениях и др.) [1]. На основе результатов моделирования можно предложить изменения в конструкции спутников, такие как использование менее отражающих материалов [20, 21] или специальных экранов [22], заранее оценить эффективность таких решений и оптимизировать их применение [1]. Кроме того, предварительная оценка видимого блеска спутников с помощью моделирования может помочь более эффективно спланировать наблюдения их самих [1, 24].

Таким образом, задача моделирования видимого блеска космических объектов является актуальной благодаря своей роли в обеспечении безопасности космической деятельности, развитии методов наблюдения и планировании будущих миссий.

Для моделирования видимого блеска применяются различные подходы [1–8, 10, 23, 24], из которых наиболее мощным представляется использование физически корректного рендеринга [2, 5, 7], позволяющего определить облик объекта произвольной формы при различных условиях освещения и наблюдения с учётом оптических свойств его поверхностей, ориентации, самозатенения, самоподсвечивания (отраженным светом) и других факторов.

Целью работы являются разработка и верификация программы для моделирования видимого блеска орбитальных объектов с использованием физически корректного рендеринга.

Постановка задачи физически корректного рендеринга

Физически корректный рендеринг – это процесс преобразования описания трехмерной сцены (геометрии, текстур, материалов поверхностей, источников освещения и т.д.) в двумерное изображение, основанный на физических законах распространения и взаимодействия света с материей. Свет в физически корректном рендеринге моделируется как совокупность прямолинейных лучей, вдоль которых распространяется световая энергия. Целью при этом является максимальная реалистичность визуализации, учитывающая реальные физические свойства света и поверхностей.

Основными операциями при физически корректном рендеринге являются трассировка пути луча в трехмерной сцене от виртуального наблюдателя к источнику света и интегрирование уравнения, описывающего перенос и распределение энергетической яркости в сцене (интегральное уравнение рендеринга [25. Уравнение (1.1)]):

$$L_o(p, \omega_o) = L_e(p, \omega_o) + \int_{\Omega} f(p, \omega_i, \omega_o) L_i(p, \omega_i) (\mathbf{n}_p \cdot \omega_i) d\omega_i, \quad (1)$$

где $L_o(p, \omega_o)$ – энергетическая яркость, исходящая из точки p поверхности в направлении ω_o ; $L_e(p, \omega_o)$ – энергетическая яркость, излученная из точки p поверхности в направлении ω_o за счет собственной эмиссии; $L_i(p, \omega_i)$ – энергетическая яркость, пришедшая в точку p с направления ω_i ; \mathbf{n}_p – внешняя нормаль к поверхности в точке p ; Ω – единичная сфера вокруг точки p ; ω_i, ω_o – направления падающего и отходящего света соответственно; $d\omega_i$ – элементарный телесный угол вокруг ω_i . Интегрирование в (1) производится по всем направлениям вокруг точки p , с которых может приходиться свет.

Функция $f(p, \omega_i, \omega_o)$ описывает взаимодействие света с поверхностью. В общем случае она определяет как характеристики отражения, так и пропускания и называется двулучевой функцией рассеяния (Bidirectional Scattering Distribution Function; BSDF). На практике явления отражения и пропускания рассматривают как отдельные составляющие рассеяния и описывают отдельно с помощью соответственно двулучевой функции распределения отражательной способности (Bidirectional Reflectance Distribution Function; BRDF) и двулучевой функции пропускания (Bidirectional Transmittance Distribution Function; BTDF). Таким образом, $BSDF = BRDF + BTDF$. Материалы, типичные для большинства космических объектов (спутники, космический мусор), являются непрозрачными или имеют незначительную прозрачность, поэтому для них $BTDF = 0$. Существуют различные модели BSDF, для физической корректности рендеринга BSDF (и ее составляющие) должна обладать рядом свойств, в частности быть неотрицательной, удовлетворять принципам сохранения энергии и гельмгольцевской взаимности:

$$\int_{\Omega} f(p, \omega_i, \omega_o) (\mathbf{n}_p \cdot \omega_i) d\omega_i \leq 1, \quad (2)$$

$$f(p, \omega_i, \omega_o) = f(p, \omega_o, \omega_i). \quad (3)$$

В соответствии с уравнением (1) энергетическая яркость, исходящая из точки p в направлении ω_0 , складывается из энергетической яркости L_e , излученной из точки p в этом направлении, и отраженной в этом направлении части энергетической яркости, пришедшей в точку p со всех возможных направлений на единичной сфере Ω , окружающей p .

Следует отметить, что уравнение (1) применяется и для вычисления энергетической яркости L_i в интеграле этого уравнения, так как она одновременно является исходящей из некоторой другой точки в направлении $-\omega_i$. Таким образом, имеет место рекурсивное вычисление.

Интегрирование уравнения (1) при физически корректном рендеринге проводится методом Монте-Карло. Подробное описание теории, лежащей в основе физически корректного рендеринга, и одну из возможных его практических реализаций можно найти, например, в [25].

Описание программы и алгоритма моделирования видимого блеска

В рамках данной работы создана программа на языке программирования Python для моделирования видимого блеска орбитальных объектов, наблюдаемых с Земли. Программа использует свободную python-библиотеку Skyfield [26] для расчета положений интересующих тел и объектов: Солнца, наблюдателя на Земле, объекта на орбите (спутник, космический мусор и т.п.), – в заданные моменты времени. Для расчета энергетической яркости, отраженной орбитальным объектом к наблюдателю, используется свободно распространяемая современная система физически корректного рендеринга Mitsuba3 [27] с открытым исходным кодом. Mitsuba3 ориентирована на исследования в области компьютерной графики, научные расчеты и машинное обучение. Она предлагает широкие возможности для моделирования световых эффектов (спектральный рендеринг, поляризация), решения задач оптимизации и обратных задач (восстановление параметров сцены, например геометрии, освещения, материалов, по изображениям). В Mitsuba3 заложены различные физически корректные модели BSDF, описывающие взаимодействие света с поверхностями различных материалов: диэлектриков, проводников, диффузных (ламбертовских) и др. Система активно развивается сообществом разработчиков и достаточно хорошо документирована.

Заметим, что Mitsuba3 является не единственной системой физически корректного рендеринга, которую можно использовать в рассматриваемых в данной работе целях. Мы выбрали Mitsuba3 из-за ее открытости, широких возможностей, гибкости, производительности. Создание собственных программ с использованием существующих открытых библиотек и программных решений имеет очевидные преимущества: они предоставляют протестированный, оптимизированный и поддерживаемый функционал, позволяющий существенно экономить время и силы на решение стоящей задачи.

Моделирование видимого блеска орбитального объекта проводится следующим образом. Задаются момент времени для расчета, набор элементов орбиты моделируемого объекта (TLE), координаты наземного наблюдателя (широта, долгота, высота над уровнем моря) в стандартной «геодезической системе», моделирующей форму Земли, например в WGS84. Для данного момента времени с помощью функционала библиотеки Skyfield определяются положения Солнца, объекта

наблюдения, наземного наблюдателя в единой системе координат и проверяется возможность реального наблюдения: объект освещен Солнцем, объект выше горизонта наблюдателя, наблюдатель в условиях темного времени суток. На основе определенных положений рассчитываются векторы направлений объект–Солнце, объект–наблюдатель, также направления можно задать напрямую. Задается ориентация объекта. Формируется описание трехмерной сцены Mitsuba3, содержащей три элемента: источник света (эмиттер) – имитатор Солнца, виртуальную камеру (сенсор) – имитатор наземного наблюдателя, и 3D-модель объекта наблюдения. Вследствие огромной удаленности Солнца и его малого углового размера у Земли солнечные лучи полагаются параллельными, поэтому для моделирования Солнца используется удаленный направленный источник света, излучающий заданную мощность на единицу площади в заданном направлении Солнце–объект. Аналогично ввиду достаточно большой удаленности орбитальных объектов от наземных наблюдателей и их малых угловых размеров отраженные к наблюдателю солнечные лучи также считаются параллельными. Поэтому для моделирования наблюдателя используется сенсор, основанный на ортографической проекции, измеряющий энергетическую яркость вдоль нормали к своей плоскости. Положение и направление взгляда камеры задаются на основе вектора объект–наблюдатель.

3D-модель наблюдаемого объекта может создаваться из встроенных в Mitsuba3 форм (куб, цилиндр, сфера, диск, В-сплайн и др.), загружаться из внешних OBJ или PLY файлов или с помощью комбинации этих способов и, таким образом, достаточно точно передавать реальную его форму. При этом модель разбивается на детали в зависимости от необходимости назначения им тех или иных моделей BSDF, т.е. оптических свойств. Модель ориентируется в соответствии с заданными векторами ориентации.

Сформированное описание трехмерной сцены передается в функцию рендеринга для осуществления трассировки путей лучей и расчета энергетической яркости. В результате рендеринга для каждого пикселя камеры получается значение отраженной в него из сцены (от 3D-модели объекта наблюдения) энергетической яркости. Совокупность значений пикселей формирует картину распределения (изображение) отраженной энергетической яркости. Никакой постобработки результатов рендеринга, вроде коррекции гаммы, тональной компрессии и т.п., не производится. Рендеринг осуществляется в монохромном режиме и соответствует широкополосным наблюдениям в видимом диапазоне.

Полученное распределение энергетической яркости численно интегрируется для получения значения энергетической освещенности (облученности) E наблюдателя на расстоянии r от наблюдаемого объекта:

$$E = \frac{A_{pix}}{r^2} \sum_{k=1}^N L_k, \quad (4)$$

где A_{pix} – площадь пикселя, N – количество пикселей виртуальной камеры, L_k – энергетическая яркость, ассоциированная с k -м пикселем.

По рассчитанной энергетической освещенности рассчитывается соответствующая видимая звездная величина m :

$$m = m_0 - 2.5 \lg \frac{E}{E_0}, \quad (5)$$

где m_0 – «опорная» звездная величина, E_0 – соответствующая «опорная» энергетическая освещенность.

В расчетах мы пока не учитываем вклад земного сияния (засветку объекта отраженным Землей солнечным светом) и влияние земной атмосферы в моделируемый видимый блеск.

Результаты тестовых расчетов

Для проверки процедуры моделирования были проведены тестовые расчеты для диффузных и зеркальных сферы, пластины, цилиндра. Были получены результаты, хорошо согласующиеся с расчетами по аналитическим формулам, приведенным в [28. Таблица 1].

На рис. 1 представлены результаты расчета на основе физически корректного рендеринга энергетической освещенности (облученности) наблюдателя светом, отраженным от диффузной сферы, боковой поверхности диффузного цилиндра и диффузной плоской пластины в зависимости от фазового угла (угол Солнце–объект–наблюдатель) и их сравнение с расчетами по соответствующим аналитическим формулам. Также приведены значения звездной величины, полученные по формуле (5) на основе расчетной облученности (соответствующая ось – справа). В расчетах приняты: альbedo диффузных поверхностей = 1, расстояние объект–наблюдатель = 37 100 км, плотность мощности светового источника = 1 360 Вт/м², радиус сферы = $\pi^{-0.5}$ м, высота и диаметр цилиндра, стороны пластины = 1 м. Разрешение генерируемых изображений 960 × 960 пикселей. Для цилиндра направления на источник света и наблюдателя симметрично расположены относительно нормали к поверхности и лежат в плоскости оси цилиндра. Для пластины направления на источник света и наблюдателя симметрично расположены относительно нормали к поверхности.

При использованных параметрах рендеринга относительная (нормированная на аналитический максимум) ошибка расчетных значений облученности относительно аналитических < 0.002%.

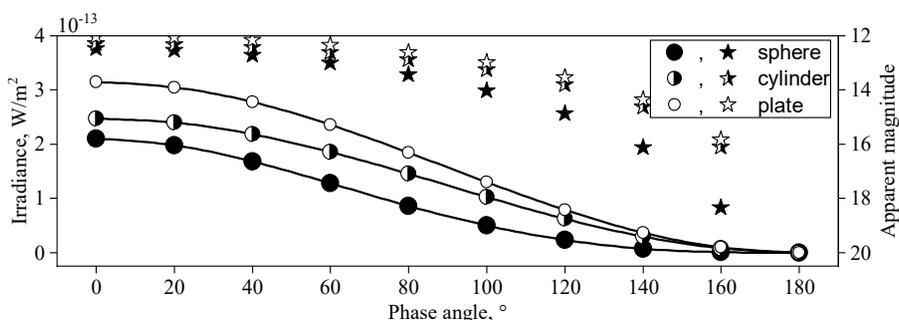


Рис. 1. Облученность (кружки – расчет, линии – аналитические зависимости из [28]) от диффузных сферы, боковой поверхности цилиндра и пластины и соответствующие звездные величины (звездочки) в зависимости от фазового угла

Fig. 1. Irradiance from the diffuse sphere, lateral surface of a cylinder, and flat plate with the corresponding apparent magnitudes (stars) as a function of phase angle (circles indicate calculations; lines, analytical dependencies from [28])

На рис. 2–4 показаны соответствующие картины распределения отраженной энергетической яркости, полученные в результате рендеринга, на основе которых рассчитаны значения облученности.

На рис. 5–7 представлены результаты расчета на основе физически корректного рендеринга облученности наблюдателя светом, отраженным от зеркальной сферы, боковой поверхности цилиндра и плоской пластины в зависимости от фазового угла и их сравнение с расчетами по аналитическим формулам.

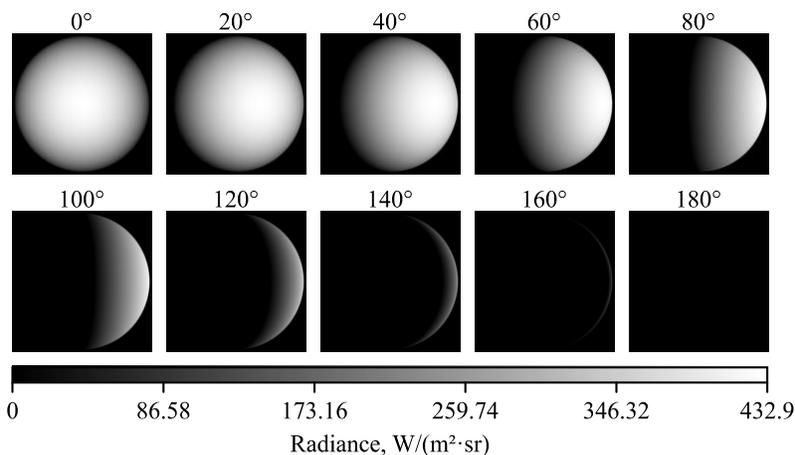


Рис. 2. Визуализированное распределение энергетической яркости, отраженной от диффузной сферы, при разных фазовых углах (фазовые углы приведены числами над соответствующими им изображениями)

Fig. 2. Distribution of the rendered radiance reflected from a diffuse sphere at different phase angles (phase angles in degrees are indicated above the corresponding images)

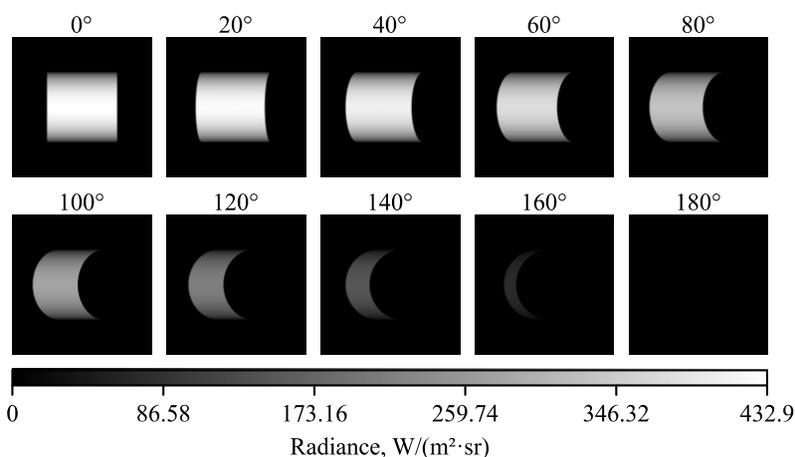


Рис. 3. Визуализированное распределение энергетической яркости, отраженной от диффузного цилиндра, при разных фазовых углах (фазовые углы приведены числами над соответствующими им изображениями)

Fig. 3. Distribution of the rendered radiance reflected from a diffuse cylinder at different phase angles (phase angles in degrees are indicated above the corresponding images)

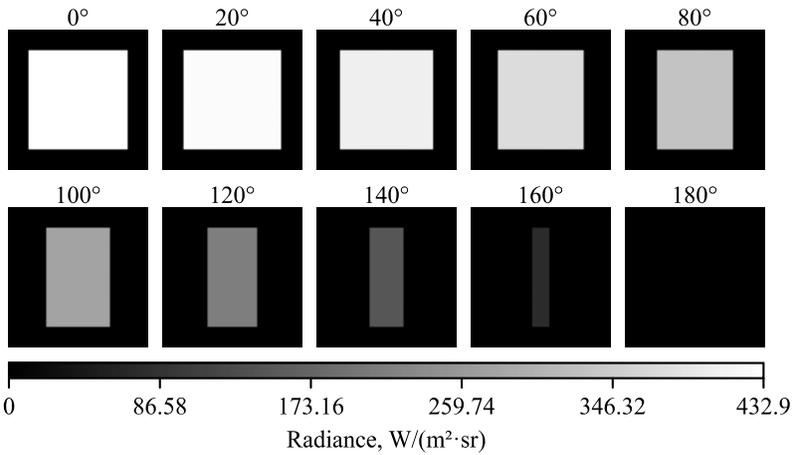


Рис. 4. Визуализированное распределение энергетической яркости, отраженной от диффузной пластины, при разных фазовых углах (фазовые углы приведены числами над соответствующими им изображениями)

Fig. 4. Distribution of the rendered radiance reflected from a diffuse flat plate at different phase angles (phase angles in degrees are indicated above the corresponding images)

В расчетах для цилиндра направления на источник света и наблюдателя лежат в плоскости перпендикулярной оси цилиндра. Все остальное – как в расчетах облученности от диффузных объектов.

При использованных параметрах рендеринга относительная (нормированная на аналитический максимум) ошибка расчетных значений облученности относительно аналитических для зеркальной сферы < 1.2%, для цилиндра < 0.6%, для пластины < 0.003%.

Мы не приводим картины распределения энергетической яркости, поскольку точечные блики от сферы и линейные блики от цилиндра на изображениях не видны без увеличения, а картины распределения для зеркальной пластины визуальнo идентичны картинам для диффузной пластины, хотя отличаются значениями энергетической яркости.

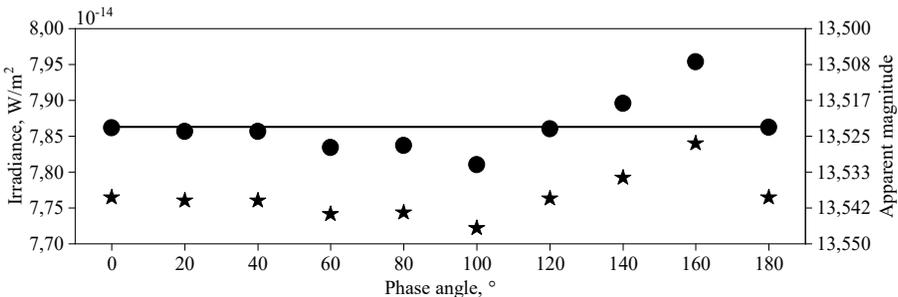


Рис. 5. Облученность (кружки – расчет, линия – аналитическая зависимость из [28]) от зеркальной сферы и соответствующие звездные величины (звездочки) в зависимости от фазового угла

Fig. 5. Irradiance from a specular sphere with the corresponding apparent magnitude (stars) as a function of phase angle (circles indicate calculation; lines, analytical dependency from [28])

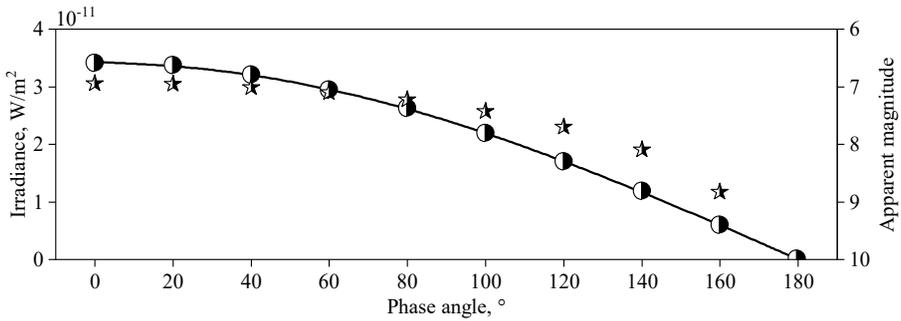


Рис. 6. Облученность (кружки – расчет, линия – аналитическая зависимость из [28]) от зеркального цилиндра и соответствующие звездные величины (звездочки) в зависимости от фазового угла

Fig. 6. Irradiance from a specular cylinder with the corresponding apparent magnitude (stars) as a function of phase angle (circles indicate calculation; lines, analytical dependency from [28])

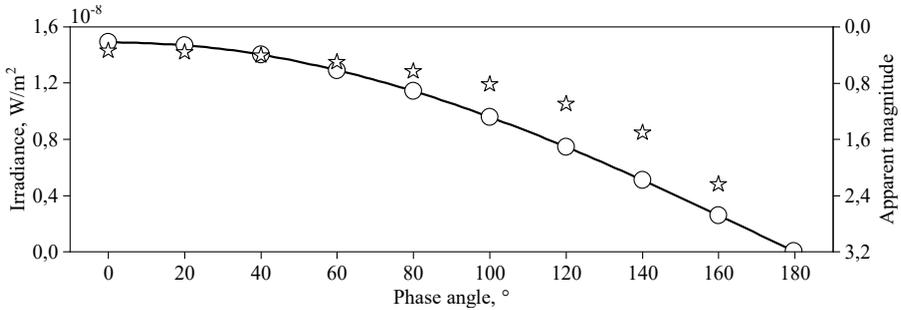


Рис. 7. Облученность (кружки – расчет, линия – аналитическая зависимость из [28]) от зеркальной пластины и соответствующие звездные величины (звездочки) в зависимости от фазового угла

Fig. 7. Irradiance from a specular flat plate with the corresponding apparent magnitude (stars) as a function of phase angle (circles indicate calculation; lines, analytical dependency from [28])

На рис. 8, 9 представлены результаты тестового расчета видимого блеска для упрощенной 3D-модели недействующего итальянского экспериментального коммуникационного геостационарного спутника SIRIO-1 (номер NORAD 10294) [29, 30]. Модель спутника включает три основных элемента: цилиндрическую часть, апогейный двигатель (сопло), параболическую антенну. Диаметр спутника = 1,43 м, общая высота (длина) = 2 м. Поверхность антенны принята идеально диффузной (diffuse BRDF [31]) с альбедо 0,8, остальные поверхности описываются моделью шероховатого проводящего материала (roughconductor BRDF [32]): арсенида галлия для боковой поверхности цилиндра и алюминия для остальных поверхностей. Спутник предполагался ориентированным осью цилиндрической части по орбитальной нормали, антенна аппарата «смотрит» на Землю (рабочая ориентация SIRIO-1). Моделирование проведено для земного наблюдателя с координатами $43,2747^\circ$ северной широты, $42,5008^\circ$ восточной долготы, высота над уровнем моря 3 127 м (ЦКП «Терскольская обсерватория» Института астрономии РАН). Расчет проведен для интервала времени с 27.10.2025 20:00:00 по 28.10.2025 2:40:00 UTC.

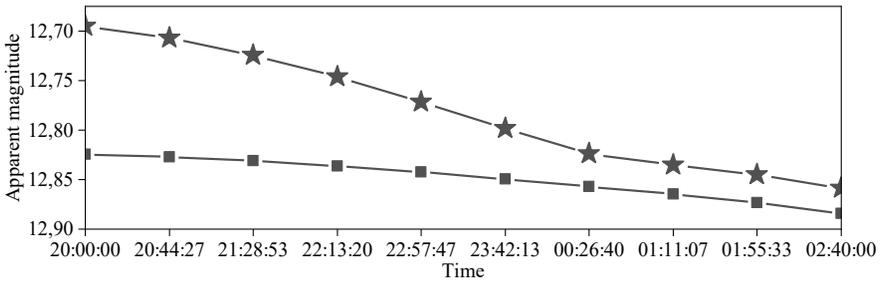


Рис. 8. Расчетная звездная величина (звездочки – полная 3D-модель, квадраты – только цилиндрическая часть) спутника SIRIO-1 в зависимости от времени
Fig. 8. Calculated apparent magnitude of the SIRIO-1 satellite as a function of time (stars indicate the whole 3D model; squares, a cylindrical part only)

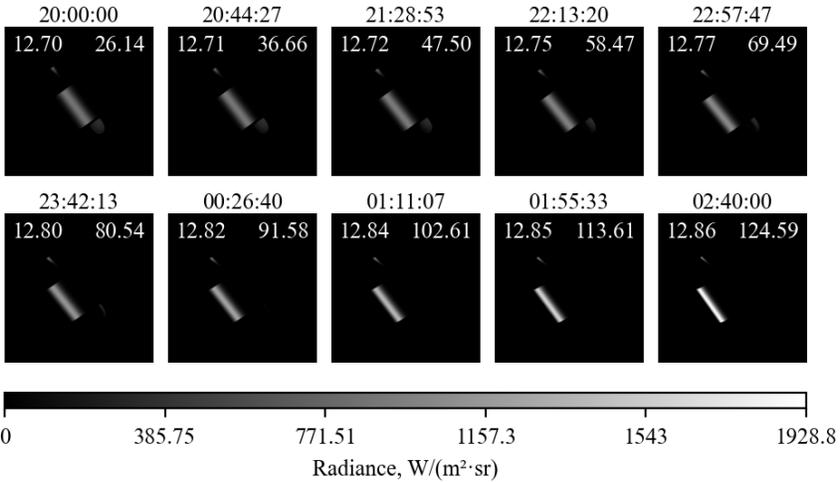


Рис. 9. Визуализированные распределения энергетической яркости, отраженной от спутника SIRIO-1, для разных моментов времени (соответствующие моменты времени указаны над каждым изображением, число в левом верхнем углу каждого изображения – звездная величина, в правом верхнем углу – фазовый угол)

Fig. 9. Distributions of the rendered radiance reflected from the SIRIO-1 satellite at different time instants (the corresponding times are shown above images; apparent magnitude and phase angle are indicated in the upper left and upper right corners, respectively)

На рис. 8 показаны расчетные кривые блеска для полной 3D-модели спутника и его цилиндрической части. Сравнение расчетных кривых показывает, что представление спутника объектом простой геометрической формы (цилиндром) не позволяет учесть все особенности изменения блеска.

На рис. 9 показаны соответствующие картины распределения отраженной энергетической яркости для полной 3D-модели SIRIO-1.

Заключение

Разработана программа для моделирования видимого блеска орбитальных объектов с использованием физически корректного рендеринга. Для расчета положений

небесных тел была применена библиотека Skyfield, а для рендеринга – система Mitsuba3. Проведена серия тестовых расчетов для диффузных и зеркальных объектов простой формы (сфера, цилиндр, пластина), показавшая высокую точность совпадения результатов с аналитическими формулами: относительная ошибка менее 0.002% для диффузных поверхностей и менее 1.2% для зеркальных.

Приведены предварительные результаты моделирования видимого блеска геостационарного спутника SIRIO-1, которые показали, что представление его объектом простой геометрической формы (цилиндром) не позволяет учесть все особенности изменения блеска, т.е. требуется использование полной 3D-модели SIRIO-1.

В следующих исследованиях в данном направлении разработанная программа будет использована для анализа данных наблюдений кривых блеска космических объектов.

