

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/99/10

## Решение неосесимметричной первой основной стационарно-динамической задачи теории упругости для анизотропного тела вращения

Дмитрий Алексеевич Иванычев

*Липецкий государственный технический университет, Липецк, Россия, Lsivdmal@mail.ru*

**Аннотация.** Представлена математическая модель построения напряженно-деформированного состояния конечного трансверсально-изотропного тела вращения в условиях стационарной динамической задачи, когда к телу приложены поверхностные усилия, гармонические во времени. Метод решения заключается в разложении искомого упругого состояния в ряд Фурье по элементам ортонормированного базиса пространства граничных состояний. В качестве базисных элементов выступают частные решения пространственной неосесимметричной задачи теории упругости для трансверсально-изотропного тела вращения. Приведено решение первой основной задачи теории упругости для кругового трансверсально-изотропного цилиндра. **Ключевые слова:** стационарные динамические задачи, первая основная задача, анизотропное тело, несимметричная деформация, метод граничных состояний

**Для цитирования:** Иванычев Д.А. Решение неосесимметричной первой основной стационарно-динамической задачи теории упругости для анизотропного тела вращения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2026. № 99. С. 138–153. doi: 10.17223/19988621/99/10

Original article

## Solution of the first fundamental non-axisymmetric stationary-dynamic problem of elasticity theory for an anisotropic body of revolution

Dmitriy A. Ivanychev

*Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russian Federation, Lsivdmal@mail.ru*

**Abstract.** This paper presents a methodology for constructing the stress–strain state of transversely isotropic bodies of revolution under the conditions of the first fundamental problem of elasticity theory, where the forces specified on the body surface vary harmonically in time. The applied forces are also non-axisymmetric. The disturbance propagates with a constant velocity along one axis of the elastic symmetry of the material. The approach is based on the relationship between the three-dimensional stress–strain state of an elastic transversely isotropic body and a set of auxiliary two-dimensional states. The auxiliary

states are constructed using the general solution to the stationary–dynamic problem of plane strain and deplanation. The solution is then obtained using the method of boundary states. A set of plane auxiliary states is formed, and using transition formulas, a corresponding set of three-dimensional states is constructed. Sets of such states form bases for the spaces of internal and boundary states. After orthogonalization, these bases are used when the desired state is expanded into Fourier series with the same coefficients.

Thus, a solution to the first fundamental dynamic problem of elasticity theory is presented for a transversely isotropic circular cylinder subjected to time-harmonic (sinusoidal) forces applied to its lateral surface.

**Keywords:** stationary dynamic problems, first fundamental problem, anisotropic body, asymmetric deformation, boundary state method

**For citation:** Ivanychev, D.A. (2026) Solution of the first fundamental non-axisymmetric stationary–dynamic problem of elasticity theory for an anisotropic body of revolution. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 99. pp. 138–153. doi: 10.17223/19988621/99/10

## Введение

Циклические процессы в механике физических процессов встречаются довольно часто. Если то или иное возмущение распространяется с постоянной скоростью, то такие задачи называются стационарно-динамическими. Учет инерционных составляющих в задаче по определению напряженно-деформированного состояния тела, находящегося под действием данных возмущений, усложняет ее решение, а если тело является еще и анизотропным, то важность иметь математическую модель построения упругих полей в задачах такого рода очевидна.

Решению динамических задач механики для изотропных и анизотропных сред посвящено множество работ. Например, в работе [1] рассмотрен вопрос применения трех упругих потенциалов для решения пространственных динамических задач для упругого полупространства. Интегральное преобразование Радона позволило перейти к плоской задаче в образах. В работе на основе этого решения исследовались волны Рэлея. Работа [2] посвящена построению квадратур для решения динамических задач теории упругости со смешанными поверхностными условиями для ограниченных сред из линейно-однородного анизотропного материала. В работе [3] в рамках модели Тимошенко решена стационарно-динамическая задача для кольцеобразной плоской области. С помощью системы компьютерной алгебры определены частоты и формы собственных колебаний пластины при различных способах ее закрепления. В работе [4] с помощью численных преобразований получены граничные интегральные уравнения для решения различных краевых задач теории упругости для изотропных тел. В работе [5] исследуются краевые динамические задачи для трансверсально-изотропного упругого сферического слоя. С помощью вариационного принципа Гамильтона получены асимптотические разложения, позволяющие получить напряженно-деформированное состояние при различных значениях частоты возмущающей нагрузки.

Много работ посвящено развитию методов решения задач динамики. В [6] представлен численно-аналитический метод решения нестационарно-динамических контактных задач об ударе. Для решения двумерных интегральных урав-

нений использовался метод последовательных приближений. В работе [7] исследовалась динамическая контактная задача с двумя деформируемыми штампами, лежащими на деформируемом основании. Исследование опирается на метод блочного элемента, позволяющий строить точные решения граничных задач для дифференциальных уравнений в частных производных. В [8] обсуждалась возможность решения динамических задач теории упругости в конечно-элементных технологиях. В работе сравнивались три типа вариационных постановок: принцип Гамильтона, принцип Лагранжа и принцип возможных перемещений. Полученные уравнения в матричном виде описывают волновое движение конечно-элементной сетки и могут применяться при решении различных задач о распространении волны. В работе [9] решение задачи о движущейся нагрузке, приложенной к телам вращения, проводилось методом граничных интегральных уравнений. Рассмотрена плоская динамическая задача для сферической оболочки, нагруженной двумя подвижными сосредоточенными силами. В [10] показана численная реализация разностной схемы решения плоских динамических задач для областей сложной формы.

Актуальность разработки аналитических методов расчета задач анизотропных тел связана с возможностью эффективного и быстрого расчета ряда прикладных задач и технологических процессов. При этом сейчас зачастую используются численные методы, требующие существенных вычислительных ресурсов: памяти и процессорного времени. Настоящая работа посвящена развитию аналитического метода граничных состояний на класс неосесимметричных задач динамики для трансверсально-изотропного тела вращения.

## 1. Постановка задачи

Исследуется динамическая деформация конечного тела вращения из трансверсально-изотропного материала, ось упругой симметрии которого совпадает с осью вращения тела (рис. 1).

