

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

**УПРАВЛЕНИЕ,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И ИНФОРМАТИКА**

**TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE**

Научный журнал

2026

№ 74

**Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере
массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия
(свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-29497 от 27 сентября 2007 г.)**

Подписной индекс в объединённом каталоге «Пресса России» 44031

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий,
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций
на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук»,
Высшей аттестационной комиссии

16+

Учредитель – Национальный исследовательский Томский государственный университет (НИ ТГУ)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Замятин Александр Владимирович – гл. редактор, проф., д-р техн. наук, НИ ТГУ. Тел. +73822529496
Смагин Валерий Иванович – зам. гл. редактора, проф., д-р техн. наук, НИ ТГУ. Тел. +73822529485
Андреева Валентина Валерьевна – ответственный секретарь, доц., канд. техн. наук, НИ ТГУ. Тел.+73822529496
E-mail: vestnik_uvvt@mail.tsu.ru

Воробейчиков Сергей Эрикович – д-р физ.-мат. наук, НИ ТГУ
Вишневецкий Владимир Миронович – проф., д-р техн. наук, Институт проблем управления РАН (г. Москва)
Гордов Евгений Петрович – проф., д-р физ. мат. наук, Институт мониторинга климатических и экологических систем СО РАН (г. Томск)
Кошкин Геннадий Михайлович – проф., д-р физ.-мат. наук, НИ ТГУ
Костюк Юрий Леонидович – проф., д-р техн. наук, НИ ТГУ
Матросова Анжела Юрьевна – проф., д-р техн. наук, НИ ТГУ
Назаров Анатолий Андреевич – проф., д-р техн. наук, НИ ТГУ
Нежелская Людмила Алексеевна – проф., д-р физ.-мат. наук, НИ ТГУ
Пашинская Татьяна Юрьевна – д-р физ.-мат. наук, НИ ТГУ
Перепелкин Евгений Александрович – проф., д-р техн. наук, Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения (г. Санкт-Петербург)
Пчелинцев Евгений Анатольевич – д-р физ.-мат. наук, НИ ТГУ
Самуйлов Константин Евгеньевич – проф., д-р техн. наук, РУДН (г. Москва)
Семенкин Евгений Станиславович – проф., д-р техн. наук, СибГУ им. акад. М.Ф. Решетнева (г. Красноярск)
Сушенко Сергей Петрович – проф., д-р техн. наук, НИ ТГУ
Фархадов Маис Паша оглы – д-р техн. наук, Институт проблем управления РАН (г. Москва)
Харин Юрий Семенович – академик НАНБ, проф., д-р физ.-мат. наук, БГУ, Республика Беларусь (г. Минск)
Цициашвили Гурами Шалвович – проф., д-р физ.-мат. наук, ИПМ ДВО РАН (г. Владивосток)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Александр Николаевич Дудин – проф., д-р физ.-мат. наук, БГУ, Минск, Республика Беларусь
Ана Роза Ковали (Ana Rosa Cavalli) – проф., д-р философии (PhD), University VII Paris, Франция
Енцо Орсингер (Enco Orsinger) – проф., д-р философии (PhD), University of Rome, Италия
Паоло Принетто (Paolo Prinetto) – проф. Politechnic Institute, Torino, Италия
Нина Владимировна Евтушенко – проф., д-р. техн. наук, ИСП РАН им. Иванникова В.П., Москва, Россия
Ервант Зориан (Yervant Zorian) – д-р. философии (PhD), Synopsys, Mountain View, США

JOURNAL INFO

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is an independent peer-reviewed research journal that welcomes submissions from across the world.

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is issued four times per year, and can be subscribed to in the Russian Press Joint Catalogue (Subscription Index 44031)

The publication in the journal is free of charge and may be in Russian or in English.

The topics of the journal are the following:

- *control of dynamical systems,*
- *mathematical modeling,*
- *data processing,*
- *informatics and programming,*
- *discrete function and automation,*
- *designing and diagnostics of computer systems.*

Rules of registration articles are given in a site:

<http://journals.tsu.ru/informatics/>

ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

О ЖУРНАЛЕ

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика» выходит ежеквартально и распространяется по подписке. Статьи публикуются на русском и английском языках.

Тематика публикаций журнала:

- *управление динамическими системами,*
- *математическое моделирование,*
- *обработка информации,*
- *информатика и программирование,*
- *дискретные функции и автоматы,*
- *проектирование и диагностика вычислительных систем.*

Журнал входит в систему Российского Индекса Научного Цитирования (РИНЦ).

Правила оформления статей приведены на сайте:

<http://journals.tsu.ru/informatics/>

ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

CONTROL OF DYNAMICAL SYSTEMS

Ашурков Н.В., Коробков Д.В., Вавилов О.А., Юркевич В.Д.
Синтез системы автоматического регулирования на основе метода разделения движений для трехфазного AC/DC преобразователя с LC-фильтром 4

Зубов Н.Е., Рябченко В.Н.
Ленточная форма решения задачи А.Н. Крылова и ее применение к анализу и синтезу многомерных динамических систем 17

Tu C.V., Dudarenko N.A.
Observer-based adaptive output tracking for MIMO LTI systems under unknown external disturbances 29

Шмидт И.А., Попов И.А., Жуков Д.Р.
Модификация синтеза нейросетевого регулятора двигателя постоянного тока 40

Ashurkov N.V., Korobkov D.V., Vavilov O.A., Yurkevich V.D.
Synthesis of an automatic control system based on the time-scale separation method for a three-phase AC/DC converter with an LC-filter 4

Zubov N.E., Ryabchenko V.N.
The band form of the solution to A.N. Krylov's problem and its application to the analysis and synthesis of multivariable dynamic systems 17

Tu C.V., Dudarenko N.A.
Observer-based adaptive output tracking for MIMO LTI systems under unknown external disturbances 29

Shmidt I.A., Popov I.A., Zhukov D.R.
Neural network controller synthesis modification for a direct current motor 40

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MATHEMATICAL MODELING

Богатырев В.А., Богатырев С.В.
Комбинаторно-вероятностная модель надежности многоуровневых кластерных систем с учетом зависимого восстановления узлов разных уровней 51

Дмитренко А.Г., Балашова О.М.
Моделирование рассеяния электромагнитной волны на тонком идеально проводящем цилиндре, расположенном внутри эллипсоида из дважды отрицательного метаматериала 62

Mirzayev R.R., Aliyeva S.H.
Hybrid replenishment policy in a dual-source queuing-inventory system with finite buffer 70

Bogatyrev V.A., Bogatyrev S.V.
Combinatorial-probabilistic model of reliability of multi-level cluster systems taking into account dependent recovery of nodes at different levels 51

Dmitrenko A.G., Balashova O.M.
Simulation of scattering of an electromagnetic wave by a thin perfectly conducting cylinder located inside an ellipsoid formed from double negative metamaterial 62

Mirzayev R.R., Aliyeva S.H.
Hybrid replenishment policy in a dual-source queuing-inventory system with finite buffer 70

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

DATA PROCESSING

Воробейчиков С.Э., Корсун А.В., Морозова А.С., Сущенко С.П., Шкуркин А.С.
Влияние ошибок вытеснения на вероятность попадания в кэш 82

Гаврилов К.В., Веретельникова Е.Л.
Равновесная оценка в условно оптимальном и компромиссном семействах *M*-оценок 95

Кабанов А.А., Жирабок А.Н., Зуев А.В., Протченко А.А.
Метод идентификации дефектов в нестационарных динамических системах 107

Vorobeychikov S.E., Korsun A.V., Morozova A.S., Sushchenko S.P., Shkurkin A.S.
The effect of preemption errors on the probability of cache hits 82

Gavrilov K.V., Veretel'nikova E.L.
Equilibrium estimator in conditionally optimal and compromise families of *M*-estimators 95

Kabanov A.A., Zhirabok A.N., Zuev A.V., Protsenko A.A.
Method of fault identification in non-stationary dynamic systems 107

ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

INFORMATICS AND PROGRAMMING

Воробьева Г.Р., Воробьев А.В., Орлов Г.О.
Проактивное управление ресурсами веб-ГИС визуализации геофизических полей на основе семантической кластеризации потоковых данных 115

Сацюк А.В.
Повышение робастности и эффективности сверточных сетей на малых выборках за счет динамического оживления нейронов 126

Vorobeva G.R., Vorobev A.V., Orlov G.O.
Proactive resource management for web-based GIS visualization of geophysical fields using semantic clustering of streaming data 115

Satsiuk A.V.
Enhancing robustness and efficiency of convolutional networks on small datasets through dynamic neuron reactivation 126

**ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ДИАГНОСТИКА
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ**

**DESIGNING AND DIAGNOSTICS
OF COMPUTER SYSTEMS**

Матросова А.Ю., Савенкова М.М., Провкин В.А.
Вычисление множества всех достижимых реакций синхронных автоматов на последовательностях заданной длины 137

Matrosova A.Yu., Savenkova M.M., Provkin V.A.
Computation of the set of all reachable reactions of synchronous automaton on sequences of a given length 137

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

CONTROL OF DYNAMICAL SYSTEMS

Научная статья
УДК 681.5 (681.5.013)
doi: 10.17223/19988605/74/1

Синтез системы автоматического регулирования на основе метода разделения движений для трехфазного AC/DC преобразователя с LC-фильтром

Никита Владимирович Ашурков¹, Дмитрий Владиславович Коробков²,
Олег Андреевич Вавилов³, Валерий Дмитриевич Юркевич⁴

^{1, 2, 3, 4} Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия

¹ 4445@list.ru

² korobkov@corp.nstu.ru

³ vavilov.oleg.rp462@gmail.com

⁴ yurkev@mail.ru

Аннотация. Рассматривается задача синтеза системы автоматического регулирования для трехфазного AC/DC преобразователя (активного выпрямителя) с учетом наличия нейтрали нагрузки, первичного источника переменного тока переменной частоты с LC-фильтром входного переменного тока и расщепленной выходной емкости в звене постоянного тока. Для решения задачи синтеза системы регулирования выполняется переход к модели для средних значений токов и напряжений в AC/DC преобразователе в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений. Синтез регуляторов проводится на основе метода разделения движений, результаты имитационного моделирования AC/DC преобразователя демонстрируют эффективность синтезированной системы управления.

Ключевые слова: инвертор напряжения; активный выпрямитель; широтно-импульсная модуляция; система автоматического управления; метод разделения движений; ПИ-регулятор.

Для цитирования: Ашурков Н.В., Коробков Д.В., Вавилов О.А., Юркевич В.Д. Синтез системы автоматического регулирования на основе метода разделения движений для трехфазного AC/DC преобразователя с LC-фильтром // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2026. № 74. С. 4–16. doi: 10.17223/19988605/74/1

Original article
doi: 10.17223/19988605/74/1

Synthesis of an automatic control system based on the time-scale separation method for a three-phase AC/DC converter with an LC-filter

Nikita V. Ashurkov¹, Dmitry V. Korobkov²,
Oleg A. Vavilov³, Valery D. Yurkevich⁴

^{1, 2, 3, 4} Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation

¹ 4445@list.ru

² korobkov@corp.nstu.ru

³ vavilov.oleg.rp462@gmail.com

⁴ yurkev@mail.ru

Abstract. The problem of an automatic control system design for a three-phase AC/DC converter (active rectifier) is considered. Considered converter includes load with neutral conductor, an input AC source with variable frequency,

an LC filter in input AC-link and split output capacitance in the DC link. For solving the problem of control system design, the mathematical model of the AC/DC converter for average currents and voltages in the form of a nonlinear differential equations system is proposed. The controllers are designed based on the time-scale separation method for the obtained model. Results of simulation modeling of the AC/DC converter demonstrate the effectiveness of the proposed control system.

Keywords: voltage inverter; active rectifier; pulse width modulation; automatic control system; time-scale separation method; PI controller.

For citation: Ashurkov, N.V., Korobkov, D.V., Vavilov, O.A., Yurkevich, V.D. (2026) Synthesis of an automatic control system based on the time-scale separation method for a three-phase AC/DC converter with an LC-filter. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 74. pp. 4–16. doi: 10.17223/19988605/74/1

Введение

Одна из актуальных задач авионики – повышение эффективности бортовых авиационных систем генерации и преобразования электрической энергии. В современных авиационных системах для электропитания энергоемкого бортового оборудования широко применяются трехфазные генераторы переменного напряжения с последующим преобразованием напряжения переменного тока (Alternating Current; AC) в напряжение постоянного тока (Direct Current; DC). Например, в работе [1] рассматривается применение многоимпульсных схем выпрямления для удовлетворения требований к спектральному составу выходного напряжения. Однако более высокие требования к показателям качества формируемого напряжения постоянного тока [2] могут быть достигнуты на основе применения трехфазного инвертора напряжения, работающего в обращенном режиме как активный выпрямитель (AC/DC преобразователь). Стабилизация выходного постоянного напряжения AC/DC преобразователя такого типа в условиях изменения параметров первичного источника и нагрузки осуществляется системой автоматического управления (САУ) с обратными связями по току и напряжению с различного вида регуляторами [3–13]. Большое количество работ посвящено вопросам применения стратегии управления AC/DC преобразователем как в синхронной вращающейся системе dq координат [3–7], так и в неподвижной ортогональной системе $\alpha\beta$ координат [8–10]. Необходимо отметить, что одна из особенностей систем преобразования электрической энергии авиационных комплексов – наличие нейтрали первичного источника переменного тока с переменной частотой и, соответственно, использование четырехпроводных систем с AC/DC преобразователем. В четырехпроводных системах с AC/DC преобразователем [11–13] при небалансе напряжений первичного источника и / или нагрузки в нулевом проводе возникают токи нулевой последовательности.

В работе [14] представлена математическая модель трехфазного преобразователя с учетом наличия нейтралей нагрузки и первичного источника переменного тока переменной частоты с LC-фильтром входного переменного напряжения AC/DC преобразователя (активного выпрямителя) с расщепленной выходной емкостью в звене постоянного тока. Рассматриваемый преобразователь предназначен для применения в составе бортовой авиационной системы электроснабжения с первичным четырехпроводным источником переменного тока переменной частоты. Особенностью данного преобразователя является нелинейность его математической модели, что не позволяет использовать традиционные методы синтеза регулятора без выполнения линеаризации модели.

В настоящей работе с целью решения задачи синтеза системы автоматического регулирования данным активным выпрямителем осуществляется преобразование математической модели работы [14] в математическую модель для средних значений токов и напряжений, используя метод усреднения [15–18]. Далее для решения задачи синтеза регулятора используется метод разделения движений [19–21]. Преимуществом выбранного метода в данном случае является отсутствие требования линеаризации модели преобразователя, что упрощает процесс синтеза САУ. Кроме того, выбранный метод обеспечивает грубость динамических свойств процессов в системе управления по отношению к существенным изменениям режимов работы преобразователя. Проведено имитационное моделирование синтезированной системы автоматического регулирования для статического и динамического режимов

работы преобразователя с активной нагрузкой. Результаты имитационного моделирования показали высокую эффективность предлагаемой системы автоматического регулирования для рассматриваемого активного выпрямителя.

1. Математическая модель активного выпрямителя

В качестве объекта управления в данной работе рассматривается трехфазный двухуровневый инвертор напряжения с расщепленной емкостью, работающий в обратном режиме (активный выпрямитель), входящий в состав бортовой авиационной системы электроснабжения с первичным четырехпроводным источником переменного тока переменной частоты. Процесс получения математической модели для данного преобразователя был подробно рассмотрен и описан в работе [14]. В данной статье приводится только сокращенное описание преобразователя и используются итоговые результаты из работы [14].