Список источников

1. *Fankhauser F., Tyson J.A., Askari J.* Satellite Optical Brightness // The Astronomical Journal. 2023. V. 166 (2). Art. 59 (12 p). doi: 10.3847/1538-3881/ace047
2. *Nussbaum M., Schafer E., Yoon Z., Keil D., Stoll E.* Spectral Light Curve Simulation for Parameter Estimation from Space Debris // Aerospace. 2022. V. 9 (8). Art. 403. doi: 10.3390/aerospace9080403
3. *Burandt D., Hampf D., Rodmann J., Riede W.* Interpretation of light curves based on simulation software // Proc. 68th International Astronautical Congress (IAC), Adelaide, Australia, 25–29 September 2017. Paper IAC-17-A6.IP.7.x38789. Paris: International Astronautical Federation (IAF).
4. *Kerr E., Hall D., Kueppers M.* Light curves for geo object characterization // Proc. 8th European Conference on Space Debris (virtual), Darmstadt, Germany, 20–23 April 2021. V. 8, is. 1 / ESA Space Debris Office. URL: <https://conference.sdo.esoc.esa.int/proceedings/sdc8/paper/66/SDC8-paper66.pdf>
5. *Allworth J., Windrim L., Bennet J., Bryson M.* A transfer learning approach to space debris classification using observational light curve data // Acta Astronautica. 2021. V. 181. P. 301–315. doi: 10.1016/j.actaastro.2021.01.048
6. *Cabrera D.V., Utzmann J., Forstner R.* Integration of attitude characterization in a space debris catalogue using light curves // Proc. 8th European Conference on Space Debris (virtual), Darmstadt, Germany, 20–23 April 2021 / ESA Space Debris Office. URL: <https://conference.sdo.esoc.esa.int/proceedings/sdc8/paper/75/SDC8-paper75.pdf>
7. *Meyer T., Keil D., Traub D., Scharring S., Riede W., Dekorsy T., Nussbaum M., Lengowski M., Schweigert R., Klinkner S.* High-fidelity light curve simulation and validation using empirical data // 25th AMOS Conference Technical Paper, 2024. URL: <https://amostech.com/TechnicalPapers/2024/Poster/Meyer.pdf>
8. *Wang Y., Du X., Zhao J., Yin Z., Song Y.* What causes the abrupt changes in the light curve of a GEO satellite? // Acta Astronautica. 2018. V. 153. P. 130–137. doi: 10.1016/j.actaastro.2018.10.035
9. *Caddy S.E., Spitler L.R.* A Surprising Boost in Starlink Satellite Brightness at Optical Wavelengths During the Day // 25th AMOS Conference Technical Paper, 2024. URL: <https://amostech.com/TechnicalPapers/2024/SDA-Systems-and-Instrumentation/Caddy.pdf>
10. *Endo T., Tsuchikawa T., Anada T., Ono H., Tsuji H.* Simulating the Photometric Light Curve of Artificial Satellites in GEO used with a Ray-Tracing // 24th AMOS Conference Technical Paper, 2023. URL: <https://amostech.com/TechnicalPapers/2023/Poster/Endo.pdf>
11. *Skuljan J.* A three-dimensional photometric model of a satellite in geostationary orbit // 22nd AMOS Conference Technical Paper, 2021. URL: <https://amostech.com/TechnicalPapers/2021/Poster/Skuljan.pdf>

12. ESA Space Environment Report 2025 / The European Space Agency. 2025. URL: https://www.esa.int/Space_Safety/Space_Debris/ESA_Space_Environment_Report_2025
13. *Falchi F., Bara S., Cinzano P., Lima R.C., Pawley M.* A call for scientists to halt the spoiling of the night sky with artificial light and satellites // *Nature Astronomy*. 2023. V. 7. P. 237–239. doi: 10.1038/s41550-022-01864-z
14. *Barentine J.C., Venkatesan A., Heim J., Lowenthal J., Kocifaj M., Bará S.* Aggregate effects of proliferating low-Earth-orbit objects and implications for astronomical data lost in the noise // *Nature Astronomy*. 2023. V. 7. P. 252–258. doi: 10.1038/s41550-023-01904-2
15. *Gallozzi S., Scardia M., Maris M.* Concerns about ground-based astronomical observations: quantifying satellites' constellations damages // arXiv:2003.05472v3 [astro-ph.IM], 2020. doi: 10.48550/arXiv.2003.05472
16. *McDowell J.C.* The Low Earth Orbit Satellite Population and Impacts of the SpaceX Starlink Constellation // *The Astrophysical Journal Letters*. 2020. V. 892 (2). Art. L36 (10 p.). doi: 10.3847/2041-8213/ab8016
17. *Lawrence A., Rawls M.L., Jah M., Boley A., Di Vruno F., Garrington S., Kramer M., Lawler S., Lowenthal J., McDowell J., McCaughrean M.* The case for space environmentalism // *Nature Astronomy*. 2022. V. 6. P. 428–435. doi: 10.1038/s41550-022-01655-6
18. *Hainaut O.R., Williams A.P.* Impact of satellite constellations on astronomical observations with ESO telescopes in the visible and infrared domains // *Astronomy & Astrophysics*. 2020. V. 636. Art. 121. doi: 10.1051/0004-6361/202037501
19. *Lawler S.M., Boley A.C., Rein H.* Visibility Predictions for Near-Future Satellite Megaconstellations: Latitudes near 50° will Experience the Worst Light Pollution // *The Astronomical Journal*. 2022. V. 163 (1). Art. 21 (14 p.). doi: 10.3847/1538-3881/ac341b
20. *Mallama A.* A Flat-Panel Brightness Model for the Starlink Satellites and Measurement of their Absolute Visual Magnitude // arXiv:2003.07805v1 [astro-ph.IM], 2020. doi: 10.48550/arXiv.2003.07805
21. *Mallama A.* Starlink Satellite Brightness Before VisorSat // arXiv:2006.08422v1 [astro-ph.EP], 2020. doi: 10.48550/arXiv.2006.08422
22. *Cole R.E.* A Sky Brightness Model for the Starlink 'Visorsat' Spacecraft – II // arXiv:2107.06026v1 [astro-ph.IM], 2021. doi: 10.48550/arXiv.2107.06026
23. *Cognion R.L.* Observations and Modeling of GEO Satellites at Large Phase Angles // 14th AMOS Conference Technical Paper, 2013. URL: <https://amostech.com/TechnicalPapers/2013/POSTER/COGNION.pdf>
24. *Захваткин М.В.* Моделирование видимого блеска космического аппарата «Спектр-Р» для планирования астрометрических наблюдений // *Машиностроение и компьютерные технологии*. 2013. № 5. С. 303–311.
25. *Pharr M., Jakob W., Humphreys G.* Physically based rendering: from theory to implementation. 4th ed. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 2023. 1266 p.
26. *Rhodes B.* Skyfield: High precision research-grade positions for planets and Earth satellites generator // *Astrophysics Source Code Library*. Record ascl:1907.024. July 2019.
27. *Jakob W., Speierer S., Roussel N., Nimier-David M., Vicini D., Zeltner T., Nicolet B., Crespo M., Leroy V., Zhang Z.* Mitsuba 3 renderer: компьютерная программа. Версия 3.0.1. 2022. URL: <https://mitsuba-renderer.org> (дата обращения: 20.10.2025).
28. *McCue G.A., Williams J.G., Morford J.M.* Optical characteristics of artificial satellites // *Planet. Space Sci.* 1971. V. 19 (8). P. 851–868.
29. *Carassa F., Ciavoli Cortelli L.A., Macchia M., Tirro S.* The SIRIO programme // *Acta Astronautica*. 1978. V. 5. P. 385–413.
30. *Burden S., Sjoedin P.* Sirio in HBF 3 chamber in building 24 at ESTEC // *ESA Space Heritage Image Project*. 2023. URL: <https://ship.esa.int/ISS/view.jsp?cid=ESTEC-PHOTO-1977.03.893>
31. Mitsuba 3 Documentation. Smooth diffuse material (diffuse) // *Mitsuba Renderer Project*. URL: https://mitsuba.readthedocs.io/en/latest/src/generated/plugins_bsdfs.html#smooth-diffuse-material-diffuse

32. Mitsuba 3 Documentation. Rough conductor material (roughconductor) // Mitsuba Renderer Project. URL: https://mitsuba.readthedocs.io/en/latest/src/generated/plugins_bsdfs.html#rough-conductor-material-roughconductor

References

1. Fankhauser F., Tyson J.A., Askari J. (2023) Satellite optical brightness. *The Astronomical Journal*. 166(2). Article 59. pp. 1–12. doi: 10.3847/1538-3881/ace047
2. Nussbaum M., Schafer E., Yoon Z., Keil D., Stoll E. (2022) Spectral light curve simulation for parameter estimation from space debris. *Aerospace*. 9(403). doi: 10.3390/aerospace9080403
3. Burandt D., Hampf D., Rodmann J., Riede W. (2017) Interpretation of light curves based on simulation software. *Proceedings of the 68th International Astronautical Congress, Adelaide, Australia*. Article IAC-17-A6.IP.7.x38789. Paris: International Astronautical Federation (IAF).
4. Kerr E., Hall D., Kueppers M. (2021) Light curves for geo object characterization. *Proceedings of the 8th European Conference on Space Debris (virtual), Darmstadt, Germany*. 8(1). ESA Space Debris Office. Access mode: <https://conference.sdo.esoc.esa.int/proceedings/sdc8/paper/66/SDC8-paper66.pdf>
5. Allworth J., Windrim L., Bennet J., Bryson M. (2021) A transfer learning approach to space debris classification using observational light curve data. *Acta Astronautica*. 181. pp. 301–315. doi: 10.1016/j.actaastro.2021.01.048
6. Cabrera D.V., Utzmann J., Forstner R. (2021) Integration of attitude characterization in a space debris catalogue using light curves. *Proceedings of the 8th European Conference on Space Debris (virtual), Darmstadt, Germany*. ESA Space Debris Office. Access mode: <https://conference.sdo.esoc.esa.int/proceedings/sdc8/paper/75/SDC8-paper75.pdf>
7. Meyer T., Keil D., Traub D., Scharring S., Riede W., Dekorsy T., Nussbaum M., Lengowski M., Schweigert R., Klinkner S. (2024) High-fidelity light curve simulation and validation using empirical data. *The 25th AMOS Conference Technical Paper*. Access mode: <https://amos-tech.com/TechnicalPapers/2024/Poster/Meyer.pdf>
8. Wang Y., Du X., Zhao J., Yin Z., Song Y. (2018) What causes the abrupt changes in the light curve of a GEO satellite? *Acta Astronautica*. 153. pp. 130–137. doi: 10.1016/j.actaastro.2018.10.035
9. Caddy S.E., Spittler L.R. (2024) A surprising boost in Starlink satellite brightness at optical wavelengths during the day. *The 25th AMOS Conference Technical Paper*. Access mode: <https://amostech.com/TechnicalPapers/2024/SDA-Systems-and-Instrumentation/Caddy.pdf>
10. Endo T., Tsuchikawa T., Anada T., Ono H., Tsuji H. (2023) Simulating the photometric light curve of artificial satellites in GEO used with a ray-tracing. *The 24th AMOS Conference Technical Paper*. Access mode: <https://amostech.com/TechnicalPapers/2023/Poster/Endo.pdf>
11. Skuljan J. (2021) A three-dimensional photometric model of a satellite in geostationary orbit. *The 22nd AMOS Conference Technical Paper*. Access mode: <https://amostech.com/TechnicalPapers/2021/Poster/Skuljan.pdf>
12. ESA Space Environment Report (2025) URL: https://www.esa.int/Space_Safety/Space_Debris/ESA_Space_Environment_Report_2025
13. Falchi F., Bara S., Cinzano P., Lima R.C., Pawley M. (2023) A call for scientists to halt the spoiling of the night sky with artificial light and satellites. *Nature Astronomy*. 7. pp. 237–239. doi: 10.1038/s41550-022-01864-z
14. Barentine J.C., Venkatesan A., Heim J., Lowenthal J., Kocifaj M., Bará S. (2023) Aggregate effects of proliferating low-Earth-orbit objects and implications for astronomical data lost in the noise. *Nature Astronomy*. 7. pp. 252–258. doi: 10.1038/s41550-023-01904-2
15. Gallozzi S., Scardia M., Maris M. (2020) Concerns about ground-based astronomical observations: quantifying satellites' constellations damages. *ArXiv*. 2003.05472v3 [astro-ph.IM]. doi: 10.48550/arXiv.2003.05472

16. McDowell J.C. (2020) The low Earth orbit satellite population and impacts of the SpaceX Starlink constellation. *The Astrophysical Journal Letters*. 892(2). L36. pp. 1–10. doi: 10.3847/2041-8213/ab8016
17. Lawrence A., Rawls M.L., Jah M., Boley A., Di Vruono F., Garrington S., Kramer M., Lawler S., Lowenthal J., McDowell J., McCaughrean M. (2022) The case for space environmentalism. *Nature Astronomy*. 6. pp. 428–435. doi: 10.1038/s41550-022-01655-6
18. Hainaut O.R., Williams A.P. (2020) Impact of satellite constellations on astronomical observations with ESO telescopes in the visible and infrared domains. *Astronomy & Astrophysics*. 636. Article 121. doi: 10.1051/0004-6361/202037501
19. Lawler S.M., Boley A.C., Rein H. (2022) Visibility predictions for near-future satellite mega-constellations: latitudes near 50° will experience the worst light pollution. *The Astronomical Journal*. 163(1). Article 21. pp. 1–14. doi: 10.3847/1538-3881/ac341b
20. Mallama A. (2020) A flat-panel brightness model for the Starlink satellites and measurement of their absolute visual magnitude. *ArXiv*. 2003.07805v1 [astro-ph.IM]. doi: 10.48550/arXiv.2003.07805
21. Mallama A. (2020) Starlink satellite brightness before Visorsat. *ArXiv*. 2006.08422v1 [astro-ph.EP]. doi: 10.48550/arXiv.2006.08422
22. Cole R.E. (2021) A sky brightness model for the Starlink ‘Visorsat’ spacecraft – II. *ArXiv*. 2107.06026v1 [astro-ph.IM]. doi: 10.48550/arXiv.2107.06026
23. Cognion R.L. (2013) Observations and modeling of GEO satellites at large phase angles. *The 14th AMOS Conference Technical Paper*. Access mode: <https://amotech.com/TechnicalPapers/2013/POSTER/COGNION.pdf>
24. Zakhvatkin M.V. (2013) Modelirovanie vidimogo bleska kosmicheskogo apparata «Spektr-R» dlya planirovaniya astrometricheskikh nablyudeniy [Simulation of apparent brightness of the “Spectr-R” spacecraft for planning astrometric observations]. *Mashinostroenie i komp'yuternye tekhnologii*. 5. pp. 303–311.
25. Pharr M., Jakob W., Humphreys G. (2023) *Physically Based Rendering: From Theory to Implementation*. 4th edition. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers.
26. Rhodes B. (2019) Skyfield: High precision research-grade positions for planets and Earth satellites generator. *Astrophysics Source Code Library*. Record ascl:1907.024
27. Jakob W., Speierer S., Roussel N., Nimier-David M., Vicini D., Zeltner T., Nicolet B., Crespo M., Leroy V., Zhang Z. (2022) *Mitsuba 3 renderer* [Computer software]. Version 3.0.1. URL: <https://mitsuba-renderer.org>
28. McCue G.A., Williams J.G., Morford J.M. (1971) Optical characteristics of artificial satellites. *Planetary and Space Science*. 19(8). pp. 851–868. doi: 10.1016/0032-0633(71)90137-1
29. Carassa F., Ciavoli Cortelli L.A., Macchia M., Tirro S. (1978) The SIRIO programme. *Acta Astronautica*. 5. pp. 385–413. doi: 10.1016/0094-5765(78)90097-8
30. Burden S., Sjoedin P. (2023) Sirio in HBF 3 chamber in building 24 at ESTEC. *ESA Space Heritage Image Project*. URL: <https://ship.esa.int/ISS/view.jsp?cid=ESTEC-PHOTO-1977.03.893>
31. Mitsuba3 Documentation. Smooth Diffuse Material (Diffuse). *Mitsuba Renderer Project*. URL: https://mitsuba.readthedocs.io/en/latest/src/generated/plugins_bsdfs.html#smooth-diffuse-material-diffuse
32. Mitsuba3 Documentation. Rough Conductor Material (Roughconductor). *Mitsuba Renderer Project*. URL: https://mitsuba.readthedocs.io/en/latest/src/generated/plugins_bsdfs.html#rough-conductor-material-roughconductor

Сведения об авторах:

Афонин Антон Геннадьевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории оптимизации Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: aag@niipmm.tsu.ru

Бутов Владимир Григорьевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом математической физики Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: bvg@niipmm.tsu.ru

Кулешов Артем Александрович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории оптимизации Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: artem.kuleshov@niipmm.tsu.ru

Солоненко Виктор Александрович – кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией оптимизации Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: vik@niipmm.tsu.ru

Ящук Алексей Александрович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории оптимизации Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: rainbow@niipmm.tsu.ru

Information about the authors:

Afonin Anton G. (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: aag@niipmm.tsu.ru

Butov Vladimir G. (Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: bvg@niipmm.tsu.ru

Solonenko Viktor A. (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: vik@niipmm.tsu.ru

Kuleshov Artyom A. (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: artem.kuleshov@niipmm.tsu.ru

Yashchuk Aleksey A. (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: rainbow@niipmm.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 26.09.2025; принята к публикации 05.02.2026

The article was submitted 26.09.2025; accepted for publication 05.02.2026

Научная статья

УДК 539.4, 620.173, 621.762

doi: 10.17223/19988621/99/8

Структура и механические свойства пористых сплавов TiNi, полученных методом СВС

Александр Сергеевич Гарин¹, Александр Анатольевич Козулин²,
Гульшарат Аманболдыновна Байгонакова³,
Екатерина Сергеевна Марченко⁴

^{1, 2, 3, 4} Томский государственный университет, Томск, Россия

⁴ Институт проблем химико-энергетических технологий
Сибирского отделения Российской академии наук, Бийск, Россия

¹ stik-020@mail.ru

² kozulyln@ff.tsu.ru

³ gat27@mail.ru

⁴ 89138641814@mail.ru

Аннотация. Пористые сплавы TiNi, полученные методом СВС при температуре начала реакции 395–515°C, исследованы методом ОКТ. Пористость снижается с 63 до 58–59%, минимальный размер пор 5,9 мкм и минимальная толщина стенок 28.4 мкм при 495°C. При уменьшении пористости и размера пор модуль упругости достигает 2 400 МПа, σ_b – 128 МПа, ϵ_b ~ 14%. Зависимость σ_b от пористости описывается моделью Гибсона–Эшби с $n = 3.2$ ($R^2 = 0.98$).

Ключевые слова: никелид титана, пористые сплавы, СВС, пористость, размер пор, механические свойства; модель Гибсона–Эшби, оптическая когерентная томография (ОКТ), фазовый состав

Для цитирования: Гарин А.С., Козулин А.А., Байгонакова Г.А., Марченко Е.С. Структура и механические свойства пористых сплавов TiNi, полученных методом СВС // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2026. № 99. С. 109–124. doi: 10.17223/19988621/99/8

Original article

Structure and mechanical properties of the porous TiNi alloys obtained by SHS method

Aleksandr S. Garin¹, Alexander A. Kozulin²,
Gul'sharat A. Baygonakova³, Ekaterina S. Marchenko⁴

^{1, 2, 3, 4} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

⁴ Institute of Problems of Chemical and Energy Technologies of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Biysk, Russia, Russian Federation

¹ stik-020@mail.ru

² kozulyln@ff.tsu.ru

³ gat27@mail.ru⁴ 89138641814@mail.ru

Abstract. In this paper, the porous TiNi alloys produced by self-propagating high-temperature synthesis at reaction onset temperatures ranging from 395°C to 515°C were studied. Porosity, average pore size, and wall thickness were determined using optical coherence tomography. The porosity decreased from 63% to 58–59%; the pore size reached a minimum of 5.9 μm at 495°C and increased to 27.1 μm at 515°C. Wall thickness varied from 78.1 μm at 395°C to a minimum value of 28.4 μm at 495°C. The compressive mechanical response of the alloys was governed by the structural parameters of the porous framework. With decreasing porosity and average pore size, the elastic modulus increased from 1200–1300 MPa to 2400 MPa, the ultimate strength from ~65 MPa to 128 MPa, and the strain to failure from ~7% to ~14%. The most favorable combination of high strength and ductility was achieved at a temperature of 435°C. The dependence of the ultimate strength σ_B on porosity was approximated by the Gibson–Ashby model with $n = 3.2$ ($R^2 = 0.98$).

Keywords: titanium nickelide, porous alloys, SHS method, porosity, pore size, mechanical properties, Gibson-Ashby model, optical coherence tomography (OCT), phase composition

For citation: Garin, A.S., Kozulin, A.A., Baygonakova, G.A., Marchenko, E.S. (2026) Structure and mechanical properties of the porous TiNi alloys obtained by SHS method. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 99. pp. 109–124. doi: 10.17223/19988621/99/8

Введение

Пористые сплавы никелида титана (TiNi) представляют собой класс медицинских материалов, обладающих уникальными физико-химическими и биомеханическими характеристиками. Высокая биосовместимость и способность к обратимым мартенситным превращениям обусловили широкое применение таких сплавов в медицине, в частности в качестве костнозамещающих имплантатов [1, 2]. Пористая структура TiNi, с одной стороны, снижает эффективный модуль упругости до значений, сопоставимых с показателями костной ткани, что позволяет минимизировать эффект «экранирования напряжений» [3], а с другой – обеспечивает высокую проницаемость и развитую поверхность, благоприятную для остеоинтеграции и врастания костной ткани [2]. В совокупности эти факторы способствуют повышению стабильности и долговечности фиксации имплантатов из пористого TiNi.

Одним из основных методов синтеза пористого никелида титана является самораспространяющийся высокотемпературный синтез (СВС) [4, 5]. В основе процесса лежит реакционное горение смеси порошков Ti и Ni с последующим формированием фазы TiNi и спеканием материала. Метод СВС позволяет получать сплавы с широким диапазоном пористости, однородным химическим составом и развитой пористой структурой при высокой чистоте продукта [4–6]. Существенное преимущество СВС – возможность получения заготовок сравнительно крупных размеров и сложной формы непосредственно в ходе синтеза, что исключает необходимость дополнительного формообразования и сокращает производственный цикл.

Особое внимание в исследованиях пористого TiNi уделяется изучению механических свойств и их корреляции со структурными параметрами – уровнем

пористости, размером пор и толщиной межпоровых перемычек. Известно, что увеличение пористости приводит к снижению прочностных характеристик и модуля упругости. Так, при увеличении среднего размера пор от 280 до 570 мкм (с сопутствующим ростом доли пор) предел прочности при сжатии снижается с 108 до 56 МПа, а модуль Юнга – с 2.0 до 0.8 ГПа [7]. При меньшей пористости и более мелких порах прочностные характеристики значительно выше [8]. Пористые сплавы TiNi также демонстрируют заметную пластичность вплоть до 15–20% без разрушения за счет смятия поровой структуры [8]. Таким образом, регулирование пористости и морфологии пор позволяет целенаправленно изменять механические свойства материала, добиваясь согласования модуля упругости с диапазоном 0.3–1 ГПа [9, 10], характерным для губчатого костного вещества.

Несмотря на значительный прогресс в области синтеза и изучения пористых сплавов TiNi, остаются открытыми вопросы оптимизации их структуры под конкретные клинические применения. В частности, для метода СВС особую актуальность представляет исследование влияния параметров синтеза на формирование пористости, распределение размеров пор и связанные с ними механические характеристики. Показано, что режим и температура синтеза определяют морфологию пор и дефектность структуры, что в конечном счете влияет на прочностные характеристики материала. Однако в литературе отсутствуют систематические данные, описывающие влияние температуры инициирования СВС на комплекс структурных и механических свойств получаемого сплава. В этой связи цель настоящего исследования заключается в установлении взаимосвязи между температурой начала реакции СВС и формируемыми структурно-механическими характеристиками пористого сплава TiNi, что позволит оптимизировать технологические параметры синтеза для получения имплантационных материалов с предсказуемыми свойствами.

Материалы и методы

Пористые сплавы никелида титана получали методом самораспространяющегося высокотемпературного синтеза (СВС) при температурах начала реакции 395, 415, 435, 455, 475, 495 и 515°C. Порошковая шихта формировалась из титана марок ПТМ-1 и ПТОМ-2 (1:1 по массе) и никеля ПНК-ОТ4. Химический состав, размеры частиц и насыпная плотность исходных порошков показаны в табл. 1. Предварительно порошки просушивались в вакуумной печи при 70°C (8 ч, 0.1 МПа) с последующим смешиванием в течении 8 ч. Смесь загружали в кварцевую трубку длиной 400 мм и диаметром 27 мм и нагревали в трубчатой печи до заданной температуры. Запуск реакции осуществляли коротким замыканием на открытом торце трубки. Из цилиндрических заготовок вырезали образцы электроэрозионной резкой на установке ARTA-123ПРО.

Подготовка шлифов выполнялась стандартной абразивной обработкой на установке LAP-1000 с водным охлаждением. Контроль поверхности шлифа осуществлялся на оптическом микроскопе Carl Zeiss AXIOVERT 40 MAT. Микроструктура исследовалась на растровом электронном микроскопе Axia ChemiSEM с ускоряющим напряжением 20–30 кВ.

Количественный анализ пористого каркаса проводили методом оптической когерентной томографии (ОКТ) на установке Thorlabs GANYMEDE-II. Область обзора составляла $3 \times 3 \times 3$ мм. Для каждого образца регистрировалась серия С-сканов

с обеих сторон, в сумме получалось ~ 500 ОКТ-изображений по всему температурному ряду.

Таблица 1

Химический и гранулометрический состав порошков Ti и Ni

Марка порошка	Химический состав (вес. %)	Средний размер частиц, мкм	Насыпная плотность, г/см ³
ПТМ-1 (Ti)	Ti – осн, N – 0.08%, C – 0.05%, H – 0.35%, Fe/Ni – 0.40%, Si – 0.10%, Cl – 0.004%	45	1.02
ПТОМ-2 (Ti)	Ti – осн, N – 0.20%, C – 0.05%, H – 0.40%, Fe/Ni – 0.40%, Si – 1.00%, Cl – 0.004%	45	1.36
ПНК-ОТ4 (Ni)	Ni – осн., Ni – 99.9%, C – 0.15%, Fe – 0.0015%, Co/Zn/Cu – 0.001%, Cd/Sn/Sb – 0.0003%, Mn – 0.0005%, Pb – 0.0002%	12	1.66

Механические испытания на одноосное сжатие проводились по стандарту ISO 13314:2011 на универсальном электромеханическом стенде TiniusOlsen ST50. Образцы призматической формы 8×8×15 мм³ устанавливали между плоскими пуансонами, скорость перемещения траверсы составляла 1.0 мм/мин.

Результаты и обсуждение

При различных температурах начала реакции СВС реализуется постоянный полойный режим горения, что обуславливает последовательное продвижение фронта реакции через объем образца. Макрофотографии продольных сечений показывают, что во всем диапазоне температур образцы имеют выраженную пористость, сохраняют однородную сеть взаимосвязанных поровых каналов с равномерным распределением длине образца (рис. 1).

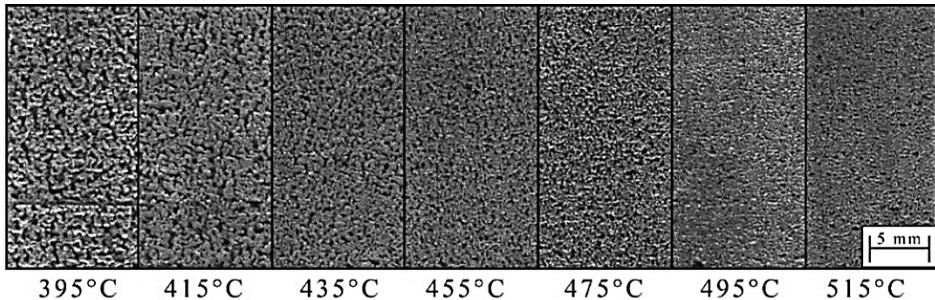


Рис. 1. Изображение продольного сечения пористого сплава TiNi, полученного методом СВС при разных начальных температурах синтеза
Fig. 1. Longitudinal section of the porous TiNi alloy obtained by SHS method at different initial synthesis temperatures

При увеличении температуры синтеза от 395 до 515°C общая морфология сохраняется, однако структура становится более плотной, размер пор уменьшается, что связано с оптимальным распределением тепла и интенсивным теплопереносом в зоне реакции. Структура образцов не демонстрирует признаков слоистой интенсив-

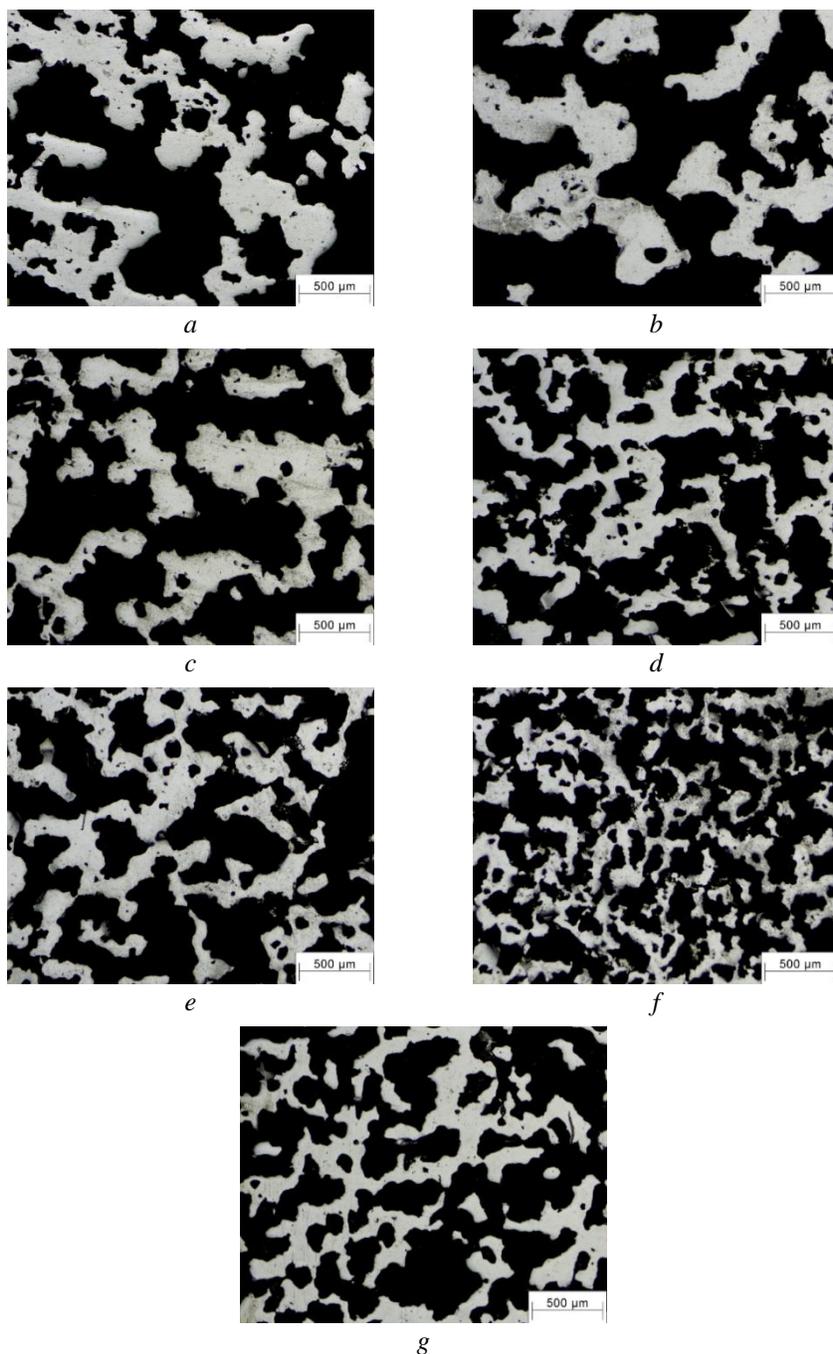


Рис. 2. Микроструктура пористых сплавов, полученных методом СВС:
a – 395°C; *b* – 415°C; *c* – 435°C; *d* – 455°C; *e* – 475°C; *f* – 495°C; *g* – 515°C
Fig. 2. Microstructure of the porous alloys obtained by SHS method:
(*a*) 395, (*b*) 415, (*c*) 435, (*d*) 455, (*e*) 475, (*f*) 495, and (*g*) 515°C

ный тепломассоперенос способствуют равномерному распределению мелких пор, неоднородности, возникающей при чередовании зон локального прогрева и остывания. Капиллярные каналы имеют одинаковый вид по всей длине образцов, что указывает на стабилизированный фронт реакции. Зоны реакции и распределение тепла зависят от температуры: при низких температурах реакционная зона более протяженная, что связано с меньшей скоростью теплопередачи; при высоких температурах зона сужается, обеспечивая равномерное протекание процесса и более плотную конечную структуру.

Оптические изображения микроструктуры пористых сплавов никелида титана, синтезированных при температурах 395–515°C (рис. 2), а также количественные характеристики пористой структуры, полученные методом оптической когерентной томографии (рис. 3, табл. 2), позволили оценить влияние температуры синтеза на пористость, средний размер пор и толщину стенок – ключевые параметры, определяющие архитектуру материала и влияющие на его механические свойства.

При 395°C отмечаются высокая пористость ~ 63%, крупные поры (средний размер 43.2 мкм) и толстые стенки (78.1 мкм) с неустойчивым распределением по размеру, что указывает на низкую интенсивность тепломассопереноса и широкий фронт реакции. Увеличение температуры до 415°C ведет к снижению пористости до 61%, уменьшению среднего размера пор до 41.5 мкм и толщины стенок до 73.1 мкм, а структура становится более упорядоченной благодаря частичному уплотнению матрицы. При 435°C пористость сохраняется на уровне 61%, но поры увеличиваются до 58.1 мкм, а стенки – до 80.3 мкм. Такое распределение сопровождается повышенной неоднородностью и локальными концентрациями напряжений. Температурный диапазон 455–475°C характеризуется снижением среднего размера пор с 36 до 25.4 мкм и уменьшением толщины стенок с 69.2 до 56.1 мкм при стабильной пористости около 60%. Это приводит к формированию более плотной, однородной структуры с суженным распределением размеров пор и стенок, что способствует повышению плотности матрицы. Максимально мелкопористая и плотная структура сформирована при 495°C, где средний размер пор достигает минимального значения 5.9 мкм, толщины стенок сокращаются до 28.4 мкм, а пористость составляет порядка 59%. Высокая скорость фронта горения и что снижает концентрацию напряжений и улучшает механические характеристики. При повышении температуры до 515°C наблюдаются обратный рост среднего размера пор (27.1 мкм) и утолщение стенок до 58.7 мкм, вероятно связанные с локальным перегревом и коалесценцией мелких пор. Несмотря на это, распределение пор остается достаточно равномерным, сохраняя сбалансированную микроструктуру.

Наблюдаемые закономерности согласуются с термодинамикой процесса СВС. По мере роста температуры начала СВС сужается реакционная зона и усиливается тепломассоперенос, что стабилизирует фронт горения и ведет к уплотнению пористого каркаса и снижению размера пор. Дальнейшее повышение температуры вызывает локальный перегрев и коалесценцию пор, что приводит к обратному укрупнению (515°C).

На рис. 4 и в табл. 3 представлены кривые сжатия напряжение–деформация (σ – ϵ) образцов, полученных при температурах 395–515°C. Анализ результатов в сочетании со структурными особенностями демонстрируют закономерные изменения механического поведения в зависимости от пористости, среднего размера пор и толщины стенок.