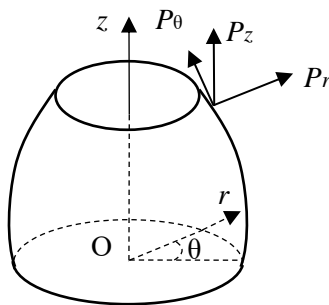


Рис. 1. Анизотропное тело вращения

Fig. 1. Anisotropic solid of revolution

В стационарной динамической задаче в неосесимметричной постановке компоненты упругого поля (перемещения, деформации и напряжения) зависят не только от координат  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$ , но и от времени  $t$ . Заданными являются усилия на поверхности тела  $p_{iv} = \{p_r, p_\theta, p_z\}$ , возмущения в которых распространяются с постоянной

скоростью  $c$  вдоль координаты  $z$ . Вводя подвижную координату  $z_0 = z - ct$ , можно исключить параметр  $t$  из определяющих уравнений, и компоненты упругого поля будут зависеть только от переменных  $r, z_0$ , а также угловой координаты  $\theta$ .

Задача состоит в отыскании переменного во времени напряженно-деформированного состояния.

## 2. Определяющие соотношения

В цилиндрической системе координат  $r, \theta, z_0$  при отсутствии осевой симметрии между перемещениями  $u, v, w$ , деформациями  $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{z_0}, \gamma_{z_0r}$ , напряжениями  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_{z_0}, \tau_{z_0r}$ , а также между техническими константами материала  $E_{z_0}, E_r, \nu_{z_0}, \nu_r, G_r, G_{z_0}$  имеют место следующие зависимости.

Уравнения равновесия (объемные силы отсутствуют) [11]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{z_0r}}{\partial z_0} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \sigma_{z_0}}{\partial z_0} + \frac{\partial \tau_{z_0r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z_0\theta}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{z_0r}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \tau_{z_0\theta}}{\partial z_0} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Соотношения Коши [11]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_{z_0} = \frac{\partial w}{\partial z_0}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}; \\ \gamma_{z_0r} &= \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z_0}; \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}; \quad \gamma_{z_0\theta} = \frac{\partial v}{\partial z_0} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнения совместности деформаций [12]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta}) &= 0; \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \varepsilon_{z_0\theta}}{\partial \theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta \partial z_0} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{z_0r}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial z_0}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial z_0} &= 0; \\ - \frac{\partial}{\partial r} (\frac{1}{r} \frac{\partial (r \varepsilon_{z_0\theta})}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial z_0}) + \frac{\partial}{\partial r} (\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{z_0r}}{\partial \theta}) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta \partial z_0} &= 0; \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{z_0}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{z_0}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial z_0^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{z_0\theta}}{\partial \theta \partial z_0} - \frac{2}{r} \frac{\partial \varepsilon_{z_0r}}{\partial z_0} &= 0; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{z_0r}}{\partial \theta \partial z_0} + r \frac{\partial}{\partial r} (\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{z_0\theta}}{\partial z_0}) - \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\theta}}{\partial z_0^2} - \frac{\partial}{\partial r} (\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{z_0}}{\partial \theta}) &= 0; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial z_0^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{z_0}}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{z_0r}}{\partial r \partial z_0} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Обобщенный закон Гука [11]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E_r} \left[ (\sigma_r - \nu_r \sigma_\theta) - \frac{\nu_{z_0}}{E_{z_0}} \sigma_{z_0} \right]; \quad \varepsilon_{z_0} = \frac{1}{E_{z_0}} \left[ \sigma_{z_0} - \nu_{z_0} (\sigma_r + \sigma_\theta) \right]; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E_r} (\sigma_\theta - \nu_r \sigma_r) - \frac{\nu_{z_0}}{E_{z_0}} \sigma_{z_0}; \\ \gamma_{z_0 r} &= \frac{1}{G_{z_0}} \tau_{z_0 r}; \quad \gamma_{z_0 \theta} = \frac{1}{G_{z_0}} \tau_{z_0 \theta}; \quad \gamma_{r \theta} = \frac{1}{G_r} \tau_{r \theta} = \frac{2(1 + \nu_r)}{E_r} \tau_{r \theta}. \end{aligned} \quad (4)$$

### 3. Общее решение задачи

В работе [11] представлено общее решение пространственной краевой статической задачи в виде тригонометрических рядов, коэффициенты которых представляют собой квадратуры. В качестве ядер интегралов выступают некоторые плоские вспомогательные состояния (плоская деформация и депланация)  $\mathbf{u}^{pl} = \{u_y^{pl}, u_\eta^{pl}, u_{z_0}^{pl}\}$ .

Компоненты вектора перемещения решения пространственной задачи имеют вид:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=a}^b [u_n \cos n\theta + u_n \sin n\theta]; \\ v &= \sum_{n=a}^b [-v_n \sin n\theta + v_n \cos n\theta]; \\ w &= \sum_{n=a}^b [w_n \cos n\theta + w_n \sin n\theta]. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (u_y^{pl} + u_\eta^{pl}) \cos(n-1)\beta d\beta + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (u_y^{pl} - u_\eta^{pl}) \cos(n+1)\beta d\beta; \\ v_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (u_y^{pl} + u_\eta^{pl}) \sin(n-1)\beta d\beta - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (u_y^{pl} - u_\eta^{pl}) \sin(n+1)\beta d\beta; \\ w_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u_{z_0}^{pl} \cos n\beta d\beta, \end{aligned}$$

где  $a$  и  $b$  – пределы суммирования.