Для структуры преобразователя использованы следующие параметры: L , R_L и C_f – сопротивление, индуктивность и емкость входного Γ -образного LC -фильтра; R_f и L_f – сопротивление и индуктивность фидера сети; $e_{(j)}$ – ЭДС сети переменного тока переменной частоты (обозначения фаз введен индекс $j = A, B, C$); $i_{C(A)}$ – ток в цепи емкости C_f фазы A ; $u_{C(A)}$ – напряжение на емкости C_f фазы A ; $i_{L(A)}$ – входной переменный ток фазы A ; C_d – расщепленная емкость звена постоянного напряжения; i_{d1} и i_{d2} – выходные токи звена постоянного напряжения преобразователя; u_1 и u_2 – напряжения на плечах расщепленной емкости C_d ; u_H – постоянное напряжение нагрузки; R_H – сопротивление нагрузки. Также необходимо отметить, что за счет соединения средней точки конденсаторов C_d звена постоянного тока и конденсаторов C_f входного LC -фильтра с учетом $C_d \gg C_f$ обеспечивается независимая работа трех фаз активного выпрямителя.

Полученная в работе [14] математическая модель для описания процесса работы преобразователя в стационарной трехфазной системе координат $a-b-c$ имеет следующий вид:

$$\begin{cases} L_f \frac{di_{f(j)}}{dt} = e_{(j)} - u_{C(j)} - i_{f(j)} R_f, \\ L \frac{di_{L(j)}}{dt} = -u_1 \Psi_X + u_2 \Psi_Y + u_{C(j)} - i_{L(j)} R_L, \\ C \frac{du_{C(j)}}{dt} = i_{f(j)} - i_{L(j)}, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} C_d \frac{dU_1}{dt} = i_{L(A)} \Psi_{VT1} + i_{L(B)} \Psi_{VT3} + i_{L(C)} \Psi_{VT5} - \frac{U_1 + U_2}{R_n}, \\ C_d \frac{dU_2}{dt} = -i_{L(A)} \Psi_{VT2} - i_{L(B)} \Psi_{VT4} - i_{L(C)} \Psi_{VT6} - \frac{U_1 + U_2}{R_n}. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь Ψ_X и Ψ_Y введены в качестве замены и равны коммутационным функциям Ψ_{VT1} и Ψ_{VT2} для фазы A , Ψ_{VT3} и Ψ_{VT4} – для фазы B , Ψ_{VT5} и Ψ_{VT6} – для фазы C соответственно.

Предполагается симметрия в системе напряжений трехфазной сети:

$$e_{(A)}(t) = E \sin(\omega t); e_{(B)}(t) = E \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right); e_{(C)}(t) = E \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right), \quad (3)$$

где $e_A(t) + e_B(t) + e_C(t) = 0$, ω – частота первой гармоники входного переменного напряжения активного выпрямителя.

Управление силовым преобразователем осуществляется с помощью скалярной пофазной ШИМ для полупроводниковых ключей $VT_{1...6}$ при следующих общепринятых допущениях [3–14]: времена переключения полупроводниковых ключей равно нулю, и, следовательно, мертвое время (временная пауза между включенными состояниями ключей одной стойки) также принимается равным нулю; потери мощности в ключах принимаются нулевыми. С учетом этого используемые в системе

уравнений (1)–(2) переключающие функции Ψ_{VTk} для ключей VT_k , где $k = 1 \dots 6$, удовлетворяют следующим условиям:

$$\Psi_{VTk} = \begin{cases} 1, & \text{если } VT_k \text{ замкнут и проводит ток,} \\ 0, & \text{если } VT_k \text{ разомкнут и не проводит ток.} \end{cases} \quad (4)$$

Также выполняются условия

$$\Psi_{VT_1} = 1 - \Psi_{VT_2}; \Psi_{VT_3} = 1 - \Psi_{VT_4}; \Psi_{VT_5} = 1 - \Psi_{VT_6}. \quad (5)$$

С целью решения задачи синтеза системы регулирования активным выпрямителем перейдем к рассмотрению математической модели для средних значений токов и напряжений в обсуждаемом выпрямителе, используя метод усреднения [15–18]. Сформируем на основе уравнений (1)–(5) математическую модель для средних значений токов и напряжений в схеме трехфазного активного выпрямителя в условиях следующих допущений: период T_s формирования импульсов на выходе ШИМ является достаточно малой величиной по отношению к времени переходных процессов для токов и напряжений в выпрямителе; имеет место режим непрерывных токов через индуктивности в схеме выпрямителя; отсутствует режим насыщения ШИМ при скалярном пофазном управлении.

В соответствии с методом усреднения для мгновенных значений токов $i_{f(j)}$, $i_{L(j)}$ и напряжений $u_{C(j)}$, u_1 , u_2 в системе уравнений (1) необходимо получить их средние значения $I_{f(j)}$, $I_{L(j)}$ и напряжений $U_{C(j)}$, U_1 , U_2 на интервале периода T_s импульсов ШИМ. Аналогичным образом для коммутационных функций Ψ_{VTk} поставлены в соответствие коэффициенты заполнения импульса на текущем периоде ШИМ, что соответствует амплитуде модулирующего сигнала на входе ШИМ инвертора. Таким образом получены следующие выражения:

$$\begin{aligned} I_{f(j)}(t) &= \frac{1}{T_s} \int_{t-T_s}^t i_{f(j)}(\tau) d\tau, & I_{L(j)}(t) &= \frac{1}{T_s} \int_{t-T_s}^t i_{L(j)}(\tau) d\tau, & U_{C(j)}(t) &= \frac{1}{T_s} \int_{t-T_s}^t u_{C(j)}(\tau) d\tau, \\ U_1(t) &= \frac{1}{T_s} \int_{t-T_s}^t u_1(\tau) d\tau, & U_2(t) &= \frac{1}{T_s} \int_{t-T_s}^t u_2(\tau) d\tau, & D_k(t) &= \frac{1}{T_s} \int_{t-T_s}^t \Psi_{VTk}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (6)$$

Заметим, что из условий (4), (5) следует

$$D_1 = 1 - D_2; D_3 = 1 - D_4; D_5 = 1 - D_6. \quad (7)$$

Кроме того, при отсутствии режима насыщения ШИМ при скалярном пофазном управлении выполняются условия $0 < D_k < 1$ для всех $k = 1 \dots 6$. Выполняя указанные замены переменных в уравнениях (1), (2) с учетом (6) и (7), получаем математическую модель для средних значений токов и напряжений в рассматриваемой схеме активного выпрямителя:

$$\begin{cases} L_f \frac{dI_{f(j)}}{dt} = e_{(j)} - U_{C(j)} - I_{f(j)} R_f, \\ L \frac{dI_{L(j)}}{dt} = -(U_1 + U_2) D_X + U_2 + U_{C(j)} - I_{L(j)} R_L, \\ C \frac{dU_{C(j)}}{dt} = I_{f(j)} - I_{L(j)}, \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} C_d \frac{dU_1}{dt} = I_{L(A)} D_1 + I_{L(B)} D_3 + I_{L(C)} D_5 - \frac{U_1 + U_2}{R_H}, \\ C_d \frac{dU_2}{dt} = I_{L(A)} D_1 + I_{L(B)} D_3 + I_{L(C)} D_5 - (I_{L(A)} + I_{L(B)} + I_{L(C)}) - \frac{U_1 + U_2}{R_H}. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь D_X введено по аналогии с Ψ_X и Ψ_Y в системе уравнений (1), (2) и равно D_1 , D_3 , D_5 для фаз A , B и C соответственно.

Полученная математическая модель (8), (9) используется для решения задачи синтеза системы регулирования активным выпрямителем. Предлагается двухконтурная структура системы управления, где внутренний контур включает регуляторы фазных токов $I_{L(A)}$, $I_{L(B)}$, $I_{L(C)}$, а внешний контур включает регулятор напряжения на выходе выпрямителя.

2. Синтез регуляторов фазных токов в активном выпрямителе

На основе полученной математической модели для средних значений токов и напряжений в исследуемом активном выпрямителе рассмотрим решение задачи синтеза регуляторов фазных токов $I_{L(A)}$, $I_{L(B)}$, $I_{L(C)}$, где модулирующие сигналы D_1 , D_3 , D_5 , являются управляющими сигналами для контуров регулирования фазных токов. Отметим, что полученная математическая модель (8), (9) является системой нелинейных дифференциальных уравнений, поэтому для решения задачи синтеза регуляторов используем метод разделения движений [19–21]. Принимая во внимание, что структура уравнений системы (8) справедлива для всех трех фаз с подстановкой соответствующего индекса, будем рассматривать методику расчета регулятора на примере только одной фазы A в предположении, что напряжения на конденсаторах в звене постоянного тока $U_1 = \text{const}$ и $U_2 = \text{const}$.

Назначением регулятора фазного тока $I_{L(A)}$ является обеспечение нулевой ошибки по току:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_{IL(A)}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (I_{L(A)}^d(t) - I_{L(A)}(t)) = 0,$$

где $I_{L(A)}^d$ – задание на величину синусоидального тока в фазе A .

В контуре регулирования фазного тока $I_{L(A)}$ используем структуру пропорционально-интегрального (ПИ) регулятора для формирования модулирующего сигнала D_1 . Уравнение рассматриваемого ПИ-регулятора для фазы A можно представить в следующем виде:

$$\mu_1 \frac{dD_1}{dt} = k_1 \left[\frac{e_{IL(A)}}{T_1} + \frac{de_{IL(A)}}{dt} \right], \quad (10)$$

где μ_1 – малый положительный параметр регулятора фазного тока.

Необходимо отметить [14], что при реализации обсуждаемого активного выпрямителя такие его параметры, как сопротивление R_f и индуктивность L_f фидера переменного напряжения, а также емкость входного LC -фильтра являются малыми величинами, соответственно, можно пренебречь их влиянием на процессы в контуре регулирования фазного тока $I_{L(A)}$. Поэтому будем полагать, что $R_f = 0$, $R_L = 0$ и $C_f = 0$. Тогда $I_{L(A)} = I_{f(A)}$, $e_{(A)} = U_{C(A)}$, и уравнения замкнутой системы управления для контура регулирования фазного тока $I_{L(A)}$, полученные на основе выражений (8) и (10), можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} L \frac{dI_{L(A)}}{dt} &= -(U_1 + U_2)D_1 + U_2 + e_{(A)}, \\ \mu_1 \frac{dD_1}{dt} &= k_1 \left[\frac{I_{L(A)}^d - I_{L(A)}}{T_1} + \frac{dI_{L(A)}^d}{dt} - \frac{dI_{L(A)}}{dt} \right] = \\ &= k_1 \left[\frac{I_{L(A)}^d - I_{L(A)}}{T_1} + \frac{dI_{L(A)}^d}{dt} - \frac{1}{L} [U_2 + e_{(A)} - (U_1 + U_2)D_1] \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

В результате с учетом выражения (11) уравнения замкнутой системы управления для контура регулирования фазного тока $I_{L(A)}$ принимают вид сингулярно-возмущенной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dI_{L(A)}}{dt} = \frac{1}{L} [U_2 + e_{(A)} - (U_1 + U_2)D_1], \\ \mu_1 \frac{dD_1}{dt} = \frac{k_1(U_1 + U_2)}{L} D_1 + k_1 \left[\frac{I_{L(A)}^d - I_{L(A)}}{T_1} + \frac{dI_{L(A)}^d}{dt} - \frac{1}{L} [U_2 + e_{(A)}] \right]. \end{cases} \quad (12)$$

Полагая, что $\mu_1 \rightarrow 0$, и применяя методику разделения движений [19], на основе выражения (12) может быть получено уравнение подсистемы быстрых движений (ПБД) контура регулирования фазного тока

$$\mu_1 \frac{dD_1}{dt} = \frac{k_1(U_1 + U_2)}{L} D_1 + k_1 \zeta_1(\cdot), \quad (13)$$

где вводится следующая функция:

$$\zeta_1(\cdot) = \frac{I_{L(A)}^d - I_{L(A)}}{T_1} + \frac{dI_{L(A)}^d}{dt} - \frac{1}{L} [U_2 + e_{(A)}],$$

которая рассматривается как функция с «замороженными» параметрами на интервале времени быстрых переходных процессов в контуре регулирования фазного тока. Характеристический полином для ПБД (13) в контуре регулирования фазного тока имеет вид:

$$A_{IL(A)}^{fms}(s) = \mu_1 s - \frac{k_1(U_1 + U_2)}{L}. \quad (14)$$

С целью обеспечения устойчивости процессов в ПБД (13) коэффициент усиления k_1 в (14) (т.е. в регуляторе (10)) рекомендуется выбирать в соответствии со следующим условием:

$$k_1 \approx -\frac{L}{(U_1 + U_2)}, \quad (15)$$

при этом требуемое время переходных процессов в ПБД (13) задается выбором параметра μ_1 .

Далее необходимо рассмотреть квазиравновесный режим ПБД, возникающий при завершении быстрых переходных процессов (или полагая, что выполняется $\mu_1 = 0$ в выражении (13)). Для этого необходимо ввести обозначение $D_1 = D_1^s$, после чего уравнения замкнутой системы управления (12) для контура регулирования фазного тока $I_{L(A)}$ принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dI_{L(A)}}{dt} = \frac{1}{L} [U_2 + e_{(A)} - (U_1 + U_2)D_1^s], \\ 0 = -\frac{k_1(U_1 + U_2)}{L} D_1^s + k_1 \left[\frac{I_{L(A)}^d - I_{L(A)}}{T_1} + \frac{dI_{L(A)}^d}{dt} - \frac{1}{L} [U_2 + e_{(A)}] \right], \end{cases} \quad (16)$$

откуда следует, что

$$D_1^s = \frac{L}{(U_1 + U_2)} \left[\frac{I_{L(A)}^d - I_{L(A)}}{T_1} + \frac{dI_{L(A)}^d}{dt} - \frac{1}{L} [U_2 + e_{(A)}] \right]. \quad (17)$$

Подставляя полученное уравнение (17) для D_1^s в первое уравнение системы (16), получим следующее выражение:

$$\frac{dI_{L(A)}}{dt} = \frac{I_{L(A)}^d - I_{L(A)}}{T_1} + \frac{dI_{L(A)}^d}{dt}, \quad (18)$$

где (18) соответствует уравнению подсистемы медленных движений (ПМД) для контура регулирования фазного тока $I_{L(A)}$

$$T_1 \frac{de_{IL(A)}}{dt} + e_{IL(A)} = 0. \quad (19)$$

Характеристический полином для ПМД принимает следующий вид:

$$A_{IL(A)}^{sms}(s) = T_1 s + 1, \quad (20)$$

где требуемое время переходных процессов в ПМД (19) задается выбором параметра T_1 . В силу устойчивости полинома (20) обеспечивается требование на нулевую ошибку с заданным темпом переходных процессов для фазного тока $I_{L(A)}$. Расчет параметров регуляторов для других фазных токов осуществляется аналогичным образом, при этом для обеспечения симметрии в системе фазных токов задание на ток формируется следующим образом:

$$I_{L(A)}^d(t) = I_L \sin(\omega t - \alpha); \quad I_{L(B)}^d(t) = I_L \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \alpha\right); \quad I_{L(C)}^d(t) = I_L \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3} - \alpha\right),$$

где $I_{L(A)}^d + I_{L(B)}^d + I_{L(C)}^d = 0$. Здесь α – фазовый сдвиг тока инвертора относительно ЭДС генератора.

3. Синтез регулятора выходного напряжения выпрямителя

Напряжение на выходе выпрямителя складывается из напряжений на конденсаторах C_d и равно $u_H = u_1 + u_2$. Соответственно, при рассмотрении математической модели с учетом выражений (6)–(9) следует, что средняя на периоде ШИМ величина напряжения U_H на выходе выпрямителя составляет $U_H = U_1 + U_2$. Также из условия равенности емкостей конденсаторов в звене постоянного тока следует, что $U_H/2 = U_1 = U_2$.

Регулятор выходного напряжения выпрямителя предназначен для обеспечения нулевой ошибки по напряжению:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_U(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (U_H^d(t) - U_H(t)) = 0,$$

где U_H^d – задание на величину постоянного выходного напряжения выпрямителя.