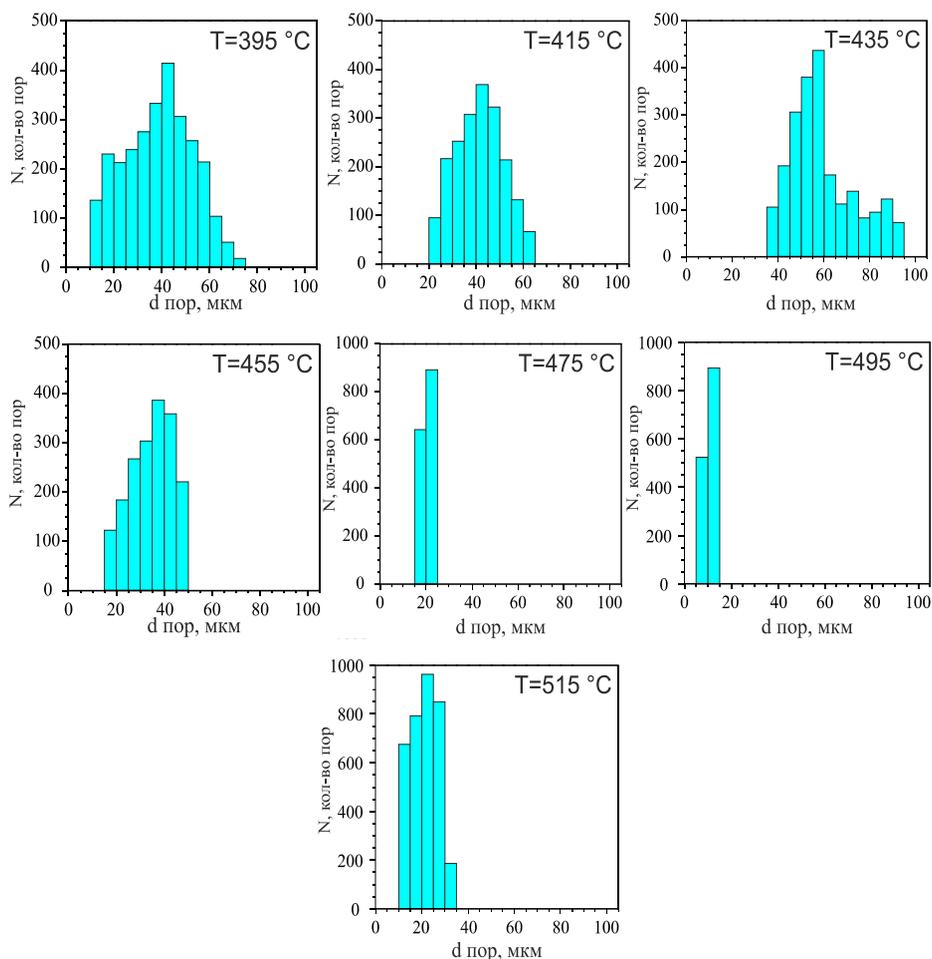


Рис. 3. Гистограмма распределения пор по размерам в пористых сплавах СВС–TiNi
Fig. 3. Histogram of the pore size distribution in porous TiNi SHS alloys

Таблица 2

**Зависимость пористости, среднего размера пор и толщины стенок
от температуры начала синтеза**

Температура начала синтеза, °С	Пористость, %	Средний размер пор, мкм	Средний размер толщины стенок, мкм
395	~ 63	43.2	78.1
415	~ 61	41.5	73.1
435	~ 61	58.1	80.3
455	~ 60	36	69.2
475	~ 60	25.4	56.1
495	~ 59	5.9	28.4
515	~ 58	27.1	58.7

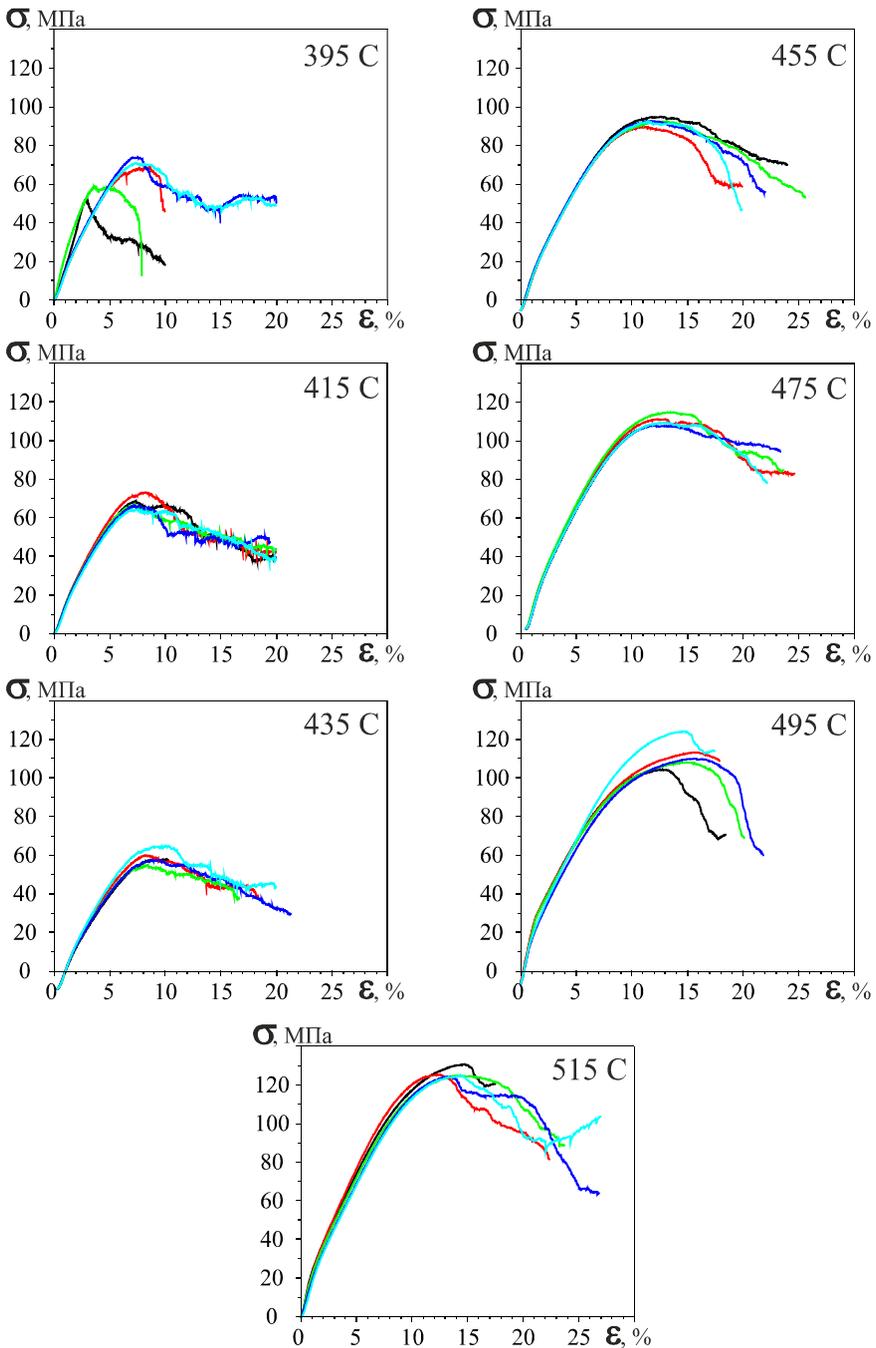


Рис. 4. Кривые сжатия напряжение-деформация (σ - ϵ) образцов TiNi, полученных при температурах 395–515°C

Fig. 4. Stress-strain (σ - ϵ) compression curves of the TiNi samples obtained in a temperature range of 395–515°C

Результаты механических испытаний пористых образцов TiNi

T СВС, °С	E , МПа	$\sigma_{0.2}$, МПа	σ_B , МПа	ϵ_B , %
395	$1\,300 \pm 124$	41.5 ± 5.8	65 ± 9.2	6.80 ± 1.45
415	$1\,308 \pm 13$	38.7 ± 2.3	68 ± 3.4	7.68 ± 0.47
435	$1\,204 \pm 45$	36.9 ± 2.9	68.6 ± 3.8	9.06 ± 0.85
455	$1\,622 \pm 32$	35.2 ± 0.3	98.1 ± 2.0	12.02 ± 0.77
475	$1\,870 \pm 65$	35.2 ± 2.0	108.8 ± 3.1	12.25 ± 0.79
495	$2\,428 \pm 200$	35.3 ± 5.0	114 ± 4.5	14.58 ± 1.36
515	$2\,334 \pm 356$	31.7 ± 4.0	128 ± 3.1	14.02 ± 0.62

Примечание. E – модуль упругости, $\sigma_{0.2}$ – предел текучести, σ_B – предел прочности на сжатие, ϵ_B – относительное удлинение при разрушении.

Кривые σ – ϵ демонстрируют характерные особенности пористых материалов, где наличие пор вызывает сглаживание мартенситного плато из-за локальных концентраций напряжений. Образцы, синтезированные при 395°С, обладают максимальной пористостью (~ 63%) с крупными порами (~ 43.2 мкм) и толстыми стенками (78.1 мкм), что отражается в вариативности механических параметров: модуль упругости составляет $1\,300 \pm 124$ МПа, предел текучести – 41.5 ± 5.8 МПа, предел прочности – 65 ± 9.2 МПа, относительное удлинение – $6.8 \pm 1.45\%$. Плато после максимального напряжения указывает на коллапс пор и локальные разрушения, проявляющие хрупкое поведение материала. При увеличении температуры до 415°С наблюдается уменьшение среднего размера пор при сохранении их нерегулярной формы, что приводит к значению модуля упругости $1\,308 \pm 13$ МПа, пределу текучести 38.7 ± 2.3 МПа, прочности 68 ± 3.4 МПа и удлинению $7.68 \pm 0.47\%$. Пластичность повышается за счет снижения концентраций напряжений, однако размер все еще ограничивает прочность, что проявляется постепенным снижением напряжения после пика.

При 435°С снижается модуль упругости до $1\,204 \pm 45$ МПа, предел текучести достигает 36.9 ± 2.9 МПа, предел прочности – 68.6 ± 3.8 МПа, а относительное удлинение увеличивается до $9.06 \pm 0.85\%$. Толстые стенки сплава обеспечивают большую деформационную способность, уменьшая хрупкость, несмотря на рост размеров пор. При температурах 455–475°С происходит уплотнение структуры с уменьшением среднего размера пор до 36–25.4 мкм, что снижает концентрации напряжений и приводит к значительному росту прочности (98–109 МПа) и пластичности (~ 12%). Кривые σ – ϵ приобретают форму, характерную для более пластичного материала, с выраженным упругим участком и удлиненным плато, обеспечивающим равномерное распределение нагрузки.

Максимальные механические показатели достигаются при 495°С, когда средний размер пор минимален (5.9 мкм), пористость снижается до 58%, модуль упругости достигает $2\,428$ МПа, предел прочности – 114 МПа, пластичность – 14.6% . Здесь наблюдаются длительный упругий участок и плавный переход к пластичной деформации, обусловленные снижением концентраций напряжений благодаря мелкопористой структуре и доминированию матрицы. Чрезмерно тонкие стенки (28.4 мкм) могут ограничивать долговечность при циклических нагрузках. При дальнейшем повышении температуры до 515°С модуль упругости несколько снижается ($2\,334$ МПа), но предел прочности увеличивается до 128 МПа, сохраняя пластичность на уровне 14%.

Механические свойства пористых сплавов TiNi тесно связаны с их структурными характеристиками, формируемыми в процессе синтеза. С уменьшением пористости и средних размеров пор наблюдается рост модуля упругости, предела прочности и пластичности. Оптимальные свойства достигаются при температуре синтеза 435°C, что подтверждает ключевую роль морфологии пористой структуры в формировании механического отклика материала.

Для количественной оценки выполнена линейная аппроксимация зависимостей от температуры начала СВС по методу наименьших квадратов (рис. 5).

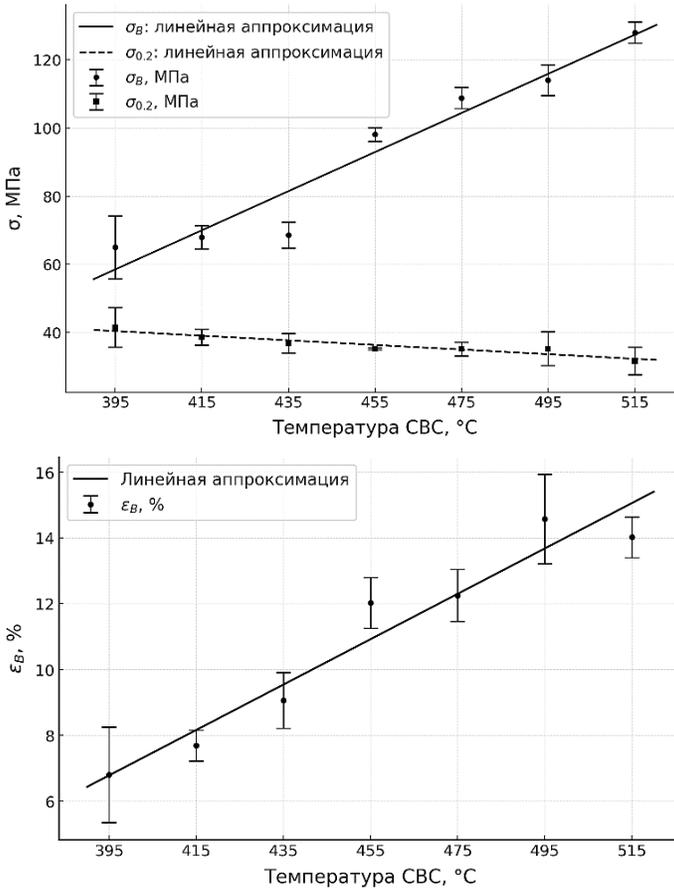


Рис. 5. Зависимость механических характеристик от температуры начала синтеза СВС
Fig. 5. Mechanical characteristics as a function of temperature of the SHS synthesis initiation

Предел прочности σ_B растет по закону

$$\sigma_B(T) = 0.5736T - 168.05 \text{ МПа}, R^2 = 0,934,$$

т.е. при увеличении T на 20°C σ_B возрастает примерно на 11.5 МПа. Предел текучести убывает линейно:

$$\sigma_{0.2}(T) = -0.06768T + 67.15 \text{ МПа}, R^2 = 0,889,$$

что соответствует снижению ~ 1.35 МПа на каждые 20°C.

Относительная деформация при максимальной нагрузке возрастает:

$$\varepsilon_B(T) = 0.06902T - 20.49 \%, R^2 = 0,937$$

т.е. прирост $\sim 1.38\%$ на каждые 20°C . Высокие значения R^2 подтверждают достоверность линейной модели для рассматриваемого диапазона температур.

В качестве основы для описания зависимости прочностных характеристик пористых сплавов никелида титана от их пористости традиционно используется модель Гибсона–Эшби для ячеистых структур [11]. Далее приводятся краткие теоретические выкладки, подтвержденные экспериментальными аппроксимациями пористых образцов с использованием пакетного программного комплекса OriginPro.

Пусть P обозначает объемную долю пористости материала:

$$P = \frac{V_{\text{пор}}}{V_{\text{общий}}}, 0 \leq P < 1,$$

где $V_{\text{пор}}$ – объем пустот (пор), $V_{\text{общий}}$ – общий объем образца. Введем эффективную плотность пористого образца ρ^* через плотность сплошного (непористого) материала ρ_s как

$$\rho^* = \rho_s (1 - P). \quad (1)$$

Согласно модели Гибсона–Эшби, относительная прочность σ^*/σ_s пористого образца масштабируется как некоторая степень относительной плотности:

$$\frac{\sigma^*}{\sigma_s} = C \left(\frac{\rho^*}{\rho_s} \right)^n = C (1 - P)^n, \quad (2)$$

где σ^* – предел прочности при сжатии пористого образца; σ_s – предел прочности сплошного образца; C – безразмерный коэффициент, учитывающий геометрию ячеек; n – показатель степени, отражающий характер нагружения стенок: при преобладании изгибного режима $n \approx 1.5$, при преимущественно растягивающе-сжимающем режиме $n \approx 2$.

Таким образом, универсальная формула для прочности пористого сплава имеет вид:

$$\sigma^*(P) = \sigma_s \cdot C (1 - P)^n. \quad (3)$$

Для каждого образца измерялась объемная плотность ρ^* , позволяющая вычислить пористость $P = 1 - \rho^*/\rho_s$ и предел прочности при сжатии σ_B .

Полагая, что в рассматриваемом диапазоне температур структура образцов ближе к закрытой ячеистой (доминируют тонкие пластинчатые стенки, нагруженные преимущественно на сжатие), положим исходно $C = 1$. Тогда формула (3) упрощается до вида:

$$\sigma_B(P) = \sigma_s (1 - P)^n. \quad (4)$$

Для параметра σ_s принято значение 1 900 МПа, поскольку оно соответствует характерному уровню предельной прочности при одноосном сжатии для монолитного, близкого к эквиацетному TiNi, описанного в литературе. В ряде работ для монолитного TiNi фиксируется предел прочности на сжатие порядка 1.9–2.2 ГПа, что делает 1.9 ГПа консервативной реперной величиной для нормирования зависимости Гибсона–Эшби [12].

Экспериментальная зависимость прочности от пористости для сплава TiNi (рис. 6, табл. 4) оказывается более резкой, чем предсказывается классическим

показателем $n \approx 2$. Величина $n = 3.2 \pm 0.2$ указывает на существенное влияние локальных концентраций напряжений в стенках ячеистого каркаса, а высокий разброс ± 0.2 обусловлен разбросом структурных параметров (толщина стенок, неоднородность пор) и экспериментальными погрешностями измерения плотности и прочности.

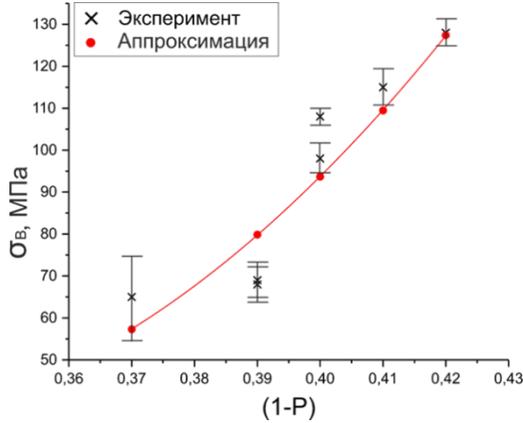


Рис. 6. Зависимости предела прочности σ_B от пористости сплавов TiNi (экспериментальные данные и аппроксимация моделью Гибсона–Эшби)

Fig. 6. Ultimate strength σ_B as a function of the porosity of TiNi alloys (experimental data and approximation by the Gibson–Ashby model)

Таблица 4

Зависимость геометрии порового каркаса и механических характеристик от температуры начала СВС

$T_{СВС}, ^\circ\text{C}$	$P, \%$	Ср. размер пор, мкм	Толщина стенок, мкм	$\sigma_B, \text{МПа}$	$E, \text{МПа}$	ϵ при $F_m, \%$
395	63	43.2	78.1	65.1 ± 9.2	$1\ 300 \pm 124$	6.80 ± 1.45
415	61	41.5	73.1	68.0 ± 3.4	$1\ 308 \pm 13$	7.68 ± 0.47
435	61	58.1	80.3	68.6 ± 3.8	$1\ 204 \pm 45$	9.06 ± 0.85
455	60	36.0	69.2	98.1 ± 2.0	$1\ 622 \pm 32$	12.02 ± 0.77
475	60	25.4	56.1	108.8 ± 3.1	$1\ 870 \pm 65$	12.25 ± 0.79
495	58	5.9	28.4	114.4 ± 4.4	$2\ 428 \pm 200$	14.58 ± 1.36
515	59	27.1	58.7	127.6 ± 3.1	$2\ 334 \pm 356$	14.02 ± 0.62

Таким образом, итоговая эмпирическая аппроксимация, примененная к образцам, имеет вид:

$$\sigma_B(P) = 1900(1 - P)^{3.2}, \tag{5}$$

где $\sigma_B = 1\ 900 \pm 300$ МПа, $n = 3.2 \pm 0.2$.

Классическая теория Гибсона–Эшби предполагает $n \in [1.5; 2]$ в зависимости от геометрии ячеек. Однако аппроксимация экспериментальных данных точнее при $n = 3.2$, что свидетельствует о более сложной топологии пористой структуры пористого сплава TiNi из-за высокой полидисперсности пор и неидеальной формы ячеек, существенной неоднородности толщины стенок и наличия микротрещин

и вклада локальных концентраций напряжений в пластинах, что ведет к убыли прочности с ростом пористости по нелинейному закону.

Таким образом, на основании модели Гибсона–Эшби и экспериментальной регрессии установлено, что прочность пористого сплава TiNi, полученного методом СВС, приближенно описывается формулой

$$\sigma_B(P) = (1900 \pm 300)(1 - P)^{3.2 \pm 0.2}, \quad 0.2 \leq P \leq 0.6 \quad (6)$$

Константа C в данной аппроксимации принята равной единице.

Для увязки прочности с технологическим параметром введем линейную регрессию пористости по температуре начала СВС:

$$P(T) = AT + B, \quad (7)$$

где P – объемная доля пористости, T – температура начала СВС в °С. По средним значениям пористости из табл. 4 методом наименьших квадратов получены

$$A = -5.00 \times 10^{-4} \text{°C}^{-1}, \quad B = 0.8275, \quad (8)$$

Подставляя $P(T)$ в степенной закон Гибсона–Эшби для предела прочности при сжатии и принимая $\sigma_c = 1900$ МПа и $n = 3.2$, получаем итоговое выражение

$$\sigma_B(T) = 1900[1 - (AT + B)]^{3.2} = 1900(0.1725 + 5.00 \times 10^{-4}T)^{3.2} \quad (9)$$

где T в °С, σ_B в МПа. Для ориентировочных оценок модель дает $\sigma_B(395^\circ\text{C}) \approx 87$ МПа, $\sigma_B(455^\circ\text{C}) \approx 111$ МПа, $\sigma_B(495^\circ\text{C}) \approx 129$ МПа, $\sigma_B(515^\circ\text{C}) \approx 139$ МПа, что воспроизводит монотонный рост прочности с повышением T на фоне снижения P (рис. 7).

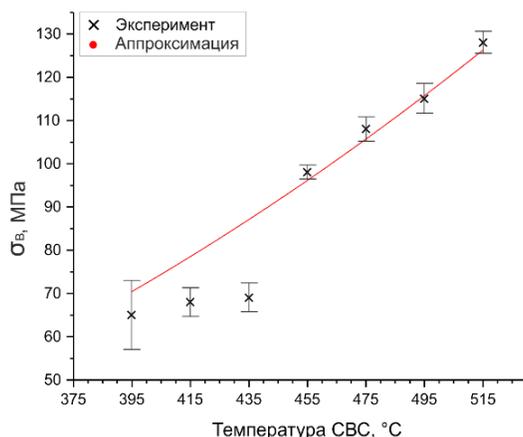


Рис. 7. Зависимости предела прочности σ_B от температуры (экспериментальные данные и аппроксимация моделью Гибсона–Эшби)

Fig. 7. Ultimate strength σ_B as a function of temperature (experimental data and approximation by the Gibson-Ashby model)

Введенная параметризация $P(T)$ объединяет влияние температуры начала СВС на пористую структуру в единственный скалярный аргумент модели. При фиксированных σ_c и n кривая аппроксимации захватывает общий тренд роста σ_B с T , однако часть разброса остается неопи­санной, что ожидаемо ввиду дополнительной роли среднего размера пор и толщины перемычек, не входящих непосредственно в $P(T)$. Тем не менее для целевого показателя σ_B предложенная форма $\sigma_B(T)$ удобна как простая инженерная оценка, согласованная с табличными значениями.

Заключение

Установлено, что температура инициирования СВС определяет структуру пористого каркаса TiNi и, как следствие, его механический отклик. С повышением температуры СВ-синтеза пористость снижается примерно с 63 до 58%, распределения пор и перемычек выравниваются, а размеры пор уменьшаются до минимума при 495°C и частично укрупняются при 515°C из-за коалесценции. При температуре начала синтеза 435°C формируется однородная пористая структура, обеспечивающая сочетание высокой прочности и пластичности с модулем упругости порядка 1.2 ГПа, пределом прочности около 70 МПа и деформацией до разрушения 9%, что соответствует требованиям к имплантационным материалам по биомеханической совместимости с губчатой костью. Улучшение механических свойств связано с сужением реакционной зоны и усилением тепломассопереноса при росте температуры, что снижает роль локальных концентраторов напряжений и стабилизирует коллапс пор, тогда как при дальнейшем перегреве проявляются укрупнение пор и частичная потеря однородности. Практически целевым является окно 495–515°C, позволяющее масштабируемо получать каркасы с предсказуемыми характеристиками. Зависимость прочности от пористости хорошо аппроксимируется моделью Гибсона–Эшби с константами $C = 1$, $n = 3.2$ ($R^2 = 0.98$), где повышенный показатель степени n указывает на влияние полидисперсности пор, неоднородности стенок и концентраций напряжений, превышающее классические значения для ячеистых материалов.

Список источников

1. Zhang Y., Attarilar S., Wang L., Lu W., Yang J., Fu Y. A Review on Design and Mechanical Properties of Additively Manufactured NiTi Implants for Orthopedic Applications // International Journal of Bioprinting. 2021. V. 7 (2). Art. 340. doi: 10.18063/ijb.v7i2.340
2. Safavi S., Yu Y., Robinson D.L., Gray H.A., Ackland D.C., Lee P.V.S. Additively manufactured controlled porous orthopedic joint replacement designs to reduce bone stress shielding: a systematic review // Journal of Orthopaedic Surgery and Research. 2023. V. 18. Art. 42. doi: 10.1186/s13018-022-03492-9
3. Aihara H., Zider J., Fanton G., Duerig T. Combustion synthesis porous nitinol for biomedical applications // International Journal of Biomaterials. 2019. V. 2019 (1). Art. 4307461. doi: 10.1155/2019/4307461
4. Saadati A., Aghajani H. Fabrication of porous NiTi biomedical alloy by SHS method // Journal of Materials Science: Materials in Medicine. 2016. V. 30 (8). P. 92. doi: 10.1007/s10856-019-6296-9
5. He Z., Wang Z., Wang D., Liu X. Microstructure and Mechanical Properties of Porous NiTi Alloy Prepared by Integration of Gel-Casting and Microwave Sintering // Materials. 2022. V. 15 (22). Art. 7331. doi: 10.3390/ma15207331
6. Maashaa D., Purevdagva E., Rubanik V.V., Rubanik V.V. Jr. The Influence of Ultrasonic Activation on Microstructure, Phase Transformation and Mechanical Properties of Porous Ni-Ti Shape Memory Alloys via Self-Propagating High-Temperature Synthesis // Materials. 2023. V. 16 (18). Art. 6134. doi: 10.3390/ma16186134
7. Jian Y.T., Yang Y., Tian T., Stanford C., Zhang X.P., Zhao K. Effect of pore size and porosity on the biomechanical properties and cytocompatibility of porous NiTi alloys // PLoS One. 2015. V. 10 (6). Art. e0128138. doi: 10.1371/journal.pone.0128138

8. Gong X.W., Zhang Y., Shi Q., Zhang L.X. Analysis of porous NiTi shape memory alloy fabricated by MIM and SHS // *Optoelectronics and Advanced Materials Rapid Communications*. 2016. V. 10 (1-2). P. 68–73.
9. Morgan E.F., Unnikrisnan G.U., Hussein A.I. Bone mechanical properties in healthy and diseased states // *Annual Review of Biomedical Engineering*. 2018. V. 20 (1). P. 119–143. doi: 10.1146/annurev-bioeng-062117-121139
10. Bansiddhi A., Sargeant T.D., Stupp S.I., Dunand D.C. Porous NiTi for bone implants: a review // *Acta Biomaterialia*. 2008. V. 4 (4). P. 773–782. doi: 10.1016/j.actbio.2008.02.009
11. Ashby M.F., Gibson L.J. Cellular solids: structure and properties. Press Syndicate of the University of Cambridge, 1997. xviii, 510 p.
12. Huang Y., Xin D., Chen X. Microstructure and properties of NiTi shape memory alloy fabricated by double-wire plasma arc additive manufacturing with a nearly equal atomic ratio // *Materials Letters*. 2024. V. 354. Art. 135406. doi: j.matlet.2023.135406

References

1. Zhang Y., Attarilar S., Wang L., Lu W., Yang J., Fu Y. (2021) A review on design and mechanical properties of additively manufactured NiTi implants for orthopedic applications. *International Journal of Bioprinting*. 7(2). P. 340. doi: 10.18063/ijb.v7i2.340
2. Safavi S., Yu Y., Robinson D.L., Gray H.A., Ackland D.C., Lee P.V.S. (2023) Additively manufactured controlled porous orthopedic joint replacement designs to reduce bone stress shielding: a systematic review. *Journal of Orthopaedic Surgery and Research*. 18(42). doi: 10.1186/s13018-022-03492-9
3. Aihara H., Zider J., Fanton G., Duerig T. (2019) Combustion synthesis porous nitinol for biomedical applications. *International Journal of Biomaterials*. 2019(1). Article 4307461. doi: 10.1155/2019/4307461
4. Saadati A., Aghajani H. (2016) Fabrication of porous NiTi biomedical alloy by SHS method. *Journal of Materials Science: Materials in Medicine*. 30(8). P. 92. doi: 10.1007/s10856-019-6296-9
5. He Z., Wang Z., Wang D., Liu X. (2022) Microstructure and mechanical properties of porous NiTi alloy prepared by integration of gel-casting and microwave sintering. *Materials*. 15(22). Article 7331. doi: 10.3390/ma15207331
6. Maashaa D., Purevdagva E., Rubanik V.V., Rubanik V.V. Jr. (2023) The influence of ultrasonic activation on microstructure, phase transformation and mechanical properties of porous Ni-Ti shape memory alloys via self-propagating high-temperature synthesis. *Materials*. 16(18). Article 6134. doi: 10.3390/ma16186134
7. Jian Y.T., Yang Y., Tian T., Stanford C., Zhang X.P., Zhao K. (2015) Effect of pore size and porosity on the biomechanical properties and cytocompatibility of porous NiTi alloys. *PLoS One*. 10(6). Article e0128138. doi: 10.1371/journal.pone.0128138
8. Gong X.W., Zhang Y., Shi Q., Zhang L.X. (2016) Analysis of porous NiTi shape memory alloy fabricated by MIM and SHS. *Optoelectronics and Advanced Materials Rapid Communications*. 10(1–2). pp. 68–73.
9. Morgan E.F., Unnikrisnan G.U., Hussein A.I. (2018) Bone mechanical properties in healthy and diseased states. *Annual Review of Biomedical Engineering*. 20(1). pp. 119–143. doi: 10.1146/annurev-bioeng-062117-121139
10. Bansiddhi A., Sargeant T.D., Stupp S.I., Dunand D.C. (2008) Porous NiTi for bone implants: a review. *Acta Biomaterialia*. 4(4). pp. 773–782. doi: 10.1016/j.actbio.2008.02.009
11. Ashby M.F., Gibson L.J. (1997) *Cellular Solids: Structure and Properties*. Press Syndicate of the University of Cambridge. pp. 175–231.
12. Huang Y., Xin D., Chen X. (2024) Microstructure and properties of NiTi shape memory alloy fabricated by double-wire plasma arc additive manufacturing with a nearly equal atomic ratio. *Materials Letters*. 354. Article 135406. doi: j.matlet.2023.135406

Сведения об авторах:

Гарин Александр Сергеевич – младший научный сотрудник Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: stik-020@mail.ru

Козулин Александр Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: kozulyn@ftf.tsu.ru

Байгонакова Гульшарат Аманболдыновна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: gat27@mail.ru

Марченко Екатерина Сергеевна – доктор физико-математических наук, доцент Томского государственного университета (Томск, Россия); ведущий научный сотрудник Института проблем химико-энергетических технологий СО РАН (Бийск, Россия). E-mail: 89138641814@mail.ru

Information about the authors:

Garin Aleksandr S. (Junior Researcher, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: stik-020@mail.ru

Kozulin Alexander A. (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kozulyn@ftf.tsu.ru

Baygonakova Gul'sharat A. (Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: gat27@mail.ru

Marchenko Ekaterina S. (Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation; Leading Researcher of the Institute of Problems of Chemical and Energy Technologies of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Biysk, Russian Federation). E-mail: 89138641814@mail.ru

Статья поступила в редакцию 14.10.2025; принята к публикации 05.02.2026

The article was submitted 14.10.2025; accepted for publication 05.02.2026

Научная статья

УДК 534.11

doi: 10.17223/19988621/99/9

Динамический анализ балочного маятника в составе модели погрузочного крана

Егор Алексеевич Дегилевич¹, Алексей Сергеевич Смирнов²

^{1,2} *Институт проблем машиноведения Российской академии наук,
Санкт-Петербург, Россия*

¹ *ООО «Газпромнефть – Промышленные Инновации», Санкт-Петербург, Россия*

² *Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Россия*

¹ *degilevichgor@gmail.com*

² *smirnov.alexey.1994@gmail.com*

Аннотация. Исследуется конечномерная модель балочного маятника с произвольным числом степеней свободы, которая используется для моделирования движения троса в составе погрузочного крана. На основе аналитических расчетов построены графики зависимости частот колебаний балочного маятника от числа звеньев троса и показана сходимость к частотам колебаний распределенной модели. С помощью прикладных пакетов построены модели крана, на основе которых проведена проверка сходимости траекторий троса при росте числа элементов.