Общее решение плоской стационарной динамической задачи как основа для перехода к пространственному состоянию имеет вид [11]:

$$\begin{aligned} u_y^{pl} &= \operatorname{Re}[iq_1^0 \varphi_1(\zeta_1) + iq_2^0 \varphi_2(\zeta_2)]; \\ u_{z_0}^{pl} &= \operatorname{Re}[p_1^0 \varphi_1(\zeta_1) + p_2^0 \varphi_2(\zeta_2)]; \\ u_\eta^{pl} &= -\operatorname{Re}[iq_3^0 \varphi_3(\zeta_1)]; \end{aligned} \quad (6)$$

$$p_j^0 = p_j - g\gamma_j; \quad q_j^0 = q_j - g\gamma_j, \quad (j = 1, 2); \quad q_3^0 = -1/G_r; \quad \gamma_3 = \sqrt{G_{z_0}/G_r};$$

$$g = \rho \Delta c^2 / (2G_r E_{z_0}); \quad \Delta = 1 - \nu_r - 2\nu_{z_0}^2 \frac{E_r}{E_{z_0}},$$

где:  $q_j$  и  $p_j$  – комплексные параметры (определены упругими константами материала),  $\zeta_j = z_0 / \gamma_j + iy$ ,  $\gamma_j$  – комплексные корни векового уравнения [11], функции

$\varphi_j(\zeta_j)$  – комплексная функция переменной  $\zeta_j$ ,  $\rho$  – плотность материала;  $c$  – скорость распространения волны.

#### 4. Метод решения задачи

Совокупность компонент вектора перемещения, компонент тензора деформаций и тензора напряжений определяют допустимое упругое внутреннее состояние среды  $\xi_k = \{u_i^{(k)}, \varepsilon_{ij}^{(k)}, \sigma_{ij}^{(k)}\}$ . Совокупность таких состояний можно организовать в базис конечномерного пространства внутренних состояний [13]:

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k, \dots\}.$$

Базисные элементы пространства  $\Xi$  можно организовать, если приписать функциям  $\varphi_j(\zeta_j)$  в (6) последовательно следующие значения:

$$\begin{pmatrix} \phi_1(\zeta_1) \\ \phi_2(\zeta_2) \\ \phi_3(\zeta_3) \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} \zeta_1^n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \zeta_2^n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \zeta_3^n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i\zeta_1^n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i\zeta_2^n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i\zeta_3^n \end{pmatrix}, \dots \right\}, n = 1, 2, 3, \dots,$$

тем самым построить набор плоских вспомогательных упругих состояний, которые могут быть использованы в интегральных операторах (5) для построения уже множества пространственных состояний для трансверсально-изотропной среды. Это множество и определит базис пространства  $\Xi$ .

Внутреннее состояние  $\xi_k$  на границе определит граничное состояние

$$\gamma_k = \{u_{iv}^{(k)}, p_i^{(k)}\},$$

где  $u_{iv}^{(k)}$  – перемещения точек границы тела;  $p_i^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)} n_j$  – усилия на границе.

Набор таких состояний образует базис пространства граничных состояний  $G = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_k, \dots\}$ .

После построения базисов пространств состояний их элементы подлежат ортонормированию, которое можно осуществить по разработанному рекурсивно-матричному алгоритму ортогонализации [14]. Алгоритм в своей работе использует назначенные в конкретной задаче перекрестные скалярные произведения, например для базиса пространства  $G$

$$(\gamma^k, \gamma^l) = \int_S p_i^{(k)} p_i^{(l)} dS, \quad (7)$$

где  $S$  – поверхность тела.

Решение представляет собой ряд Фурье:

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k, \\ u_i &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_i^{(k)}; \quad \varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon_{ij}^{(k)}; \quad \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma_{ij}^{(k)}. \end{aligned} \quad (8)$$

В условиях первой основной задачи теории упругости, когда на границе тела заданы усилия  $p_{iv}$ , коэффициенты Фурье вычисляются следующим образом:

$$c_k = \int_S p_{iv} p_i^{(k)} dS. \quad (9)$$

### 5. Решение задачи

Рассмотрим решение задачи для конечного кругового цилиндра. Материал цилиндра – алевролит крупный темно-серый [15]. До начала решения в методе граничных состояний проводится обезразмеривание параметров задачи [16]. После процедуры:

– упругие характеристики материала:  $E_{z_0} = 6.21$ ;  $E_r = 5.68$ ;  $G_r = 2.29$ ;  $G_{z_0} = 2.55$ ;  $\nu_{z_0} = 0.22$ ;  $\nu_r = 0.24$ ;

– цилиндр занимает объем  $V = \{(r, \theta, z_0) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -2 \leq z_0 \leq 2\}$ ;

– плотность материала  $\rho = 2.69$ ;

– скорость распространения возмущения  $c = 0.25$ .

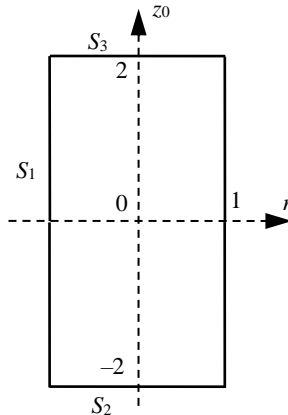
С практической точки зрения интерес составляют возмущения, являющиеся гармоническими во времени. Поскольку возмущения распространяются вдоль одной координаты  $z_0$ , переменные во времени усилия могут быть заданы только на боковой поверхности цилиндрического тела. На торцовых поверхностях усилия носят стационарный характер.

Пусть на боковой поверхности цилиндра в осевом направлении заданы усилия по такой функции, изменяющейся от координаты  $z_0$ , чтобы после обратной параметризации  $z_0 = z - ct$  усилия изменялись по циклическому закону, а не устремлялись в бесконечность.

Пусть на боковой поверхности цилиндрического тела усилия заданы следующим образом (рис 2.):

$$\text{Граница } S_1: p_r = \sin\left(\frac{\pi z_0}{2}\right) \cos \theta; p_\theta = \sin\left(\frac{\pi z_0}{2}\right) \sin \theta; p_{z_0} = 0.$$

На торцовых поверхностях  $S_2$  и  $S_3$  усилия отсутствуют.



**Рис. 2.** Граничные условия к задаче для цилиндра  
**Fig. 2.** Boundary conditions for the problem with a cylinder

Если проводить решение задачи, используя граничные условия непосредственно в той форме, в которой они заданы, то полученное решение будет удовлетворять

граничным условиям (с определенной точностью) лишь на области  $-2 \leq z_0 \leq 2$ . После обратной параметризации при фиксированной координате  $-2 \leq z \leq 2$  и увеличении времени будут наблюдаться односторонние осцилляции компонент упругого поля, что не будет соответствовать поставленной задаче в гармонической форме.