При решении задачи синтеза регулятора выходного напряжения предполагаем, что время переходных процессов в контуре регулирования фазных токов пренебрежимо мало в сравнении с временем переходных процессов в контуре регулирования выходного напряжения, что можно обеспечить соответствующим выбором параметров электрической схемы и регуляторов. Кроме того, учитывая высокий КПД, характерный для схем АВ, вводится допущение, что величинами сопротивлений $R_f = 0$, $R_L = 0$ можно пренебречь. Следовательно, математическая модель для установившегося режима для контура регулирования фазных токов активного выпрямителя выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} 0 = e_{(j)} - U_{C(j)}, \\ 0 = -(U_1 + U_2)D_X + U_2 + U_{C(j)}, \\ 0 = I_{f(j)} - I_{L(j)}, \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} C_d \frac{dU_1}{dt} = I_{L(A)}D_1 + I_{L(B)}D_3 + I_{L(C)}D_5 - \frac{U_1 + U_2}{R_H}, \\ C_d \frac{dU_2}{dt} = I_{L(A)}D_1 + I_{L(B)}D_3 + I_{L(C)}D_5 - (I_{L(A)} + I_{L(B)} + I_{L(C)}) - \frac{U_1 + U_2}{R_H}. \end{cases} \quad (22)$$

Из уравнений (21), (22) следует, что при установившемся режиме для контура регулирования фазных токов справедливы следующие выражения:

$$\begin{aligned} U_{C(A)} = e_{(A)}, \quad U_{C(B)} = e_{(B)}, \quad U_{C(C)} = e_{(C)}, \\ D_1 = \frac{U_2 + e_{(A)}}{U_1 + U_2}, \quad D_3 = \frac{U_2 + e_{(B)}}{U_1 + U_2}, \quad D_5 = \frac{U_2 + e_{(C)}}{U_1 + U_2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Заметим, что из условия равенства напряжений U_1 и U_2 на конденсаторах, а также условия $0 < D_k < 1$ следует, что для амплитуды напряжений трехфазной сети E справедливо условие $E < U_H/2$ и справедливы следующие соотношения:

$$D_1 = \frac{1}{2} + \frac{e_{(A)}}{U_H}, \quad D_3 = \frac{1}{2} + \frac{e_{(B)}}{U_H}, \quad D_5 = \frac{1}{2} + \frac{e_{(C)}}{U_H}. \quad (24)$$

Регуляторы фазных токов в установившемся режиме обеспечивают требование

$$I_{L(A)}^d = I_{L(A)}, \quad I_{L(B)}^d = I_{L(B)}, \quad I_{L(C)}^d = I_{L(C)}.$$

Тогда, выполняя суммирование уравнений в системе (22) с учетом соотношений (7), (23) и (24), можно получить уравнение для описания динамики средней величины напряжения на выходе выпрямителя

$$C_d \frac{dU_H}{dt} = \frac{2}{U_H} (e_{(A)}I_{L(A)}^d + e_{(B)}I_{L(B)}^d + e_{(C)}I_{L(C)}^d) - \frac{2U_H}{R_H}. \quad (25)$$

Необходимо отметить, что в силу условий симметрии в системе фазных токов и напряжений, справедливо следующее:

$$e_A I_{L(A)}^d + e_B I_{L(B)}^d + e_C I_{L(C)}^d =$$

$$\begin{aligned}
 &= EI_L \left[\sin(\omega t) \sin(\omega t - \alpha) + \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \alpha\right) + \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3} - \alpha\right) \right] = \\
 &= \frac{EI_L}{2} \left[3\cos(\alpha) - \cos(2\omega t - \alpha) - \cos\left(2\omega t - \frac{2\pi}{3} - \alpha\right) - \cos\left(2\omega t + \frac{2\pi}{3} - \alpha\right) \right] = \frac{3}{2} EI_L \cos(\alpha).
 \end{aligned} \tag{26}$$

Тогда с учетом полученных выражений (25), (26) уравнение для описания поведения средней величины напряжения на выходе выпрямителя принимает следующий вид:

$$C_d \frac{dU_H}{dt} = \frac{3}{U_H} EI_L \cos(\alpha) - \frac{2U_H}{R_H}. \tag{27}$$

Из уравнения (27) следует, что амплитуда фазных токов I_L является управляющим фактором для контура регулирования напряжения на выходе активного выпрямителя. В силу нелинейности уравнения (27) используем метод разделения движений при расчете регулятора напряжения U_H . Структура ПИ-регулятора напряжения в таком случае может быть представлена в следующем виде:

$$\mu_2 \frac{dI_L}{dt} = k_2 \left[\frac{e_U}{T_2} + \frac{de_U}{dt} \right], \tag{28}$$

где μ_2 – малый положительный параметр регулятора напряжения. Таким образом, в условиях предположения установившегося режима для контура регулирования фазных токов выпрямителя, из (27) и (28) получаем уравнения замкнутой системы управления для контура регулирования напряжения U_H в следующем виде:

$$\left\{ \begin{aligned}
 &\frac{dU_H}{dt} = \frac{3E \cos(\alpha)}{C_d U_H} I_L - \frac{2U_H}{C_d R_H}, \\
 &\mu_2 \frac{dI_L}{dt} = k_2 \left[\frac{U_H^d - U_H}{T_2} + \frac{d}{dt} U_H^d - \frac{d}{dt} U_H \right],
 \end{aligned} \right. \tag{29}$$

откуда следует, что

$$\mu_2 \frac{dI_L}{dt} = -k_2 \frac{3E \cos(\alpha)}{C_d U_H} I_L + k_2 \left[\frac{U_H^d - U_H}{T_2} + \frac{d}{dt} U_H^d + \frac{2U_H}{C_d R_H} \right], \tag{30}$$

где μ_2 рассматривается как малый параметр. Полагая, что $\mu_2 \rightarrow 0$ и применяя методику разделения движений [19], на основе выражений (29), (30) получим уравнение ПБД для контура регулирования напряжения

$$\mu_2 \frac{dI_L}{dt} = -k_2 \frac{3E \cos(\alpha)}{C_d U_H} I_L + k_2 \zeta_2(\cdot), \tag{31}$$

где вводится следующая функция:

$$\zeta_2(\cdot) = \frac{U_H^d - U_H}{T_2} + \frac{d}{dt} U_H^d + \frac{2U_H}{C_d R_H},$$

которая рассматривается как функция с «замороженными» параметрами на интервале времени быстрых переходных процессов для I_L в (31). Характеристический полином ПБД для контура регулирования напряжения имеет вид:

$$A_U^{fms}(s) = \mu_2 s + k_2 \frac{3E \cos(\alpha)}{C_d U_H}. \tag{32}$$

С целью обеспечения устойчивости процессов в ПБД рекомендуется выбирать коэффициент усиления k_2 в (32) (т.е. в регуляторе (28)) в соответствии с условием

$$k_2 \approx \frac{C_d U_H}{3E \cos(\alpha)}, \tag{33}$$

при этом требуемое время переходных процессов в ПБД задается выбором параметра μ_2 .

Далее необходимо рассмотреть квазиравновесный режим ПБД (30), возникающий при завершении быстрых переходных процессов (или полагая, что выполняется $\mu_2 = 0$ в выражении (30)). Для этого

необходимо ввести обозначение $I_L = I_L^s$, после чего уравнения замкнутой системы управления для контура регулирования выходного напряжения U_H принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dU_H}{dt} = \frac{3E \cos(\alpha)}{C_d U_H} I_L^s - \frac{2U_H}{C_d R_H}, \\ 0 = -k_2 \frac{3E \cos(\alpha)}{C_d U_H} I_L^s + k_U \left[\frac{U_H^d - U_H}{T_2} + \frac{d}{dt} U_H^d + \frac{2U_H}{C_d R_H} \right], \end{cases} \quad (34)$$

откуда следует, что

$$I_L^s = \frac{C_d U_H}{3E \cos(\alpha)} \left[\frac{U_H^d - U_H}{T_2} + \frac{d}{dt} U_H^d + \frac{2U_H}{C_d R_H} \right]. \quad (35)$$

Подставляя полученное выражение (35) для I_L^s в первое уравнение системы (34), получаем следующее выражение:

$$\frac{dU_H}{dt} = \frac{U_H^d - U_H}{T_2} + \frac{d}{dt} U_H^d,$$

которое соответствует уравнению ПМД контура регулирования напряжения U_H следующего вида:

$$T_U \frac{de_U}{dt} + e_U = 0. \quad (36)$$

Характеристический полином для ПМД (36) имеет вид:

$$A_U^{sms}(s) = T_U s + 1, \quad (37)$$

где требуемое время переходных процессов в ПМД контура регулирования напряжения U_H задается выбором параметра T_2 . В силу устойчивости полинома (37) обеспечивается требование на нулевую ошибку с заданным темпом переходных процессов для напряжения U_H на выходе выпрямителя.

4. Имитационное моделирование АВ с двухконтурной системой автоматического управления

С целью оценки эффективности синтезированной САУ активного выпрямителя проведено имитационное моделирование статического режима работы преобразователя с активной нагрузкой. Параметры преобразователя, использованные при имитационном моделировании, представлены в таблице.

Параметры силовой схемы

Действующее значение фазной эдс	115 В
Частота фазной эдс	400 Гц
Частота ШИМ	100 кГц
Мощность нагрузки	1 кВт
Емкость конденсатора C_d	100 мкФ
Сопrotивление нагрузки R_H	10 Ом
Сопrotивление LC-фильтра R_L	1 мкОм
Индуктивность LC-фильтра L	300 мкГн
Емкость входного LC-фильтра C_f	10 мкФ
Сопrotивление фидера переменного напряжения R_f	1 мкОм
Индуктивность фидера переменного напряжения L_f	1 мкГн
Коэффициент усиления ПИ-регулятора по току k_1	$-0,88 \cdot 10^{-7}$
Постоянная времени μ_1	$1 \cdot 10^{-5}$
Постоянная времени T_1	$1 \cdot 10^{-4}$
Коэффициент усиления ПИ-регулятора по напряжению k_2	$69,7 \cdot 10^{-6}$
Постоянная времени μ_2	$1 \cdot 10^{-4}$
Постоянная времени T_2	$1 \cdot 10^{-3}$

Внутренний контур САУ предназначен для регулирования фазного тока $I_{L(j)}$, структура регулятора описывается выражением (10), его параметры рассчитываются в соответствии с выражениями (15), (19), (20), где $\mu_1 = T_1/10$. Сигнал задания для внутреннего контура $I_{L(j)}^d$ формируется с помощью

dq -преобразования сигнала с внешнего контура, регулятор в котором соответствует структуре (28), с параметрами, рассчитанными согласно выражениям (33), (36) и (37), где $\mu_2 = T_2/10$. Параметры регуляторов приведены в таблице.

Результаты имитационного моделирования приведены на рис. 1, 2. На рис. 1 представлены мгновенные значения фазных переменных токов $i_{L(A)}(t) \dots i_{L(C)}(t)$, текущих через индуктивность Γ -образного фильтра и поступающих в САУ с помощью обратной связи, задание на ток $i_{L(A)}^d(t) \dots i_{L(C)}^d(t)$, формируемое на выходе внешнего контура по напряжению, и ошибка $e_{iL(A)}(t) \dots e_{iL(C)}(t)$, поступающая на вход ПИ-регулятора тока (10), – в статическом режиме работы. На рис. 2 представлены результаты моделирования динамического режима работы при колебании ЭДС сети $e_{(A)}(t) \dots e_{(C)}(t)$, ее уменьшении до 50% от номинала и увеличении от 50% обратно до 100% – задание на постоянное напряжение нагрузки $U_H^d(t)$, фактическое значение этого напряжения на выходе схемы $U_H(t)$ и ошибка слежения $e_U(t)$ на входе ПИ-регулятора напряжения (28).

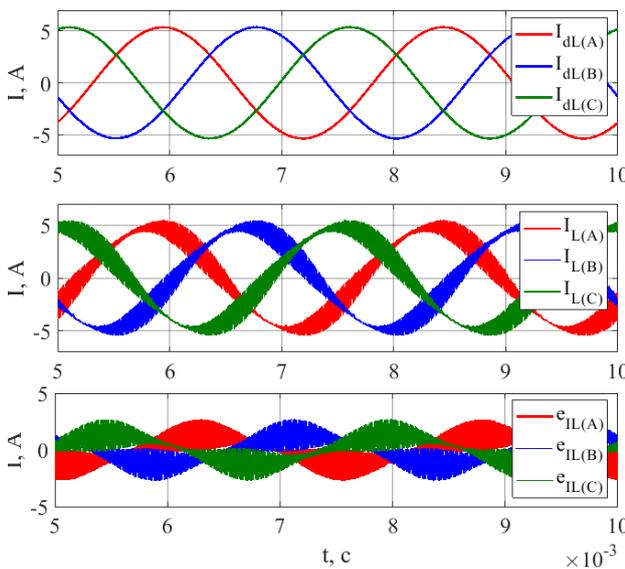


Рис.1. Токи во внутреннем контуре САУ
Fig 1. Currents in the internal loop of automatic control system

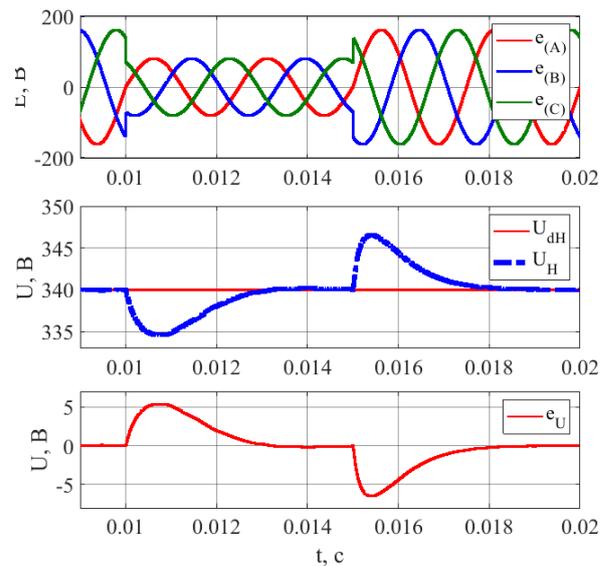


Рис.2. Напряжения во внешнем контуре САУ при переходном процессе
Fig 2. Voltages in the external loop of automatic control system during the transition process

Экспериментально полученное время переходного процесса $t_{III} \approx 3.5$ мс, что соответствует желаемому значению, использованному в расчетах ($\approx 3 \dots 4 \cdot T_2$). Таким образом, по результатам проведенного имитационного моделирования можно сделать вывод, что синтезированная двухконтурная САУ позволяет получить желаемое значение выходного постоянного напряжения АВ с ошибкой, близкой к нулю, с сохранением устойчивости при возмущениях нагрузки.

Заключение

В данной работе описана методика синтеза двухконтурной системы автоматического управления на основе метода разделения движений для трехфазного двухуровневого инвертора напряжения с расщепленной емкостью звена постоянного напряжения, работающего в режиме активного выпрямителя, с входным трехфазным LC -фильтром и четырехпроводным первичным источником переменного тока переменной частоты. Новизна предлагаемой методики состоит в разработке унифицированного подхода к синтезу регуляторов токов для внутреннего контура и регулятора напряжения для внешнего контура на основе нелинейной динамической модели АС/DC преобразователя без необходимости линеаризации его модели. Данная методика позволяет обеспечить формирования заданных показателей качества переходных процессов в контурах регулирования при изменении режимов работы преобразователя в широких пределах, что является ее преимуществом по сравнению с такими распространенными

методами синтеза, как частотный или модальный. Результаты имитационного моделирования показали высокую эффективность предлагаемой системы автоматического регулирования для рассматриваемого активного выпрямителя.