Ключевые слова: балочный маятник, цепной маятник, колебания, собственные частоты, конечномерная модель, стержневая модель, погрузочный кран

Для цитирования: Дегилевич Е.А., Смирнов А.С. Динамический анализ балочного маятника в составе модели погрузочного крана // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2026. № 99. С. 125–137. doi: 10.17223/19988621/99/9

Original article

Dynamic analysis of a beam pendulum as a part of a loading crane model

Egor A. Degilevich¹, Aleksey S. Smirnov²

^{1,2} *Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences,
Saint Petersburg, Russian Federation*

¹ *Gazpromneft – Industrial Innovations LLC, Saint Petersburg, Russian Federation*

² *Peter the Great Saint Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, Russian Federation*

¹ degilevichgor@gmail.com
² smirnov.alexey.1994@gmail.com

Abstract. This paper investigates a finite-dimensional model of a beam pendulum with an arbitrary number of degrees of freedom, which is used to simulate the motion of a loading crane wire rope. The model represents a system of rods connected by cylindrical joints and elastic torsions. Based on analytical calculations, dependency diagrams are plotted showing how the oscillation frequencies of the beam pendulum depend on the number of wire rope segments, and their convergence to the oscillation frequencies of the distributed model is demonstrated. It was found that the three lowest oscillation frequencies of the finite-dimensional model converge to those of the distributed model with the number of segments equal to 10–20. A set of crane models is developed using the application software packages. These computer models are employed to verify the convergence of the wire rope trajectories with an increasing number of segments. Considering the two operating modes of the crane—with platform oscillation and with wire rope extension during large-amplitude load swinging—it was shown that 20 segments are sufficient for accurate wire rope modeling.
Keywords: beam pendulum, chain pendulum, oscillations, natural frequencies, finite-dimensional model, rod model, loading crane

For citation: Degilevich, E.A., Smirnov, A.S. (2026) Dynamic analysis of a beam pendulum as a part of a loading crane model. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 99. pp. 125–137. doi: 10.17223/19988621/99/9

Введение

Вопросам динамики балочных и цепных систем, имеющих бесконечное число степеней свободы, посвящено множество научных и инженерных работ [1–4], что неудивительно, поскольку в жизни регулярно встречаются объекты, имеющие в своем конструктиве балки, тросы, канаты, провода или цепи. Зачастую для построения аналитического решения уравнений динамики приходится прибегать к тем или иным допущениям, которые в определенных пределах позволяют описывать поведение объекта без серьезной потери точности в рамках конкретной задачи. Уравнениями цепной линии (ЦЛ) можно описать линии электропередач, веревочные подвесные мосты, цепные ограждения, бельевые веревки, канатные дороги и другие схожие объекты [5], однако классическая модель ЦЛ подразумевает отсутствие изгибной жесткости, т.е. идеальную гибкость. В реальности же канаты, тросы, провода имеют конечную ненулевую жесткость на изгиб, которая может в некоторых задачах вносить немалый вклад в поведение системы. Аналогично ситуация обстоит и с другой цепной системой, а именно с цепным маятником (ЦМ), и его уравнениями описываются подвешенные за один край канаты, цепи, качели и тросы подъемных кранов, которым в большей степени уделено внимание в данной работе.

Модификация классических моделей цепей с целью уточнения или, наоборот, упрощения – далеко не редкость. В случае ЦЛ для исследования специфического воздействия на систему от классической модели могут отойти, изменив форму ЦЛ на параболу [6] или дугу окружности [7] для упрощения решения, или же описывать модель уравнениями балки Бернулли–Эйлера [8, 9]. При исследовании динамики ЦМ прибегают к различным постановкам, к примеру, представляя цепь

с множеством звеньев в виде гантельной схемы с конечным числом точечных масс, соединенных безынерционными стержнями [5, 10], или рассматривая ее как распределенную однородную систему, что также приближает решение к экспериментальным данным [11].

Балочный маятник (БМ) представляет собой модификацию ЦМ, в которой учтена изгибная жесткость. Если рассматривать колебания БМ как обособленного объекта, то для него невозможно построить аналитическое решение в элементарных функциях при рассмотрении распределенной модели, но при переходе к конечномерной постановке, а именно к стержневой схеме с торсионами, строгое аналитическое решение становится возможным, причем такие модели с сосредоточенными параметрами даже при относительно малом количестве звеньев могут дать хорошую точность по отношению к распределенной модели. Другое важное преимущество конечномерных моделей – возможность внедрения таких моделей в более сложные системы с применением прикладных пакетов. В настоящей работе проводится моделирование троса в составе погрузочного крана с помощью конечномерного БМ, т.е. осуществляется внедрение БМ в качестве компоненты в более сложную конструкцию – кран. Для расчетов применяется программный комплекс MSC.ADAMS, который хорошо себя зарекомендовал для моделирования кинематики и динамики многотельных систем [12, 13]. Существуют работы, посвященные расчетам динамических нагрузок на кран [14, 15], где тросу позволяют перемещаться лишь в продольном направлении, запрещая поперечные раскачивания, которые существенно влияют на исправную работу крана при больших амплитудах.

Цель данной работы – определение оптимального количества звеньев конечномерной модели БМ для достижения хорошей точности приближения при наименьшем числе элементов. Точность в данной задаче требуется для адекватного прогнозирования поведения троса крана с грузом или шаром-бабой как в рабочих режимах, так и в экстремальных аварийных ситуациях. К примеру, колебания троса крана на грузовом корабле во время качки на волнах или тряска в случае землетрясений могут создать существенную опасность, поэтому важно на этапе проектирования создать хорошую прогностическую модель и попытаться снизить риски, внося изменения в конструктив и / или ограничив подвижность в рабочих режимах. Если же говорить о снижении числа элементов для моделирования БМ, то здесь важно понимать, что в погоне за точностью можно создать модель с чрезмерным количеством элементов, которая потребует не только большего времени на создание, но и больших вычислительных ресурсов, поэтому целесообразно найти «золотую середину». Для поиска оптимального количества звеньев следует провести проверки сходимости при росте числа элементов. В качестве проверяемых параметров можно рассматривать собственные частоты колебаний БМ и перемещение конца троса под действием динамических нагрузок.

Распределенная модель балочного маятника

Для начала обратимся к модели БМ с распределенными параметрами (рис. 1, а), тогда уравнение динамики БМ примет вид [16]:

$$\rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho Fg \frac{\partial}{\partial x} \left[(L-x) \frac{\partial v}{\partial x} \right], \quad (1)$$

где x – продольная координата, t – время, v – поперечное перемещение сечения балки, L – ее длина, F – площадь сечения балки, J – момент инерции сечения балки, g – ускорение свободного падения, ρ – плотность материала балки, E – модуль Юнга материала балки. Разыскивая решение уравнения (1) в виде $v(x, t) = V(x) \sin(kt + \alpha)$, подставим это решение в (1), и тогда данное уравнение можно преобразовать к виду:

$$EJ \frac{d^4 V}{dx^4} - \rho F g \frac{d}{dx} \left[(L-x) \frac{dV}{dx} \right] - k^2 \rho F V = 0. \quad (2)$$

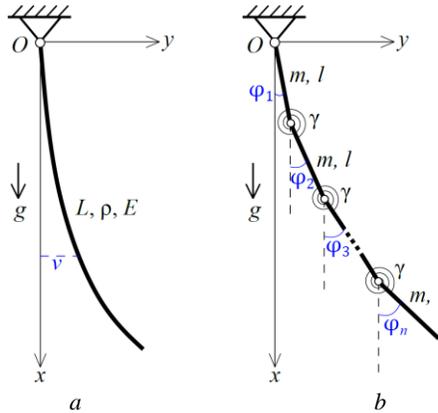


Рис. 1. Модели балочного маятника: (а) распределенная, (б) конечномерная
Fig. 1. Beam pendulum models: (a) distributed and (b) finite-dimensional

Введем безразмерные величины: продольную координату ξ ; параметр δ , определяющий соотношение упругих и гравитационных свойств БМ; а также частоту p :

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \delta = \frac{EJ}{\rho F g L^3}, \quad k = p \sqrt{\frac{g}{L}} = p \sqrt{\frac{EJ}{\rho F g L^4 \delta}}. \quad (3)$$

С учетом обезразмеривания (3) уравнение (2) для амплитудной функции $V(x)$ примет вид:

$$\delta V^{IV} - (1-\xi)V'' + V' - p^2 V = 0, \quad (4)$$

где штрихом обозначается производная по безразмерной координате ξ . Рассматривая оба предельных случая параметра δ , можно видеть, что при малых δ уравнение (4) переходит в уравнение, отвечающее классическому ЦМ [5], а при больших δ – в уравнение классической балки Бернулли–Эйлера [3] без учета силы тяжести, как этого и следовало ожидать:

$$\delta \rightarrow 0: \quad \left[(1-\xi)V' \right]' + k^2 \frac{L}{g} V = 0; \quad \delta \rightarrow \infty: \quad V^{IV} - k^2 \frac{\rho F L^4}{EJ} V = 0.$$

Уравнение (4) следует дополнить граничными условиями: $V = 0, V'' = 0$ при $\xi = 0$ и $V'' = 0, V''' = 0$ при $\xi = 1$. В общем случае уравнение (4) не допускает построения точного аналитического решения, и для его анализа требуется прибегать к численным процедурам.

Конечномерная модель балочного маятника

Рассмотрим конечномерную модель БМ, основанную на использовании стержневой схемы (рис. 1, *b*). Физическая конечномерная модель представляет собой n одинаковых стержней длиной $l = L/n$ и массой $m = \rho FL/n = \rho Fl$ каждый, соединенных шарнирно друг с другом. Для учета изгибной жесткости в местах шарнирного соединения стержней помещаются упругие торсионы с крутильной жесткостью 2γ . Поэтому при последовательном соединении торсионов в месте стыковки соседних стержней будет располагаться торсион с результирующей жесткостью γ , а в месте расположения неподвижного шарнира останется торсион жесткостью 2γ , однако ясно, что он не будет играть какой-либо роли, поэтому на расчетных схемах его можно не приводить. Крутильная жесткость γ должна быть равна жесткости на поворот одного участка балки длиной l в рамках рассмотренной ранее модели с распределенными параметрами, а значит, $\gamma = EJ/l$ [17]. В качестве обобщенных координат удобно принять углы отклонения стержней φ_i от вертикальной оси. Для того чтобы иметь возможность сравнивать частоты конечномерной модели с частотами исходной распределенной модели, следует связать жесткость γ с введенным ранее параметром δ . На основе формулы (3) для δ и выражения $\gamma = EJ/l$ получаем следующую связь между этими параметрами:

$$\gamma = n^3 \delta m g l = n \delta \rho F g L^2. \quad (5)$$

Потенциальная энергия системы складывается из потенциальной энергии ${}^x\Pi$ сил тяжести всех стержней и потенциальной энергии ${}^\gamma\Pi$ всех упругих торсионов. Ясно, что потенциальная энергия силы тяжести k -го стержня и потенциальная энергия торсиона, соединяющего $(k-1)$ -й и k -й стержни, соответственно равны

$${}^x\Pi_k = -mgl \left(\frac{1}{2} \cos \varphi_k + \sum_{i=1}^{k-1} \cos \varphi_i \right), \quad {}^\gamma\Pi_{k-1}^k = \frac{1}{2} \gamma (\varphi_k - \varphi_{k-1})^2. \quad (6)$$

Для определения кинетической энергии стержней необходимо использовать теорему Кёнига, поскольку помимо массы m стержень еще обладает моментом инерции $J_0 = ml^2/12$ относительно его центра масс. Так, для кинетической энергии k -го стержня можно составить следующее выражение:

$$T_k = \frac{1}{2} ml^2 \left[\frac{1}{3} \dot{\varphi}_k^2 + \dot{\varphi}_k \sum_{i=1}^{k-1} \cos(\varphi_k - \varphi_i) \dot{\varphi}_i + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} \cos(\varphi_i - \varphi_j) \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_j \right]. \quad (7)$$

Рассматривая малые колебания системы вблизи нижнего положения равновесия, для которого все $\varphi_i = 0$, выполним в (6) аппроксимацию $\cos \varphi_i \approx 1 - \varphi_i^2/2$, а в (7) положим $\cos(\varphi_i - \varphi_j) \approx 1$, что гарантирует удержание лишь слагаемых второго порядка малости по обобщенным координатам и скоростям в выражениях для потенциальной и кинетической энергий соответственно. Тогда суммарные кинетическая и потенциальная энергии системы в квадратичной аппроксимации можно представить в виде:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\varphi}}^T \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \quad \Pi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varphi},$$

где $\Phi = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n]^T$, а элементы a_{ij} и c_{ij} постоянных симметричных матриц инерционных \mathbf{A} и квазиупругих \mathbf{C} коэффициентов с учетом формул (5)–(7) будут равны

$$\begin{aligned} j = i: \quad a_{ii} &= ml^2 \left(n - i + \frac{1}{3} \right), \quad c_{ii} = mgl \left(n - i + \frac{1}{2} + n^3 \delta \cdot \begin{cases} 2, & 1 < i < n \\ 1, & i = 1 \cup i = n \end{cases} \right), \\ j \neq i: \quad a_{ij} &= ml^2 \left(n - r + \frac{1}{2} \right), \quad r = \max(i, j), \quad c_{ij} = mgl \cdot \begin{cases} -n^3 \delta, & |i - j| = 1 \\ 0, & |i - j| \neq 1 \end{cases}. \end{aligned} \quad (8)$$

Ясно, что при $\delta = 0$ будем иметь частный случай стержневой схемы для классического гибкого ЦМ, когда изгибная жесткость отсутствует. Стоит отметить, что формулы (8) справедливы при $n \geq 2$. Частотное уравнение будет иметь универсальную форму $\det(\mathbf{C} - k^2 \mathbf{A}) = 0$, где k – собственная частота колебаний БМ.

Введем в рассмотрение матрицы \mathbf{A}_0 и \mathbf{C}_0 с безразмерными элементами и безразмерную частоту колебаний p , аналогичную частоте в формуле (3):

$$\mathbf{A}_0 = \frac{1}{ml^2} \mathbf{A}, \quad \mathbf{C}_0 = \frac{1}{mgl} \mathbf{C}, \quad p = \frac{k}{k_0}, \quad (9)$$

где $k_0 = \sqrt{g/L}$, а $L = nl$, тогда частотное уравнение с учетом (9) будет следующим:

$$\det(n\mathbf{C}_0 - p^2 \mathbf{A}_0) = 0. \quad (10)$$

Элементы матриц \mathbf{A}_0 и \mathbf{C}_0 на основе (8) и (9) тогда оказываются равными:

$$\begin{aligned} j = i: \quad a_{0ii} &= n - i + \frac{1}{3}, \quad c_{0ii} = n - i + \frac{1}{2} + n^3 \delta \cdot \begin{cases} 2, & 1 < i < n \\ 1, & i = 1 \cup i = n \end{cases}, \\ j \neq i: \quad a_{0ij} &= n - r + \frac{1}{2}, \quad r = \max(i, j), \quad c_{0ij} = \begin{cases} -n^3 \delta, & |i - j| = 1 \\ 0, & |i - j| \neq 1 \end{cases}. \end{aligned} \quad (11)$$

Численно решая уравнение (10) с учетом подстановки значений элементов матриц (11), можно построить графики зависимости безразмерных частот p от числа стержней n , из которых состоит модель, при двух значениях безразмерного параметра δ . На рис. 2 приведены графики сходимости для первых трех безразмерных частот p конечномерных моделей БМ от n , а пунктиром нанесены частоты распределенной модели БМ, полученные при численном исследовании уравнения (4) для заданных значений параметра δ .

По рис. 2 можно сделать вывод, что первая частота конечномерной модели достаточно близка по значениям к распределенной модели даже при совсем малом количестве стержней, а вторая и третья частоты сходятся к точному решению при количестве стержней в районе 10–20. Кроме того, на рис. 3 построены зависимости безразмерных частот конечномерной модели из 10 стержней и распределенной модели при различных значениях параметра δ , где видно хорошее соответствие между моделями как при малых δ , когда БМ ближе по поведению к ЦМ, так и при больших δ , когда он уже ведет себя, как балка.

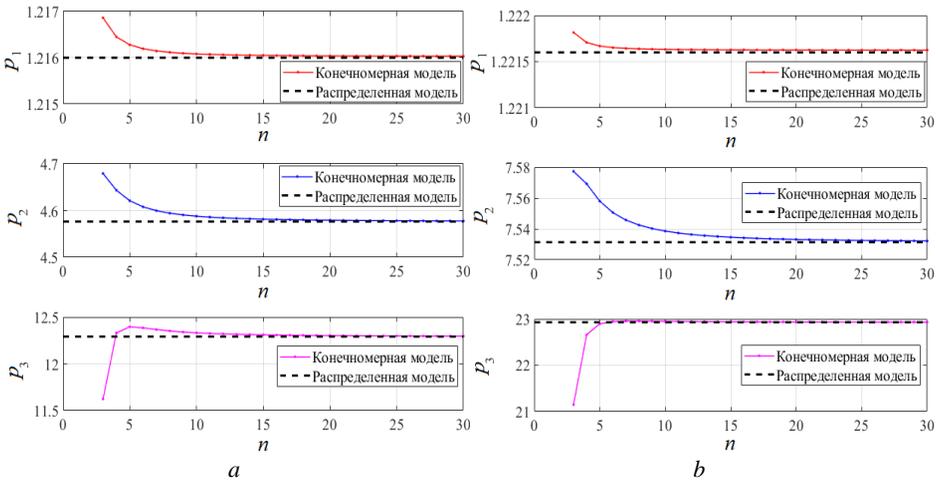


Рис. 2. Зависимость безразмерных частот p от числа стержней n при:
(a) $\delta = 0.05$, (b) $\delta = 0.2$

Fig. 2. Dependence of dimensionless frequencies p on the number of rods n
at $\delta =$ (a) 0.05 and (b) 0.2

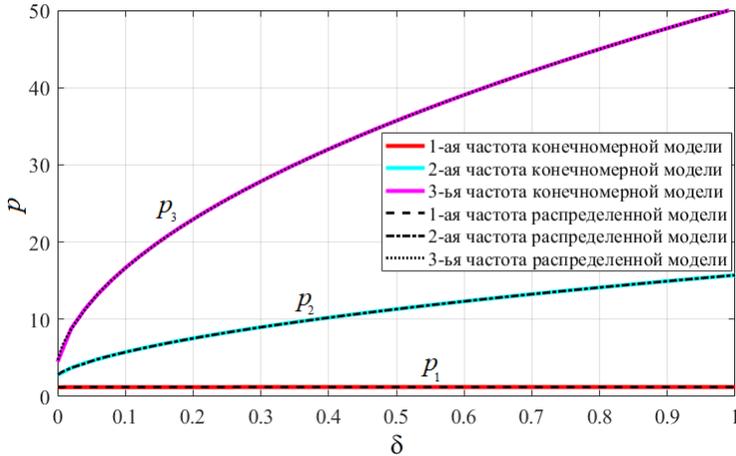


Рис. 3. Зависимость безразмерных частот p от δ при $n = 10$

Fig. 3. Dependence of dimensionless frequencies p on δ at $n = 10$

Подводя итог по сравнению моделей, можно отметить, что с точки зрения частотного анализа для моделирования БМ с применением конечномерных моделей будет достаточно использовать 10–20 стержней без потери точности при колебаниях БМ на низших частотах. Также из рис. 3 видно, как сильно могут начать возрастать собственные частоты БМ при росте δ в сравнении с частотами ЦМ (значения при $\delta = 0$), начиная со второй, когда растет влияние изгибной жесткости БМ.

Конечномерная модель балочного маятника в составе крана

Для создания упрощенной конечномерной многотельной модели крана с грузочным тросом использовался программный комплекс MSC.ADAMS. На рис. 4 приведена иллюстрация модели системы, состоящей из корпуса крана, платформы и троса, который моделируется при помощи конечномерной стержневой схемы БМ с грузом на конце. Целью создания моделей была проверка сходимости траекторий груза с увеличением числа звеньев, составляющих трос. Рассмотрены варианты с 4, 6, 8, 10, 14 и 20 стержнями. Общая длина БМ модели составляет 20 м при массе 50 кг, а масса конечного груза 20 кг. Движение троса возбуждалось за счет задания кинематического закона движения платформы и корпуса крана, и инерционные характеристики последних можно считать существенно большими, чем для троса. Стоит отметить, что данные входные параметры модели были выбраны произвольно для исследования сходимости, и они могут быть отмасштабированы под конкретные размеры и задачи.

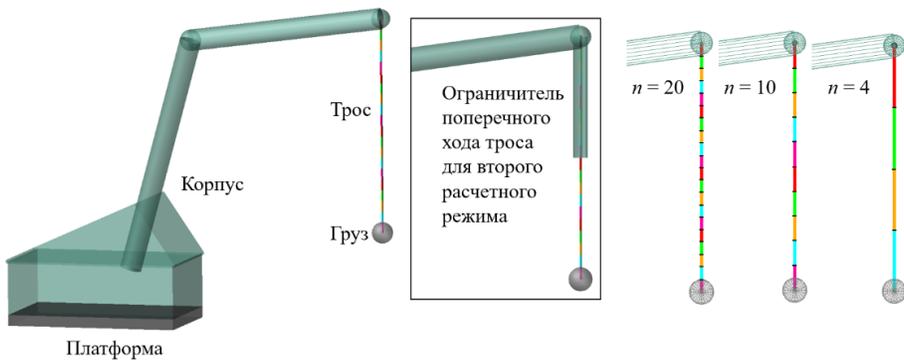


Рис. 4. Конечномерная модель балочного маятника в составе крана
Fig. 4. Finite-dimensional model of the beam pendulum as a part of the crane

Для соединения звеньев в местах крепления были созданы упругие шарниры, которые запрещали трансляционные перемещения для обеспечения нерастяжимости БМ и имели ограниченные значения жесткости на кручение, чтобы обеспечить конкретную изгибную жесткость БМ. Крутильная жесткость γ упругого шарнира определялась по формуле (5) под желаемое значение параметра δ , которое для численного эксперимента было выбрано равным $\delta = 0.01$, однако проверочные расчеты проводились и при других значениях параметра. Также было задано малое демпфирование в шарнирах, пропорциональное крутильной жесткости, чтобы избежать дребезжаний системы.

Для исследования было выбрано два режима. Первый режим имитирует повороты крана в условиях тряски или раскачки платформы (рис. 5). Платформа совершает синусоидальные колебания вдоль продольной оси x с амплитудой 1.5 м и частотой 5 Гц на протяжении всей симуляции. Корпус крана поворачивается относительно платформы вокруг вертикальной оси y в промежуток времени симуляции с 0.5 до 3 с на 90° , а затем еще на 60° в ту же сторону в промежуток времени с 5 до 7 с. Общее время симуляции, в ходе которой осуществляется расчет траектории конечного груза, составляет 10 с.

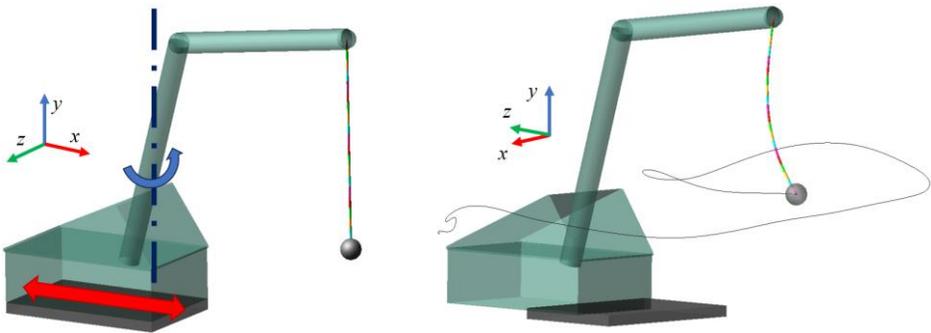


Рис. 5. Первый расчетный режим модели крана
Fig. 5. The first calculation mode for a crane model

Второй рассмотренный режим включает в себя развороты и удлинение троса для изменения уровня высоты груза (рис. 6). Как было показано на рис. 4, для второго расчетного случая был добавлен полый цилиндрический желоб, входящий в состав корпуса крана и ограничивающий поперечные перемещения той части троса, которая располагается внутри желоба, с помощью условия контакта между звеньями и стенками желоба. Для имитации удлинения троса верхний конец БМ двигался вдоль желоба по наперед заданному закону движения, тем самым увеличивалось количество свободных от контакта звеньев, и длина троса относительно нижнего края желоба становилась больше. В начальный момент времени свободная длина троса составляет 10 м, в промежуток с 1 по 3.5 с кран поворачивается на 90° , затем с 4 по 6 с происходит опускание верхней точки БМ на 10 м, т.е. происходит удлинение свободной длины троса до 20 м, после чего происходит еще один поворот на 45° с 7 по 8 с времени симуляции. Общее время симуляции составляет 10 с.

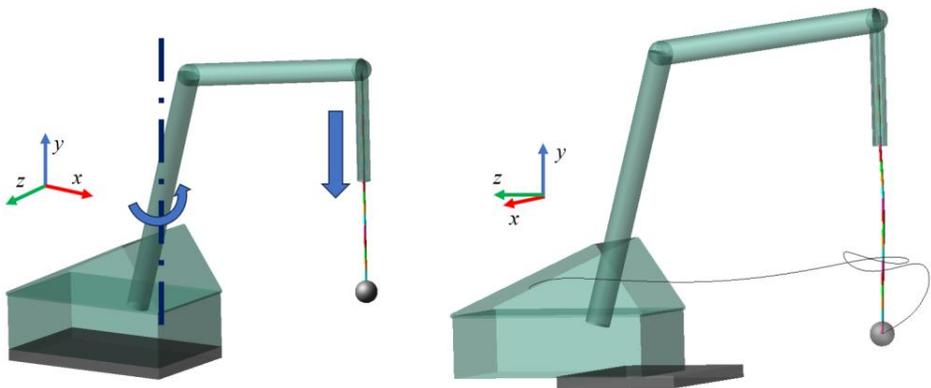


Рис. 6. Второй расчетный режим модели крана
Fig. 6. The second calculation mode for a crane model

В результате расчетов моделей с разным количеством звеньев в составе БМ для двух режимов были построены графики траекторий концевого груза в проекциях на плоскости, которые приведены на рис. 7.

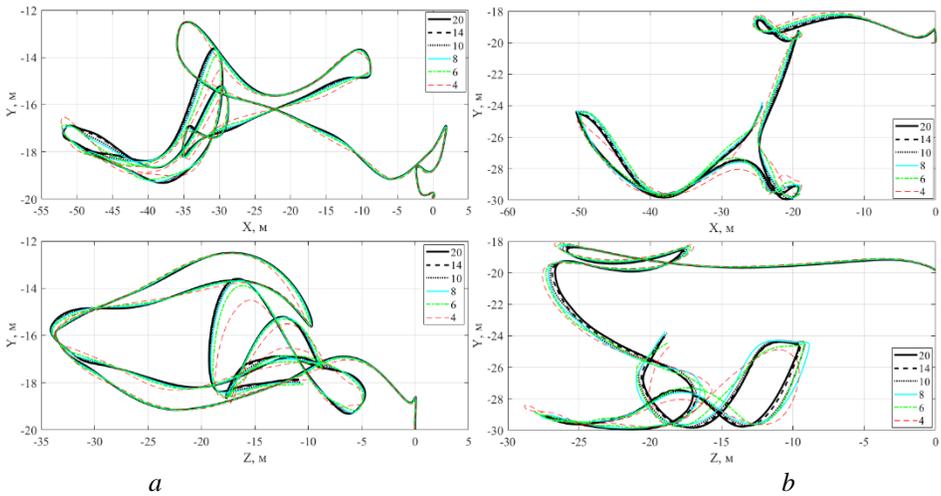


Рис. 7. Траектории движения груза при: (а) первом режиме, (б) втором режиме
Fig. 7. Trajectories of the cargo motion in the (a) first and (b) second modes

На рис. 7 видно, что траектория груза, когда БМ состоит всего из 4 элементов, относительно сильно расходится с другими траекториями, которые по мере увеличения количества звеньев в большей степени начинают совпадать друг с другом.

Для наглядности также построены графики, иллюстрирующие расхождение траекторий груза в рассмотренных моделях в сравнении с 20-стержневой моделью. Полученные графики зависимости разностей координат от времени отнесены к длине БМ, равной 20 м, и умножены на 100% (рис. 8).

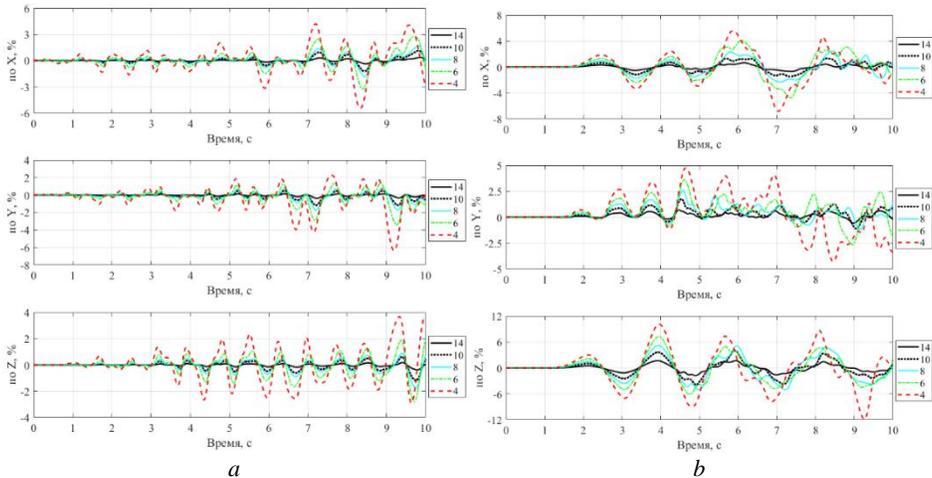


Рис. 8. Расхождения траекторий при: (а) первом режиме, (б) втором режиме
Fig. 8. Trajectory discrepancies in the (a) first and (b) second modes

На основе рис. 8 можно заключить, что с ростом числа звеньев также наблюдается сходимость траекторий, как и для частотного анализа, причем расхождение

модели с 10 стержнями от модели с 20 стержнями не превышает 4%, а в случае 14 стержней максимальный процент оказывается и того меньше. Стоит отметить, что для второго режима при удлинении троса в промежутках с 4 до 6 с наблюдается не только количественное, но и качественное расхождение, вызванное разной длиной звеньев, которые один за другим выходят из желоба в момент, когда трос совершает достаточно большие колебания. Поэтому, несмотря на одинаковую общую скорость удлинения троса, каждое новое свободное звено будет включаться в движение с разной скоростью от модели к модели и влиять на движение нижних звеньев.