Здесь необходимо представить функцию  $\sin\left(\frac{\pi z_0}{2}\right)$  в виде степенного ряда

$$\sin\left(\frac{\pi z_0}{2}\right) = \frac{\pi z_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n \pi^{2n+1} z_0^{2n+1}}{(2n+1)! 4^{n+1}}. \quad (10)$$

Предположим, что нужно обеспечить сходимость рядов на конечном интервале времени  $0 \leq t \leq 20$ , при этом гарантированно не будет осцилляций, если удерживать 15 первых членов ряда (включая  $\frac{\pi z_0}{2}$ ), т.е. последний член ряда имеет переменную  $z_0^{29}$ .

Если использовать полный ряд (10) в качестве граничных условий (ГУ), то восстановить упругое поле в рамках одной задачи, удовлетворяющее на границе заданным усилиям на принятом интервале времени, не представляется возможным. В данном случае возникает необходимость в использовании принципа независимости действия сил и, как следствие, в решении 15 отдельных краевых задач.

На боковой поверхности цилиндра при  $n = 0$  ГУ:  $p_r = \frac{z_0 \cos \theta}{2}$ ,  $p_\theta = \frac{z_0 \sin \theta}{2}$ ,  $p_{z_0} = 0$ . В этой и последующих задачах усилия на торцовых поверхностях  $S_2$  и  $S_3$  остаются без изменений. В силу того, что максимальная амплитуда заданных усилий равна единице, с целью обеспечения единого порядка вычислений в каждой задаче на боковой поверхности будем задавать функцию вида  $p_r = \frac{z_0^{(2n-1)} \cos \theta}{2^{(2n-1)}}$ . Знаки и добавочные коэффициенты при членах ряда (10) будут учитываться в окончательном решении.

В табл. 1 приведен вид функций компонент вектора перемещения в базисных элементах пространства  $\Xi$  (показано 4 элемента).

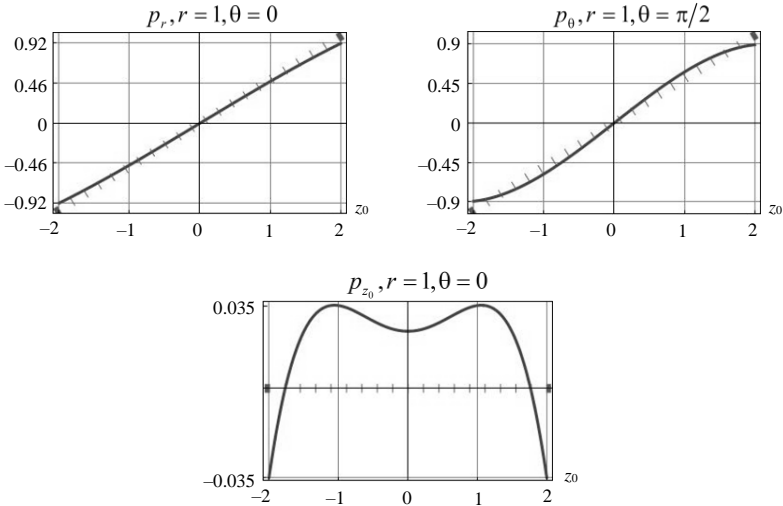
Таблица 1

Компоненты вектора перемещения ортонормированного базиса

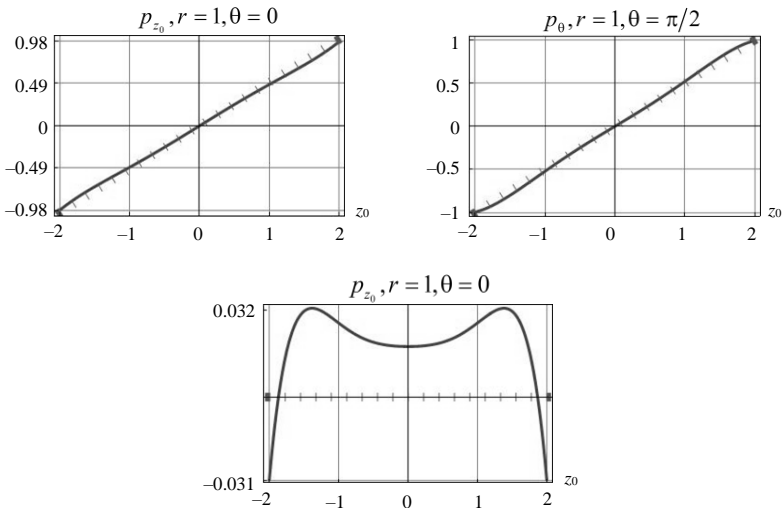
$N$	$u$	$v$	$w$
$\Xi_1$	$0.029z_0 \cos \theta$	$-0.029z_0 \sin \theta$	$-0.1193r \cos \theta$
$\Xi_2$	$(0.0127r^2 + z_0^2 0.0638) \cos \theta$	$(-0.004r^2 - z_0^2 0.0638) \sin \theta$	$-0.1192r z_0 \cos \theta$
$\Xi_3$	$(0.0143z_0^2 - r^2 0.0106) \cos \theta$	$(0.0035r^2 - z_0^2 0.0143) \sin \theta$	$0.0262r z_0 \cos \theta$
$\Xi_4$	$(-0.0037r^2 - z_0^2 0.029) \cos \theta$	$(-0.1r^2 + z_0^2 0.0293) \sin \theta$	$0.049r z_0 \cos \theta$

Для решения первой задачи используем базис внутренних состояний из 20 элементов. Оценку сходимости решения проведем путем сопоставления заданных граничных условий с полученными в ходе решения. Штриховая линия – заданные

граничные условия, сплошная – полученные в результате решения. На рис. 3 показаны граничные условия при использовании 5 членов ряда, а на рис. 4 – при 20.