Список источников

1. Setlak L., Ruda E. Review, Analysis and Simulation of Advanced Technology Solutions of Selected Components in Power Electronics Systems (PES) of More Electric Aircraft // World Academy of Science, Engineering and Technology. International Journal of Computer and Systems Engineering. 2015. V. 9 (10). P. 1194–1206.
2. ГОСТ Р 54073–2017. Системы электроснабжения самолетов и вертолетов. Общие требования и нормы качества электроэнергии. Введ. 2018-06-01. М.: Стандартинформ, 2018. 39 с.
3. Bai H., Wang F., Xing J. Control Strategy of Combined PWM Rectifier / Inverter for a High Speed Generator Power System // 2007 2nd IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications. Harbin, China. 2007. P. 132–135. doi: 10.1109/ICIEA.2007.4318384
4. Hoang Thi, Thu Giang. Fractional proportional integral controller applied into two parallel 3-phase PWM rectifiers // 2017 IEEE 2nd Advanced Information Technology, Electronic and Automation Control Conference (IAEAC). Chongqing, China. 2017. P. 9–13. doi: 10.1109/IAEAC.2017.8053966
5. Junjie Ge. Direct Power Control Based on Natural Switching Surface for Three-Phase PWM Rectifiers // IEEE Transactions on Power Electronics. 2014. V. 30 (6). P. 2918–2922. doi: 10.1109/TPEL.2014.2377048
6. Degioanni F., Zurbruggen I.G., Ordonez M. Fast and Reliable Geometric-Based Controller for Three-Phase PWM Rectifiers // 2020 IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC). New Orleans, LA, USA. 2020. P. 1891–1896. doi: 10.1109/APEC39645.2020.9124287
7. Jamma M., Akherraz M., Barar M. ANFIS Based DC-Link Voltage Control of PWM Rectifier-Inverter System with Enhanced Dynamic Performance // IECON 2018. 44th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society, 21–23 October 2018. Washington, DC, USA. 2018. P. 2219–2224. doi: 10.1109/IECON.2018.8591620
8. Fekik A. Direct Power Control of a three-phase PWM-Rectifier based on Petri nets for the selection of Switching States // 2018 7th International Conference on Renewable Energy Research and Applications (ICRERA). Paris, France. 2018. P. 1121–1125. doi: 10.1109/ICRERA.2018.8566936
9. Djabali S., Ait Hamou Ali M., Ammar A. Improved Virtual Flux-Direct Power Control for PWM Rectifier Based on Second-Order Generalized Integrators // 2020 International Conference on Electrical Engineering (ICEE). Istanbul, Turkey. 2020. P. 267–272. doi: 10.1109/ICEE49691.2020.9249885
10. Fahem K., Chariag D.E., Sbata L. Comparative analysis of model predictive control methods for grid-connected PWM rectifier // 2020 17th International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices (SSD). Monastir, Tunisia. 2020. P. 1058–1062. doi: 10.1109/SSD49366.2020.9364162
11. Yacoubi L., Al-Haddad K., Fnaiech F., Dessaint L.-A. A DSP-based implementation of a new nonlinear control for a three-phase neutral point clamped boost rectifier prototype // IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2005 V. 52 (1). P. 197–205. doi: 10.1109/TIE.2004.837913
12. Bueno A.G., Pomilio J.A. Balancing Voltage in the DC Bus with Split Capacitors in Three-Phase Four-Wire PWM Boost Rectifier // 13th IEEE International Conference on Industry Applications (INDUSCON). Sao Paulo, Brazil. 2018 P. 523–529. doi: 10.1109/INDUSCON.2018.8627210
13. He L., En X., Jian X., Xinchun L., Yong K. Modeling and analysis of three-phase four-leg PWM boost-type rectifier for double conversion transformerless // IECON 2011 – 37th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society. Melbourne, VIC, Australia. 2011. P. 1444–1449.
14. Ашурков Н.В., Коробков Д.В., Вавилов О.А., Юркевич В.Д. Математическая модель трехфазного AC/DC преобразователя с LC-фильтром // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2024. № 69. С. 10–21. doi: 10.17223/19988605/69/2
15. Middlebrook R.D., Cuk S. A general unified approach to modelling switching converter power stages // Int. J. of Electronics. 1977. V. 42 (6). P. 521–550.
16. Mohan N., Undeland T.M., Robbins W.P. Power Electronics: Converters, Applications and Design. Wiley, 1995. 802 p.
17. Maksimovic D., Cuk S. Switching converters with wide DC conversion range // IEEE Trans. Power Electronics. 1991. V. PE-16 (1). P. 151–157.
18. Holtz J. Pulsewidth modulation: a survey // IEEE Trans. Industrial Electronics. 1992. Vol. IE-39 (5). P. 410–420.
19. Юркевич В.Д. Синтез нелинейных нестационарных систем управления с разнотемповыми процессами. СПб: Наука, 2000. 287 с.
20. Вавилов О.А., Юркевич В.Д., Коробков Д.В. Методика синтеза резонансного регулятора на основе метода разделения движений для инвертора напряжения // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2023. № 63. С. 4–15. doi: 10.17223/19988605/63/1
21. Vavilov O.A., Yurkevich V.D., Korobkov D.V. Synthesis of an automatic control system for a voltage inverter as part of an autonomous power supply system with a hydrogen module // Int. J. of Hydrogen Energy. 2024. V. 86. P. 742–750. doi: 10.1016/j.ijhydene.2024.08.324.

References

1. Setlak, L. & Ruda, E. (2015) Review, Analysis and Simulation of Advanced Technology Solutions of Selected Components in Power Electronics Systems (PES) of More Electric Aircraft. *World Academy of Science, Engineering and Technology. International Journal of Computer and Systems Engineering*. 9(10). pp. 1194–1206.
2. GOST R 54073-2017. (2018) *Sistemy elektrosnabzheniya samoletov i vertoletov. Obshchie trebovaniya i normy kachestva elektroenergii. Vved. 2018-06-01* [Power supply systems for aircraft and helicopters. General requirements and standards for power quality. In power since June 1, 2018]. Moscow: Standartinform.
3. Bai, H., Wang, F. & Xing, J. (2007) Control Strategy of Combined PWM Rectifier/Inverter for a High Speed Generator Power System. *2nd IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications. Harbin, China*. pp. 132–135. doi: 10.1109/ICIEA.2007.4318384
4. Hoang, Thi & Thu, Giang. (2017) Fractional proportional integral controller applied into two parallel 3-phase PWM rectifiers. *2nd Advanced Information Technology, Electronic and Automation Control Conference (IAEAC), Chongqing, China*. pp. 9–13. doi: 10.1109/IAEAC.2017.8053966
5. Junjie, Ge. (2014) Direct Power Control Based on Natural Switching Surface for Three-Phase PWM Rectifiers. *IEEE Transactions on Power Electronics*. 30(6). pp. 2918–2922. doi:10.1109/TPEL.2014.2377048
6. Degioanni, F., Zurbriggen, I.G. & Ordonez, M. (2020) Fast and Reliable Geometric-Based Controller for Three-Phase PWM Rectifiers. *IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC). New Orleans, LA, USA*. pp. 1891–1896. doi: 10.1109/APEC39645.2020.9124287
7. Jamma, M., Akherraz, M. & Barar M. (2018) ANFIS Based DC-Link Voltage Control of PWM Rectifier-Inverter System with Enhanced Dynamic Performanc. *IECON 2018 – 44th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society, Washington, DC, USA*. pp. 2219–2224. doi: 10.1109/IECON.2018.8591620
8. Fekik, A. (2018) Direct Power Control of a three-phase PWM-Rectifier based on Petri nets for the selection of Switching States. *7th International Conference on Renewable Energy Research and Applications (ICRERA), Paris, France*. pp. 1121–1125. doi: 10.1109/ICRERA.2018.8566936
9. Djabali, S., Melissa, Ait Hamou Ali & Ammar A. (2020) Improved Virtual Flux-Direct Power Control for PWM Rectifier Based on Second-Order Generalized Integrators. *International Conference on Electrical Engineering (ICEE), Istanbul, Turkey*. pp. 267–272. doi: 10.1109/ICEE49691.2020.9249885
10. Fahem, K., Chariag, D.E. & Sbata, L. (2020) Comparative analysis of model predictive control methods for grid-connected PWM rectifier. *17th International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices (SSD), Monastir, Tunisia*. pp.1058–1062. doi: 10.1109/SSD49366.2020.9364162
11. Yacoubi, L., Al-Haddad, K., Fnaiech, F. & Dessaint, L.-A. (2005) A DSP-based implementation of a new nonlinear control for a three-phase neutral point clamped boost rectifier prototype. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. 52(1). pp. 197–205. doi: 10.1109/TIE.2004.837913
12. Bueno, A.G. & Pomilio, J.A. (2018) Balancing Voltage in the DC Bus with Split Capacitors in Three-Phase Four-Wire PWM Boost Rectifier. *13th IEEE International Conference on Industry Applications (INDUSCON), Sao Paulo, Brazil*. pp. 523–529. doi: 10.1109/INDUSCON.2018.8627210
13. He, L., En, X., Jian, X., Xinchun, L. & Yong, K. (2011) Modeling and analysis of three-phase four-leg PWM boost-type rectifier for double conversion transformerless UPS. *IECON 2011. 37th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society, Melbourne, VIC, Australia*. pp. 1444–1449.
14. Ashurkov, N.V., Korobkov, D.V., Vavilov, O.A. & Yurkevich, V.D. (2024) Mathematical model for three-phase AC/DC converter with LC-filter. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 69. pp. 10–21. (In Russian). doi: 10.17223/19988605/69/2
15. Middlebrook, R.D. & Cuk, S. (1977) A general unified approach to modelling switching converter power stages. *Int. J. of Electronics*. 42(6). pp. 521–550.
16. Mohan, N., Undeland, T.M. & Robbins, W.P. (1995) *Power Electronics: Converters, Applications and Design*. New York: Wiley. 802 p.
17. Maksimovic, D. & Cuk, S. (1991) Switching converters with wide DC conversion range. *IEEE Trans. Power Electronics*. PE-16(1). pp. 151–157.
18. Holtz, J. (1992) Pulsewidth modulation: a survey. *IEEE Trans. Industrial Electronics*. IE-39(5). pp. 410–420.
19. Yurkevich, V.D. (2000) *Sintez nelineynykh nestatsionarnykh sistem upravleniya s raznotempovymi protsessami* [Synthesis of Nonlinear Nonstationary Control Systems with Multirate Processes]. St. Petersburg: Nauka.
20. Vavilov, O.A., Yurkevich, V.D. & Korobkov, D.V. (2023) Resonant controller design by time-scale separation method for a voltage inverter. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 63. pp. 4–15. (In Russian). doi: 10.17223/19988605/63/1
21. Vavilov, O.A., Yurkevich, V.D. & Korobkov, D.V. (2024) Synthesis of an automatic control system for a voltage inverter as part of an autonomous power supply system with a hydrogen module. *International Journal of Hydrogen Energy*. 86. pp. 742–750. doi: 10.1016/j.ijhydene.2024.08.324

Информация об авторах:

Ашурков Никита Владимирович – аспирант кафедры электроники и электротехники Новосибирского государственного технического университета (Новосибирск, Россия). E-mail: 4445@list.ru

Коробков Дмитрий Владиславович – ведущий инженер Института силовой электроники, старший преподаватель кафедры электроники и электротехники Новосибирского государственного технического университета (Новосибирск, Россия). E-mail: korobkov@corp.nstu.ru

Вавилов Олег Андреевич – аспирант кафедры автоматки Новосибирского государственного технического университета (Новосибирск, Россия). E-mail: vavilov.oleg.rp462@gmail.com

Юркевич Валерий Дмитриевич – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры автоматки Новосибирского государственного технического университета (Новосибирск, Россия). E-mail: yurkev@mail.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Ashurkov Nikita V. (Post-graduate Student, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: 4445@list.ru

Korobkov Dmitry V. (Leading Engineer of the Institute of Power Electronics, Assistant Professor, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: korobkov@corp.nstu.ru

Vavilov Oleg A. (Post-graduate Student, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: vavilov.oleg.rp462@gmail.com

Yurkevich Valeriy D. (Professor, Doctor of Technical Sciences, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: yurkev@mail.ru

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 10.11.2025; принята к публикации 05.03.2026

Received 10.11.2025; accepted for publication 05.03.2026

Научная статья
УДК 681.5
doi: 10.17223/19988605/74/2

Ленточная форма решения задачи А.Н. Крылова и ее применение к анализу и синтезу многомерных динамических систем

Николай Евгеньевич Зубов¹, Владимир Николаевич Рябченко²

^{1,2} Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

¹ nik.zubov@gmail.com

² ryabchenko.vn@mail.ru

Аннотация. Описываются свойства ленточной формы решения задачи А.Н. Крылова. На этой основе приводятся ленточные аналоги критериев управляемости и наблюдаемости, а также расчетные формулы синтеза регуляторов по заданным коэффициентам характеристического полинома как для систем с одним входом и выходом (SISO-системы), так и для систем с многими входами и многими выходами (MIMO-системы).

Ключевые слова: линейные стационарные системы; управляемость; наблюдаемость; синтез многомерных динамических систем.

Для цитирования: Зубов Н.Е., Рябченко В.Н. Ленточная форма решения задачи А.Н. Крылова и ее применение к анализу и синтезу многомерных динамических систем // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2026. № 74. С. 17–28. doi: 10.17223/19988605/74/2

Original article
doi: 10.17223/19988605/74/2

The band form of the solution to A.N. Krylov's problem and its application to the analysis and synthesis of multivariable dynamic systems

Nikolay E. Zubov¹ Vladimir N. Ryabchenko²

^{1,2} Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

¹ nik.zubov@gmail.com

² ryabchenko.vn@mail.ru

Abstract. The properties of the band form of the solution to A.N. Krylov's problem are described. On this basis, we present tape analogues of the controllability and observability criteria, as well as calculation formulas for synthesizing controllers based on the specified coefficients of the characteristic polynomial, both for systems with a single input and single output (SISO systems) and for systems with multi inputs and multi outputs (MIMO systems).

Keywords: linear stationary systems; controllability; observability; synthesis of multivariable dynamic systems.

For citation: Zubov, N.E., Ryabchenko, V.N. (2026) The band form of the solution to A.N. Krylov's problem and its application to the analysis and synthesis of multivariable dynamic systems. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 74. pp. 17–28. doi: 10.17223/19988605/74/2

Введение

В теории управления одно из направлений, развиваемых авторами, включает задачи анализа и синтеза многомерных линейных динамических систем, основанные на применении *метода А.Н. Крылова*. В общем случае к таким задачам относятся [1–19]: определение управляемых и наблюдаемых

подпространств, включая критерии управляемости и наблюдаемости; вычисление сбалансированной реализации передаточной матрицы динамической системы в пространстве состояний; редукция и декомпозиция модели этой системы в пространстве состояний; стабилизация с помощью обратной связи по элементам состояния; синтез управления, обеспечивающего инвариантность системы к внешним возмущениям и т.д.

В основе метода Крылова лежит фундаментальное *тождество Гамильтона–Кэли*, согласно которому всякая числовая квадратная матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ удовлетворяет своему характеристическому уравнению

$$A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \dots + \alpha_1A + \alpha_0I_n = 0. \quad (1)$$

Здесь $\alpha_i, i = \overline{1, n-1}$ – коэффициенты характеристического полинома (х.п.) матрицы A

$$(-1)^n \det(\lambda I_n - A) = \left(1 \mid \lambda \mid \dots \mid \lambda^{n-1} \right) \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} + \lambda^n. \quad (2)$$

Хорошо известно, что х.п. (2) имеет не больше n (*собственных*) комплексных чисел $\lambda \in \mathbb{C}$, при которых

$$\det(\lambda I_n - A) = 0. \quad (3)$$

Вектор коэффициентов х.п.

$$X(\alpha) = (\alpha_0 \mid \alpha_1 \mid \dots \mid \alpha_{n-1})^T \in \mathbb{R}^n \quad (4)$$

является искомым в задаче Крылова, которая может быть сформулирована следующим образом [6, 7].