Таким образом, оптимальным для моделирования троса также можно считать количество 20 звеньев, но поскольку рассмотренные режимы работы можно в некоторой степени назвать аварийными, так как повороты крана и тряска платформы были достаточно резки, для более штатных плавных режимов работы будет достаточно и 10 элементов, чтобы качественно и количественно прогнозировать движение троса.

Заключение

Была продемонстрирована сходимость низших частот колебаний конечномерной модели БМ от числа звеньев к частотам колебаний распределенной модели БМ. На основе частотного анализа малых колебаний можно сделать вывод, что для моделирования колебаний БМ достаточно использовать порядка 10–20 звеньев.

Для проверки результатов аналитической оценки оптимального числа звеньев, которое и обеспечило бы хорошую точность в сравнении с распределенной моделью, и при этом не требовало чрезмерного количества элементов, была создана многотельная модель крана с тросом, который представлял собой БМ. В результате сравнения траекторий концевого груза троса для моделей с разным количеством стержней была выявлена сходимость при росте числа элементов БМ, а приемлемое количество также находится в диапазоне 10–20 звеньев.

Список источников

1. Меркин Д.П. Введение в механику гибкой нити. М.: Наука, 1980. 240 с.
2. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
3. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний: учебник для вузов. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2009. 414 с.
4. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444 с.
5. Смирнов А.С., Дегилевич Е.А. Колебания цепных систем: учеб. пособие. СПб.: Политехпресс, 2021. 246 с.
6. Hatibovic A., Kadar P. An algorithm for the parabolic approximation of the catenary applicable in both inclined and level spans // 2018 International IEEE Conference and Workshop in Óbuda on Electrical and Power Engineering (CANDO-EPE). Budapest, 2018. P. 217–222. doi: 10.1109/CANDO-EPE.2018.8601137
7. Rawlins C.B. Effect of non-linearity in free large oscillations of a shallow catenary // Journal of Sound and Vibration. 2004. V. 273. P. 857–874. doi: 10.1016/S0022-460X(03)00646-1
8. Chen G., Yang Y., Yang Y., Li P. Study on Galloping Oscillation of Iced Catenary System under Cross Winds // Shock and Vibration. 2017. V. 2. Art. 1634292. doi: 10.1155/2017/1634292

9. Liu Z., Song Y., Wang Y., Wang H., Gao S. The Catenary Vibration Response of High-Speed Electrified Railway Considering Horizontal Wind // Proc. of the 2013 International Conference on Electrical and Information Technologies for Rail Transportation (EITRT2013) – Volume I. Berlin; Heidelberg: Springer, 2014. P. 45–54. doi: 10.1007/978-3-642-53778-3_5 (Lecture Notes in Electrical Engineering; v. 287).
10. Al Ba'ba'a H., Callanan J., Nouh M. Emergence of Pseudo-Phononic Gaps in Periodically Architected Pendulums // *Frontiers in Materials*. 2019. V. 6. Art. 119. doi: 10.3389/fmats.2019.00119
11. Tiefenbacher M., Jakubek S., Kozek M. Modeling and Identification of a Chain Pendulum // Proc/ of the MMMse. 2011. Paper ID MB764KW.
12. Mwape C.J., Hong T.S., Wu W.B. Static Studies of a steel chain ropeway section using Msc Adams // *Advanced Materials Research*. 2011. V. 328–330. P. 1031–1036. doi: 10.4028/www.scientific.net/AMR.328-330.1031
13. Suvanjumrat C., Suwannahong W., Thongkom S. Implementation of Multi-Body Dynamics Simulation for the Conveyor Chain Drive System // *The 3rd International Conference on Mechatronics and Mechanical Engineering (ICMME 2016)*. 2017. V. 95. Art. 06006. doi: 10.1051/mateconf/20179506006
14. Антибас И.П. Моделирование динамических нагрузок, воздействующих на мостовой кран в момент пуска // *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2024. № 24 (2). С. 190–197. doi: 10.23947/2687-1653-2024-24-2-190-197
15. Pu H., Xie X., Liang G., Yun X., Pan H. Analysis for Dynamic Characteristics in Load-lifting system of the Crane // *Procedia Engineering*. 2011. V. 16. P. 586–593. doi: 10.1016/j.proeng.2011.08.1128
16. Динник А.Н. Устойчивость упругих систем. М.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. 186 с.
17. Исолов Ю.Г. Вычислительные методы в теории колебаний: учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. 124 с. doi: 10.18720/SPBPU/2/si20-160

References

1. Merkin D.R. (1980) *Vvedenie v mekhaniku gibkoy niti* [Introduction to the mechanics of flexible thread]. Moscow: Nauka.
2. Lur'e A.I. (1961) *Analiticheskaya mekhanika* [Analytical mechanics]. Moscow: Fizmatgiz.
3. Biderman V.L. (2009) *Teoriya mekhanicheskikh kolebaniy* [Theory of mechanical vibrations]. Moscow – Izhevsk: NITS «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika».
4. Timoshenko S.P. (1967) *Kolebaniya v inzhenernom dele* [Oscillations in engineering]. Moscow: Nauka.
5. Smirnov A.S., Degilevich E.A. (2021) *Kolebaniya tsepykh sistem* [Oscillations of chain systems]. Saint Petersburg: POLYTECH-PRESS.
6. Hatibovic A., Kadar P. (2018) An algorithm for the parabolic approximation of the catenary applicable in both inclined and level spans. *Proceedings of the 2018 International IEEE Conference and Workshop in Óbuda on Electrical and Power Engineering (CANDO-EPE). Budapest, Hungary*. pp. 217–222. doi: 10.1109/CANDO-EPE.2018.8601137
7. Rawlins C.B. (2004) Effect of non-linearity in free large oscillations of a shallow catenary. *Journal of Sound and Vibration*. 273. pp. 857–874. doi: 10.1016/S0022-460X(03)00646-1
8. Chen G., Yang Y., Yang Y., Li P. (2017) Study on galloping oscillation of iced catenary system under cross winds. *Shock and Vibration*. Article 1634292. pp. 1–16. doi: 10.1155/2017/1634292
9. Liu Z., Song Y., Wang Y., Wang H., Gao S. (2014) The catenary vibration response of high-speed electrified railway considering horizontal wind. *Proceedings of the 2013 International Conference on Electrical and Information Technologies for Rail Transportation (EITRT2013)-Volume I. Lecture Notes in Electrical Engineering. Springer, Berlin, Heidelberg*. 287. pp. 45–54. doi: 10.1007/978-3-642-53778-3_5

10. Al Ba'ba'a H., Callanan J., Nouh M. (2019) Emergence of pseudo-phononic gaps in periodically architected pendulums. *Frontiers in Materials*. 6. doi: 10.3389/fmats.2019.00119
11. Tiefenbacher M., Jakubek S., Kozek M. (2011) Modeling and identification of a chain pendulum. *Proceedings of the MMMse 2011*. Paper ID MB764KW.
12. Mwape C.J., Hong T.S., Wu W.B. (2011) Static studies of a steel chain ropeway section using Msc Adams. *Advanced Materials Research*. 328–330. pp. 1031–1036. doi: 10.4028/www.scientific.net/AMR.328-330.1031
13. Suvanjumrat C., Suwannahong W., Thongkom S. (2017) Implementation of multi-body dynamics simulation for the conveyor chain drive system. *The 3rd International Conference on Mechatronics and Mechanical Engineering (ICMME 2016)*. 95. Article 06006. pp. 1–4. doi: 10.1051/mateconf/20179506006
14. Antypas I.R. (2024) Modeling the dynamic loads affecting a bridge crane during start-up. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 24(2). pp. 190–197. doi: 10.23947/2687-1653-2024-24-2-190-197
15. Pu H., Xie X., Liang G., Yun X., Pan H. (2011) Analysis for dynamic characteristics in load-lifting system of the crane. *Procedia Engineering*. 16. pp. 586–593. doi: 10.1016/j.proeng.2011.08.1128
16. Dinnik A.N. (1935) *Ustoychivost' uprugikh sistem* [Stability of elastic systems]. Moscow: ONTI NKTP SSSR.
17. Ispolov Yu.G. (2008) *Vychislitel'nyye metody v teorii kolebaniy* [Computational methods in the theory of oscillations]. Saint Petersburg: Polytechnic University Press. doi: 10.18720/SPBPU/2/si20-160

Сведения об авторах:

Дегилевич Егор Алексеевич – аспирант Института проблем машиноведения Российской академии наук (Санкт-Петербург, Россия); руководитель направления по математическому моделированию ООО «Газпромнефть – Промышленные Инновации» (Санкт-Петербург, Россия). E-mail: degilevichegor@gmail.com

Смирнов Алексей Сергеевич – кандидат физико-математических наук, ассистент Высшей школы механики и процессов управления Физико-механического института Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (Санкт-Петербург, Россия); младший научный сотрудник Лаборатории мехатроники Института проблем машиноведения Российской академии наук (Санкт-Петербург, Россия). E-mail: smirnov.alexey.1994@gmail.com

Information about the authors:

Degilevich Egor A. (Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, Russian Federation; Head of Mathematical Modeling Department, Gazpromneft – Industrial Innovations LLC, Saint Petersburg, Russian Federation). E-mail: degilevichegor@gmail.com

Smirnov Aleksey S. (Candidate of Physics and Mathematics, Assistant Professor, Peter the Great Saint Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, Russian Federation; Junior Researcher, Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, Russian Federation). E-mail: smirnov.alexey.1994@gmail.com

Статья поступила в редакцию 21.12.2024; принята к публикации 05.02.2026

The article was submitted 21.12.2024; accepted for publication 05.02.2026

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/99/10

Решение неосесимметричной первой основной стационарно-динамической задачи теории упругости для анизотропного тела вращения

Дмитрий Алексеевич Иванычев

Липецкий государственный технический университет, Липецк, Россия, Lsivdmal@mail.ru

Аннотация. Представлена математическая модель построения напряженно-деформированного состояния конечного трансверсально-изотропного тела вращения в условиях стационарной динамической задачи, когда к телу приложены поверхностные усилия, гармонические во времени. Метод решения заключается в разложении искомого упругого состояния в ряд Фурье по элементам ортонормированного базиса пространства граничных состояний. В качестве базисных элементов выступают частные решения пространственной неосесимметричной задачи теории упругости для трансверсально-изотропного тела вращения. Приведено решение первой основной задачи теории упругости для кругового трансверсально-изотропного цилиндра. **Ключевые слова:** стационарные динамические задачи, первая основная задача, анизотропное тело, несимметричная деформация, метод граничных состояний

Для цитирования: Иванычев Д.А. Решение неосесимметричной первой основной стационарно-динамической задачи теории упругости для анизотропного тела вращения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2026. № 99. С. 138–153. doi: 10.17223/19988621/99/10

Original article

Solution of the first fundamental non-axisymmetric stationary-dynamic problem of elasticity theory for an anisotropic body of revolution

Dmitriy A. Ivanychev

Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russian Federation, Lsivdmal@mail.ru

Abstract. This paper presents a methodology for constructing the stress–strain state of transversely isotropic bodies of revolution under the conditions of the first fundamental problem of elasticity theory, where the forces specified on the body surface vary harmonically in time. The applied forces are also non-axisymmetric. The disturbance propagates with a constant velocity along one axis of the elastic symmetry of the material. The approach is based on the relationship between the three-dimensional stress–strain state of an elastic transversely isotropic body and a set of auxiliary two-dimensional states. The auxiliary

states are constructed using the general solution to the stationary–dynamic problem of plane strain and deplanation. The solution is then obtained using the method of boundary states. A set of plane auxiliary states is formed, and using transition formulas, a corresponding set of three-dimensional states is constructed. Sets of such states form bases for the spaces of internal and boundary states. After orthogonalization, these bases are used when the desired state is expanded into Fourier series with the same coefficients.

Thus, a solution to the first fundamental dynamic problem of elasticity theory is presented for a transversely isotropic circular cylinder subjected to time-harmonic (sinusoidal) forces applied to its lateral surface.

Keywords: stationary dynamic problems, first fundamental problem, anisotropic body, asymmetric deformation, boundary state method

For citation: Ivanychev, D.A. (2026) Solution of the first fundamental non-axisymmetric stationary–dynamic problem of elasticity theory for an anisotropic body of revolution. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 99. pp. 138–153. doi: 10.17223/19988621/99/10

Введение

Циклические процессы в механике физических процессов встречаются довольно часто. Если то или иное возмущение распространяется с постоянной скоростью, то такие задачи называются стационарно-динамическими. Учет инерционных составляющих в задаче по определению напряженно-деформированного состояния тела, находящегося под действием данных возмущений, усложняет ее решение, а если тело является еще и анизотропным, то важность иметь математическую модель построения упругих полей в задачах такого рода очевидна.

Решению динамических задач механики для изотропных и анизотропных сред посвящено множество работ. Например, в работе [1] рассмотрен вопрос применения трех упругих потенциалов для решения пространственных динамических задач для упругого полупространства. Интегральное преобразование Радона позволило перейти к плоской задаче в образах. В работе на основе этого решения исследовались волны Рэлея. Работа [2] посвящена построению квадратур для решения динамических задач теории упругости со смешанными поверхностными условиями для ограниченных сред из линейно-однородного анизотропного материала. В работе [3] в рамках модели Тимошенко решена стационарно-динамическая задача для кольцеобразной плоской области. С помощью системы компьютерной алгебры определены частоты и формы собственных колебаний пластины при различных способах ее закрепления. В работе [4] с помощью численных преобразований получены граничные интегральные уравнения для решения различных краевых задач теории упругости для изотропных тел. В работе [5] исследуются краевые динамические задачи для трансверсально-изотропного упругого сферического слоя. С помощью вариационного принципа Гамильтона получены асимптотические разложения, позволяющие получить напряженно-деформированное состояние при различных значениях частоты возмущающей нагрузки.

Много работ посвящено развитию методов решения задач динамики. В [6] представлен численно-аналитический метод решения нестационарно-динамических контактных задач об ударе. Для решения двумерных интегральных урав-

нений использовался метод последовательных приближений. В работе [7] исследовалась динамическая контактная задача с двумя деформируемыми штампами, лежащими на деформируемом основании. Исследование опирается на метод блочного элемента, позволяющий строить точные решения граничных задач для дифференциальных уравнений в частных производных. В [8] обсуждалась возможность решения динамических задач теории упругости в конечно-элементных технологиях. В работе сравнивались три типа вариационных постановок: принцип Гамильтона, принцип Лагранжа и принцип возможных перемещений. Полученные уравнения в матричном виде описывают волновое движение конечно-элементной сетки и могут применяться при решении различных задач о распространении волны. В работе [9] решение задачи о движущейся нагрузке, приложенной к телам вращения, проводилось методом граничных интегральных уравнений. Рассмотрена плоская динамическая задача для сферической оболочки, нагруженной двумя подвижными сосредоточенными силами. В [10] показана численная реализация разностной схемы решения плоских динамических задач для областей сложной формы.

Актуальность разработки аналитических методов расчета задач анизотропных тел связана с возможностью эффективного и быстрого расчета ряда прикладных задач и технологических процессов. При этом сейчас зачастую используются численные методы, требующие существенных вычислительных ресурсов: памяти и процессорного времени. Настоящая работа посвящена развитию аналитического метода граничных состояний на класс неосесимметричных задач динамики для трансверсально-изотропного тела вращения.

1. Постановка задачи

Исследуется динамическая деформация конечного тела вращения из трансверсально-изотропного материала, ось упругой симметрии которого совпадает с осью вращения тела (рис. 1).

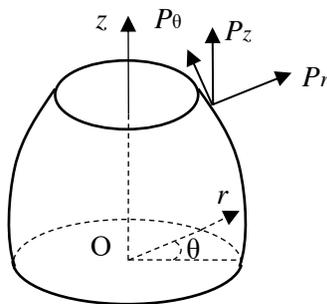


Рис. 1. Анизотропное тело вращения

Fig. 1. Anisotropic solid of revolution

В стационарной динамической задаче в неосесимметричной постановке компоненты упругого поля (перемещения, деформации и напряжения) зависят не только от координат r , θ , z , но и от времени t . Заданными являются усилия на поверхности тела $p_{iv} = \{p_r, p_\theta, p_z\}$, возмущения в которых распространяются с постоянной

скоростью c вдоль координаты z . Вводя подвижную координату $z_0 = z - ct$, можно исключить параметр t из определяющих уравнений, и компоненты упругого поля будут зависеть только от переменных r, z_0 , а также угловой координаты θ .

Задача состоит в отыскании переменного во времени напряженно-деформированного состояния.

2. Определяющие соотношения

В цилиндрической системе координат r, θ, z_0 при отсутствии осевой симметрии между перемещениями u, v, w , деформациями $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{z_0}, \gamma_{z_0r}$, напряжениями $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_{z_0}, \tau_{z_0r}$, а также между техническими константами материала $E_{z_0}, E_r, \nu_{z_0}, \nu_r, G_r, G_{z_0}$ имеют место следующие зависимости.

Уравнения равновесия (объемные силы отсутствуют) [11]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{z_0r}}{\partial z_0} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \sigma_{z_0}}{\partial z_0} + \frac{\partial \tau_{z_0r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z_0\theta}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{z_0r}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \tau_{z_0\theta}}{\partial z_0} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Соотношения Коши [11]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_{z_0} = \frac{\partial w}{\partial z_0}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}; \\ \gamma_{z_0r} &= \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z_0}; \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}; \quad \gamma_{z_0\theta} = \frac{\partial v}{\partial z_0} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнения совместности деформаций [12]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta}) &= 0; \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \varepsilon_{z_0\theta}}{\partial \theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta \partial z_0} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{z_0r}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial z}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial z_0} &= 0; \\ - \frac{\partial}{\partial r} (\frac{1}{r} \frac{\partial (r \varepsilon_{z_0\theta})}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial z_0}) + \frac{\partial}{\partial r} (\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{z_0r}}{\partial \theta}) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta \partial z_0} &= 0; \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{z_0}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{z_0}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial z_0^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{z_0\theta}}{\partial \theta \partial z_0} - \frac{2}{r} \frac{\partial \varepsilon_{z_0r}}{\partial z_0} &= 0; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{z_0r}}{\partial \theta \partial z_0} + r \frac{\partial}{\partial r} (\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{z_0\theta}}{\partial z_0}) - \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\theta}}{\partial z_0^2} - \frac{\partial}{\partial r} (\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{z_0}}{\partial \theta}) &= 0; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial z_0^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{z_0}}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{z_0r}}{\partial r \partial z_0} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Обобщенный закон Гука [11]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{E_r} \left[(\sigma_r - \nu_r \sigma_\theta) - \frac{\nu_{z_0}}{E_{z_0}} \sigma_{z_0} \right]; \quad \varepsilon_{z_0} = \frac{1}{E_{z_0}} \left[\sigma_{z_0} - \nu_{z_0} (\sigma_r + \sigma_\theta) \right]; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E_r} (\sigma_\theta - \nu_r \sigma_r) - \frac{\nu_{z_0}}{E_{z_0}} \sigma_{z_0}; \\ \gamma_{z_0 r} &= \frac{1}{G_{z_0}} \tau_{z_0 r}; \quad \gamma_{z_0 \theta} = \frac{1}{G_{z_0}} \tau_{z_0 \theta}; \quad \gamma_{r \theta} = \frac{1}{G_r} \tau_{r \theta} = \frac{2(1 + \nu_r)}{E_r} \tau_{r \theta}.\end{aligned}\quad (4)$$

3. Общее решение задачи

В работе [11] представлено общее решение пространственной краевой статической задачи в виде тригонометрических рядов, коэффициенты которых представляют собой квадратуры. В качестве ядер интегралов выступают некоторые плоские вспомогательные состояния (плоская деформация и депланация) $\mathbf{u}^{pl} = \{u_y^{pl}, u_\eta^{pl}, u_{z_0}^{pl}\}$.

Компоненты вектора перемещения решения пространственной задачи имеют вид:

$$\begin{aligned}u &= \sum_{n=a}^b [u_n \cos n\theta + u_n \sin n\theta]; \\ v &= \sum_{n=a}^b [-v_n \sin n\theta + v_n \cos n\theta]; \\ w &= \sum_{n=a}^b [w_n \cos n\theta + w_n \sin n\theta].\end{aligned}\quad (5)$$

$$\begin{aligned}u_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (u_y^{pl} + u_\eta^{pl}) \cos(n-1)\beta d\beta + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (u_y^{pl} - u_\eta^{pl}) \cos(n+1)\beta d\beta; \\ v_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (u_y^{pl} + u_\eta^{pl}) \cos(n-1)\beta d\beta - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (u_y^{pl} - u_\eta^{pl}) \cos(n+1)\beta d\beta; \\ w_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u_{z_0}^{pl} \cos n\beta d\beta,\end{aligned}$$

где a и b – пределы суммирования.

Общее решение плоской стационарной динамической задачи как основа для перехода к пространственному состоянию имеет вид [11]:

$$\begin{aligned}u_y^{pl} &= \operatorname{Re}[iq_1^0 \varphi_1(\zeta_1) + iq_2^0 \varphi_2(\zeta_2)]; \\ u_{z_0}^{pl} &= \operatorname{Re}[p_1^0 \varphi_1(\zeta_1) + p_2^0 \varphi_2(\zeta_2)]; \\ u_\eta^{pl} &= -\operatorname{Re}[iq_3^0 \varphi_3(\zeta_1)];\end{aligned}\quad (6)$$

$$p_j^0 = p_j - g\gamma_j; \quad q_j^0 = q_j - g\gamma_j, \quad (j = 1, 2); \quad q_3^0 = -1/G_r; \quad \gamma_3 = \sqrt{G_{z_0}/G_r};$$

$$g = \rho \Delta c^2 / (2G_r E_{z_0}); \quad \Delta = 1 - \nu_r - 2\nu_{z_0}^2 \frac{E_r}{E_{z_0}},$$

где: q_j и p_j – комплексные параметры (определены упругими константами материала), $\zeta_j = z_0 / \gamma_j + iy$, γ_j – комплексные корни векового уравнения [11], функции

$\varphi_j(\zeta_j)$ – комплексная функция переменной ζ_j , ρ – плотность материала; c – скорость распространения волны.

4. Метод решения задачи

Совокупность компонент вектора перемещения, компонент тензора деформаций и тензора напряжений определяют допустимое упругое внутреннее состояние среды $\xi_k = \{u_i^{(k)}, \varepsilon_{ij}^{(k)}, \sigma_{ij}^{(k)}\}$. Совокупность таких состояний можно организовать в базис конечномерного пространства внутренних состояний [13]:

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k, \dots\}.$$

Базисные элементы пространства Ξ можно организовать, если приписать функциям $\varphi_j(\zeta_j)$ в (6) последовательно следующие значения:

$$\begin{pmatrix} \phi_1(\zeta_1) \\ \phi_2(\zeta_2) \\ \phi_3(\zeta_3) \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} \zeta_1^n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \zeta_2^n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \zeta_3^n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i\zeta_1^n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i\zeta_2^n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i\zeta_3^n \end{pmatrix}, \dots \right\}, n = 1, 2, 3, \dots,$$

тем самым построить набор плоских вспомогательных упругих состояний, которые могут быть использованы в интегральных операторах (5) для построения уже множества пространственных состояний для трансверсально-изотропной среды. Это множество и определит базис пространства Ξ .

Внутреннее состояние ξ_k на границе определит граничное состояние

$$\gamma_k = \{u_{iv}^{(k)}, p_i^{(k)}\},$$

где $u_{iv}^{(k)}$ – перемещения точек границы тела; $p_i^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)} n_j$ – усилия на границе.

Набор таких состояний образует базис пространства граничных состояний $G = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_k, \dots\}$.

После построения базисов пространств состояний их элементы подлежат ортонормированию, которое можно осуществить по разработанному рекурсивно-матричному алгоритму ортогонализации [14]. Алгоритм в своей работе использует назначенные в конкретной задаче перекрестные скалярные произведения, например для базиса пространства G

$$(\gamma^k, \gamma^l) = \int_S p_i^{(k)} p_i^{(l)} dS, \quad (7)$$

где S – поверхность тела.

Решение представляет собой ряд Фурье:

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k, \\ u_i &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_i^{(k)}; \quad \varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon_{ij}^{(k)}; \quad \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma_{ij}^{(k)}. \end{aligned} \quad (8)$$

В условиях первой основной задачи теории упругости, когда на границе тела заданы усилия p_{iv} , коэффициенты Фурье вычисляются следующим образом:

$$c_k = \int_S p_{iv} p_i^{(k)} dS. \quad (9)$$

5. Решение задачи

Рассмотрим решение задачи для конечного кругового цилиндра. Материал цилиндра – алевролит крупный темно-серый [15]. До начала решения в методе граничных состояний проводится обезразмеривание параметров задачи [16]. После процедуры:

– упругие характеристики материала: $E_{z_0} = 6.21$; $E_r = 5.68$; $G_r = 2.29$; $G_{z_0} = 2.55$; $\nu_{z_0} = 0.22$; $\nu_r = 0.24$;

– цилиндр занимает объем $V = \{(r, \theta, z_0) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -2 \leq z_0 \leq 2\}$;

– плотность материала $\rho = 2.69$;

– скорость распространения возмущения $c = 0.25$.

С практической точки зрения интерес составляют возмущения, являющиеся гармоническими во времени. Поскольку возмущения распространяются вдоль одной координаты z_0 , переменные во времени усилия могут быть заданы только на боковой поверхности цилиндрического тела. На торцовых поверхностях усилия носят стационарный характер.

Пусть на боковой поверхности цилиндра в осевом направлении заданы усилия по такой функции, изменяющейся от координаты z_0 , чтобы после обратной параметризации $z_0 = z - ct$ усилия изменялись по циклическому закону, а не устремлялись в бесконечность.

Пусть на боковой поверхности цилиндрического тела усилия заданы следующим образом (рис 2.):

$$\text{Граница } S_1: p_r = \sin\left(\frac{\pi z_0}{2}\right) \cos \theta; p_\theta = \sin\left(\frac{\pi z_0}{2}\right) \sin \theta; p_{z_0} = 0.$$

На торцовых поверхностях S_2 и S_3 усилия отсутствуют.

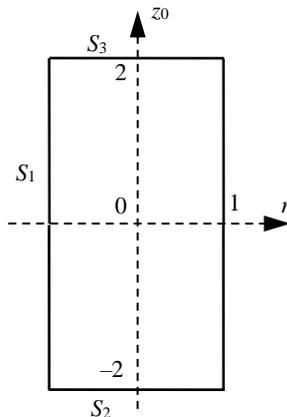


Рис. 2. Граничные условия к задаче для цилиндра
Fig. 2. Boundary conditions for the problem with a cylinder

Если проводить решение задачи, используя граничные условия непосредственно в той форме, в которой они заданы, то полученное решение будет удовлетворять

граничным условиям (с определенной точностью) лишь на области $-2 \leq z_0 \leq 2$. После обратной параметризации при фиксированной координате $-2 \leq z \leq 2$ и увеличении времени будут наблюдаться односторонние осцилляции компонент упругого поля, что не будет соответствовать поставленной задаче в гармонической форме.

Здесь необходимо представить функцию $\sin\left(\frac{\pi z_0}{2}\right)$ в виде степенного ряда

$$\sin\left(\frac{\pi z_0}{2}\right) = \frac{\pi z_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n \pi^{2n+1} z_0^{2n+1}}{(2n+1)! 4^{n+1}}. \quad (10)$$

Предположим, что нужно обеспечить сходимость рядов на конечном интервале времени $0 \leq t \leq 20$, при этом гарантированно не будет осцилляций, если удерживать 15 первых членов ряда (включая $\frac{\pi z_0}{2}$), т.е. последний член ряда имеет переменную z_0^{29} .

Если использовать полный ряд (10) в качестве граничных условий (ГУ), то восстановить упругое поле в рамках одной задачи, удовлетворяющее на границе заданным усилиям на принятом интервале времени, не представляется возможным. В данном случае возникает необходимость в использовании принципа независимости действия сил и, как следствие, в решении 15 отдельных краевых задач.

На боковой поверхности цилиндра при $n = 0$ ГУ: $p_r = \frac{z_0 \cos \theta}{2}$, $p_\theta = \frac{z_0 \sin \theta}{2}$, $p_{z_0} = 0$. В этой и последующих задачах усилия на торцовых поверхностях S_2 и S_3 остаются без изменений. В силу того, что максимальная амплитуда заданных усилий равна единице, с целью обеспечения единого порядка вычислений в каждой задаче на боковой поверхности будем задавать функцию вида $p_r = \frac{z_0^{(2n-1)} \cos \theta}{2^{(2n-1)}}$. Знаки и добавочные коэффициенты при членах ряда (10) будут учитываться в окончательном решении.

В табл. 1 приведен вид функций компонент вектора перемещения в базисных элементах пространства Ξ (показано 4 элемента).

Таблица 1

Компоненты вектора перемещения ортонормированного базиса

N	u	v	w
Ξ_1	$0.029z_0 \cos \theta$	$-0.029z_0 \sin \theta$	$-0.1193r \cos \theta$
Ξ_2	$(0.0127r^2 + z_0^2 0.0638) \cos \theta$	$(-0.004r^2 - z_0^2 0.0638) \sin \theta$	$-0.1192r z_0 \cos \theta$
Ξ_3	$(0.0143z_0^2 - r^2 0.0106) \cos \theta$	$(0.0035r^2 - z_0^2 0.0143) \sin \theta$	$0.0262r z_0 \cos \theta$
Ξ_4	$(-0.0037r^2 - z_0^2 0.029) \cos \theta$	$(-0.1r^2 + z_0^2 0.0293) \sin \theta$	$0.049r z_0 \cos \theta$

Для решения первой задачи используем базис внутренних состояний из 20 элементов. Оценку сходимости решения проведем путем сопоставления заданных граничных условий с полученными в ходе решения. Штриховая линия – заданные

граничные условия, сплошная – полученные в результате решения. На рис. 3 показаны граничные условия при использовании 5 членов ряда, а на рис. 4 – при 20.