**Рис. 3.** Восстановленные усилия на границе при 5 элементах базиса  
**Fig. 3.** Reconstructed boundary forces for 5 basis elements



**Рис. 4.** Восстановленные усилия на границе при 20 элементах базиса  
**Fig. 4.** Reconstructed boundary forces for 20 basis elements

Далее покажем решение задачи для последнего члена ряда (10) со степенью  $n = 29$  как для наиболее сложной задачи в силу локализации приложенных усилий на достаточно коротких участках границы. ГУ имеют вид:  $p_r = \frac{z_0^{29} \cos \theta}{2^{29}}$ ,  $p_\theta = \frac{z_0^{29} \sin \theta}{2^{29}}$ ,  $p_{z_0} = 0$ .

Для решения данной задачи потребовался уже довольно большой базис в 115 элементов. Приведем выборочно значения коэффициентов Фурье (9):  $c_5 = -0.1058$ ;  $c_7 = -0.2541$ ;  $c_{19} = 0.2431$ ;  $c_{35} = 0.2431$ ;  $c_{35} = 0.0992$ ;  $c_{78} = 0.0131$ .

Рисунок 5 демонстрирует «насыщение» суммы Бесселя. График позволяет косвенным образом судить о сходимости решения.

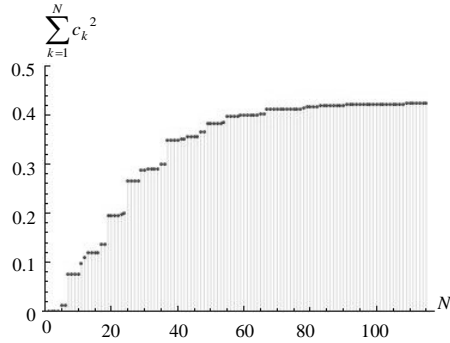


Рис. 5. Сумма Бесселя  
Fig. 5. Bessel sum

На рис. 6, 7 представлена верификация граничных условий на одной торцевой и боковой поверхностях.

Максимальная погрешность составила 4%. С увеличением числа используемых элементов базиса погрешность уменьшается.

Окончательное решение исходной задачи, представляет собой сумму решений всех задач, умноженных на соответствующие коэффициенты, согласно ряду (10) и обратной параметризации  $z_0 \leftarrow z - ct$ .

Граница  $S_2$

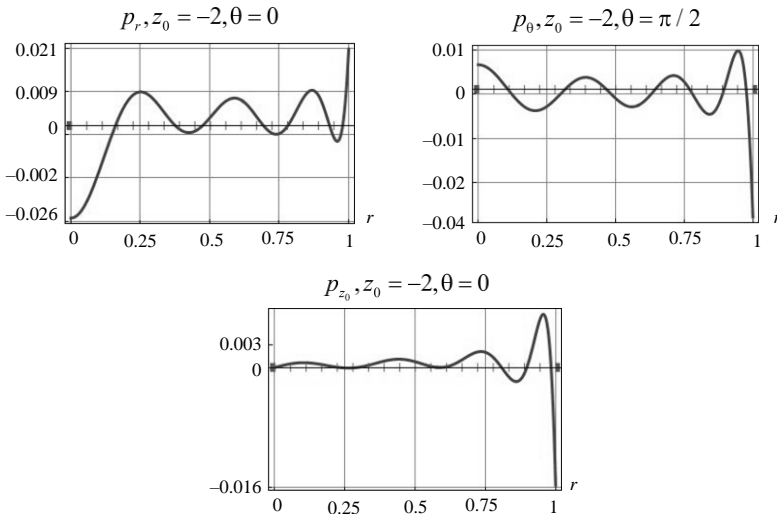
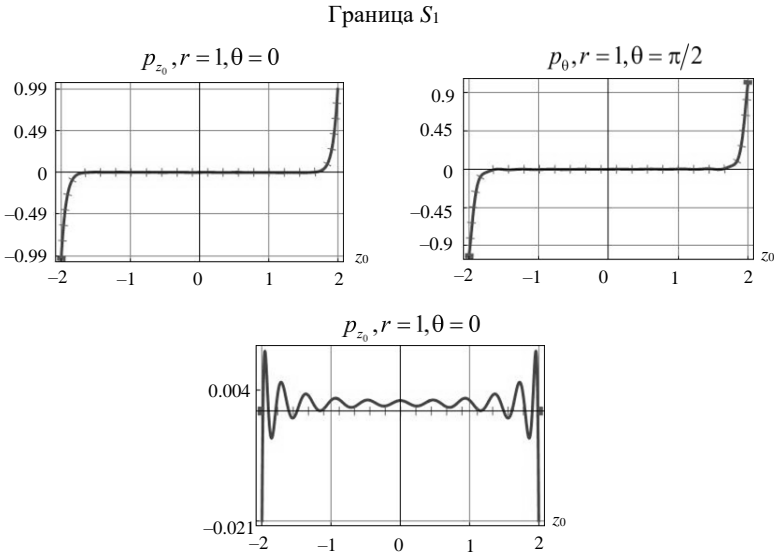
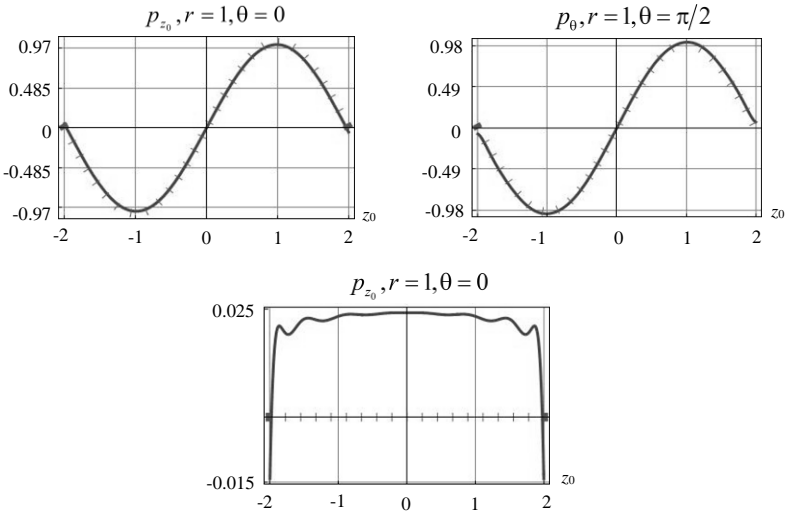


Рис. 6. Верификация граничных условий в пятнадцатой задаче  
Fig. 6. Verification of boundary conditions in the fifteenth problem



**Рис. 7.** Верификация граничных условий в пятнадцатой задаче  
**Fig. 7.** Verification of boundary conditions in the fifteenth problem

На рис. 8 показана верификация граничных условий окончательного решения на боковой поверхности цилиндра в момент времени  $t = 0$ .