Задача Крылова. Требуется найти такое преобразование, переводящее скалярное уравнение для х.п. (3) в матричное уравнение относительно вектора коэффициентов х.п. (4)

$$f(A)X(\alpha) = g(\alpha), \quad (5)$$

где $f(A), g(\alpha)$ – явные матричные функции элементов матрицы A , чтобы для искомого вектора существовало решение в виде:

$$X(\alpha) = f^{-1}(A)g(\alpha). \quad (6)$$

Здесь $f^{-1}(A)$ – обратная матричная функция.

Прагматический смысл задачи Крылова заключается в поиске упрощающих условий нахождения коэффициентов х.п. матрицы по значениям ее элементов.

Известная формула решения задачи Крылова имеет вид [8]:

$$X(\alpha) = -\left(\mathbf{b} \mid A\mathbf{b} \mid \dots \mid A^{n-1}\mathbf{b} \right)^{-1} A^n \mathbf{b}. \quad (7)$$

С алгебраической точки зрения задача Крылова имеет решение, если векторы

$$\mathbf{b}, A\mathbf{b}, \dots, A^{n-2}\mathbf{b}, A^{n-1}\mathbf{b}$$

образуют полный базис в \mathbb{R}^n . Такой базис всегда существует (всегда найдется подходящий вектор \mathbf{b}), если матрица A имеет характеристическое уравнение (1), совпадающее с минимальным характеристическим уравнением [2, 8]

$$A^k + \alpha_{k-1}A^{k-1} + \dots + \alpha_1A + \alpha_0I_n = 0, \quad k \leq n, \quad (8)$$

т.е. $k = n$.

Матрицы, удовлетворяющие приведенному условию, получили название *циклических матриц*.

Известно также, что обратимость матричной функции $f(A)$, т.е. существование $f^{-1}(A)$, является необходимым и достаточным условием *управляемости по P*. Калману пары матриц (A, \mathbf{b}) [1, 2], представляющей в пространстве состояний так называемую SIMO-систему (*Single Input Multi Outputs System* [3]), т.е. систему с одним входом и многими выходами.

Случай $k < n$ в (8) означает, что для заданной матрицы A не существует подходящего вектора \mathbf{b} , или, что то же самое, неуправляемость всех пар матриц (A, \mathbf{b}) , где \mathbf{b} – любой вектор из \mathbb{R}^n . Матрица A в данном случае именуется *нециклической*, и для нее при любом векторе \mathbf{b}

$$\det f(A) = \det \left(\mathbf{b} \mid A\mathbf{b} \mid \dots \mid A^{n-1}\mathbf{b} \right) = 0. \quad (9)$$

В качестве недостатка формулы (7) вычислительного характера следует указать значительные числа обусловленности (плохую масштабированность) матрицы $f(A)$ не только для больших, но и для малых n [6, 7].

В данной статье применительно к многомерным динамическим системам, включая системы с многими входами и многими выходами (ММО-системы), на основе ранее полученных результатов, отраженных в публикациях [6, 7, 12, 13, 16–19] приводятся альтернативные решения задач получения ленточных аналогов критериев управляемости и наблюдаемости и некоторые аспекты задач синтеза управления, которые не были затронуты авторами в указанных выше ранее опубликованных работах

1. Ленточная форма решения задачи Крылова

В [6, 7] приведена следующая фундаментальная теорема.

Теорема 1 (ленточная форма решения задачи Крылова). *Задача Крылова (5) разрешима и имеет решение в виде:*

$$\begin{pmatrix} X(\alpha) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-2} \\ \alpha_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \left(I_n \otimes \begin{pmatrix} -\mathbf{b}^+ A \\ \mathbf{b}^+ \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \Upsilon_1 \\ \Upsilon_2 \\ \vdots \\ \Upsilon_{n-2} \\ \Upsilon_{n-1} \\ \Upsilon_n \end{pmatrix}, \quad (10)$$

если существует вектор $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, при котором

$$\left(\Upsilon_1^T \mid \Upsilon_2^T \mid \dots \mid \Upsilon_{n-1}^T \mid \Upsilon_n^T \right)^T = \left(I_n \otimes \begin{pmatrix} -\mathbf{b}_L^\perp A \\ \mathbf{b}_L^\perp \end{pmatrix} \right)_R^\perp \in \mathbb{R}^{n^2}, \quad \Upsilon_i \in \mathbb{R}^n. \quad (11)$$

Здесь \otimes – символ операции кронекерова произведения,

$$I_n \otimes \begin{pmatrix} -\mathbf{b}_L^\perp A \\ \mathbf{b}_L^\perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{b}_L^\perp A & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_L^\perp & -\mathbf{b}_L^\perp A & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_L^\perp & -\mathbf{b}_L^\perp A & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b}_L^\perp & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -\mathbf{b}_L^\perp A \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{b}_L^\perp \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$I_n \otimes \begin{pmatrix} -\mathbf{b}^+ A \\ \mathbf{b}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{b}^+ A & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}^+ & -\mathbf{b}^+ A & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}^+ & -\mathbf{b}^+ A & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b}^+ & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -\mathbf{b}^+ A \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{b}^+ \end{pmatrix},$$

$\mathbf{b}^+ \Upsilon_n = 1$, $\mathbf{b}^+ = \frac{1}{\mathbf{b}^T \mathbf{b}} \mathbf{b}^T$ – левый обратный вектор к вектору \mathbf{b} ; \mathbf{b}_L^\perp – левый делитель нуля вектора \mathbf{b} максимального ранга, т.е. ранга $(n-1)$; $[\cdot]_R^\perp$ – правый делитель нуля матрицы $[\cdot]$ максимального ранга [9].

Согласно формулировке теоремы 1 ленточная формула решения задачи Крылова (10) эквивалентна формуле (7). При этом условие обратимости $f(A)$ из (6) здесь заменено эквивалентным требованием (11). Данное требование означает, что правый делитель нуля ленточной матрицы (матрицы, находящейся в (11) под знаком « \perp ») должен быть обязательно вектором размерности $(n+1)^2$. Необратимость (вырожденность) $f(A)$ эквивалентна нарушению этого условия «векторности». Данное условие всегда выполняется для циклических матриц. Для нециклических матриц авторами предложено решение, приведенное в теореме 2 [6, 7].

Теорема 2 (Ленточная форма решения задачи Крылова для нециклических матриц). *Если для нециклической матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ существуют ненулевые векторы $\mathbf{b}, \mathbf{d}, \mathbf{f}^T \in \mathbb{R}^n$, при которых*

$$\left(I_n \otimes \left(\frac{-\mathbf{b}_L^\perp (A - \mathbf{d}\mathbf{f}^T)}{\mathbf{b}_L^\perp} \right) \right)_R^\perp \in \mathbb{R}^{n^2}, \quad (13)$$

то решение задачи Крылова имеет вид:

$$2(\alpha_0 \mid \alpha_1 \mid \dots \mid \alpha_{n-2} \mid \alpha_{n-1} \mid 1)^T = \left(I_n \otimes \left(\frac{-\mathbf{b}^+ (A - \mathbf{d}\mathbf{f}^T)}{\mathbf{b}^+} \right) \right) \times \\ \times \left(\left(I_n \otimes \left(\frac{-\mathbf{b}_L^\perp (A - \mathbf{d}\mathbf{f}^T)}{\mathbf{b}_L^\perp} \right) \right)_R^\perp + \left(I_n \otimes \left(\frac{-\mathbf{b}_L^\perp (A + \mathbf{d}\mathbf{f}^T)}{\mathbf{b}_L^\perp} \right) \right)_R^\perp \right). \quad (14)$$

Формулировку теоремы 2 можно распространить на *предельный случай*, когда циклической является матрица [6, 7]

$$A - \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{d}_i \mathbf{f}_i^T, \quad \mathbf{d}_i, \mathbf{f}_i^T \in \mathbb{R}^n,$$

при этом матрица

$$A - \sum_{i=1}^{n-2} \mathbf{d}_i \mathbf{f}_i^T$$

не является циклической.

Анализ и синтез многомерных динамических систем на основе ленточных формул

Рассмотрим далее многомерную динамическую SISO-систему (*Single Input Single Output System*)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad (15)$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^1$ – скалярный вход, $y \in \mathbb{R}^1$ – скалярный выход.

Введем определение.

Определение 1. Матрицу

$$I_n \otimes \left(\frac{-\mathbf{b}_L^\perp A}{\mathbf{b}_L^\perp} \right)$$

будем называть ленточной матрицей управляемости SISO-системы (15).

На основе анализа свойств ленточной матрицы (12) установлено [10]:

1. Для полной управляемости SISO-системы (15), необходимо и достаточно, чтобы

$$\left(I_n \otimes \left(\frac{-\mathbf{b}_L^\perp A}{\mathbf{b}_L^\perp} \right) \right)_R^\perp \in \mathbb{R}^{n^2}, \quad (16)$$

т.е. правый делитель нуля максимального ранга прямоугольной матрицы был в точности вектором.

Данное утверждение является альтернативой критерию наблюдаемости АДС, приведенному в [13].

2. Матрица (12) инвариантна по отношению к действию обратной связи вида

$$u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}. \quad (17)$$

3. Коэффициенты полинома

$$\beta(\lambda) = \beta_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \beta_1\lambda + \beta_0 \quad (18)$$

числителя передаточной функции

$$\mathbf{G}(\lambda) = \mathbf{c}^T (\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} = \frac{\beta(\lambda)}{\alpha(\lambda)} \quad (19)$$

удовлетворяют следующему соотношению:

$$\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{n-2} \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix} = (-1)^{n+1} (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{c}^T) \left(\mathbf{I}_n \otimes \begin{pmatrix} -\mathbf{b}_L^T \mathbf{A} \\ \mathbf{b}_L^T \end{pmatrix} \right)_R^\perp, \quad \mathbf{b}^+ \Upsilon_n = 1. \quad (20)$$

4. Пусть

$$\det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{b} \mathbf{k}^T) = \lambda^n + \hat{\alpha}_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \hat{\alpha}_1 \lambda + \hat{\alpha}_0, \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad (21)$$

есть заданный х.п. замкнутой SISO-системы (15) с обратной связью (17), тогда вектор \mathbf{k}^T может быть вычислен с помощью формулы

$$\begin{pmatrix} \Delta \alpha_0 \\ \vdots \\ \Delta \alpha_{n-2} \\ \Delta \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = (-1)^n (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{k}^T) \left(\mathbf{I}_n \otimes \begin{pmatrix} -\mathbf{b}_L^T \mathbf{A} \\ \mathbf{b}_L^T \end{pmatrix} \right)_R^\perp, \quad (22)$$

где $\mathbf{b}^+ \Upsilon_n = 1$,

$$\begin{pmatrix} \Delta \alpha_0 \\ \vdots \\ \Delta \alpha_{n-2} \\ \Delta \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 - \hat{\alpha}_0 \\ \vdots \\ \alpha_{n-2} - \hat{\alpha}_{n-2} \\ \alpha_{n-1} - \hat{\alpha}_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Структура ленточной матрицы (12) позволяет определить ее правый делитель нуля (16) в явной форме.

Справедлива теорема [10]:

Теорема 3. Для полностью управляемой SISO-системы субвекторы $\Upsilon_i \in \mathbb{R}^n$ вектора (16) однозначно задаются формулами

$$\Upsilon_n = \mathbf{b}, \quad (23)$$

$$\Upsilon_{n-1} = (\mathbf{A} + \alpha_{n-1} \mathbf{I}_n) \mathbf{b}, \quad (24)$$

$$\Upsilon_{n-2} = (\mathbf{A}^2 + \alpha_{n-1} \mathbf{A} + \alpha_{n-2} \mathbf{I}_n) \mathbf{b}, \dots, \quad (25)$$

$$\Upsilon_2 = (\mathbf{A}^{n-2} + \alpha_{n-1} \mathbf{A}^{n-3} + \dots + \alpha_3 \mathbf{A} + \alpha_2 \mathbf{I}_n) \mathbf{b}, \quad (26)$$

$$\Upsilon_1 = (\mathbf{A}^{n-1} + \alpha_{n-1} \mathbf{A}^{n-2} + \alpha_{n-2} \mathbf{A}^{n-3} + \dots + \alpha_2 \mathbf{A} + \alpha_1 \mathbf{I}_n) \mathbf{b}, \quad (27)$$

где α_i – коэффициенты х.п.

Следствие 1. Субвекторы $\Upsilon_i, i = \overline{1, n}$ правого делителя нуля Υ ленточной матрицы (12) при любых матрицах \mathbf{b}_L^\perp максимального ранга представляют последовательность матричных полиномов, получаемую путем дифференцирования матричного полинома

$$\mathbf{A}^n + \alpha_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \dots + \alpha_1 \mathbf{A} + \alpha_0 \mathbf{I}_n, \quad (28)$$

и образуют базис полного ранга в пространстве \mathbb{R}^n .

Следствие 2. Коэффициенты полинома числителя передаточной функции (18) однозначно задаются формулами

$$\beta_{n-1} = (-1)^{n+1} \mathbf{c}^T \mathbf{b}, \quad (29)$$

$$\beta_{n-2} = (-1)^{n+1} \mathbf{c}^T (\mathbf{A} + \alpha_{n-1} \mathbf{I}_n) \mathbf{b}, \dots, \quad (30)$$

$$\beta_1 = (-1)^{n+1} \mathbf{c}^T (\mathbf{A}^{n-2} + \alpha_{n-1} \mathbf{A}^{n-3} + \dots + \alpha_3 \mathbf{A} + \alpha_2 \mathbf{I}_n) \mathbf{b}, \quad (31)$$

$$\beta_0 = (-1)^{n+1} \mathbf{c}^T (\mathbf{A}^{n-1} + \alpha_{n-1} \mathbf{A}^{n-2} + \alpha_{n-2} \mathbf{A}^{n-3} + \dots + \alpha_2 \mathbf{A} + \alpha_1 \mathbf{I}_n) \mathbf{b}. \quad (32)$$

Введем еще одно определение.

Определение 2. Матрицу вида

$$\mathcal{Z}_Y = (-1)^n (\Upsilon_n \parallel \Upsilon_{n-1} \parallel \dots \parallel \Upsilon_2 \parallel \Upsilon_1) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (33)$$

где субвекторы Υ_i определены как (23)–(27), будем называть матрицей Крылова.

На основании определения 2 из теоремы 3 вытекают следствия.

Следствие 3. Матрица Крылова (33) является обратимой.

Следствие 4. Субвекторы Υ_i (23)–(27) задают частичную матрицу Крылова вида

$$\mathcal{Z}_{Y_k}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \alpha_1, \dots, \alpha_k) = (-1)^n (\Upsilon_n \parallel \Upsilon_{n-1} \parallel \dots \parallel \Upsilon_{k-1} \parallel \Upsilon_k). \quad (34)$$

Следствие 5. Преобразование подобия

$$\mathbf{A}_C = \mathcal{Z}_Y^{-1} \mathbf{A} \mathcal{Z}_Y, \quad \mathbf{b}_C = \mathcal{Z}_Y^{-1} \mathbf{b}, \quad \mathbf{c}_C^T = \mathbf{c}^T \mathcal{Z}_Y, \quad (35)$$

где \mathcal{Z}_Y имеет вид (33), приводит SISO-систему (15) к канонической управляемой форме

$$\mathbf{A}_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_C = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{n-2} \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Определение 3. Матрицу

$$\mathbf{I}_n \otimes \begin{pmatrix} -\mathbf{c}_R^{\perp T} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{c}_R^{\perp T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{A} \mathbf{c}_R^{\perp} & \mathbf{c}_R^{\perp} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{A} \mathbf{c}_R^{\perp} & \mathbf{c}_R^{\perp} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{A} \mathbf{c}_R^{\perp} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{c}_R^{\perp} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & -\mathbf{A} \mathbf{c}_R^{\perp} & \mathbf{c}_R^{\perp} \end{pmatrix}^T,$$

где \mathbf{c}_R^{\perp} – правый делитель нуля ранга $(n-1)$ вектора \mathbf{c}^T , будем называть ленточной матрицей наблюдаемости SISO-системы (15).

В силу упоминавшегося принципа дуальности управляемости и наблюдаемости справедлива теорема [10].