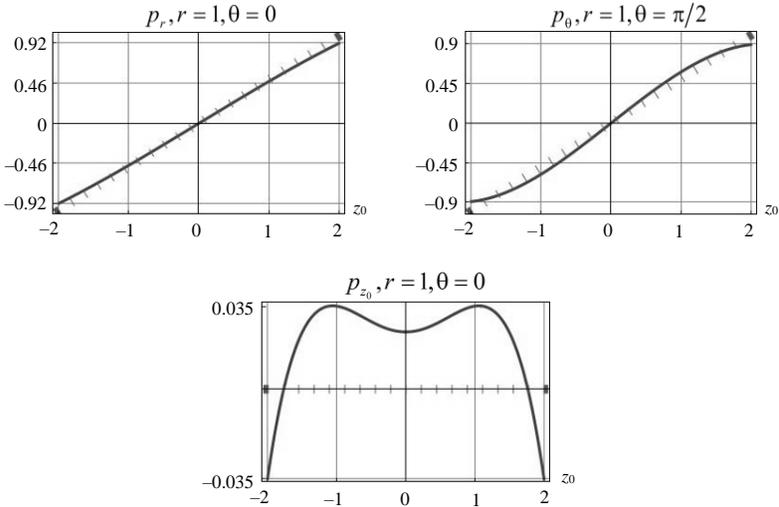


Рис. 3. Восстановленные усилия на границе при 5 элементах базиса
Fig. 3. Reconstructed boundary forces for 5 basis elements

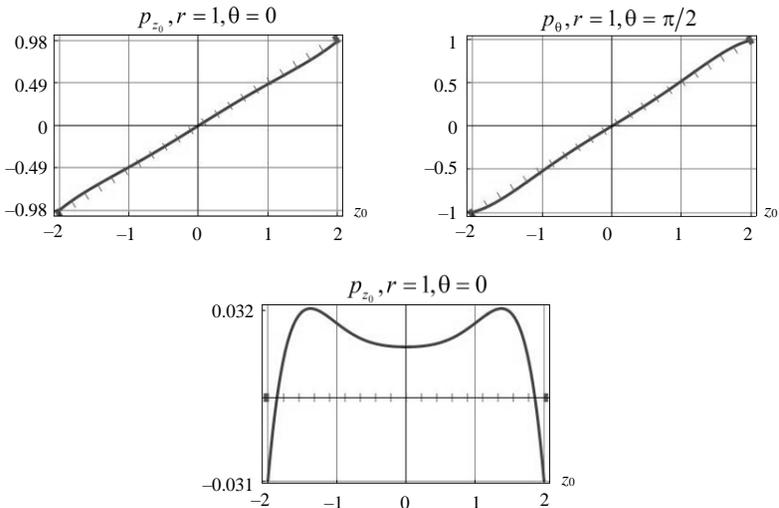


Рис. 4. Восстановленные усилия на границе при 20 элементах базиса
Fig. 4. Reconstructed boundary forces for 20 basis elements

Далее покажем решение задачи для последнего члена ряда (10) со степенью $n = 29$ как для наиболее сложной задачи в силу локализации приложенных усилий на достаточно коротких участках границы. ГУ имеют вид: $p_r = \frac{z_0^{29} \cos \theta}{2^{29}}$, $p_\theta = \frac{z_0^{29} \sin \theta}{2^{29}}$, $p_{z_0} = 0$.

Для решения данной задачи потребовался уже довольно большой базис в 115 элементов. Приведем выборочно значения коэффициентов Фурье (9): $c_5 = -0.1058$; $c_7 = -0.2541$; $c_{19} = 0.2431$; $c_{35} = 0.2431$; $c_{35} = 0.0992$; $c_{78} = 0.0131$.

Рисунок 5 демонстрирует «насыщение» суммы Бесселя. График позволяет косвенным образом судить о сходимости решения.

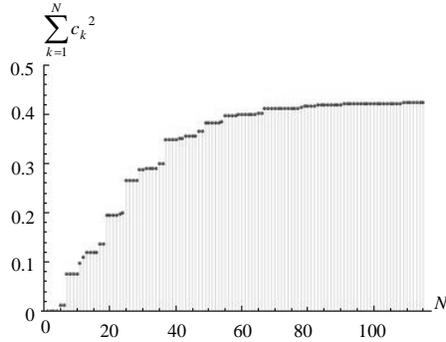


Рис. 5. Сумма Бесселя
Fig. 5. Bessel sum

На рис. 6, 7 представлена верификация граничных условий на одной торцевой и боковой поверхностях.

Максимальная погрешность составила 4%. С увеличением числа используемых элементов базиса погрешность уменьшается.

Окончательное решение исходной задачи, представляет собой сумму решений всех задач, умноженных на соответствующие коэффициенты, согласно ряду (10) и обратной параметризации $z_0 \leftarrow z - ct$.

Граница S_2

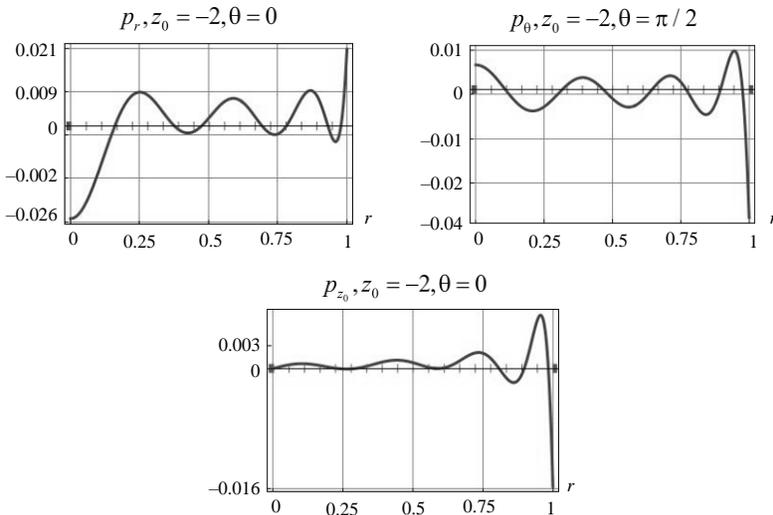


Рис. 6. Верификация граничных условий в пятнадцатой задаче
Fig. 6. Verification of boundary conditions in the fifteenth problem

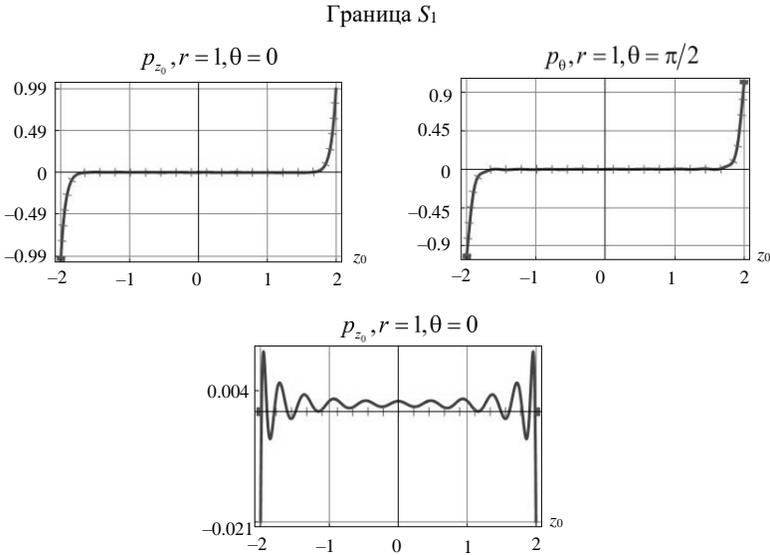


Рис. 7. Верификация граничных условий в пятнадцатой задаче
Fig. 7. Verification of boundary conditions in the fifteenth problem

На рис. 8 показана верификация граничных условий окончательного решения на боковой поверхности цилиндра в момент времени $t = 0$.

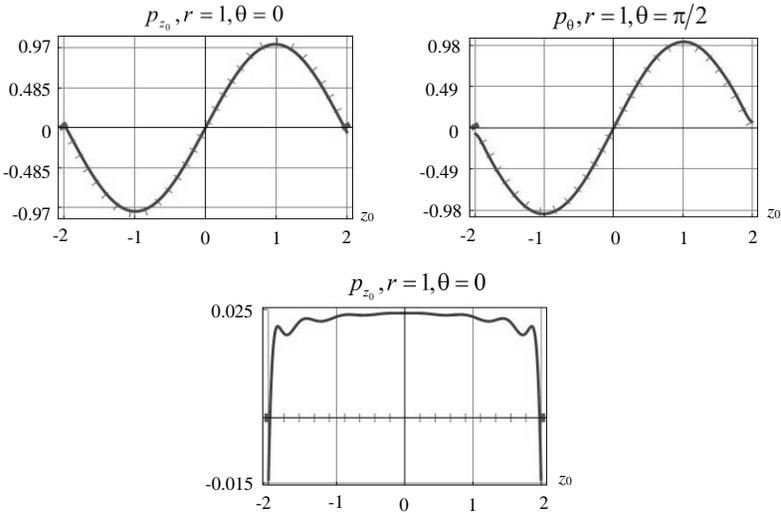


Рис. 8. Верификация граничных условий окончательного решения
Fig. 8. Verification of boundary conditions in the final solution

Благодаря тому, что ряд (10) является знакочередующимся, погрешности от каждой задачи не суммируются.

Изолинии компонент упругого поля окончательного решения имеют полиномиальный вид и представлены в виде изолиний (в явном виде необозримы) на рис. 9. В силу осевой симметрии компонент упругого поля относительно оси вращения

показано меридианное сечение с $0 \leq r \leq 1$ и $-2 \leq z \leq 2$. На рис. 9, j сплошной линией показан контур деформированного состояния, штриховой – не деформированного. В силу малости упругих деформаций контур показан в гипертрофированном виде.

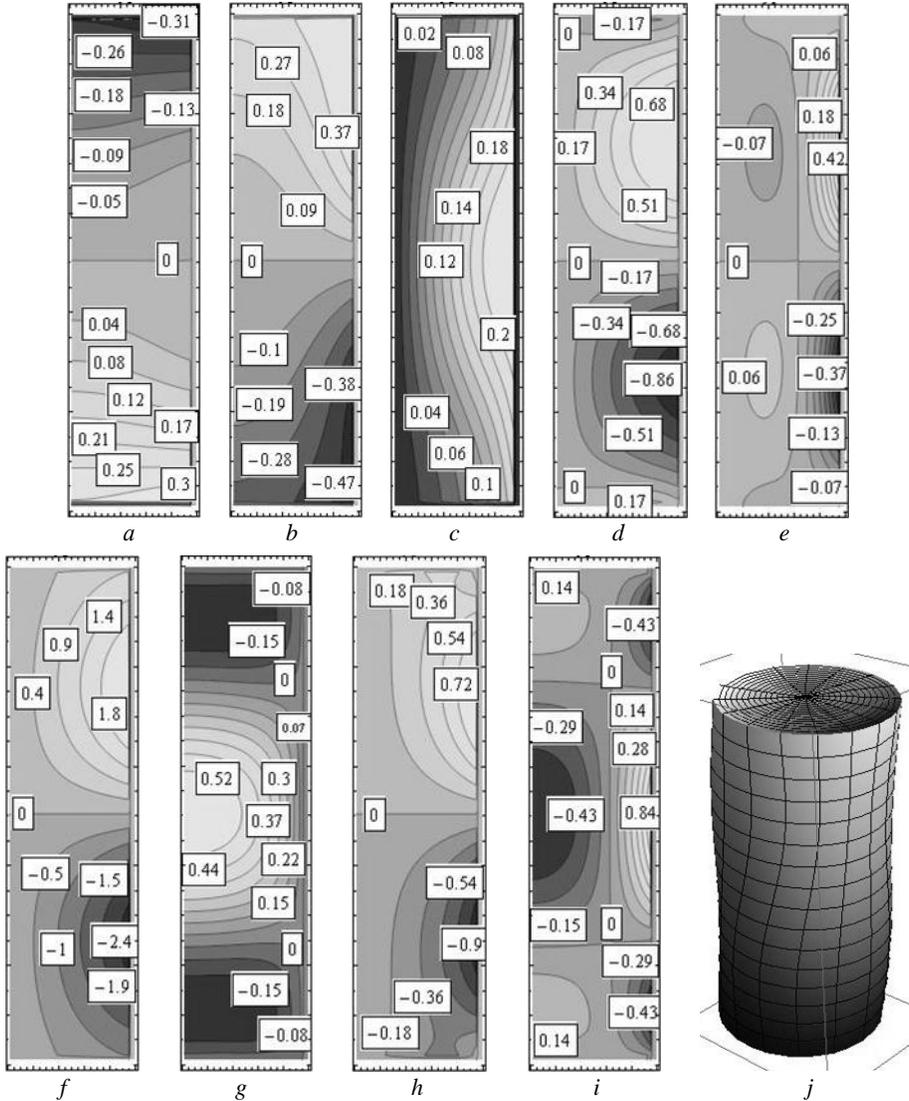


Рис. 9. Изолинии: a – перемещение u , b – перемещение v , c – перемещение w , d – напряжение σ_r , e – напряжение σ_z , f – напряжение σ_θ , g – напряжение σ_{zr} , h – напряжение σ_θ , i – напряжение $\sigma_{z\theta}$, j – контур деформированного состояния

Fig. 8. Isolines of (a) displacement u , (b) displacement v , (c) displacement w , (d) stress σ_r , (e) stress σ_z , (f) stress σ_θ , (g) stress σ_{zr} , (h) stress σ_θ , and (i) stress $\sigma_{z\theta}$; (j) contour of a deformed state

Все полученные компоненты упругого поля строго удовлетворяют уравнениям (1)–(4).

Заключение

В работе решение стационарно-динамической задачи теории упругости в условиях, когда на границе тела заданы усилия, строится следующим образом. По условию задачи, возмущения распространяются с постоянной скоростью c , что позволило ввести подвижную координату $z_0 = z - ct$ и использовать общее решение стационарной задачи о плоской деформации и депланации (6) для трансверсально-изотропной среды с поправками на комплексные параметры среды и корни характеристического уравнения (теперь в нем учитывается скорость c и плотность ρ). На основе общего решения, определяющего упругие деформации и напряжения двумерного состояния тела, строится конечное множество плоских вспомогательных состояний. Далее по формулам (5) осуществляется переход к множеству пространственных осесимметричных состояний. Это множество определяет пространства внутренних и граничных состояний в аппарате метода граничных состояний. Затем пространства состояний ортонормируются «по усилиям», используя перекрестные скалярные произведения (7). Окончательно искомые векторы и тензоры разлагаются в ряды (8) с одинаковыми коэффициентами Фурье (9).

В условиях первой основной динамической задачи, когда за возмущения принимаются усилия на границе и носят, например, колебательный характер, заданную гармоническую функцию необходимо разложить в степенной ряд с определенной точностью. Далее для каждого члена ряда проводится решение отдельной задачи, которые затем суммируются. Однако из-за того, что ортонормированный базис как самая энергоемкая в плане машинного времени процедура строится один раз и используется в решении каждой задачи, решение множества задач не вызывает принципиальных трудностей. Следует только «наполнить» пространства состояний достаточным числом элементов для возможности решать задачи с большим показателем у степенной функции, так как там заданные усилия носят практически сингулярный характер (левый график на рис. 7).

В перспективе можно редуцировать метод граничных состояний для решения неосимметричных второй основной, смешанной и контактной стационарно-динамических задач для анизотропного тела вращения. Методика решения данных стационарных задач в осесимметричной постановке граничных условий показана в работах [17, 18].

Список источников

1. Приказчиков Д.А., Коваленко Е.В. Выбор потенциалов в трехмерных задачах динамической теории упругости // Инженерный журнал: наука и инновации. 2012. № 2 (2). С. 131–137.
2. Ермоленко Г.Ю. Решение динамической задачи анизотропной теории упругости со смешанными краевыми условиями // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки. 2003. № 19. С. 19–21.
3. Фридман Л.И., Моргачев К.С. Решение стационарной динамической задачи для кольцевой пластины в рамках модели Тимошенко // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки. 2005. № 34. С. 68–71.
4. Низомов Д.Н., Ходжибоев О.А., Ходжибоев А.А. Граничные уравнения динамической задачи теории упругости // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2014. Т. 57, № 11-12. С. 850–855.

5. Мехтиев М.Ф., Ахмедов Н.К., Юсубова С.М. Асимптотическое поведение решения осесимметричной динамической задачи теории упругости для трансверсально-изотропного сферического слоя малой толщины // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Сер. Естественные науки. 2020. № 2 (206). С. 61–71. doi: 10.18522/1026-2237-2020-2-61-71
6. Зеленцов В.Б. Об одном методе решения нестационарных динамических контактных задач теории упругости об ударе // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2010. № 6. С. 35–40.
7. Бабешко В.А., Уафа С.Б. и др. О динамической контактной задаче с двумя деформируемыми штампами // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 4–13. doi: 10.18500/1816-9791-2024-24-1-4-13
8. Терпугов В.Н. О возможности построения конечно-элементных алгоритмов для динамических задач теории упругости // Вестник Пермского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2007. № 7. С. 140–144.
9. Галабурдин А.В. Применение метода граничных интегральных уравнений к решению задач о движущейся нагрузке // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Сер. Естественные науки. 2015. № 1 (185). С. 9–11.
10. Немчинов В.В. Двухслойная разностная схема численного решения плоских динамических задач теории упругости // Вестник Московского государственного строительного университета. 2012. № 8. С. 104–111.
11. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости (применение методов теории функций комплексного переменного). М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. 464 с.
12. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гос. изд-во технико-теорет. лит., 1955. 491 с.
13. Пеньков В.Б., Пеньков В.В. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики // Дальневосточный математический журнал. 2001. Т. 2, № 2. С. 115–137.
14. Саталкина Л.В. Нарращивание базиса пространства состояний при жестких ограничениях к энергоемкости вычислений // Сборник тезисов докладов научной конференции студентов и аспирантов Липецкого государственного технического университета. Липецк, 2007. С. 130–131.
15. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. 2-е изд. М.: Наука, 1977. 416 с.
16. Левина Л.В., Новикова О.С., Пеньков В.Б. Полнопараметрическое решение задачи теории упругости односвязного ограниченного тела // Вестник Липецкого государственного технического университета. 2016. № 2 (28). С. 16–24.
17. Иваньчев Д.А. Решение неосесимметричной задачи эластостатики для трансверсально-изотропного тела вращения // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2022. № 2 (101). С. 4–21. doi: 10.18698/1812-3368-2022-2-4-21
18. Иваньчев Д.А. Решение смешанной неосесимметричной задачи теории упругости для анизотропных тел вращения // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2022. № 2. С. 85–97. doi: 10.15593/perm.mech/2022.2.08

References

1. Prikazchikov D.A., Kovalenko E.V. (2012) Vybora potentsialov v trekhmernykh zadachakh dinamicheskoy teorii uprugosti [Selection of potentials in three-dimensional problems of dynamic elasticity theory]. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii – Engineering Journal: Science and Innovation*. 2(2). pp. 131–137.
2. Ermolenko G.Yu. (2003) Reshenie dinamicheskoy zadachi anizotropnoy teorii uprugosti so smeshannymi kraevymi usloviyami [Solution of a dynamic problem of anisotropic elasticity theory with mixed boundary conditions]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo*

- tehnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki – Journal of Samara State Technical University. Physical and Mathematical Sciences.* 19. pp. 19–21.
3. Fridman L.I., Morgachev K.S. (2005) Reshenie statsionarnoy dinamicheskoy zadachi dlya kol'tsevoy plastiny v ramkakh modeli Timoshenko [Solution of a stationary dynamic problem for an annular plate within the framework of the Timoshenko model]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskiye nauki – Journal of Samara State Technical University. Physical and Mathematical Sciences.* 34. pp. 68–71.
 4. Nizomov D.N., Khodzhiboev O.A., Khodzhiboev A.A. (2014) Granichnye uravneniya dinamicheskoy zadachi teorii uprugosti [Boundary equations of the dynamic problem of elasticity theory]. *Doklady Akademii nauk Respubliki Tadjikistan – Reports of the National Academy of Sciences of Tajikistan.* 57. 11–12. pp. 850–855.
 5. Mekhtiev M.F., Akhmedov N.K., Yusubova S.M. (2020) Asimptoticheskoe povedenie resheniya osesimmetrichnoy dinamicheskoy zadachi teorii uprugosti dlya transversal'no-izotropnogo sfericheskogo sloya maloy tolshchiny [Asymptotic behavior of the solution of an axisymmetric dynamic problem of elasticity theory for a transversely isotropic spherical layer of small thickness]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Seriya: Estestvennye nauki – Bulletin of Higher Education Institutes North Caucasus Region. Natural Sciences.* 2(206). pp. 61–71. doi: 10.18522/1026-2237-2020-2-61-71
 6. Zelentsov V.B. (2010) Ob odnom metode resheniya nestatsionarnykh dinamicheskikh kontaktnykh zadach teorii uprugosti ob udare [On one method for solving non-stationary dynamic contact problems of elasticity theory on impact]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Seriya: Estestvennye nauki – Bulletin of Higher Education Institutes North Caucasus Region. Natural Sciences.* 6. pp. 35–40.
 7. Babeshko V.A., Uafa S.B., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Telyatnikov I.S., Evdokimov V.S. (2024) O dinamicheskoy kontaktnoy zadache s dvumya deformiruemyimi shtampami [On a dynamic contact problem with two deformable stamps]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika – Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics.* 24(1). pp. 4–13. doi: 10.18500/1816-9791-2024-24-1-4-13
 8. Terpugov V.N. (2007) O vozmozhnosti postroeniya konechno-elementnykh algoritmov dlya dinamicheskikh zadach teorii uprugosti [On the possibility of developing finite element algorithms for dynamic problems in the theory of elasticity]. *Vestnik Permskogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika – Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science.* 7. pp. 140–144.
 9. Galaburdin A.V. (2015) Primenenie metoda granichnykh integral'nykh uravneniy k resheniyu zadach o dvizhushcheysya nagruzke [Application of the method of boundary integral equations to solving problems of moving loads]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Seriya: Estestvennye nauki – Bulletin of Higher Education Institutes North Caucasus Region. Natural Sciences.* 1(185). pp. 9–11.
 10. Nemchinov V.V. (2012) Dvukhsloynaya raznostnaya skhema chislennogo resheniya ploskikh dinamicheskikh zadach teorii uprugosti [Two-layer difference scheme for numerical solution of plane dynamic problems of elasticity theory]. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo stroitel'nogo universiteta – Vestnik MGSU.* 8. pp. 104–111.
 11. Aleksandrov A.Ya., Solov'ev Yu.I. (1978) *Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti (primenenie metodov teorii funktsii kompleksnogo peremennogo)* [Spatial problems of the theory of elasticity (application of methods of the theory of functions of a complex variable)]. Moscow: Nauka.
 12. Lur'e A.I. (1955) *Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti* [Spatial problems of the theory of elasticity]. Moscow: Gosizdat tekhniko-teoreticheskoy literatury.
 13. Pen'kov V.B., Pen'kov V.V. (2001) Metod granichnykh sostoyaniy dlya resheniya zadach lineynoy mekhaniki [The method of boundary states for solving problems of linear mechanics]. *Dal'nevostochnyy matematicheskiy zhurnal – Far Eastern Mathematical Journal.* 2(2). pp. 115–137.

14. Satalkina L.V. (2007) Narashchivanie bazisa prostranstva sostoyaniy pri zhestkikh ogranicheniyakh k energoemkosti vychisleniy [Expansion of the basis of the state space with severe limitations on the energy consumption of computations]. *Sbornik tezisev dokladov nauchnoy konferentsii studentov i aspirantov Lipetskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*. pp. 130–131.
15. Lekhnitskiy S.G. (1977) *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela* [Theory of elasticity of an anisotropic body]. Moscow: Nauka.
16. Levina L.V., Novikova O.S., Pen'kov V.B. (2016) Polnparametricheskoe reshenie zadachi teorii uprugosti odnosvyaznogo ogranichenogo tela [Full-parameter solution of the problem of the theory of elasticity of a simply connected bounded body]. *Vestnik Lipetskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – LGTU Bulletin*. 2(28). pp. 16–24.
17. Ivanychev D.A. (2022) Reshenie neosesimmetrichnoy zadachi elastostatiki dlya transversal'no-izotropnogo tela vrashcheniya [Solution of a non-axisymmetric elastostatic problem for a transversely isotropic body of revolution]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennyye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*. 2(101). pp. 4–21. doi: 10.18698/1812-3368-2022-2-4-21
18. Ivanychev D.A. (2022) Reshenie smeshannoy neosesimmetrichnoy zadachi teorii uprugosti dlya anizotropnykh tel vrashcheniya [Solution of a mixed non-axisymmetric problem of elasticity theory for anisotropic bodies of revolution]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – Bulletin of Perm National Research Polytechnic University. Mechanics*. 2. pp. 85–97. doi: 10.15593/pern.mech/2022.2.08

Сведения об авторе:

Иванычев Дмитрий Алексеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей механики Липецкого государственного технического университета (Липецк, Россия). E-mail: Lsivdmal@mail.ru

Information about the author:

Ivanychev Dmitriy A. (Candidate of Physics and Mathematics, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russian Federation). E-mail: Lsivdmal@mail.ru

Статья поступила в редакцию 21.02.2025; принята к публикации 05.02.2026

The article was submitted 21.02.2025; accepted for publication 05.02.2026

Научная статья

УДК 624.124

doi: 10.17223/19988621/99/11

Влияние ледовых условий на эффективность разрушения ледяного покрова резонансным методом

Виктор Михайлович Козин

Институт машиноведения и металлургии Хабаровского федерального исследовательского центра Дальневосточного отделения Российской академии наук, Комсомольск-на-Амуре, Россия, kozinvictor@rambler.ru

Аннотация. На основании современной физической модели, описывающей совокупность напряжений и деформаций, возникающих при действии на плавающую пластину внешней нагрузки, получены данные для выяснения точного значения критерия, который приводит к полному разрушению льда амфибийным судном, у которого вся масса поддерживается над водой силами избыточного давления воздуха, постоянно нагнетаемого под днище, с учетом рельефа льда и слоя снега на ледяной поверхности. Физическая зависимость между напряжениями и деформациями описывалась материалом Фойгта. Снежный покров моделировался вязким слоем.

Ключевые слова: амфибийное судно, лед, снег, плавающая пластина, разрушение, глубина водосема

Благодарности: Работа выполнена в рамках государственного задания Института машиноведения и металлургии Хабаровского федерального исследовательского центра ДВО РАН.

Для цитирования: Козин В.М. Влияние ледовых условий на эффективность разрушения ледяного покрова резонансным методом // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2026. № 99. С. 154–161. doi: 10.17223/19988621/99/11

Original article

The impact of ice conditions on the efficiency of ice cover destruction using the resonance method

Viktor M. Kozin

Institute of Machine Science and Metallurgy, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation, kozinvictor@rambler.ru

Abstract. This paper indicates the feasibility of using the resonance method of ice cover destruction by amphibious air-cushion vehicles. The essence of flexural-gravity resonance is explained, as well as the possibility of applying this method to solve a number of ice-

engineering problems: breaking ice cover in shallow waters, where the water depth is inaccessible to icebreakers due to their draft; breaking ice jams and ice gorges during spring break-up to prevent destructive floods; breaking ice over large areas when servicing hydroelectric power plants and opening the ice cover of reservoirs and river bays to enable earlier navigation on inland waterways, etc.

Based on the theoretical dependencies developed for calculating the stress–strain state of the ice cover under a moving load, the results are obtained for determining the ice-breaking capacity of vessels with account for variations in water depth and the presence of a snow cover on the ice under resonant conditions. When describing the relations between stresses and strains in ice, the Voigt model of viscoelastic deformation is used. The snow cover is modeled as a viscous layer.

It is found that such ice conditions as water depth and snow-covered ice significantly affect the ice-breaking capability, i.e., the efficiency of ice cover destruction by the resonance method. Dependencies are presented for determining the main vessel parameters that ensure complete destruction of the ice cover with a given ice thickness and specified ice conditions. It is concluded that, to increase efficiency, icebreaking operations should be initiated in snow-free ice areas, near the shore, and in shallow waters.

Keywords: amphibious vessel, ice, snow, floating plate, destruction, depth of the reservoir

Acknowledgments: The work was carried out within the framework of the state assignment of the Institute of Mechanical Engineering and Metallurgy of the Khabarovsk Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences.

For citation: Kozin, V.M. (2026) The impact of ice conditions on the efficiency of ice cover destruction using the resonance method. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 99. pp. 154–161. doi: 10.17223/19988621/99/11

Введение

Целесообразность реализации метода разрушения льда с помощью резонанса [1], заключающегося в обеспечении совместных колебаний льда и воды и приводящего к его растрескиванию при движении амфибийного судна (СВП) со скоростью, соответствующей значительному увеличению высоты колебаний льда [2], возникает при затруднительном применении самоходных специализированных судов, предназначенных для различных ледокольных операций. Таковыми являются: разрушение ледяных образований в местах возвышения дна, т.е. подводного рельефа, при котором глубина воды меньше, чем в окружающих точках; ликвидация скопления льдин во время ледохода, а также шуги и других видов внутреннего льда в период весеннего ледостава с целью упреждения возникновения затопления территорий; обеспечение в весенний период более раннего передвижения любых судов по водным путям.

Для решения перечисленных ледотехнических задач судну следует обеспечить необходимую ледоразрушающую способность [3, 4]. Для ее оценки нужно получить зависимость толщины разрушаемого льда от массы судна и давления в его воздушной подушке при резонансной скорости движения [1] с учетом соответствующих ледовых условий. Эта зависимость для чистого от снега льда для фиксированной глубины воды приведена в работе [5]. Обычно ледяной покров без снега встречается редко. В процессе выполнения работ по разрушению льда

изменяется и глубина воды. Эти ледовые условия существенно влияют на параметры возбуждаемых изгибно-гравитационных волн (ИГВ) [6, 7], т.е. их ледоразрушающую способность, что требует корректировки полученных зависимостей.

Целью работы является определение зависимости толщины льда, разрушаемого СВП при движении со скоростью резонансных ИГВ [1], от глубины воды и наличия снежного покрова.

Статья состоит из введения, двух разделов и заключения. В первом разделе приведены основные использованные теоретические зависимости, во втором – результаты определения ледокольных качеств судов.

1. Основные теоретические зависимости

В большинстве задач по разрушению ледяного покрова используется модель материала, обладающего свойством возвращаться в изначальную форму при упругой деформации, при этом его физико-механические свойства не зависят от направления приложения нагрузки. Для описания совокупности напряжений и деформаций, возникающих при воздействии на плавающую пластину внешней нагрузки, используются зависимости изгиба упругих пластин. Однако ледяной покров является материалом с неодинаковыми свойствами по различным направлениям из-за перепада температуры по толщине льда, химического состава и наличия примесей, кристаллической структуры, минерализации, степени покрытия поверхности льда снегом, фазы ледового режима и пр. В задачах волновых колебаний льда это учитывается благодаря использованию модели многослойного материала, у которого свойства одинаковы во всех направлениях только в каждом отдельном слое, с последующим переходом к изотропному материалу с модулем упругости, получаемым из соотношения модулей упругости слоев материала. Таким образом, зависимость между напряжениями и деформациями во льду носят вязкоупругий характер и зависят от режима нагружения. Учет этих свойств в условиях изгибно-гравитационного резонанса (ИГР) позволяет избавиться от неопределенности в теоретических решениях и получить реальную картину напряженно-деформированного состояния (НДС) ледяного покрова вблизи приложенной нагрузки.

Как известно [8], для описания волновых колебаний льда при ИГР можно принять закон деформирования упруго-запаздывающей среды Кельвина–Фойгта. Тогда дифференциальное уравнение вязкоупругих колебаний ледяного покрова при установившемся движении сосредоточенной силы P с постоянной скоростью v будет иметь вид [5]:

$$\frac{Gh^3}{3} \left(1 + \tau_\phi \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^4 w + (\rho_a h + \rho_c h_c) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \eta_c h_c \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w + \rho_B g w + \rho_B \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{z=0} = P \delta(x - vt, y - 0) \quad (1)$$

где: G – модуль сдвига для льда; h – толщина ледяной пластины; ∇ – векторный дифференциальный оператор; τ_ϕ – время уменьшения напряжений в e раз (e – основание натурального логарифма); w – прогиб льда; ρ_B , ρ_c , ρ_a – плотность воды, снега и льда; g – ускорение свободного падения; η_c – коэффициент вязкости снега; Φ – скалярная функция, описывающая потенциальное течение жидкости; δ – функция Дирака, описывающая сосредоточенные силы; x , y , z – неподвижная система координат.