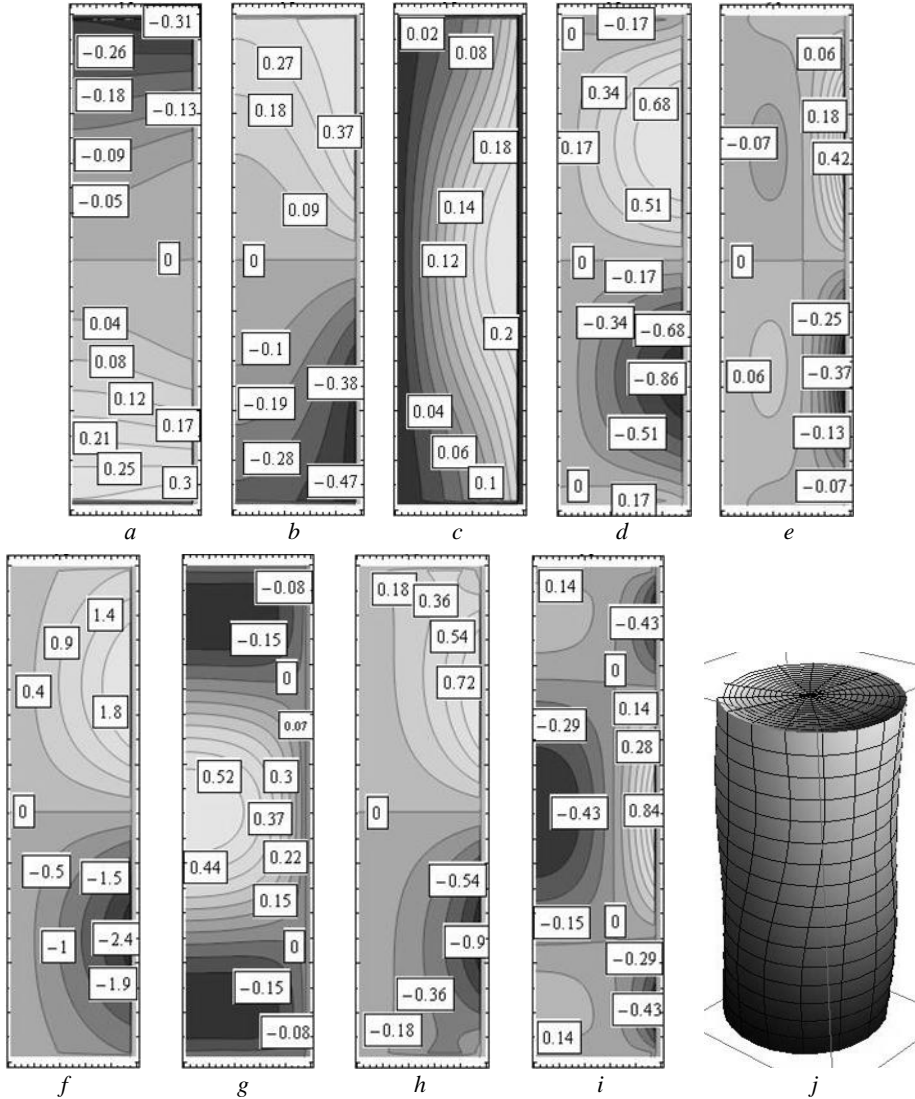


**Рис. 8.** Верификация граничных условий окончательного решения  
**Fig. 8.** Verification of boundary conditions in the final solution

Благодаря тому, что ряд (10) является знакочередующимся, погрешности от каждой задачи не суммируются.

Изолинии компонент упругого поля окончательного решения имеют полиномиальный вид и представлены в виде изолиний (в явном виде необозримы) на рис. 9. В силу осевой симметрии компонент упругого поля относительно оси вращения

показано меридианное сечение с  $0 \leq r \leq 1$  и  $-2 \leq z \leq 2$ . На рис. 9,  $j$  сплошной линией показан контур деформированного состояния, штриховой – не деформированного. В силу малости упругих деформаций контур показан в гипертрофированном виде.



**Рис. 9.** Изолинии:  $a$  – перемещение  $u$ ,  $b$  – перемещение  $v$ ,  $c$  – перемещение  $w$ ,  $d$  – напряжение  $\sigma_r$ ,  $e$  – напряжение  $\sigma_z$ ,  $f$  – напряжение  $\sigma_\theta$ ,  $g$  – напряжение  $\sigma_{zr}$ ,  $h$  – напряжение  $\sigma_{z\theta}$ ,  $i$  – напряжение  $\sigma_{z\theta}$ ,  $j$  – контур деформированного состояния

**Fig. 8.** Isolines of (a) displacement  $u$ , (b) displacement  $v$ , (c) displacement  $w$ , (d) stress  $\sigma_r$ , (e) stress  $\sigma_z$ , (f) stress  $\sigma_\theta$ , (g) stress  $\sigma_{zr}$ , (h) stress  $\sigma_{z\theta}$ , and (i) stress  $\sigma_{z\theta}$ ; (j) contour of a deformed state

Все полученные компоненты упругого поля строго удовлетворяют уравнениям (1)–(4).