Теорема 4. Для полностью наблюдаемой SISO-системы (15) субвекторы $\mathbf{Z}_i \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ вектора

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1^T \\ \mathbf{Z}_2^T \\ \mathbf{Z}_3^T \\ \mathbf{Z}_4^T \\ \vdots \\ \mathbf{Z}_{n-1}^T \\ \mathbf{Z}_n^T \end{pmatrix}^T = \left(\mathbf{I}_n \otimes \begin{pmatrix} -\mathbf{c}_R^{\perp T} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{c}_R^{\perp T} \end{pmatrix} \right)_L^{\perp} \in \mathbb{R}^{1 \times n^2}$$

однозначно задаются формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_n^T &= \mathbf{c}^T, \\ \mathbf{Z}_{n-1}^T &= \mathbf{c}^T (\mathbf{A} + \alpha_{n-1} \mathbf{I}_n), \\ \mathbf{Z}_{n-2}^T &= \mathbf{c}^T (\mathbf{A}^2 + \sigma_{n-1} \mathbf{A} + \alpha_{n-2} \mathbf{I}_n), \dots, \\ \mathbf{Z}_2^T &= \mathbf{c}^T (\mathbf{A}^{n-2} + \alpha_{n-1} \mathbf{A}^{n-3} + \dots + \alpha_3 \mathbf{A} + \alpha_2 \mathbf{I}_n), \\ \mathbf{Z}_1^T &= \mathbf{c}^T (\mathbf{A}^{n-1} + \alpha_{n-1} \mathbf{A}^{n-2} + \alpha_{n-2} \mathbf{A}^{n-3} + \dots + \alpha_2 \mathbf{A} + \alpha_1 \mathbf{I}_n). \end{aligned}$$

Здесь α_i – коэффициенты х.п.

Следующее следствие вытекает из теоремы 4.

Следствие 6. Преобразование подобия

$$\mathbf{A}_o = \mathbf{Z}_z \mathbf{A} \mathbf{Z}_z^{-1}, \quad \mathbf{b}_o = \mathbf{Z}_z \mathbf{b}, \quad \mathbf{c}_o^T = \mathbf{c}^T \mathbf{Z}_z^{-1},$$

где матрица \mathbf{Z}_z имеет вид:

$$\mathbf{Z}_z = (-1)^n (\mathbf{Z}_n^T \parallel \mathbf{Z}_{n-1}^T \parallel \dots \parallel \mathbf{Z}_2^T \parallel \mathbf{Z}_1^T)^T \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

приводит SISO-систему (15) к канонической наблюдаемой форме

$$\mathbf{A}_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_c = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_c = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{n-2} \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Одними из наиболее известных явных расчетных формул, применяемых для модального синтеза регуляторов линейных SISO-систем, являются формулы Аккермана и Басса–Гура [3, 7]. Следующая теорема определяет формулу синтеза регулятора на основе ленточных матриц [11].

Теорема 5. Пусть линейная SISO-система (15) полностью управляемая и имеет х.п. (2). Тогда вектор \mathbf{k}^T в законе обратной связи (17), обеспечивающий замкнутой системе х.п. (21), определяется формулой

$$\mathbf{k}^T = \Delta \alpha^T \mathbf{Z}_y^{-1}, \quad (37)$$

$$\text{где} \quad \Delta \alpha^T = (\alpha_{n-1} - \hat{\alpha}_{n-1} \parallel \alpha_{n-2} - \hat{\alpha}_{n-2} \parallel \dots \parallel \alpha_1 - \hat{\alpha}_1 \parallel \alpha_0 - \hat{\alpha}_0). \quad (38)$$

Аналогичная формула синтеза регулятора существует для MIMO-системы. Пусть задана многомерная динамическая MIMO-система (*Multi Inputs Multi Outputs System*)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}, \quad (39)$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$ – вектор входа, а матрица \mathbf{B} разбита на столбцы следующим образом:

$$\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1 \parallel \mathbf{b}_2 \parallel \dots \parallel \mathbf{b}_{r-1} \parallel \mathbf{b}_r). \quad (40)$$

На основании техники, использованной в [11], не составляет труда доказать теорему:

Теорема 6. Для любой матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ всегда найдется последовательность векторов $\mathbf{b}_1 \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^n$, ..., $\mathbf{b}_r \in \mathbb{R}^n$, где $r \leq n$, такая что пара матриц

$$(\mathbf{A} + \mathbf{b}_1 \mathbf{k}_1^T + \mathbf{b}_2 \mathbf{k}_2^T + \dots + \mathbf{b}_{r-1} \mathbf{k}_{r-1}^T, \mathbf{b}_r)$$

управляемая. Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1^T &= \Theta_1^T (\omega_1 \mathbf{I}_n - \mathbf{A}), \\ \mathbf{k}_2^T &= \Theta_2^T \mathbf{b}_2^{LL} (\omega_2 \mathbf{I}_n - \mathbf{A}), \\ &\vdots \\ \mathbf{k}_{r-1}^T &= \Theta_{r-1}^T \mathbf{b}_{r-1}^{LL} (\omega_{r-1} \mathbf{I}_n - \mathbf{A}), \end{aligned}$$

$\Theta_i^T \in \mathbb{R}^{n-1}$ – произвольный ненулевой вектор, ω_i – произвольный скаляр, $\mathbf{b}_i^{\perp L}$ – левый делитель нуля максимального ранга вектора \mathbf{b}_i , $i = 1, (r-1)$.

Введем обозначения

$$\tilde{A} = A + \mathbf{b}_1 \mathbf{k}_1^T + \mathbf{b}_2 \mathbf{k}_2^T + \dots + \mathbf{b}_{r-1} \mathbf{k}_{r-1}^T, \quad (41)$$

$$\det(\lambda \mathbf{I}_n - \tilde{A}) = \lambda^n + \tilde{\alpha}_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \tilde{\alpha}_1 \lambda + \tilde{\alpha}_0. \quad (42)$$

На основании справедливости теорем 5 и 6 оказывается справедливой теорема:

Теорема 7. Для линейной полностью управляемой МИМО-системы (39) закон обратной связи

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}, \quad (43)$$

обеспечивающий замкнутой системе х.п.

$$\det(\lambda \mathbf{I}_n - \tilde{A} + \mathbf{b}_r \mathbf{k}^T) = \lambda^n + \tilde{\alpha}_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \tilde{\alpha}_1 \lambda + \tilde{\alpha}_0, \quad (44)$$

определяется формулой

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{K}} \\ \Delta \alpha \tilde{\mathbf{z}}_r^T \end{pmatrix}, \quad (45)$$

где

$$\tilde{\mathbf{K}}^T = \left(\Theta_1^T (\omega_1 \mathbf{I}_n - A) \parallel \Theta_2^T \mathbf{b}_2^{\perp L} (\omega_2 \mathbf{I}_n - A) \parallel \dots \parallel \Theta_{r-1}^T \mathbf{b}_{r-1}^{\perp L} (\omega_{r-1} \mathbf{I}_n - A) \right), \quad (46)$$

$$\Delta \alpha = (\tilde{\alpha}_{n-1} - \tilde{\alpha}_{n-1} \parallel \tilde{\alpha}_{n-2} - \tilde{\alpha}_{n-2} \parallel \dots \parallel \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_1 \parallel \tilde{\alpha}_0 - \tilde{\alpha}_0), \quad (47)$$

$$\tilde{\mathbf{z}}_r = (-1)^n \left(\tilde{\mathbf{Y}}_n \parallel \tilde{\mathbf{Y}}_{n-1} \parallel \dots \parallel \tilde{\mathbf{Y}}_2 \parallel \tilde{\mathbf{Y}}_1 \right), \quad (48)$$

$$\left(\tilde{\mathbf{Y}}_1^T \parallel \tilde{\mathbf{Y}}_2^T \parallel \dots \parallel \tilde{\mathbf{Y}}_{n-1}^T \parallel \mathbf{b}^T \right)^T = \left(\mathbf{I}_n \otimes \left(\frac{-\mathbf{b}_r^{\perp L} \tilde{A}}{\mathbf{b}_r^{\perp L}} \right) \right)_R^\perp. \quad (49)$$

При этом параметризация всех регуляторов (45), обеспечивающих характеристический полином (44), осуществляется путем замены в расчетных соотношениях вектора \mathbf{b}_r на любой другой вектор \mathbf{b}_i из (40), варьирования элементов векторов Θ_i^T и скаляров ω_i в (46).

Теоремы, аналогичные 6, 7, дуальным образом распространяются на задачу синтеза наблюдателя состояния МИМО-системы, когда рассматривается инъекция выхода

$$\mathbf{z} = -\mathbf{L}\mathbf{y},$$

матрица $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ разбита на строки следующим образом:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m^T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^n,$$

а х.п. замкнутой системы имеет вид:

$$\det(\lambda \mathbf{I}_n - A + \mathbf{L}\mathbf{C}) = \lambda^n + \tilde{\alpha}_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \tilde{\alpha}_1 \lambda + \tilde{\alpha}_0.$$

2. Анализ и синтез алгебро-дифференциальных SISO-систем на основе ленточных формул

Рассмотрим далее линейную многомерную динамическую SISO-систему, записанную в виде [12, 13]:

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad (50)$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^1$ – скалярный вход, $y \in \mathbb{R}^1$ – скалярный выход. Матрицы \mathbf{E} и \mathbf{A} считаются произвольными и квадратными.

Уравнения (50) можно рассматривать как описания линейной динамической системы, не разрешенные относительно производных. Такие системы принято называть *алгебро-дифференциальными системами* (АДС) или *дескрипторными системами* [14, 15]. Частным случаем (50) является линейная динамическая система (стандартного) вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T \mathbf{x}. \quad (51)$$

Функция от переменной $\lambda \in \mathbb{C}$ вида

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\lambda) &= \mathbf{c}^T (\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} = \\ &= \frac{\theta_l \lambda^l + \theta_{l-1} \lambda^{l-1} + \dots + \theta_1 \lambda + \theta_0}{\gamma_k \lambda^k + \gamma_{k-1} \lambda^{k-1} + \dots + \gamma_1 \lambda + \gamma_0}, \quad l \leq k \leq n, \end{aligned} \quad (52)$$

называется передаточной функцией АДС (50).

Если выполняется неравенство

$$\det \mathbf{E} \neq 0, \quad (53)$$

то АДС (50) с теоретической точки зрения приводится к виду:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{E}^{-1} \mathbf{b} u, \quad y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (54)$$

(см. (51)). Если же число обусловленности матрицы \mathbf{E}

$$\text{cond } \mathbf{E} = \frac{\sigma_{\max}(\mathbf{E})}{\sigma_{\min}(\mathbf{E})} \gg 1,$$

где $\sigma_{\max}(\mathbf{E})$ и $\sigma_{\min}(\mathbf{E})$ – соответственно максимальное и минимальное сингулярные числа, то практическое использование уравнения (54) в задачах анализа и синтеза сопровождается большими ошибками. Еще более ухудшает ситуацию высокая размерность вектора состояния $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (например, это характерно при математическом описании больших электроэнергетических систем, когда $n > 10^2 \dots 10^3$).

При вырожденности матрицы \mathbf{E} ее определитель равен нулю:

$$\det \mathbf{E} = 0,$$

и, следовательно, преобразование АДС к виду (54) даже теоретически невозможно. Таким образом, возникает ситуация, когда при решении той или иной задачи анализа или синтеза предпочтительнее использовать исходную форму записи АДС (50).

В [12] предложена явная формула синтеза закона управления с обратной связью (регулятора)

$$u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} \quad (55)$$

и наблюдателя состояния с законом инъекции входа

$$\mathbf{v} = -\mathbf{l} y, \quad (56)$$

позволяющие по известным параметрам АДС (50), ее характеристическому полиному и заданным расположениям полюсов, также выраженным в коэффициентах характеристических полиномов, рассчитать регулятор и наблюдатель состояния, обеспечивающие замкнутой системе требуемое расположение полюсов.

Введем определение.

Определение 4. Матрицу

$$\mathbf{I}_n \otimes \begin{pmatrix} -\mathbf{b}_L^\perp \mathbf{A} \\ \dots \\ \mathbf{b}_L^\perp \mathbf{E} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n^2 \times (n^2+1)} \quad (57)$$

будем называть ленточной матрицей управляемости АДС (50).

Справедлива теорема [12]:

Теорема 8. Для полной управляемости АДС (50) необходимо и достаточно, чтобы

$$\left(\mathbf{Y}_1^T \mid \mathbf{Y}_2^T \mid \dots \mid \mathbf{Y}_{n-1}^T \mid \mathbf{Y}_n^T \right)^T = \left(\mathbf{I}_n \otimes \begin{pmatrix} -\mathbf{b}_L^\perp \mathbf{A} \\ \dots \\ \mathbf{b}_L^\perp \mathbf{E} \end{pmatrix} \right)_R^\perp \in \mathbb{R}^{n^2}, \quad \mathbf{Y}_i \in \mathbb{R}^n. \quad (58)$$

Теорема 8 описывает альтернативный критерий полной управляемости АДС по отношению к критерию, приведенному в [13].

Пусть далее х.п. АДС (50)

$$\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) = \gamma_k \lambda^k + \gamma_{k-1} \lambda^{k-1} + \dots + \gamma_1 \lambda + \gamma_0, \quad k \leq n. \quad (59)$$

Известно, что корни полинома (59) определяют полюсы передаточной функции АДС (52) и, следовательно, устойчивость этой системы.

Справедливо также утверждение [12]:

Теорема 9. Коэффициенты х.п. (50) полностью управляемой АДС (50) определяются ленточной формулой

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{k-1} \\ \gamma_k \end{pmatrix} = \left(\mathbf{I}_n \otimes \begin{pmatrix} -\mathbf{b}^+ \mathbf{A} \\ \mathbf{b}^+ \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \Upsilon_1 \\ \Upsilon_2 \\ \Upsilon_3 \\ \vdots \\ \Upsilon_{k-1} \\ \Upsilon_k \end{pmatrix}, \quad (60)$$

где Υ_i – субвекторы из (58).

Известно, что корни полинома числителя передаточной функции АДС (52)

$$\theta_l \lambda^l + \theta_{l-1} \lambda^{l-1} + \dots + \theta_1 \lambda + \theta_0 \quad (61)$$

определяют нули передачи АДС (50), т.е. комплексные частоты входных воздействий, при которых обнуляется ее выход.

Теорема 10 [12]. Коэффициенты полинома числителя (61) передаточной функции (52) полностью управляемой АДС (50) определяются ленточной формулой

$$\begin{pmatrix} \theta_0 \\ \vdots \\ \theta_{l-1} \\ \theta_l \end{pmatrix} = (-1)^{l+1} \left(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{c}^T \right) \begin{pmatrix} \Upsilon_1 \\ \Upsilon_2 \\ \Upsilon_3 \\ \Upsilon_4 \\ \vdots \\ \Upsilon_l \end{pmatrix}, \quad (62)$$

где Υ_i – субвекторы из (58).

Как было отмечено ранее, одними из наиболее известных явных расчетных формул, применяемых для модального синтеза регуляторов стандартных линейных SISO-систем, являются формулы Аккермана и Басса–Гура. Аналогичных формул для АДС (50) до недавнего времени известно не было. Использование свойств ленточной матрицы управляемости АДС (57) позволяет получить подобные формулы.