Его решение для нагрузки в виде амфибийного судна длиной $2a$ и шириной $2b$ записывается как

$$w = \frac{q}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C[A \cos \varphi - B \sin \varphi] d\lambda d\eta}{A^2 + B^2}, \quad (2)$$

где

$$A = \lambda \eta \left[\frac{Gh^3}{3} (\lambda^2 + \eta^2)^2 - \lambda^2 v^2 (\rho_a h + \rho_c h) + \rho_B g - \frac{\rho_B \lambda^2 v^2}{th(H \sqrt{\lambda^2 + \eta^2}) \sqrt{\lambda^2 + \eta^2}} \right];$$

$$B = i \left[\frac{Gh^3}{3} \tau_\phi \lambda v (\lambda^2 + \eta^2) - \eta_c h_c \lambda v (\lambda^2 + \eta^2) \right];$$

$$C = \sin \lambda a \sin \eta b;$$

$$\varphi = \lambda(x - vt) + \eta y.$$

Выражения для изгибающих моментов получены в виде:

$$\begin{cases} M_x = -\frac{Gh^3}{3} [D_1 + \mu D_2 + \tau_\phi (D_4 + \mu D_5)]; \\ M_y = -\frac{Gh^3}{3} [D_2 + \mu D_1 + \tau_\phi (D_5 + \mu D_4)]; \\ M_{xy} = \frac{Gh^3(1-\mu)}{3} (D_3 + \tau_\phi D_6). \end{cases}$$

где

$$D_1 = \frac{q}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^2 C (-A \cos \varphi + B \sin \varphi) d\lambda d\eta}{A^2 + B^2},$$

$$D_2 = \frac{q}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta^2 C (-A \cos \varphi + B \sin \varphi) d\lambda d\eta}{A^2 + B^2},$$

$$D_3 = \frac{q}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda \eta C (-A \cos \varphi + B \sin \varphi) d\lambda d\eta}{A^2 + B^2},$$

$$D_4 = \frac{q}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^3 \eta C (-A \cos \varphi + B \sin \varphi) d\lambda d\eta}{A^2 + B^2},$$

$$D_5 = \frac{q}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda \eta^2 v C (-A \cos \varphi - B \sin \varphi) d\lambda d\eta}{A^2 + B^2},$$

$$D_6 = \frac{q}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^2 \eta v C (-A \cos \varphi - B \sin \varphi) d\lambda d\eta}{A^2 + B^2}.$$

Максимальные погонные напряжения (отнесенные к единице длины) определены из зависимостей:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{6M_x}{h^2}; & \sigma_y &= \frac{6M_y}{h^2}; \\ \tau_{xy} &= \frac{6M_{xy}}{h^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Определение ледокольных качеств амфибийных судов

На основании выполненных экспериментов в опытовых бассейнах, на мелко- и крупномасштабных моделях, а также на натурных СВП [1] с использованием критерия полного разрушения ледяного покрова, разработанного с помощью оценки уровня теоретической плотности потенциальной энергии изгиба пластины U [9]

$$U = \frac{h}{4G(1+\mu)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\mu\sigma_x\sigma_y + 2(1+\mu)\tau_{xy}^2] dx dy \quad (4)$$

рассчитана зависимость толщины разрушаемого льда от параметров амфибийных судов – массы M и давления в воздушной подушке $P_{вп}$ (рис. 1). Следует заметить, что под полным разрушением будем понимать не только образование во льду сквозных трещин, их раскрытие и смещение кусков ледяного покрова относительно друг друга, но и такую стадию его разрушения, когда его несущая способность не превышает архимедовых сил плавучести обломков льда, что происходит при достижении теоретической плотности потенциальной энергии при его изгибе определенного уровня [5].

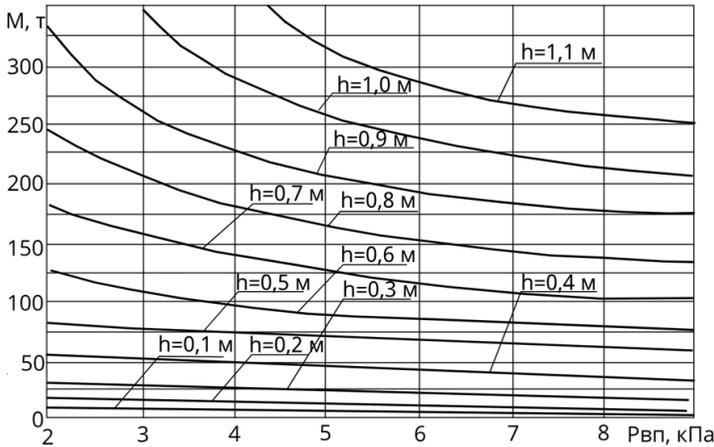


Рис. 1. Зависимость толщины разрушаемого льда от параметров амфибийных судов
Fig. 1. Dependence of the thickness of breakable ice on the parameters of amphibious vessels

Полученная зависимость рассчитана при глубине воды $H = 5$ м и отсутствии снежного покрова. При других глубинах и наличии снега параметры ИГВ, а значит, и их ледоразрушающая способность существенно изменяются [1, 6]. Поэтому полученную зависимость необходимо корректировать при изменении глубины и заснеженности ледяного покрова с помощью коэффициента $k = U_0/U_{сн}$, где: U_0 – плотность энергии при отсутствии снежного покрова и глубине $H = 5$ м; $U_{сн}$ – плотность энергии при наличии снега и других глубинах.

В качестве примера на рис. 2 приведены результаты расчета этого коэффициента для заснеженного ледяного покрова толщиной $h = 0.5$ м с наиболее вероятными физико-механическими характеристиками льда: $G = 4$ ГПа, $\mu = 0,34$ [5]; снега: $\eta_c = 0.3 \cdot 105$ пуаз; $\rho_c = 200$ кг/м³ [10, 11] и разных глубин.

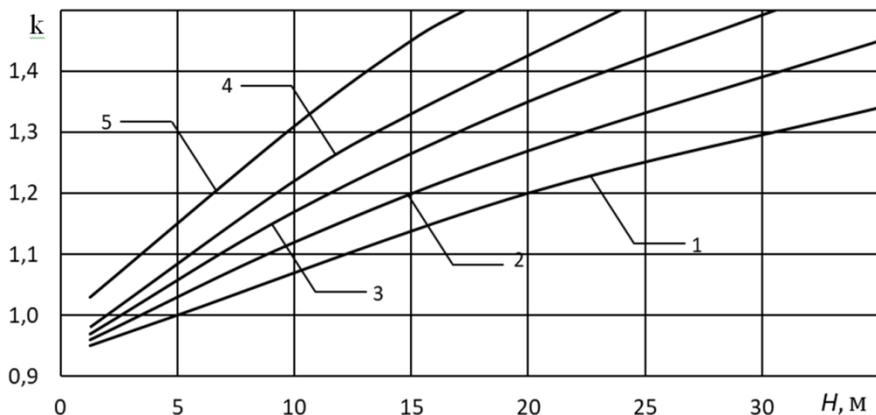


Рис. 2. Зависимость коэффициента k от условий ледовой обстановки при толщине льда $h = 0.5$ м: 1 – без снежного покрова; при его наличии: 2 – $h_c = 0.25$ м; 3 – $h_c = 0.50$ м; 4 – $h_c = 0.75$ м; 5 – $h_c = 1.00$ м

Fig. 2. Coefficient k as a function of ice conditions at the ice thickness $h = 0.5$ m: (1) without snow cover; with snow cover at $h_c = (2) 0.25$, (3) 0.50, (4) 0.75, and (5) 1.00 m

Тогда масса СВП, достаточная для разрушения заснеженного ледяного покрова и заданной глубины, определится из выражения

$$M^* = Mk. \quad (5)$$

Заключение

Выполненные исследования позволяют сделать вывод о существенном влиянии на ледоразрушающую способность, т.е. эффективность разрушения ледяного покрова резонансным методом, таких ледовых условий, как глубина воды и заснеженность льда. Используя приведенные на рис.1, 2 зависимости и выражение (5), можно определить основные параметры СВП (массу и давление в воздушной подушке), гарантирующие полное разрушение ледяного покрова с заданными его толщиной и ледовыми условиями. Из полученных результатов также следует, что ледокольные работы для повышения их эффективности следует начинать на чистых от снега участках льда и вблизи берега, на отмелях, т.е. на малых глубинах.

Список источников

1. Козин В.М. Резонансный метод разрушения ледяного покрова: изобретения и эксперименты. М.: Академия естествознания, 2007. 355 с.
2. Козин В.М., Земляк В.Л., Куркин А.А., Беляков В.В. Избранные задачи ледотехники: средства и методы решения. Н. Новгород: Нижегород. гос. техн. ун-т им. Р.Е. Алексеева, 2023. 772 с.
3. Гриневич Д.В., Бузник В.М., Нужный Г.А. Обзор применения численных методов для моделирования деформации и разрушения льда // Труды ВИАМ. 2020. № 8 (90). С. 109–122. doi: 10.18577/2307-6046-2020-0-8-109-122
4. Глазырин В.П., Орлов М.Ю., Орлов Ю.Н. Разрушение льда при ударных и взрывных нагрузках: численное моделирование, эксперимент // Актуальные проблемы современной

- механики сплошных сред и небесной механики: труды Томского государственного университета / под ред. М.Ю. Орлова. Томск: Том. гос. ун-т, 2019. С. 9–23. doi: 10.17223.978-5-7511-2582-0/1
5. Козин В.М. Результаты экспериментально-теоретических исследований возможностей резонансного метода разрушения ледяного покрова // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2023. № 3. С. 3–20.
 6. Букатов А.Е. Волны в море с плавающим ледяным покровом. Севастополь: ФГБУНМГИ, 2017. 360 с.
 7. Petrov I.B. Problems of Modeling Natural and Anthropogenic Processes in the Arctic Zone of the Russian Federation // *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2019. V. 11 (2). P. 226–246. doi: 10.1134/S2070048219020145
 8. Хейсин Д.Е. Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат, 1967. 216 с.
 9. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1963. 653 с.
 10. Богородский В.В., Галкин Е.И. Исследование внутреннего трения пластин льда со слоем снега при изгибных колебаниях // Акустический журнал. 1966. Т. 12, вып. 4. С. 411–415.
 11. Войтковский К.В. Реология льда и снега // Труды Первого Всесоюзного симпозиума по реологии грунтов (Дилижан, 20–25 апреля 1972 г.) Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1973. С. 26–42.

References

1. Kozin V.M. (2007) *Rezonansnyy metod razrusheniya ledyanogo pokrova. Izobreteniya i eksperimenty* [Resonant method of ice cover destruction. Inventions and experiments]. Moscow: Academy of Natural Sciences.
2. Kozin V.M., Zemlyak V.L., Kurkin A.A., Belyakov V.V. (2023) *Izbrannyye zadachi ledotekhniki. Sredstva i metody resheniya* [Selected problems on ice engineering. Means and methods of solution]. Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod State Technical University.
3. Grinevich D.V., Buznik V.M., Nuzhnyy G.A. (2020) Obzor primeneniya chislennykh metodov dlya modelirovaniya deformatsii i razrusheniya l'da [Review of the application of numerical methods for modeling ice deformation and fracture]. *Trudy VIAM – Proceedings of VIAM*. 8(90). pp. 109–122. doi: 10.18577/2307-6046-2020-0-8-109-122
4. Glazyrin V.P. Glazyrin V.P., Orlov M.Yu, Orlov Yu.N. (2018) Razrushenie l'da pri udarnykh i vzryvnykh nagruzkakh. Chislennoe modelirovanie. Eksperiment [The destruction of ice under shock and explosive loads. Numerical modeling. Experiment]. *Aktual'nye problemy sovremennoy mekhaniki sploshnykh sred i nebesnoy mekhanik: Trudy Tomskogo gosudarstvennogo universiteta, Tomsk*. pp. 9–23. doi: 10.17223.978-5-7511-2582-0/1
5. Kozin V.M. (2023) Rezul'taty eksperimental'no-teoreticheskikh issledovaniy vozmozhnostey rezonansnogo metoda razrusheniya ledyanogo pokrova [Results of experimental and theoretical studies of the possibilities of the resonant method of ice cover destruction]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela – Mechanics of Solids*. 3.pp. 3–20.
6. Bukatov A.E. (2017) *Volny v more s plavayushchim ledyanym pokrovom* [Waves in the sea with floating ice cover]. Sevastopol: FGBUNMGI.
7. Petrov I.B. (2019) Problems of modeling natural and anthropogenic processes in the arctic zone of the Russian Federation. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 11(2). pp. 226–246. doi: 10.1134/S2070048219020145
8. Kheysin D.E. (1967) *Dinamika ledyanogo pokrova* [Ice cover dynamics]. Leningrad: Gidrometeoizdat.
9. Timoshenko S.P., Voinovskiy-Kriger S. (1963) *Plastiny i obolochki* [Plates and shells]. Moscow: Izdatel'stvo fiziko-matematicheskoy literatury.
10. Bogorodskiy V.V., Galkin E.I. (1966) Issledovanie vnutrennego treniya plastin l'da so sloem snega pri izgibnykh kolebaniyakh [Investigation of the internal friction of ice plates with

a layer of snow during bending vibrations]. *Akusticheskiy zhurnal – Acoustic Journal*. 12(4). pp. 411–415.

11. Voytkovskiy K.V. (1973) Reologiya l'da i snega [Ice and snow rheology]. *Pervyy vsesoyuznyy simpozium po reologii gruntov. Erevan*. pp. 26–42.

Сведения об авторе:

Козин Виктор Михайлович – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории проблем создания и обработки материалов и изделий Института машиноведения и металлургии Хабаровского федерального исследовательского центра Дальневосточного отделения Российской академии наук (Комсомольск-на-Амуре, Россия). E-mail: kozinvictor@rambler.ru

Information about the author:

Kozin Viktor M. (Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief Researcher, Laboratory of Problems of Creation and Processing of Materials and Products, Institute of Mechanical Engineering and Metallurgy of the Khabarovsk Federal Research Center of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation). E-mail: kozinvictor@rambler.ru

Статья поступила в редакцию 20.02.2025; принята к публикации 05.02.2026

The article was submitted 20.02.2025; accepted for publication 05.02.2026

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/99/12

Определение динамической прочности на растяжение образцов из тяжелого бетона при ударно-волновом нагружении

Павел Олегович Петров¹, Александр Анатольевич Козулин²,
Андрей Сергеевич Савиных³, Геннадий Валерьевич Гаркушин⁴,
Илья Александрович Жуков⁵

^{1, 2, 5} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ ООО «Союзбетон», Томск, Россия

^{3, 4} ФИЦ Проблем химической физики и медицинской химии
Российской академии наук, Черноголовка, Россия

¹ souzbeton_petrov@mail.ru

² kozulyln@ff.tsu.ru

³ savas@fcp.ac.ru

⁴ garkushin@fcp.ac.ru

⁵ gofra930@gmail.com

Аннотация. Представлены результаты определения прочности на растяжение тяжелого бетона марки М600 в квазистатических и динамических условиях. Эксперименты с массивными цилиндрическими образцами при квазистатических условиях проведены методом Бразильского теста на раскалывание, а при динамических – методом ударно-волнового нагружения при отколе. Определен коэффициент динамического упрочнения для исследуемой марки бетона. В совокупности результаты помогают понять механизмы сопротивления бетона растягивающим динамическим нагрузкам, что может улучшить прогнозирование поведения бетонных конструкций при экстремальных воздействиях.

Ключевые слова: тяжелый бетон, ударная волна, прочность на растяжение, Бразильский тест, коэффициент динамического упрочнения

Благодарности: Исследование проводилось при финансовой поддержке Министерства науки и высшего Образования и науки Российской Федерации (Соглашение № 075-15-2025-607 от 01/07/2025).

Для цитирования: Петров П.О., Козулин А.А., Савиных А.С., Гаркушин Г.В., Жуков И.А. Определение динамической прочности на растяжение образцов из тяжелого бетона при ударно-волновом нагружении // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2026. № 99. С. 162–177. doi: 10.17223/19988621/99/12

Determination of dynamic tensile strength of heavyweight concrete specimens under shock-wave loading

Pavel O. Petrov¹, Alexander A. Kozulin², Andrey S. Savinykh⁴,
Gennadiy V. Garkushin³, Il'ya A. Zhukov⁵

^{1, 2, 5} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ Souzbeton LLC, Tomsk, Russian Federation

^{3, 4} Federal Research Center for Problems of Chemical Physics and Medical Chemistry,
Russian Academy of Sciences, Chernogolovka, Moscow region, Russian Federation

¹ souzbeton_petrov@mail.ru

² kozulya@ff.tsu.ru

³ savas@fcp.ac.ru

⁴ garkushin@fcp.ac.ru

⁵ gofra930@gmail.com

Abstract. This paper presents the results of experimental studies on the mechanical properties of M600 heavyweight concrete (compliance with EU classification c35/45) under various loading conditions. Massive cylindrical specimens with a diameter of 105 mm and lengths of 500, 200, and 100 mm were tested. The main results include the determination of quasi-static tensile strength obtained from Brazilian tests in the splitting scheme of cylindrical specimens under radial compression, as well as the dynamic tensile strength obtained from spall fracture using shock-wave loading methods applied to the massive specimens.

In processing the quasi-static experimental data, a correction factor recommended for concretes of similar composition containing fly ash was applied. After correction, the uniaxial tensile strength of 4.8 MPa was found, which correlated with available theoretical estimates. Compressive and tensile fracture zones were determined on the remaining fragments of the specimens after shock-wave loading. The average dynamic tensile strength, determined from the free-surface velocity profiles of three specimens of different lengths, was 30 MPa. The calculated dynamic hardening coefficient for the concrete grade under study was 6.3 MPa. The obtained results are consistent with published data for similar concrete grades, complement existing studies, and provide a better understanding of the mechanisms governing the resistance of concrete to deformation under dynamic tensile loading. These findings can be used to more accurately predict the behavior of concrete structures under extreme loading conditions.

Keywords: heavyweight concrete, shock wave, tensile strength, Brazilian test, dynamic hardening coefficient

Acknowledgments: This research was financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement No. 075-15-2025-607).

For citation: Petrov, P.O., Kozulin, A.A., Savinykh, A.S., Garkushin, G.V., Zhukov, I.A. (2026) Determination of dynamic tensile strength of heavyweight concrete specimens under shock-wave loading. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 99. pp. 162–177. doi: 10.17223/19988621/99/12

Введение

Тяжелый бетон широко используется в ответственных инженерных сооружениях благодаря своей высокой прочности, удовлетворительной долговечности и экономичности при стандартных и экстремальных условиях эксплуатации. Его предел прочности является ключевым механическим свойством, определяющим способность выдерживать сжимающие и растягивающие нагрузки до разрушения. Тяжелый бетон как разновидность высокопрочного обычно характеризуется прочностью на сжатие в пределах от 50 до 120 МПа [1–3]. Однако, как и традиционный бетон, он имеет недостатки, такие как высокая хрупкость, низкая прочность на растяжение и недостаточная ударная вязкость, что ограничивает его применение. Из-за чрезмерной хрупкости прочность на растяжение бетона значительно ниже, что делает этот параметр критически важным для анализа процессов растрескивания, поведения конструкций и их долговечности в статических и динамических условиях. Для получения требуемых характеристик бетон подвергается прямому испытанию на растяжение в статических условиях. К образцу прикладывается одноосная растягивающая нагрузка до полного разрушения. Этот метод позволяет наиболее точно определить прочность на растяжение, но его сложно реализовать даже в условиях современной лаборатории. Основные трудности связаны с подготовкой образцов, их выравниванием и приложением нагрузки, что может вызвать вторичные напряжения [4]. Более доступными методами определения прочности на растяжение хрупких материалов являются методы, базирующиеся на раскалывании образцов в форме цилиндров при радиальном сжатии [4–6] и кубов при осевом сжатии через специальный адаптер. Подобные методики раскалывания хоть и используют косвенные оценки, но широко зарекомендовали себя сначала в научной сфере, а после – в национальных стандартах [8–10]. Таким образом, прочность на растяжение при раскалывании образца может служить надежным показателем. Однако при этом существуют ограничения, из-за которых прочность на растяжение конкретного образца не является прочностью на одноосное растяжение материала, а корреляцию этих величин необходимо проводить с использованием дополнительных подходов.

В динамических условиях при сверхкоротких периодах нагрузки прочность на растяжение материала связана с откольными явлениями. Откол вызывается преотражением импульсов от свободной поверхности, что приводит к интерференции падающих и отраженных волн с образованием растягивающих напряжений, формируя откольную пластину [11]. Сопротивление разрушению материала в условиях откола называется откольной прочностью, что ассоциируется с динамической прочностью на растяжение и оценивается с использованием теории волновых взаимодействий [12]. Наиболее часто используемым в мире экспериментальным методом для оценки динамической прочности конструкционных материалов при скоростях деформации до 10^4 с^{-1} остается метод Кольского с различными модификациями разрезного стержня Гопкинсона [13–15]. Реже применяются методы метания плоских ударников и генерации ударных волн с использованием легкогазовых пушек и взрывных генераторов [16–21]. Эти подходы обеспечивают высокую точность и надежность результатов, что делает их незаменимыми в современных научных исследованиях и инженерных разработках. Для исследования динамических свойств крупнофракционных композитов, таких как тяжелые бетоны, необходимо

применять альтернативные методы испытаний на крупномасштабных установках. Это связано с тем, что использование стандартных образцов малых размеров (например, цилиндры диаметром до 20 мм и длиной 10 мм) не позволяет адекватно оценить точное механическое поведение материала. В реальных конструкциях размеры элементов значительно больше, и их поведение при воздействии динамических нагрузок существенно отличается от поведения малых образцов. Поэтому применение крупномасштабных установок и образцов, более точно отражающих реальные условия эксплуатации, является важным шагом для получения достоверных данных о динамических свойствах тяжелых бетонов.

Целью данного исследования стали определение прочностных свойств тяжелого бетона при растяжении в условиях квазистатического и динамического нагружения с использованием массивных образцов и проведение корреляции механических характеристик, полученных в широком диапазоне скоростей воздействия.

Материалы и методы

Массивные образцы исследуемого бетона изготовлены в лабораторных условиях методами перемешивания в смесителе, литья в пластиковые формы, вибрирования и набора прочности в климатической камере в течение 28 дней. Компоненты смеси и сопутствующее оборудование для изготовления предоставлены ООО «Союзбетон» (Томск) из номенклатуры бетонного завода в количестве, обеспечивающем требования технологического рецепта для изготовления одного кубометра раствора согласно ГОСТ 27006–2019, который включал в себя 380 кг вяжущего компонента Портландцемент ЦЕМ 0 42.5Н (ООО «Топкинский цемент»), 130 кг шлака ЕСОFIL-480 (ООО «Мечел-Материалы»), 700 кг песка для строительных работ, 1 055 кг щебня из плотных горных пород фракцией 5–10 мм, 190 кг очищенной воды затворения и водоредуцирующие добавки Rheoplast PCE 3241 (ООО «Реопласт») в количестве 0.75% от вяжущего, улучшающие показатели удобоукладываемости. Полученная смесь удовлетворяла показателям качества, в числе которых средняя плотность полученного бетона $\rho_0 = 2\,454 \text{ кг/м}^3$ и удобоукладываемость раствора, сохраняющаяся в течение 180 мин в пределах 240–270 мм.

Подготовленный бетонный раствор заливали в пластиковые формы, обработанные разделительным воском, после чего уплотняли на вибрационном столе. После полного отверждения алмазной пилой из заготовок вырезали образцы разной длины. Торцы шлифовали и полировали для гладкости. На образцы наносили слой ПВА для предотвращения колебаний влагонасыщенности и улучшения адгезии.

На рис. 1, *a* представлено изображение полированного торцевого среза бетонной заготовки в пластиковой форме для литья. На поперечном срезе образца (см. рис. 1, *a*) наблюдается равномерное распределение темных включений в светлой цементной матрице, что свидетельствует о гомогенности их распределения по всему объему. Вибрационное уплотнение, примененное при изготовлении образцов, предотвратило образование крупных пор и воздушных карманов в объеме образца. На рис 1, *b* представлены изображения боковых поверхностей образцов одинакового диаметра и длиной 500, 200, 100 мм, подготовленных для проведения динамических испытаний. На боковых поверхностях обнаружены мелкие воздушные поры (см. рис. 1, *b*), очевидно, возникшие из-за недостаточного смачивания пластиковой формы во время заливки.

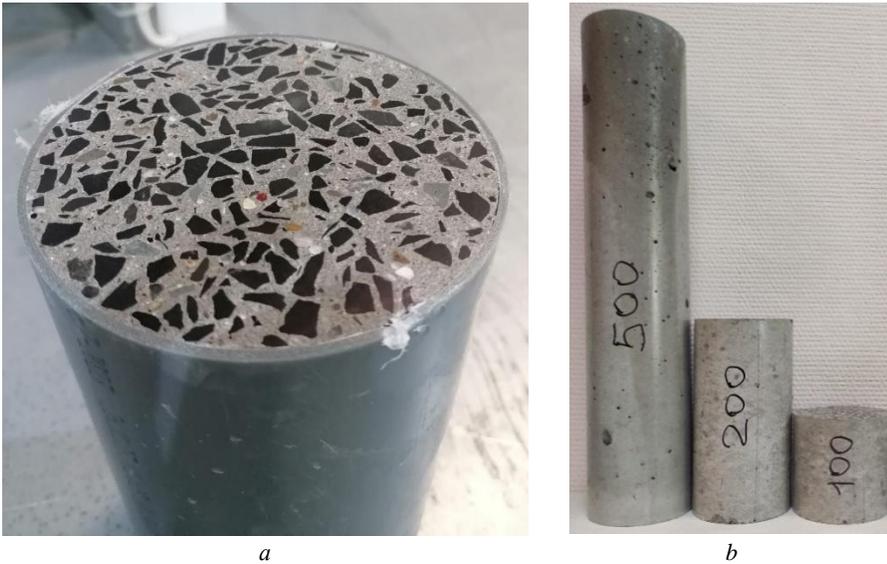


Рис. 1. Фотографии среза цилиндрической заготовки из исследуемого бетона в пластиковой литейной форме (а) и готовых цилиндрических образцов диаметром 105 мм с указанием длины стержней в мм (b)

Fig. 1. Photographs of (a) a cross-section of the cylindrical specimen made of the concrete under study in a plastic casting mold and (b) ready-assembled cylindrical samples with a diameter of 105 mm and lengths indicated in mm

Для оценки динамических характеристик бетона требовалось знать показатели продольной c_l , сдвиговой c_s и объемной c_b скоростей звука, которые были измерены с использованием прибора производства МГНИВП «Акустика» (Россия). Ультразвуковые измерения проводились на 10 различных участках образца. Объемная скорость звука рассчитана с помощью соотношения $c_b = \sqrt{c_l^2 - 4c_s^2} / 3$.

При определении прочности при сжатии использовались контрольные образцы в виде кубов размерами $100 \times 100 \times 100$ мм³. Показатели статической прочности при одноосном сжатии σ_c и растяжении при раскалывании σ_{ts} оценены с использованием испытательного пресса ТП-1-1500 (ООО ТЕСТПРЕСС, Россия). Используемое в работе испытание на раскалывание цилиндрических образцов [8], или Бразильский тест, является косвенным методом определения прочности хрупких, как бетоны, образцов на растяжение. Прочность бетона на растяжение при раскалывании определялась с использованием цилиндров размером $\text{Ø}105$ мм \times 200 мм. В ходе этого испытания на цилиндр по всей его длине с постоянной скоростью 1.5 МПа/мин до разрушения прикладывалась сжимающая нагрузка в радиальном направлении, вызывающая напряжение растяжения, перпендикулярное приложенной нагрузке. Предел прочности при растяжении цилиндрических образцов рассчитывался на основе максимальной нагрузки, полученной в ходе испытания, и их геометрических размеров, как показано в формуле $\sigma_{ts} = 2P / (\pi LD)$, где σ_{ts} – предел прочности при растяжении, P , L и D – предельная нагрузка, длина и диаметр цилиндра.

Оригинальное оборудование и условия для проведения ударно-волновых экспериментов предоставлены ФИЦ ПХФ и МХ РАН (Черноголовка) [22]. Динамические условия нагружения в области предельно малых длительностей согласно сертифицированным методикам реализованы за счет использования энергии взрыва генератора плоских ударных волн. Регистрация волновых эффектов с высоким пространственным и временным разрешением осуществлялась с использованием Допплеровского интерферометрического измерителя скорости свободной поверхности VISAR [23]. Разработанная для эксперимента оснастка, внешний вид которой представлен на рис. 2, спроектирована так, чтобы при прохождении сжимающего импульса на расстоянии от поверхности входа ударной волны реализуемые деформационные состояния в цилиндрах соответствовали одноосно-напряженным. Длины образцов от 100 мм и более подобраны, исходя из кратности 1, 2 и 5 их диаметров. Это достигалось с целью обеспечения условий, аналогичных тем, что наблюдались другими авторами при испытаниях методом разрезных стержней Гопкинсона [13], что позволяло им более точно и надежно исследовать механические свойства материалов.

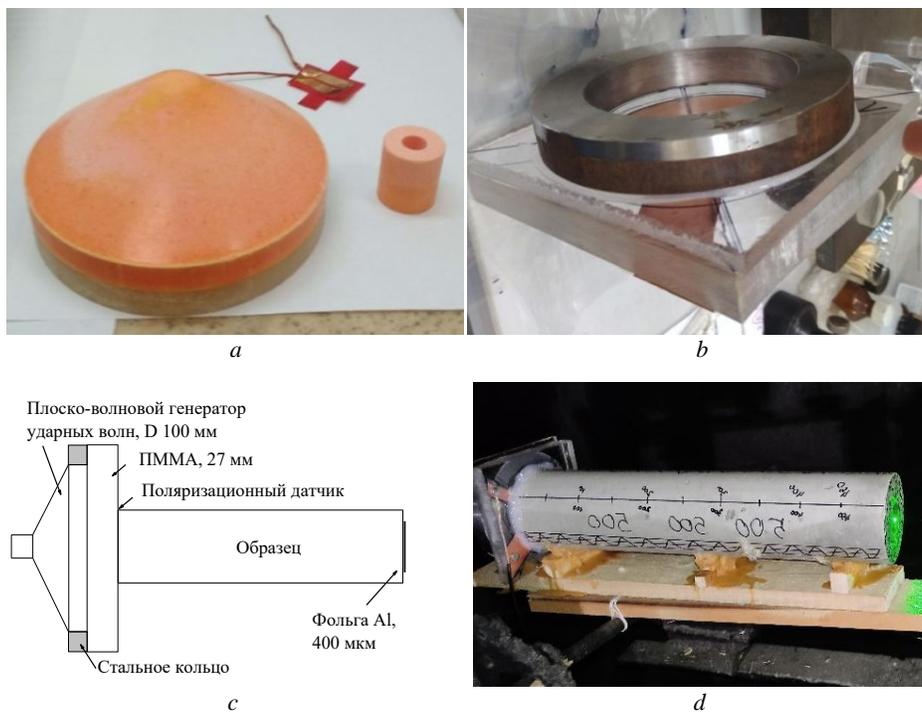


Рис. 2. Основные компоненты экспериментальной сборки: фотография генератора плоских ударных волн (а); стальное кольцо на ослабителе из ПММА (b); схематическое представление экспериментальной сборки (с); фотография экспериментальной сборки с образцом длиной 500 мм (d)

Fig. 2. Main components of the experimental assembly: (a) photograph of the plane shock-wave generator, (b) steel ring on the PMMA attenuator, (c) schematic representation of the experimental assembly, and (d) photograph of the experimental assembly with a 500-mm-long specimen

Основная суть эксперимента заключалась в том, что плоская ударная волна в образце создавалась детонацией генератора ударных волн диаметром 100 мм (см. рис. 2, *a*), размещенного в стальном кольце высотой 20 мм (см. рис. 2, *b*). Ударная волна входила в образец через экран (ослабитель) из полиметилметакрилата (ПММА) толщиной 27 мм (см. рис. 2, *b*). Момент выхода импульса сжатия из ослабителя регистрировался поляризационным датчиком, размещенным между ним и образцом. На рис. 2, *c* показана схема экспериментальной компоновки, на рис. 2, *d* – фотография сборки с образцом бетона длиной 500 мм во взрывной камере.

На протяжении всех экспериментов проводилась регистрация осциллограмм с временным разрешением 1–1.5 нс. Регистрация осциллограмм велась с помощью высокочастотного цифрового осциллографа 1 ГГц DPO5104B (Tektronix, Inc, США). Профиль скорости свободной поверхности $U_{fs}(t)$ рассчитывался в результате обработки осциллограмм с помощью программного обеспечения на ЭВМ. Отражение регистрируемого лазерного излучения от свободной поверхности бетонного образца стало возможным после наклеивания на его торец алюминиевой фольги.