### Заключение

В работе решение стационарно-динамической задачи теории упругости в условиях, когда на границе тела заданы усилия, строится следующим образом. По условию задачи, возмущения распространяются с постоянной скоростью  $c$ , что позволило ввести подвижную координату  $z_0 = z - ct$  и использовать общее решение стационарной задачи о плоской деформации и депланации (6) для трансверсально-изотропной среды с поправками на комплексные параметры среды и корни характеристического уравнения (теперь в нем учитывается скорость  $c$  и плотность  $\rho$ ). На основе общего решения, определяющего упругие деформации и напряжения двумерного состояния тела, строится конечное множество плоских вспомогательных состояний. Далее по формулам (5) осуществляется переход к множеству пространственных осесимметричных состояний. Это множество определяет пространства внутренних и граничных состояний в аппарате метода граничных состояний. Затем пространства состояний ортонормируются «по усилиям», используя перекрестные скалярные произведения (7). Окончательно искомые векторы и тензоры разлагаются в ряды (8) с одинаковыми коэффициентами Фурье (9).

В условиях первой основной динамической задачи, когда за возмущения принимаются усилия на границе и носят, например, колебательный характер, заданную гармоническую функцию необходимо разложить в степенной ряд с определенной точностью. Далее для каждого члена ряда проводится решение отдельной задачи, которые затем суммируются. Однако из-за того, что ортонормированный базис как самая энергоемкая в плане машинного времени процедура строится один раз и используется в решении каждой задачи, решение множества задач не вызывает принципиальных трудностей. Следует только «наполнить» пространства состояний достаточным числом элементов для возможности решать задачи с большим показателем у степенной функции, так как там заданные усилия носят практически сингулярный характер (левый график на рис. 7).

В перспективе можно редуцировать метод граничных состояний для решения неосимметричных второй основной, смешанной и контактной стационарно-динамических задач для анизотропного тела вращения. Методика решения данных стационарных задач в осесимметричной постановке граничных условий показана в работах [17, 18].

### Список источников

1. Приказчиков Д.А., Коваленко Е.В. Выбор потенциалов в трехмерных задачах динамической теории упругости // Инженерный журнал: наука и инновации. 2012. № 2 (2). С. 131–137.
2. Ермоленко Г.Ю. Решение динамической задачи анизотропной теории упругости со смешанными краевыми условиями // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки. 2003. № 19. С. 19–21.
3. Фридман Л.И., Моргачев К.С. Решение стационарной динамической задачи для кольцевой пластины в рамках модели Тимошенко // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки. 2005. № 34. С. 68–71.
4. Низомов Д.Н., Ходжибоев О.А., Ходжибоев А.А. Граничные уравнения динамической задачи теории упругости // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2014. Т. 57, № 11-12. С. 850–855.

5. Мехтиев М.Ф., Ахмедов Н.К., Юсубова С.М. Асимптотическое поведение решения осесимметричной динамической задачи теории упругости для трансверсально-изотропного сферического слоя малой толщины // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Сер. Естественные науки. 2020. № 2 (206). С. 61–71. doi: 10.18522/1026-2237-2020-2-61-71
6. Зеленцов В.Б. Об одном методе решения нестационарных динамических контактных задач теории упругости об ударе // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2010. № 6. С. 35–40.
7. Бабешко В.А., Уафа С.Б. и др. О динамической контактной задаче с двумя деформируемыми штампами // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 4–13. doi: 10.18500/1816-9791-2024-24-1-4-13
8. Терпугов В.Н. О возможности построения конечно-элементных алгоритмов для динамических задач теории упругости // Вестник Пермского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2007. № 7. С. 140–144.
9. Галабурдин А.В. Применение метода граничных интегральных уравнений к решению задач о движущейся нагрузке // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Сер. Естественные науки. 2015. № 1 (185). С. 9–11.
10. Немчинов В.В. Двухслойная разностная схема численного решения плоских динамических задач теории упругости // Вестник Московского государственного строительного университета. 2012. № 8. С. 104–111.
11. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости (применение методов теории функций комплексного переменного). М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. 464 с.
12. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гос. изд-во технико-теорет. лит., 1955. 491 с.
13. Пеньков В.Б., Пеньков В.В. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики // Дальневосточный математический журнал. 2001. Т. 2, № 2. С. 115–137.
14. Саталкина Л.В. Нарращивание базиса пространства состояний при жестких ограничениях к энергоемкости вычислений // Сборник тезисов докладов научной конференции студентов и аспирантов Липецкого государственного технического университета. Липецк, 2007. С. 130–131.
15. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. 2-е изд. М.: Наука, 1977. 416 с.
16. Левина Л.В., Новикова О.С., Пеньков В.Б. Полнопараметрическое решение задачи теории упругости односвязного ограниченного тела // Вестник Липецкого государственного технического университета. 2016. № 2 (28). С. 16–24.
17. Иваньчев Д.А. Решение неосесимметричной задачи эластостатики для трансверсально-изотропного тела вращения // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2022. № 2 (101). С. 4–21. doi: 10.18698/1812-3368-2022-2-4-21
18. Иваньчев Д.А. Решение смешанной неосесимметричной задачи теории упругости для анизотропных тел вращения // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2022. № 2. С. 85–97. doi: 10.15593/perm.mech/2022.2.08

## References

1. Prikazchikov D.A., Kovalenko E.V. (2012) Vybora potentsialov v trekhmernykh zadachakh dinamicheskoy teorii uprugosti [Selection of potentials in three-dimensional problems of dynamic elasticity theory]. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii – Engineering Journal: Science and Innovation*. 2(2). pp. 131–137.
2. Ermolenko G.Yu. (2003) Reshenie dinamicheskoy zadachi anizotropnoy teorii uprugosti so smeshannymi kraevymi usloviyami [Solution of a dynamic problem of anisotropic elasticity theory with mixed boundary conditions]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo*

- tehnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki – Journal of Samara State Technical University. Physical and Mathematical Sciences.* 19. pp. 19–21.
3. Fridman L.I., Morgachev K.S. (2005) Reshenie statsionarnoy dinamicheskoy zadachi dlya kol'tsevoy plastiny v ramkakh modeli Timoshenko [Solution of a stationary dynamic problem for an annular plate within the framework of the Timoshenko model]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskiye nauki – Journal of Samara State Technical University. Physical and Mathematical Sciences.* 34. pp. 68–71.
  4. Nizomov D.N., Khodzhiboev O.A., Khodzhiboev A.A. (2014) Granichnye uravneniya dinamicheskoy zadachi teorii uprugosti [Boundary equations of the dynamic problem of elasticity theory]. *Doklady Akademii nauk Respubliki Tadjikistan – Reports of the National Academy of Sciences of Tajikistan.* 57. 11–12. pp. 850–855.
  5. Mekhtiev M.F., Akhmedov N.K., Yusubova S.M. (2020) Asimptoticheskoe povedenie resheniya osesimmetrichnoy dinamicheskoy zadachi teorii uprugosti dlya transversal'no-izotropnogo sfericheskogo sloya maloy tolshchiny [Asymptotic behavior of the solution of an axisymmetric dynamic problem of elasticity theory for a transversely isotropic spherical layer of small thickness]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Seriya: Estestvennye nauki – Bulletin of Higher Education Institutes North Caucasus Region. Natural Sciences.* 2(206). pp. 61–71. doi: 10.18522/1026-2237-2020-2-61-71
  6. Zelentsov V.B. (2010) Ob odnom metode resheniya nestatsionarnykh dinamicheskikh kontaktnykh zadach teorii uprugosti ob udare [On one method for solving non-stationary dynamic contact problems of elasticity theory on impact]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Seriya: Estestvennye nauki – Bulletin of Higher Education Institutes North Caucasus Region. Natural Sciences.* 6. pp. 35–40.
  7. Babeshko V.A., Uafa S.B., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Telyatnikov I.S., Evdokimov V.S. (2024) O dinamicheskoy kontaktnoy zadache s dvumya deformiruemyimi shtampami [On a dynamic contact problem with two deformable stamps]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika – Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics.* 24(1). pp. 4–13. doi: 10.18500/1816-9791-2024-24-1-4-13
  8. Terpugov V.N. (2007) O vozmozhnosti postroeniya konechno-elementnykh algoritmov dlya dinamicheskikh zadach teorii uprugosti [On the possibility of developing finite element algorithms for dynamic problems in the theory of elasticity]. *Vestnik Permskogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika – Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science.* 7. pp. 140–144.
  9. Galaburdin A.V. (2015) Primenenie metoda granichnykh integral'nykh uravneniy k resheniyu zadach o dvizhushcheysya nagruzke [Application of the method of boundary integral equations to solving problems of moving loads]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Seriya: Estestvennye nauki – Bulletin of Higher Education Institutes North Caucasus Region. Natural Sciences.* 1(185). pp. 9–11.
  10. Nemchinov V.V. (2012) Dvukhsloynaya raznostnaya skhema chislennogo resheniya ploskikh dinamicheskikh zadach teorii uprugosti [Two-layer difference scheme for numerical solution of plane dynamic problems of elasticity theory]. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo stroitel'nogo universiteta – Vestnik MGSU.* 8. pp. 104–111.
  11. Aleksandrov A.Ya., Solov'ev Yu.I. (1978) *Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti (primeneniye metodov teorii funktsii kompleksnogo peremennogo)* [Spatial problems of the theory of elasticity (application of methods of the theory of functions of a complex variable)]. Moscow: Nauka.
  12. Lur'e A.I. (1955) *Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti* [Spatial problems of the theory of elasticity]. Moscow: Gosizdat tekhniko-teoreticheskoy literatury.
  13. Pen'kov V.B., Pen'kov V.V. (2001) Metod granichnykh sostoyaniy dlya resheniya zadach lineynoy mekhaniki [The method of boundary states for solving problems of linear mechanics]. *Dal'nevostochnyy matematicheskiy zhurnal – Far Eastern Mathematical Journal.* 2(2). pp. 115–137.

14. Satalkina L.V. (2007) Narashchivanie bazisa prostranstva sostoyaniy pri zhestkikh ograni-cheniyakh k energoemkosti vychisleniy [Expansion of the basis of the state space with severe limitations on the energy consumption of computations]. *Sbornik tezisev dokladov nauchnoy konferentsii studentov i aspirantov Lipetskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*. pp. 130–131.
15. Lekhnitskiy S.G. (1977) *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela* [Theory of elasticity of an anisotropic body]. Moscow: Nauka.
16. Levina L.V., Novikova O.S., Pen'kov V.B. (2016) Polnparametricheskoe reshenie zadachi teorii uprugosti odnosvyaznogo ogranichenogo tela [Full-parameter solution of the problem of the theory of elasticity of a simply connected bounded body]. *Vestnik Lipetskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – LGTU Bulletin*. 2(28). pp. 16–24.
17. Ivanychev D.A. (2022) Reshenie neosesimmetrichnoy zadachi elastostatiki dlya transversal'no-izotropnogo tela vrashcheniya [Solution of a non-axisymmetric elastostatic problem for a transversely isotropic body of revolution]. *Vestnik MGTU im. N.E. Bauman. Ser. Estestvennyye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*. 2(101). pp. 4–21. doi: 10.18698/1812-3368-2022-2-4-21
18. Ivanychev D.A. (2022) Reshenie smeshannoy neosesimmetrichnoy zadachi teorii uprugosti dlya anizotropnykh tel vrashcheniya [Solution of a mixed non-axisymmetric problem of elasticity theory for anisotropic bodies of revolution]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – Bulletin of Perm National Research Polytechnic University. Mechanics*. 2. pp. 85–97. doi: 10.15593/pern.mech/2022.2.08

**Сведения об авторе:**

**Иванычев Дмитрий Алексеевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей механики Липецкого государственного технического университета (Липецк, Россия). E-mail: Lsivdmal@mail.ru

**Information about the author:**

**Ivanychev Dmitriy A.** (Candidate of Physics and Mathematics, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russian Federation). E-mail: Lsivdmal@mail.ru

*Статья поступила в редакцию 21.02.2025; принята к публикации 05.02.2026*

*The article was submitted 21.02.2025; accepted for publication 05.02.2026*