Пусть заданы коэффициенты х.п. замкнутой АДС

$$\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{b} \mathbf{k}^T) = \hat{\gamma}_k \lambda^k + \hat{\gamma}_{k-1} \lambda^{k-1} + \dots + \hat{\gamma}_1 \lambda + \hat{\gamma}_0, \quad k \leq n, \quad (63)$$

и вектор разности исходного (59) и заданного (63) х.п.

$$(\Delta \gamma_0 \mid \Delta \gamma_1 \mid \dots \mid \Delta \gamma_{k-1} \mid \Delta \gamma_k).$$

Тогда справедливо утверждение:

Теорема 11. Пусть линейная АДС (50) полностью управляемая и имеет х.п. (59). Тогда матрица \mathbf{k}^T в законе обратной связи (55), обеспечивающем замкнутой системе х.п. (63), определяется формулой

$$\mathbf{k}^T = (\Delta \gamma_0 \mid \Delta \gamma_1 \mid \dots \mid \Delta \gamma_{k-1} \mid \Delta \gamma_k) (\Upsilon_1 \mid \Upsilon_2 \mid \dots \mid \Upsilon_{k-1} \mid \Upsilon_k)^{-1}. \quad (64)$$

Итак, формула (64) играет при синтезе регулятора АДС такую же роль, какую играют формулы Аккерманна и Басса–Гура при синтезе регулятора для линейных систем стандартного вида (51).

В силу дуальности задач анализа полной управляемости и наблюдаемости линейной АДС (50) справедлива теорема, дуальная теореме 8.

Теорема 12. Для полной наблюдаемости АДС (50) необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathbf{I}_n \otimes \begin{pmatrix} -\mathbf{c}_R^{\perp T} \mathbf{A}^T \\ \mathbf{c}_R^{\perp T} \mathbf{E}^T \end{pmatrix}_R \in \mathbb{R}^{n^2}. \quad (65)$$

Эта теорема является альтернативой критерию полной наблюдаемости АДС, приведенному в [13]. Утверждение, аналогичное теореме 11, дуальным образом формулируется для задачи синтеза наблюдателя состояния АДС.

Заключение

С использованием ранее полученных результатов, основанных на применении ленточной формы решения задачи А.Н. Крылова, получены новые (альтернативные) ленточные аналоги критериев управляемости и наблюдаемости и, соответственно, решения задачи синтеза управления как для систем с одним входом и выходом (SISO-системы), так и для систем с многими входами и многими выходами (MIMO-системы), включая новый класс систем, который составляют алгебро-дифференциальные (дескрипторные) системы.

Список источников

1. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976.
2. Уонем М. Линейные многомерные системы управления: геометрический подход. М.: Наука, 1980.
3. Kailath T. *Linear Systems*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1980.
4. Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления. М.: Лаборатория базовых знаний, 2004.
5. Мисриханов М.Ш. Инвариантное управление многомерными системами: алгебраический подход. М.: Наука, 2007.
6. Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Метод решения задачи А.Н. Крылова на основе ленточных матриц // Вестник ИГЭУ. 2005. № 6. С. 207–215.
7. Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Ленточная формула решения задачи А.Н. Крылова // Автоматика и телемеханика. 2007. № 12. С. 53–69.
8. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. СПб.: Лань, 2002.
9. Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н. Матричные методы в теории и практике систем автоматического управления летательных аппаратов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016.
10. Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Анализ и синтез линейных динамических систем на основе ленточных формул // Вестник ИГЭУ. 2005. Вып. 5. С. 243–248.
11. Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Обобщенные формулы модального синтеза для линейных систем с многими входами и многими выходами // Вестник ИГЭУ. 2005. Вып. 5. С. 157–161.
12. Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Ленточные формулы анализа линейной алгебро-дифференциальной SISO-системы // Вестник ИГЭУ. 2005. Вып. 5. С. 187–242.
13. Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Ленточные критерии и рекурсивные тесты полной управляемости и наблюдаемости линейных алгебро-дифференциальных систем // Автоматика и телемеханика. 2008. № 9. С. 44–61.
14. Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Управление конечными собственными значениями дескрипторной системы // Доклады академии наук. 2015. Т. 460, № 4. С. 381–384.
15. Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Управление по выходу спектром дескрипторной системы // Доклады академии наук. 2016. Т. 468, № 2. С. 134–136.
16. Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Ленточные формулы анализа и синтеза управляемых динамических MIMO-систем // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2014. № 3. С. 3–15.
17. Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Синтез стабилизирующего управления на основе ленточных критериев // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2014. № 4. С. 3–18.
18. Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. О ленточной формуле решения обобщенной задачи Крылова для аффинной динамической системы // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2014. № 6. С. 3–14.
19. Микрин Е.А., Зубов Н.Е., Рябченко В.Н., Лапин А.В. Анализ и синтез динамических MIMO систем на основе ленточных матриц специального вида // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2020. № 2. С. 1–14.

References

1. Andreev, Yu.N. (1976) *Upravlenie konechnomernymi lineynymi ob'ektami* [Control of Finite-Dimensional Linear Objects]. Moscow: Nauka.
2. Wonham, M. (1980) *Lineynye mnogomernye sistemy upravleniya: geometricheskij podkhod* [Linear Multidimensional Control Systems: A Geometric Approach]. Translated from English. Moscow: Nauka.
3. Kailath, T. (1980) *Linear Systems*. Prentice Hall. Englewood Cliffs. NJ.
4. Dorf, R. & Bishop R. (2004) *Sovremennye sistemy upravleniya* [Modern Control Systems]. Translated from English. Moscow: Laboratoriya bazovykh znaniy.

5. Misrikhanov, M.Sh. (2007) *Invariantnoe upravlenie mnogomernymi sistemami. Algebraicheskiy podkhod* [Invariant Control of Multidimensional Systems. Algebraic Approach]. Moscow: Nauka.
6. Misrikhanov, M.Sh. & Ryabchenko, V.N. (2005) Metod resheniya zadachi A.N. Krylova na osnove lentochnykh matrirts [Method for Solving A.N. Krylov's Problem Using Band Matrices]. *Vestnik IG-EU*. 6. pp. 207–215.
7. Misrikhanov, M.Sh. & Ryabchenko, V.N. (2007) Lentochnaya formula resheniya zadachi A.N. Krylova [Band Formula for Solving A.N. Krylov's Problem]. *Avtomatika i telemekhanika*. 12. pp. 53–69.
8. Faddeev, D.K. & Faddeeva, V.N. (2002) *Vychislitel'nye metody lineynoy algebrы* [Computational Methods of Linear Algebra]. St. Petersburg: Lan'.
9. Zubov, N.E., Mikrin, E.A. & Ryabchenko, V.N. (2016) *Matrichnye metody v teorii i praktike sistem avtomaticheskogo upravleniya letatel'nykh apparatov* [Matrix Methods in the Theory and Practice of Aircraft Automatic Control Systems]. Moscow: Bauman Moscow State Technical University.
10. Misrikhanov, M.Sh. & Ryabchenko, V.N. (2005) Analiz i sintez lineynykh dinamicheskikh sistem na osnove lentochnykh formul [Analysis and Synthesis of Linear Dynamic Systems Based on Band Formulas]. *Vestnik IGEU*. 5. pp. 243–248.
11. Misrikhanov, M.Sh. & Ryabchenko, V.N. (2005) Obobshchennye formuly modal'nogo sinteza dlya lineynykh sistem s mnogimi vkhodami i mnogimi vykhodami [Generalized Formulas for Modal Synthesis for Linear Systems with Many Inputs and Many Outputs]. *Vestnik IGEU*. 5. pp. 157–161.
12. Misrikhanov, M.Sh. & Ryabchenko, V.N. (2005) Lentochnye formuly analiza lineynoy algebro-differentsial'noy SISO-sistemy [Band Formulas for Analysis of Linear Algebraic-Differential SISO System]. *Vestnik IGEU*. 5. pp. 187–242.
13. Misrikhanov, M.Sh. & Ryabchenko, V.N. (2008) Lentochnye kriterii i rekurivnye testy polnoy upravlyaemosti i nablyudaemosti lineynykh algebro-differentsial'nykh sistem [Band Criteria and Recursive Tests of Complete Controllability and Observability of Linear Algebraic-Differential Systems]. *Avtomatika i telemekhanika*. 9. pp. 44–61.
14. Zubov, N.E., Mikrin, E.A., Misrikhanov, M.Sh. & Ryabchenko, V.N. (2015) Upravlenie konechnymi sobstvennymi znacheniyami deskriptornoy sistemy [Control of Finite Eigenvalues of a Descriptor System]. *Doklady akademii nauk*. 460(4). pp. 64–67.
15. Zubov, N.E., Mikrin, E.A., Misrikhanov, M.Sh. & Ryabchenko, V.N. (2016) Upravlenie po vykhodu spektrom deskriptornoy sistemy [Output Control of the Spectrum of a Descriptor System]. *Doklady akademii nauk*. 468(2). pp. 259–261.
16. Zubov, N.E., Mikrin, E.A., Misrikhanov, M.Sh. & Ryabchenko, V.N. (2014) Lentochnye formuly analiza i sinteza upravlyaemykh dinamicheskikh MIMO-sistem [Band Formulas for Analysis and Synthesis of Controllable Dynamic MIMO Systems]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Priborostroenie*. 3. pp. 3–15.
17. Zubov, N.E., Mikrin, E.A., Misrikhanov, M.Sh. & Ryabchenko, V.N. (2014) Sintez stabiliziruyushchego upravleniya na osnove lentochnykh kriteriev [Synthesis of Stabilizing Control Based on Band Criteria]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Priborostroenie*. 4. pp. 3–18.
18. Zubov, N.E., Mikrin, E.A., Misrikhanov, M.Sh. & Ryabchenko V.N. (2014) O lentochnoy formule resheniya obobshchennoy zadachi Krylova dlya affinnoy dinamicheskoy sistemy [On the Band Formula for Solving the Generalized Krylov Problem for an Affine Dynamic System]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Priborostroenie*. 6. pp. 3–18.
19. Mikrin, E.A., Zubov, N.E., Ryabchenko, V.N. & Lapin, A.V. (2020) Analiz i sintez dinamicheskikh MIMO sistem na osnove lentochnykh matrirts spetsial'nogo vida [Analysis and Synthesis of Dynamic MIMO Systems Based on Band Matrices of a Special Form]. *Differentsial'nye uravneniya i protsessы upravleniya*. 2. pp. 1–14.

Информация об авторах:

Зубов Николай Евгеньевич – профессор, доктор технических наук, декан факультета «Ракетно-космическая техника», профессор кафедры «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Москва, Россия). E-mail: nik.zubov@gmail.com

Рябченко Владимир Николаевич – доцент, доктор технических наук, профессор кафедры «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Москва, Россия). E-mail: ryabchenko.vn@mail.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Zubov Nikolay E. (Professor, Doctor of Technical Sciences, Dean of Rocket and Space Techniques Faculty, Professor of Department of Automatic Control Systems at Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation). E-mail: nik.zubov@gmail.com

Ryabchenko Vladimir N. (Associate Professor, Doctor of Technical Sciences, Professor of Department of the Automatic Control Systems at Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation). E-mail: ryabchenko.vn@mail.ru

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 11.09.2025; принята к публикации 05.03.2026

Received 11.09.2025; accepted for publication 05.03.2026

Original article

UDC 681.51

doi: 10.17223/19988605/74/3

**Observer-based adaptive output tracking for MIMO LTI systems
under unknown external disturbances****Cong Vinh Tu¹, Natalia A. Dudarenko²**^{1,2} National Research University ITMO, Saint Petersburg, Russian Federation¹ congvinhvkdn@gmail.com² dudarenko@itmo.ru

Abstract. The paper presents an adaptive output-feedback control algorithm for linear time-invariant multi-input multi-output systems subjected to unmatched unknown disturbances. The control algorithm is based on the Falb–Wolovich decoupling method combined with a direct disturbance compensation technique derived from the internal model principle. The main advantage of the proposed algorithm is that the adaptive law becomes easier to tune due to the decoupling strategy application. By properly selecting the adaptation gains independently the balance between the convergence speed and robustness according to the desired performance requirements can be achieved. In addition, it is possible to get improved control performance in situations where negative inter-channel coupling of an original system has an adverse effect to the overall dynamic of the system. The effectiveness of the proposed method is demonstrated through numerical simulations performed in MATLAB/Simulink.

Keywords: adaptive control; disturbance compensation; Falb–Wolovich approach; harmonic disturbance; Luenberger observer.

For citation: Tu, C.V., Dudarenko, N.A. (2026) Observer-based adaptive output tracking for MIMO LTI systems under unknown external disturbances. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 74. pp. 29–39. doi: 10.17223/19988605/74/3

Научная статья

doi: 10.17223/19988605/74/3

**Адаптивное слежение выходной переменной за задающим сигналом
в многоканальных системах с наблюдаемым выходом
в условиях неизвестных внешних возмущений****Конг Винь Ты¹, Наталия Александровна Дударенко²**^{1,2} Национальный исследовательский университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия¹ congvinhvkdn@gmail.com² dudarenko@itmo.ru

Аннотация. Представлен алгоритм адаптивного слежения выходной переменной за задающим сигналом в многоканальных системах с наблюдаемым выходом в условиях несогласованных неизвестных возмущений. Алгоритм основан на использовании метода развязки Фальба–Воловича в сочетании с прямым методом компенсации возмущений на основе принципа внутренней модели. Основное преимущество предлагаемого алгоритма заключается в том, что он более прост в настройке благодаря «развязанной» структуре каналов управления. Независимый выбор коэффициентов адаптации для каждого из каналов системы позволяет обеспечить требуемые показатели по скорости сходимости и свойство робастности системы. Кроме того, рассматриваемый в статье подход позволяет получить улучшенные показатели качества в системах, изначально характеризующихся негативным влиянием межканальных связей на общую динамику системы. Эффективность предлагаемого подхода проиллюстрирована результатами численного моделирования, выполненного в среде MATLAB/Simulink.

Ключевые слова: адаптивное управление; гармонические возмущения; компенсация возмущений; наблюдатель Люенбергера; метод Фальба–Воловича.

Для цитирования: Ты К.В., Дударенко Н.А. Адаптивное слежение выходной переменной за задающим сигналом в многоканальных системах с наблюдаемым выходом в условиях неизвестных внешних возмущений // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2026. № 74. С. 29–39. doi: 10.17223/19988605/74/3

Introduction

In industrial practice, systems are typically designed as multi-input multi-output (MIMO) configurations, where complex interactions between control channels frequently occur. To address these interactions, decoupling strategies have been introduced as a reliable approach to suppress undesired cross-effects between inputs and outputs. The objective of the decoupling process is to ensure that each output is influenced only by its corresponding input, thereby enabling independent control among the channels in the system.

Decoupling methods are often divided into two main categories [1]: static and dynamic approaches. Static decoupling typically involves the use of gain matrices and is considered easy to implement, but such methods are generally effective only under steady state conditions. On the other hand, dynamic approaches, including ideal decoupling, simplified schemes, and those based on matrix inversion, are designed to manage both transient and steady state behaviors. Despite their broader capabilities, these dynamic methods tend to be more complex, more sensitive to model errors, and less robust when dealing with transmission zeros in the right half of the complex plane [2]. To overcome these limitations, many dynamic decoupling strategies using state feedback have been developed [3–5]. Among these, the method based on the Falb Wolovich approach [5] has been found to combine implementation simplicity with strong performance, even when model uncertainties and external disturbances are present [6].

The paper focuses on the problem of adaptive disturbance compensation in tracking control for a class of linear time-invariant multi-input multi-output systems, when the vector of output variables is measurable only, while the state vector is not accessible for measurements. The reference signal and external disturbances considered in this study are both unknown and take a harmonic form, and thus can be regarded as unknown disturbances acting on the control system. An effective approach to disturbance compensation is based on the internal model principle (IMP), in which the disturbance is modeled as the output of a linear autonomous system. To achieve zero steady-state error, the state and parameters of this system must be incorporated into the control law.

The problem of adaptive disturbance compensation based on the internal model principle is well known, particularly in cases where the disturbance is modeled as the output of an exosystem with unknown parameters (see Section 1.4 of [7, 8]). The objective of this approach is to design an adaptive control law in the form of either state feedback (see Section 4.2 of [7, 9, 10]) or output feedback [8, 11]. This method has been successfully developed for both SISO systems [12–16] and MIMO systems (see Section 4.2 of [7, 9, 10]). All of these studies assume that the system has a measurable state vector. In relation to this issue, the most recent publication [17] addressed the output-based problem for systems however, the disturbances acting on the system are required to be matched within the system.