Используя полученные данные о прочности исследуемого бетона при растяжении в разных условиях нагружения, можно рассчитать коэффициент динамического упрочнения по формуле $KDU = \langle \sigma_{sp} \rangle / \langle \sigma_t \rangle$, которая представляет собой отношение значения прочности при растяжении в динамических условиях нагружения к значению прочности на одноосное растяжение в квазистатике.

Результаты статических экспериментов

Средние значения измеренной скорости прохождения продольных c_l и поперечных ультразвуковых волн c_s в образцах составили 4 663 и 2 532 м/с соответственно, отсюда рассчитанная объемная скорость звука c_b оказалась равной 3 633 м/с.

Прочность на сжатие контрольных образцов в форме кубов после 28 сут набора прочности составляла 59 МПа, что соответствовало марке бетона М600 (в европейской классификации соответствует обозначению с35/45).

Экспериментально измеренная прочность на растяжение при раскалывании цилиндрических образцов диаметром 105 мм и длиной 200 мм по схеме Бразильского теста составила в среднем $8 \pm 0,2$ МПа. Для определения средних значений использовалось три образца одной партии. На рис. 3, *a* показана фотография типичных фрагментов разрушенного цилиндра. Все образцы разрушились по схожему сценарию с показателями прочности в пределах допустимой погрешности. Разрушенные фрагменты имеют формы, соответствующие стандартам, что является критерием успешного проведения экспериментов, а именно цилиндрический образец имеет единственную магистральную трещину, проходящую от места приложения нагрузки до опорной части, с минимальным ветвлением, без вторичных трещин и с небольшим количеством мелких выкрашиваний разрушенного материала на берегах трещины.

В научной литературе описано множество предсказательных моделей для оценки корреляции между прочностью бетона на одноосное сжатие и растяжение. На рис. 3, *b* представлена обобщенная номограмма теоретических оценок, основанная на работе P. Rajbhargari и соавт. [4]. Отмеченный линиями внутренний диапазон оценок по верхнему и нижнему пределам ограничивается математическими моделями N. Arioglu и соавт. [24] и S. Ahmad и соавт. [25] соответственно.

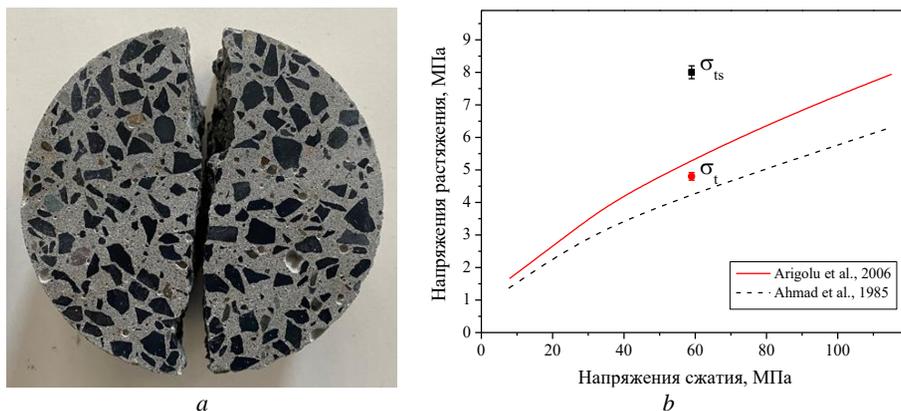


Рис. 3. Фотография фрагментов разрушенного цилиндрического образца после квазистатического нагружения (а) и номограмма корреляции максимальных напряжений при одноосных растяжении и сжатии для тяжелых бетонов (b)

Fig. 3. (a) Photograph of fragments of the destroyed cylindrical specimen after quasi-static loading and (b) nomogram of the correlation of maximum stresses under the uniaxial tension and compression for heavyweight concrete

Следует отметить, что полученный в данной работе результат оценки прочности на растяжение σ_{ts} относится к характеристике образца, имеющего цилиндрическую форму, и на представленной номограмме ложится выше значений верхнего диапазона исследуемого бетона марки М600, имеющего прочность на сжатие $\sigma_c = 59$ МПа. В работе [4] для более точной оценки рекомендуется приводить значения прочности бетонов при растяжении σ_{ts} , полученные при раскалывании, к реальным значениям прочности на одноосное растяжение материала через выражение $\sigma_t = \lambda \sigma_{ts}$, где σ_t – предел прочности при одноосном растяжении, λ – коэффициент перерасчета предела прочности при растяжении при раскалывании в предел прочности при одноосном растяжении. Известно, что коэффициент перерасчета λ в большей степени зависит от состава исследуемого бетона, он имеет рекомендательное значение и может варьировать в диапазоне от 0,9 до 0,54. Так, D. Shen и соавт. [26] отметили влияние использования золы уноса и шлаков в качестве замещающих вяжущее в смесях на повышение пластичности бетона, что потенциально может повлиять на его прочность при растяжении. Например, L. Østergaard [27] добавлял золу уноса и микрокремнезем в бетонные смеси и рекомендовал использовать в своих исследованиях значение $\lambda = 0.61$. Таким образом, в данной работе перерасчет с учетом принятых рекомендаций для исследованного бетона марки М600 показал значение $\sigma_t = 4.88 \pm 0.12$ МПа, которое попало в доверительный диапазон на номограмме рис. 3, b и было использовано далее при определении КДУ при растяжении.

Первичный анализ фрагментов разрушенного образца после ударно-волнового нагружения

Проведение ударно-волновых экспериментов подразумевает разрушение исследуемых образцов бетона на разное количество фрагментов, которые при визуальном

изучении несут полезную информацию. Поэтому сохранение фрагментов важно для интерпретации экспериментальных результатов. На рис. 4 представлена фотография собранных фрагментов сохранившегося образца длиной 500 мм после ударно-волнового нагружения, стрелкой отмечено направление распространения фронта ударной волны. На фотографии фрагменты выложены в максимально возможном соответствии с их исходным положением в недеформированном образце до начала эксперимента, предварительная маркировка позволила это реализовать. По макровиду образцов и их поверхностей разрушения определено, что разрушение произошло без видимых следов пластической деформации. Во всем объеме образца имело место разрушение двух характерных видов, порожденное явлениями сжатия и откола, второе чаще ассоциируют с растяжением. Установлено, что разрушение при сжатии отличается от разрушения при растяжении формой тыльных поверхностей фрагментов, обращенных в направлении распространения ударной волны. На фрагментах образца ближе к свободной поверхности на длине L_{sp} идентифицированы трещины отрыва, которые перпендикулярны главной оси образца. Окольный фрагмент образовался по трещинам отрыва после отражения импульса сжатия от свободного торца цилиндрического образца.

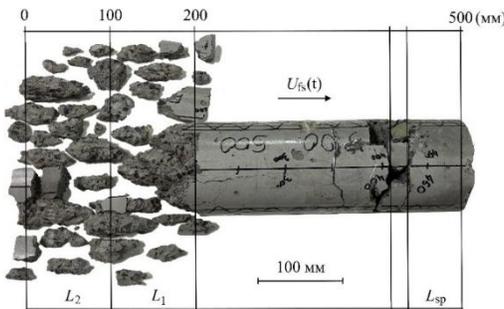


Рис. 4. Фотография сохранных фрагментов разрушенного бетонного образца длиной 500 мм после испытаний с использованием ударно-волнового нагружения

Fig. 4. Photograph of the remaining fragments from the destroyed 500-mm-long concrete specimen after shock-wave loading tests

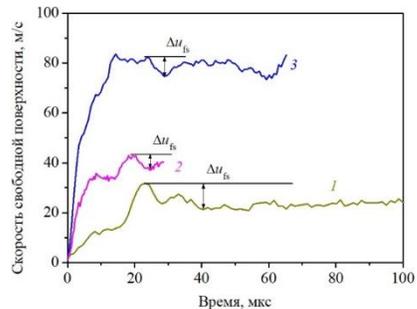


Рис. 5. Экспериментальные профили скоростей свободных поверхностей бетонных образцов длиной:

1 – 500 мм; 2 – 200 мм; 3 – 100 мм

Fig. 5. Experimental free-surface velocity profiles of concrete samples with a length of: (1) 500, (2) 200, and (3) 100 mm

Разрушение бетона в образце при сжатии происходило до длины L_1 на участке образца, близком к ослабителю, с образованием характерного конуса с углом к главной оси образца, близким к 45° , с наличием продольных трещин в сохранный части. Разрушение до длины L_2 было полным с фрагментацией на мелкие части. Таким образом, после испытания самого большого образца длиной 500 мм поднимались вопросы, на каком расстоянии происходит разрушение бетона при сжатии и на какой длине определять динамическую прочность при сжатии. В похожих экспериментах на мелкозернистом и фибробетоне в работах [28, 29] определяли эффекты динамического сжатия с использованием коротких образцов длиной до L_2 , считая, что деформационное состояние сформировано чистым сжатием, из этого целесообразность выбора длины подтверждается внешним видом разрушенного образца на рис. 4.

Обработка результатов ударно-волнового нагружения

Основным результатом проведенных ударно-волновых экспериментов были профили свободных поверхностей для образцов длиной 500, 200 и 100 мм, которые представлены на рис. 5. Оценивая профили скорости свободной поверхности бетонных образцов, представленных на рис. 5., видим, что у образца с длиной $L_2 = 100$ мм максимальная скорость u_{\max} свободной поверхности составила 84.6 м/с, а у образца $L_1 = 200$ мм – 46.2 м/с. Диссипативные процессы в исследуемом материале вносят вклад в разницу между показателями максимальных значений для L_1 и L_2 из-за разницы длин образцов уже в 100 мм. На полученных профилях скорости свободной поверхности зафиксированы признаки откольного разрушения в виде выхода на поверхность образца части волны разгрузки. Это свидетельствует, что в данном фрагменте в волне сжатия бетон не разрушился. В таблице сведены результаты обработки экспериментальных данных, полученных в ходе испытания образцов бетона марки М600 различной длины.

Сводные результаты анализа профилей свободной поверхности образцов из бетона марки М600

№	L , мм	U_{el} , км/с	u_{\max} , м/с	Δt_{fs} , м/с	σ_{sp} , МПа	$\dot{\epsilon}$, с ⁻¹
1	101.0	4.721	84.6	7.3	35.4	92
2	201.0	4.685	46.2	4.8	23.3	126
3	501.5	4.652	31.3	7.4	35.9	75

Ранее, при анализе сохранных фрагментов разрушенного образца длиной 500 мм, была определена область L_{sp} со следами разрушения при растяжении (см. рис. 4), что дает уверенность в наличии откольного эффекта на используемых длинах. Отколовшиеся фрагменты отделились перпендикулярно главной оси в нескольких местах. Длина основного отколовшегося фрагмента, измеренная от свободной поверхности образца, приблизительно равна 60–70 мм. Обращаясь к профилю скорости свободной поверхности этого же образца на рис. 5, мы отчетливо видим выход волны разрежения, инициирующей откольное разрушение при взаимодействии с отраженной волной. Используя эти данные, можно рассчитать длину h_{sp} отколовшегося фрагмента по формуле [30] и провести сравнение с измеренными инструментально показателями:

$$h_{sp} = \Delta t_{sp} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{U_{el}} \right)^{-1},$$

где Δt_{sp} – длительность импульса нагружения на профиле, подразумевающая время между окончанием откольного разрушения и отражением волны сжатия от свободной поверхности (30 мкс), U_{el} , – скорость упругой волны Аналитический расчет длины основного отколовшегося фрагмента показал, что $h_{sp} = 64$ мм. Полученный результат входит в диапазон измеренной длины сохранившегося отколовшегося фрагмента.

Глубины разгрузки на профилях скорости свободной поверхности, показанных на рис. 5 (100, 200, 500 мм), измерялись для расчета значений растягивающих напряжений, действующих в моменты отрывов откольных пластин, используя методику из [11].

Рассчитав глубину разгрузки Δu_{fs} на профиле скорости свободной поверхности из рис. 5, для всех образцов были вычислены значения растягивающих напряжений, действующих в моменты образования откольных фрагментов, которые определяли как показатели динамической прочности на растяжение:

$$\sigma_{sp} = \rho_0 c \frac{\Delta u_{fs}}{2},$$

где Δu_{fs} – разница между максимальным и минимальным значениями скорости свободной поверхности в волне разгрузки. Учитывая значение градиента скорости в волне сжатия \dot{u}_{fsc} на профиле скорости свободной поверхности, рассчитали скорость деформации при растяжении в волне разрежения по формуле

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{V}}{V_0} = \frac{\dot{u}_{fsc}}{2c}.$$

Рассчитанные значения откольной прочности σ_{sp} , приведенные в таблице, зависят от скорости деформации. Разброс данных с погрешностью 15–20% обусловлен сложной композитной структурой, меняющейся от образца к образцу. Предполагается, что откольное разрушение происходит в упругой области и не зависит от длины образца и максимального напряжения сжатия [16]. Разброс значений откольной прочности при близких скоростях деформирования в сравнении с имеющимися в литературе данными, который варьирует от 7 до 30 МПа, объясняется различными составами и способами приготовления исследованных бетонов [14, 17, 29]. Рассчитанное значение КДУ при растяжении исследованного бетона марки М600 составило в среднем 6.3, что коррелирует с доступными результатами других авторов [30].

Заключение

Получены и проанализированы результаты экспериментальных исследований механических свойств бетона, изготовленного с замещением золошлаковыми добавками доли цемента в вяжущем. Предварительные эксперименты на контрольных образцах показали значение прочности на одноосное сжатие, равное 59 МПа, что соответствовало марке тяжелого бетона М600. Также испытаниям подвергались массивные цилиндрические образцы из полученного бетона. Основным результатом стало определение значений квазистатической прочности на растяжение, полученных с использованием Бразильского теста в схеме раскалывания цилиндрических образцов при радиальном сжатии, и динамической прочности на растяжение, полученных при откольном разрушении методами ударно-волнового нагружения. При обработке данных квазистатических экспериментов для получения значений прочности на одноосное растяжение применялся поправочный коэффициент, рекомендованный для бетонов аналогичного состава с добавлением золы уноса. После корреляции данных значение прочности на одноосное растяжение составило 4.8 МПа, что коррелировало с существующими теоретическими оценками. На сохранившихся фрагментах образцов после ударно-волнового нагружения определялись зоны разрушения при сжатии и отколе, что позволило идентифицировать размеры области растяжения и установить соответствие с аналитическими оценками. Полученные значения максимальных растягивающих напряжений при

отколе принято считать динамическим пределом прочности на растяжение, который составил порядка 30 МПа при средней скорости деформации 100 с^{-1} . При сопоставлении результатов квазистатических и динамических экспериментов рассчитан коэффициент динамического упрочнения при сжатии для исследуемой марки бетона, равный 6.3 МПа. Таким образом, проведенные исследования позволили не только определить ключевые механические характеристики тяжелого бетона марки М600, но и углубить понимание механизмов его разрушения при экстремальных воздействиях.

Список источников

1. *Shanaka B., Mendis P., Duc Ngo T.* Ductility design of reinforced very-high strength concrete columns (100–150 MPa). Using curvature and energy-based ductility indices // *International Journal of Concrete Structures and Materials*. 2016. V. 13 (1). P. 13–37. doi: 10.1186/s40069-019-0347-y
2. *Kosmatka S.H., Kerkhoff B., Panarese W.C.* Design and control of concrete mixtures. 14th ed. Skokie, IL: Portland Cement Association, 2002. 358 p.
3. *Mansour A., Mohyeddin A., Lee J.* Load-bearing behaviour of anchors in fibrereinforced concrete – a state of the art review // *J. Build. Eng.* 2024. V. 91 (5). Art. 109580. doi: 10.1016/j.jobe.2024.109580
4. *Rajbhandari P., Lee J., Pokharel T., Amirsardari A., Gad E.* Tensile performance of headed fasteners in high-strength concrete: Experimental and numerical analysis // *Construction and Building Materials*. 2025. V. 484. Art. 142225. doi: 10.1016/j.conbuildmat.2025.142225
5. *Padilla A., Najvani M.A., Knight E., Rougier E., Stormont J., Reda Taha M.M.* Correlating damage and cracking with air (gas) permeability in concrete using the Brazilian tension test // *Construction and Building Materials*. 2022. V. 348. Art. 128616. doi: 10.1016/j.conbuildmat.2022.1286
6. *Fayed A.S., Sherbini A.S., Abou El-Mal H.S.S.* Mixed mode fracture behavior of fiber reinforced concrete; Experimental and numerical analysis adopting cracked Brazilian disc specimen // *Ain Shams Engineering Journal*. 2023. V. 14 (9). Art. 102132. doi: 10.1016/j.asej.2023.102132
7. *Ma W., Gao D., Ding C., Wang L., Tang J.* Whole process analysis on splitting tensile behavior and damage mechanism of 3D/4D/5D steel fiber reinforced concrete using DIC and AE techniques // *Construction and Building Materials*. 2024. V. 457. Art. 139295. doi: 10.1016/j.conbuildmat.2024.139295
8. ASTM D3967–16. Standard test method for splitting tensile strength of intact rock core specimens. ASTM International. West Conshohocken, PA, 2016. doi: 10.1520/D3967-1/
9. AS 1012.10. Standards Australia, Method 10: determination of indirect tensile strength of concrete cylinders ('Brazil' or splitting test). Standards Australia, 2000.
10. ГОСТ 10180–2012. Бетоны. Методы определения прочности по контрольным образцам. Введ. 01.07.2013. М.: Стандартинформ, 2018. 32 с.
11. *Antoun T., Seaman L., Curran D.R., Kanel G.I., Razorenov S.V., Utkin A.V.* Spall fracture. New York: Springer, 2003. 404 p. doi: 10.1007/b97226
12. *Hall C.A., Chhabildas L.C., Reinhart W.D.* Shock Hugoniot and release states in concrete mixtures with different aggregate sizes from 3 to 23 GPa // *AIP Conf. Proc.* 1998. V. 429. P. 119–122.
13. *Ламзин Д.А., Гонов М.Е., Брагов А.М., Ломунов А.К.* Поведение мелкозернистых фибробетонов при разных режимах механического нагружения // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2023. № 81. С. 97–109. doi: 10.17223/19988621/81/9
14. *Forquin P., Erzar B.* On the Processing of Spalling Experiments. Part I: Identification of the Dynamic Tensile Strength of Concrete // *Int. J. Fract.* 2010. V. 163. P. 193–215. doi: 10.1007/s10704-009-9419-3

15. Schuler H., Mayrhofer C., Thoma K. Spall experiments for the measurement of the tensile strength and fracture energy of concrete at high strain rates // *International Journal of Impact Engineering*. 2006. V. 32. P. 1635–1650. doi: 10.1016/j.ijimpeng.2005.01.010
16. Kipp M.E., Chhabildas L.C., Reinhart W.D. Chhabildas and W. D. Reinhart. Elastic shock response and spall strength of concrete // *AIP Conf. Proc.* 1998. V. 429. P. 557–560. doi: 10.1063/1.556664
17. Forquin P., Erzar B. Dynamic fragmentation process in concrete under impact and spalling tests // *Int. J. Fract.* 2010. V. 163. P. 193–215. doi: 10.1007/s10704-009-9419-3
18. Chen J.-Y., Liu C.-C., Dong H.-W., Shi D.-S., Zhang Z.-X., Wang D.-J. Dynamic properties of concrete materials under shock loading // *Construction and Building Materials*. 2013. V. 39. P. 119–123. doi: 10.1016/j.conbuildmat.2012.05.011
19. Tsembeles K., Proud W.G. The dynamic behavior of micro-concrete // *AIP Conf. Proc.* 2006. V. 845. P. 1496–1499. doi: 10.1063/1.2263608
20. Andrews T., Chapman D.J., Proud W.G. The response of concrete to shock-loading // *AIP Conf. Proc.* 1998. V. 429. P. 119–122. doi: 10.1063/1.556638
21. Al-Salloum Y., Almusallam T., Ibrahim S.M., Abbas H., Alsayed S. Rate dependent behavior and modeling of concrete based on SHPB experiments // *Cement & Concrete Composites*. 2015. V. 55. P. 34–44. doi: 10.1016/j.cemconcomp.2014.07.011
22. Канель Г.И., Разоренов С.В., Уткин А.В., Фортвов В.Е. Ударно-волновые явления в конденсированных средах. М.: Янус-К, 1996. 407 с.
23. Barker L.M., Hollenbach R.E. Laser interferometer for measuring high velocities of any reflecting surface // *J. Appl. Phys.* 1972. V. 43. P. 4669–4675. doi: 10.1063/1.1660986
24. Arioglu N., Girgin Z.C., Arioglu E. Evaluation of ratio between splitting tensile strength and compressive strength for concretes up to 120 MPa and its application // *ACI Materials Journal*. 2006. V. 103 (1). P. 18–24.
25. Ahmad S.H., Shah S.P. Structural properties of high strength concrete and its implications for precast prestressed concrete // *Journal – Prestressed Concrete Institute*. 1985. V. 30 (6). P. 92–119.
26. Shen D., Shi X., Zhu S., Duan X., Zhang J. Relationship between tensile Young’s modulus and strength of Fly ash high strength concrete at early age // *Constr. Build. Mater.* 2016. V. 123. P. 317–326. doi: 10.1016/J.CONBUILDMAT.2016.06.145
27. Østergaard L. Early age fracture mechanics and cracking of concrete: experiments and modelling. Technical University of Denmark, 2003. 286 p.
28. Savinykh A.S., Garkushin G.V., Kanel G.I., Razorenov S.V. Method of measurement of the dynamic strength of concrete under explosive loading // *International Journal of Fracture*. 2018. V. 209. P. 109–115. doi: 10.1007/s10704-017-0244-9
29. Savinykh A.S., Garkushin G.V., Kanel G.I., Razorenov S.V. Compressive and tensile strength of steel fibrous reinforced concrete under explosive loading // *International Journal of Fracture*. 2019. V. 215. P. 129–138. doi: 10.1007/s10704-018-00342-w
30. Брагов А.М., Игумнов Л.А., Ломунов А.К. Высокоскоростная деформация мелкозернистого бетона и фибробетона. Н/Новгород: Изд-во Нижегород. Ун-та, 2015. 269 с.

References

1. Shanaka B., Mendis P., Duc Ngo T. (2016) Ductility design of reinforced very-high strength concrete columns (100-150 MPa). Using curvature and energy-based ductility indices. *International Journal of Concrete Structures and Materials*. 13(1). pp. 13–37. doi: 10.1186/s40069-019-0347-y
2. Kosmatka S.H., Kerkhoff B., Panarese W.C. (2002) *Design and Control of Concrete Mixtures*. Illinois: Portland Cement Association.
3. Mansour A., Mohyeddin A., Lee J. (2024) Load-bearing behaviour of anchors in fibre-reinforced concrete – a state of the art review. *Journal of Building Engineering*. 91(5). Article 109580. doi: 10.1016/j.jobee.2024.109580

4. Rajbhandari P., Lee J, Pokharel T., Amirsardari A., Gad E. (2025) Tensile performance of headed fasteners in high-strength concrete: Experimental and numerical analysis. *Construction and Building Materials*. 484. Article 142225. doi: 10.1016/j.conbuildmat.2025.142225
5. Padilla A., Najvani M.A., Knight E., Rougier E., Stormont J., Reda Taha M.M. (2022) Correlating damage and cracking with air (gas) permeability in concrete using the Brazilian tension test. *Construction and Building Materials*. Article 128616. doi: 10.1016/j.conbuildmat.2022.1286
6. Fayed A.S., Sherbini A.S., Abou El-Mal H.S.S. (2023) Mixed mode fracture behavior of fiber reinforced concrete; Experimental and numerical analysis adopting cracked Brazilian disc specimen. *Ain Shams Engineering Journal*. 14(9). Article 102132. doi: 10.1016/j.asej.2023.102132
7. Ma W., Gao D., Ding C., Wang L., Tang J. (2024) Whole process analysis on splitting tensile behavior and damage mechanism of 3D/4D/5D steel fiber reinforced concrete using DIC and AE techniques. *Construction and Building Materials*. 457. Article 139295. doi: 10.1016/j.conbuildmat.2024.139295
8. ASTM D3967-16 (2016) *Standard Test Method for Splitting Tensile Strength of Intact Rock Core Specimens*. ASTM International. West Conshohocken. PA. doi: 10.1520/D3967-1/
9. AS 1012.10 (2000) *Standards Australia, Method 10: Determination of Indirect Tensile Strength of Concrete Cylinders ('Brazil' or Splitting Test)*. Standards Australia.
10. GOST 10180-2012 (2018) *Бетон. Методы определения прочности по контрольным образцам* [Concretes. Methods for strength determination using reference specimens]. Moscow: Standartinform.
11. Antoun T., Seaman L., Curran D.R., Kanel G.I., Razorenov S.V., Utkin A.V. (2003) *Spall Fracture*. New York: Springer. doi: 10.1007/b97226
12. Hall C.A., Chhabildas L.C., Reinhart W.D. (1998) Shock Hugoniot and release states in concrete mixtures with different aggregate sizes from 3 to 23 GPa. *AIP Conference Proceedings*. 429. pp. 119–122.
13. Lamzin D.A., Gonov M.E., Bragov A.M., Lomunov A.K. (2023) Povedenie melkozernistykh fibrobetonov pri raznykh rezhimakh mekhanicheskogo nagruzheniya [Response of fine-grained fiber-reinforced concrete under different mechanical loading conditions]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 81. pp. 97–109. doi: 10.17223/19988621/81/9
14. Forquin P., Erzar B. (2010) On the processing of spalling experiments. Part I: Identification of the dynamic tensile strength of concrete. *International Journal of Fracture*. 163. pp. 193–215. doi: 10.1007/s10704-009-9419-3
15. Schuler H., Mayrhofer C., Thoma K. (2006) Spall experiments for the measurement of the tensile strength and fracture energy of concrete at high strain rates. *International Journal of Impact Engineering*. 32. pp. 1635–1650. doi: 10.1016/j.ijimpeng.2005.01.010
16. Kipp M.E., Chhabildas L.C., Reinhart W.D. (1998) Elastic shock response and spall strength of concrete. *AIP Conference Proceedings*. 429. pp. 557–560. doi: 10.1063/1.55664
17. Forquin P., Erzar B. (2010) Dynamic fragmentation process in concrete under impact and spalling tests. *International Journal of Fracture*. 163. pp. 193–215. doi: 10.1007/s10704-009-9419-3
18. Chen J.-Y., Liu C.-C., Dong H.-W., Shi D.-S., Zhang Z.-X., Wang D.-J. (2013) Dynamic properties of concrete materials under shock loading. *Construction and Building Materials*. 39. pp. 119–123 doi: 10.1016/j.conbuildmat.2012.05.011
19. Tsembelis K., Proud W.G. (2006) The dynamic behavior of micro-concrete. *AIP Conference Proceedings*. 845. pp. 1496–1499. doi: 10.1063/1.2263608
20. Andrews T., Chapman D.J., Proud W.G. (1998) The response of concrete to shock-loading. *AIP Conference Proceedings*. 429. pp. 119–122. doi: 10.1063/1.55638
21. Al-Salloum Y., Almusallam T., Ibrahim S.M., Abbas H., Alsayed S. (2015) Rate dependent behavior and modeling of concrete based on SHPB experiments. *Cement & Concrete Composites*. 55. pp. 34–44. doi: 10.1016/j.cemconcomp.2014.07.011

22. Kanel G.I., Razorenov S.V., Utkin A.V., Fortov V.E. (1996) *Udarnovolnovnye yavleniya v kondensirovannykh sredakh* [Shock-wave phenomena in condensed media]. Moscow: Yanus-K.
23. Barker L.M., Hollenbach R.E. (1972) Laser interferometer for measuring high velocities of any reflecting surface. *Journal of Applied Physics*. 43. pp. 4669–4675. doi: 10.1063/1.1660986
24. Arioglu N., Girgin Z.C., Arioglu E. (2006) Evaluation of ratio between splitting tensile strength and compressive strength for concretes up to 120 MPa and its application. *ACI Materials Journal*. 103(1). pp. 18–24.
25. Ahmad S.H., Shah S.P. (1985) Structural properties of high strength concrete and its implications for precast prestressed concrete. *Journal - Prestressed Concrete Institute*. 30(6). pp. 92–119.
26. Shen D., Shi X., Zhu S., Duan X., Zhang J. (2016) Relationship between tensile Young's modulus and strength of Fly ash high strength concrete at early age. *Construction and Building Materials*. 123. pp. 317–326. doi: 10.1016/J.CONBUILDMAT.2016.06.145
27. Østergaard L. (2003) *Early Age Fracture Mechanics and Cracking of Concrete: Experiments and Modelling*. Technical University of Denmark.
28. Savinykh A.S., Garkushin G.V., Kanel G.I., Razorenov S.V. (2018) Method of measurement of the dynamic strength of concrete under explosive loading. *International Journal of Fracture*. 209. pp. 109–115. doi: 10.1007/s10704-017-0244-9
29. Savinykh A.S., Garkushin G.V., Kanel G.I., Razorenov S.V. (2019) Compressive and tensile strength of steel fibrous reinforced concrete under explosive loading. *International Journal of Fracture*. 215. pp. 129–138. doi: 10.1007/s10704-018-00342-w
30. Bragov A.M., Igumnov L.A., Lomunov A.K. (2015) *Vysokoskorostnaya deformatsiya melkozernistogo betona i fibrobetona* [High-speed deformation of fine-grained concrete and fiber-reinforced concrete]. Nizhny Novgorod: LSUNN.

Сведения об авторах:

Петров Павел Олегович – аспирант физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: souzbeton_petrov@mail.ru

Козулин Александр Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: kozulyn@ftf.tsu.ru

Савиных Андрей Сергеевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории реологических свойств конденсированных сред при импульсных воздействиях, ФИЦ Проблем химической физики и медицинской химии Российской академии наук (Черноголовка, Россия). E-mail: savas@ficp.ac.ru

Гаркушин Геннадий Валерьевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории реологических свойств конденсированных сред при импульсных воздействиях ФИЦ Проблем химической физики и медицинской химии Российской академии наук (Черноголовка, Россия). E-mail: garkushin@ficp.ac.ru

Жуков Илья Александрович – доктор технических наук, заведующий лабораторией нанотехнологий металлургии Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: gofra930@gmail.com

Information about the authors:

Petrov Pavel O. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: souzbeton_petrov@mail.ru

Kozulin Alexander A. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kozulyn@ftf.tsu.ru

Savinykh Andrey S. (Candidate of Physics and Mathematics, Federal Research Center for Problems of Chemical Physics and Medical Chemistry, Russian Academy of Sciences, Chernogolovka, Russian Federation). E-mail: savas@ficp.ac.ru

Garkushin Gennadiy V. (Candidate of Physics and Mathematics, Federal Research Center for Problems of Chemical Physics and Medical Chemistry, Russian Academy of Sciences, Chernogolovka, Russian Federation). E-mail: garkushin@ficp.ac.ru

Zhukov Pya A. (Doctor of Technical Sciences, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: gofra930@gmail.com

Статья поступила в редакцию 05.11.2025; принята к публикации 05.02.2026

The article was submitted 05.11.2025; accepted for publication 05.02.2026

Научный журнал

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

2026. № 99

Редактор Е.Г. Шумская
Оригинал-макет Е.Г. Шумской
Дизайн обложки Л.Д. Кривцова

Подписано в печать 02.03.2026 г. Формат 70×100^{1/16}.
Печ. л. 11,2; усл. печ. л. 10,4. Цена свободная.
Тираж 250 экз. Заказ № 6691.

Дата выхода в свет 23.03.2026 г.

Адрес издателя и редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
Томский государственный университет

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании
Издательства Томского государственного университета
634050, г. Томск, Ленина, 36
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: rio.tsu@mail.ru