This study is developed based on the work on adaptive output regulation [7] (see Section 4.2.3 in [7]). In this paper, we propose a new method for the direct compensation of unknown external disturbances in the tracking control problem for a class of unstable linear MIMO systems, where the external disturbances may be unmatched within the system structure. The proposed approach begins with the construction of a Luenberger observer to estimate the system states. Then, a linear decoupling controller based on state feedback is applied to eliminate undesired cross-coupling effects between inputs and outputs. Finally, the control law and the adaptive algorithm are designed using the estimated states from the reference observer and the disturbance observer of the decoupled system, ensuring that the system output accurately tracks the reference signal. The main advantage of the proposed algorithm is that the adaptive law becomes easier to tune due to the application of the decoupling strategy. Moreover, since the decoupled structure enables independent

adjustment of the adaptation gains in each channel, the designer can properly select these gains to balance the convergence speed and robustness according to the desired performance requirements. In addition, improved control performance can be achieved in situations where the coupling between the channels of the original system adversely affects the overall system dynamics. Typically, the presence of inter-channel connections in MIMO systems leads to an increase in the overshoot; decoupling the system channels helps reduce the negative impact of these interconnections.

The paper is organized as follows. In Section 1, the problem is mathematically formulated, and the key assumptions are introduced. Section 2 presents the decoupling control strategy based on the Falb-Wolovich approach and the construction of the Luenberger state observer. The design of the disturbance observer and the reference observer is described in Section 3. The synthesis of the control law along with the adaptive algorithm is presented in Section 4. Section 5 provides numerical simulation results obtained using the Matlab software.

Notation: $\|x\|$ is the Euclidean norm of a vector x ; $\text{Col}(x_i)$ is a column vector with elements x_i ; $\text{blkdiag}\{x_i\}$ is the block-diagonal matrix with diagonal elements x_i ; $\text{diag}\{x_i\}$ is the diagonal matrix with diagonal elements x_i .

1. Problem statement

Consider the system described in the form:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Dv(t), \\ y(t) = Cx(t) + Ev(t), \end{cases} \quad (1)$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ and $v(t) \in \mathbb{R}^k$ denote the state vector, control input vector, output vector, and external disturbance vector, respectively. The matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ and $D \in \mathbb{R}^{m \times k}$ are known, while matrix A may be unstable, the matrix $E \in \mathbb{R}^{m \times k}$ may be unknown, and the dimensions satisfy $m \leq n$.

The control objective is to design a state feedback control law such that the following requirement is satisfied:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - g(t)\| = 0. \quad (2)$$

Here, $g(t) \in \mathbb{R}^m$ is the reference signal.

For this paper, the following assumptions are considered:

Assumption 1. The system is minimum phase, and the triplet (A, B, C) is controllable and observable.

Assumption 2. The vector of output variables y is measurable only, while the state vector x is not accessible for measurements.

Assumption 3. The reference signal $g(t) = [g_1(t), g_2(t), \dots, g_m(t)]^\top$ is measurable. Each component $g_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, m$, is generated by a linear autonomous system:

$$\dot{\xi}_{gi}(t) = \Gamma_{gi} \xi_{gi}(t), \quad g_i(t) = h_{gi}^\top \xi_{gi}(t). \quad (3)$$

Here, the state vector $\xi_{gi}(t) \in \mathbb{R}^{q_{gi}}$ is not directly measurable. The matrix Γ_{gi} is constant and unknown, with simple eigenvalues located on the imaginary axis. The vector h_{gi}^\top is also unknown but constant. Each pair (Γ_{gi}, h_{gi}) is observable, and the upper bound q_{gi} is known.

Assumption 4. The external disturbance $v(t) = [v_1(t), v_2(t), \dots, v_k(t)]^\top$ is not measurable. Each component $v_\alpha(t)$, $\alpha = 1, 2, \dots, k$, is generated by a linear autonomous system:

$$\dot{\xi}_{v\alpha}(t) = \Gamma_{v\alpha} \xi_{v\alpha}(t), \quad v_\alpha(t) = h_{v\alpha}^\top \xi_{v\alpha}(t). \quad (4)$$

Here, the state vector $\xi_{v\alpha}(t) \in \mathbb{R}^{q_{v\alpha}}$ is not directly measurable. The matrix $\Gamma_{v\alpha}$ is constant and unknown, with simple eigenvalues located on the imaginary axis. The vector $h_{v\alpha}^\top$ is also unknown but constant. Each pair $(\Gamma_{v\alpha}, h_{v\alpha}^\top)$ is observable, and the upper bound $q_{v\alpha}$ is known.

Remark 1. From Assumptions 3 and 4, the reference signal and the external disturbance can be represented in a simplified multi-output system form.

The reference signal can be modeled as

$$\dot{\xi}_g(t) = \Gamma_g \xi_g(t), \quad g(t) = H_g^\top \xi_g(t),$$

where

$$\Gamma_g = \text{blkdiag}\{\Gamma_{g_i}\}, \quad H_g^\top = \text{blkdiag}\{h_{g_i}^\top\}, \quad \xi_g(t) = [\xi_{g_1}^\top(t) \cdots \xi_{g_m}^\top(t)]^\top \in \mathbb{R}^{q_g}, \quad \Gamma_g = \text{blkdiag}\{\Gamma_{g_i}\},$$

$$H_g^\top = \text{blkdiag}\{h_{g_i}^\top\}, \quad \xi_g(t) = [\xi_{g_1}^\top(t), \dots, \xi_{g_m}^\top(t)]^\top \in \mathbb{R}^{q_g}, \quad \text{and } q_g = \sum_{i=1}^m q_{g_i}.$$

Similarly, the external disturbance can be modeled as

$$\dot{\xi}_v(t) = \Gamma_v \xi_v(t), \quad v(t) = H_v^\top \xi_v(t),$$

where $\Gamma_v = \text{blkdiag}\{\Gamma_{v\alpha}\}$, $H_v^\top = \text{blkdiag}\{h_{v\alpha}^\top\}$, $\xi_v(t) = [\xi_{v_1}^\top(t), \dots, \xi_{v\alpha}^\top(t)]^\top \in \mathbb{R}^{q_v}$, and $q_v = \sum_{\alpha=1}^k q_{v\alpha}$.

2. Design of the decoupler and the state observer

Consider the state-space representation of the system (1) by neglecting the effect of external disturbances

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_d(t), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \quad (5)$$

Here, $u_d(t)$ is the control law that decouples the system.

Since direct access to the full state vector $x(t)$ is not feasible, a Luenberger observer [18] is designed to estimate the state of system (5). The corresponding observer structure is given by

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu_d(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)), \quad (6)$$

where $\hat{x}(t)$ represents the estimated state vector, and $L \in \mathbb{R}^{n \times m}$ denotes the observer gain matrix.

A control input $u_d(t)$ is constructed as in [5] in order to achieve input-output decoupling for the system (5), and is defined by the relation:

$$u_d(t) = -K\hat{x}(t) + Fu(t), \quad (7)$$

where K and F are constant real-valued matrices with compatible dimensions.

Let the output matrix C can be written as $C = [c_1, c_2, \dots, c_m]^\top$, where c_i represents the i -th row of the matrix C . For every $i = 1, 2, \dots, m$, we define a positive integer σ_i , known as the output order difference, as follows:

$$\sigma_i = \begin{cases} \min(l \mid c_i A^{l-1} B \neq 0^\top), & l = 1, 2, \dots, n-1, \\ n-1, & \text{if } c_i A^{l-1} B = 0^\top, l = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (8)$$

Here, $0^\top \in \mathbb{R}^m$ denotes a row vector whose entries are all zero.

The target transfer functions for the SISO components, obtained from the decoupled structure of system (5), can be described as

$$W_{ii}(s) = \frac{q_{i0}}{q_{i0} + q_{i1}s + q_{i2}s^2 + \cdots + s^{\sigma_i}} = \frac{q_{i0}}{\prod_{j=1}^{\sigma_i} (s - \lambda_{ij})},$$

where s denotes the Laplace variable and λ_{ij} are the assigned eigenvalues corresponding to index pairs $i = 1, 2, \dots, m$ and $j = 1, 2, \dots, \sigma_i$.

Let us define the matrices B^* and C^* as follows:

$$B^* = \begin{bmatrix} c_1 A^{\sigma_1-1} B \\ c_2 A^{\sigma_2-1} B \\ \vdots \\ c_m A^{\sigma_m-1} B \end{bmatrix}, \quad C^* = \begin{bmatrix} c_1 A^{\sigma_1} + \sum_{z=0}^{\sigma_1-1} q_{1z} c_1 A^z \\ \vdots \\ c_m A^{\sigma_m} + \sum_{z=0}^{\sigma_m-1} q_{mz} c_m A^z \end{bmatrix}.$$

Based on these definitions, we can formulate the following result.

Theorem 1.

The system described in (5) can be decoupled if and only if the matrix B^* is invertible. Under this condition, the gain matrices in the control expression (7) are determined as $K = (B^*)^{-1} C^*$, $F = (B^*)^{-1}$. Consequently, the overall transfer function matrix of the system becomes diagonal and can be written as $W_u(s) = \text{diag}\{W_{ii}(s)\}$.

For the proof see Chapter 4 of [1].

Remark 2. Following the decoupling of system (1) via the control strategy defined in (7) using the matrices K and F from Theorem 1, the resulting structure corresponds to m separate SISO subsystems. The overall system can then be expressed in the state-space form:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_\Sigma x(t) + B_\Sigma u(t) + Dv(t), \\ y(t) = Cx(t) + Ev(t), \end{cases} \quad (9)$$

where the matrices $A_\Sigma = A - BK$ and $B_\Sigma = BF$ describe the decoupled dynamics. The transfer matrix $W_u(s) = C(sI - A_\Sigma)^{-1} B_\Sigma$ has a diagonal form, and A_Σ is Hurwitz.

3. Design of the reference observer and the disturbance observer

The reference input and external disturbance can both be expressed using their canonical representations, as discussed in [7, 19, 20]. These canonical representations serve as the basis for constructing the reference observer and the external disturbance observer.

The exosystem described in (3) can be transformed into the following canonical form:

$$\dot{\bar{\xi}}_{gi}(t) = G_{gi} \bar{\xi}_{gi}(t) + l_{gi} g_i(t), \quad g_i(t) = \theta_{gi}^\top \bar{\xi}_{gi}(t), \quad (10)$$

where $\bar{\xi}_{gi}(t) \in \mathbb{R}^{q_{gi}}$ (for $i=1,2,\dots,m$) denotes the state vector with initial value $\bar{\xi}_{gi}(0)$, $\theta_{gi} \in \mathbb{R}^{q_{gi}}$ represents a parameter vector that is unknown; $G_{gi} \in \mathbb{R}^{q_{gi} \times q_{gi}}$ is a Hurwitz matrix; and l_{gi} is a constant vector ensuring the controllability of the pair (G_{gi}, l_{gi}) .

The exosystem given in (10) can alternatively be written in a block-diagonal structure as:

$$\dot{\bar{\xi}}_g(t) = G_g \bar{\xi}_g(t) + L_g g(t), \quad g(t) = \theta_g^\top \bar{\xi}_g(t), \quad (11)$$

or equivalently:

$$\dot{\bar{\xi}}_g(t) = (G_g + L_g \theta_g^\top) \bar{\xi}_g(t), \quad g(t) = \theta_g^\top \bar{\xi}_g(t), \quad (12)$$

where

$$\bar{\xi}_g(t) = [\bar{\xi}_{g1}^\top(t), \bar{\xi}_{g2}^\top(t), \dots, \bar{\xi}_{gm}^\top(t)]^\top \in \mathbb{R}^{q_g}; \quad \theta_g^\top = \text{blkdiag}\{\theta_{gi}^\top\} \in \mathbb{R}^{m \times q_g};$$

$$G_g = \text{blkdiag}\{G_{gi}\} \in \mathbb{R}^{q_g \times q_g}; \quad L_g = \text{blkdiag}\{l_{gi}\} \in \mathbb{R}^{q_g \times m}.$$

Since the signal $g(t)$ is directly measurable, equation (11) allows the construction of a reference observer as follows:

$$\dot{\hat{\xi}}_g(t) = G_g \hat{\xi}_g(t) + L_g g(t), \quad g(t) = \theta_g^\top \hat{\xi}_g(t) + \epsilon_r, \quad (13)$$

where $\hat{\xi}_g(0)$ is initialized arbitrarily. Then, the true state $\bar{\xi}_g(t)$ can be expressed as:

$$\bar{\xi}_g(t) = \hat{\xi}_g(t) + \epsilon_g,$$

with the estimation errors ϵ_r and ϵ_g decaying exponentially over time.

Similar to the reference signal, the exosystem described in (4) can be transformed into the following canonical form:

$$\dot{\bar{\xi}}_{v\alpha}(t) = G_{v\alpha} \bar{\xi}_{v\alpha}(t) + l_{v\alpha} v_\alpha(t), \quad v_\alpha(t) = \theta_{v\alpha}^\top \bar{\xi}_{v\alpha}(t), \quad (14)$$

where $\bar{\xi}_{v\alpha}(t) \in \mathbb{R}^{q_{v\alpha}}$ (for $\alpha = 1, 2, \dots, k$) denotes the state vector with initial value $\bar{\xi}_{v\alpha}(t)$; $\theta_{v\alpha} \in \mathbb{R}^{q_{v\alpha}}$ represents a parameter vector that is unknown; $G_{v\alpha} \in \mathbb{R}^{q_{v\alpha} \times q_{v\alpha}}$ is a Hurwitz matrix, and $l_{v\alpha}$ is a constant vector ensuring the controllability of the pair $(G_{v\alpha}, l_{v\alpha})$.

The exosystem given in (14) can alternatively be written in a block-diagonal structure as:

$$\dot{\bar{\xi}}_v(t) = G_v \bar{\xi}_v(t) + L_v v(t), \quad v(t) = \theta_v^\top \bar{\xi}_v(t), \quad (15)$$

or equivalently:

$$\dot{\bar{\xi}}_v(t) = (G_v + L_v \theta_v^\top) \bar{\xi}_v(t), \quad v(t) = \theta_v^\top \bar{\xi}_v(t), \quad (16)$$

where

$$\bar{\xi}_v(t) = [\bar{\xi}_{v1}^\top(t), \bar{\xi}_{v2}^\top(t), \dots, \bar{\xi}_{vk}^\top(t)]^\top \in \mathbb{R}^{q_v}; \quad \theta_v^\top = \text{blkdiag}\{\theta_{v\alpha}^\top\} \in \mathbb{R}^{k \times q_v};$$

$$G_v = \text{blkdiag}\{G_{v\alpha}\} \in \mathbb{R}^{q_v \times q_v}; \quad L_v = \text{blkdiag}\{l_{v\alpha}\} \in \mathbb{R}^{q_v \times k}.$$

Following equation (15), the disturbance observer proposed in [7, 22] is constructed to estimate the state $\bar{\xi}_v(t)$. In this approach, the actual system state $x(t)$ is replaced by its estimate $\hat{x}(t)$ which is generated via the Luenberger observer (6). The disturbance observer is constructed in the following structure:

$$\dot{\varphi}(t) = G_v \varphi(t) + (G_v N - N A_\Sigma) \hat{x}(t) - N B_\Sigma u(t), \quad \hat{\xi}_v(t) = \varphi(t) + N \hat{x}(t), \quad (17)$$

where the initial value $\varphi(0)$ is arbitrary. The matrix $N \in \mathbb{R}^{q_v \times n}$ is selected such that it satisfies the condition

$$N D = L_v. \quad (18)$$

Then $\bar{\xi}_v(t) = \hat{\xi}_v(t) + \epsilon_v$, where $\hat{\xi}_v(t)$ denotes the estimate of $\bar{\xi}_v(t)$, while ϵ_v exponentially decays.

Remark 3. Based on equations (17) and (18), it follows that each element of the disturbance vector v can be represented by a separate exosystem. The matrices G_v and L_v , due to their block-diagonal form, allow equations (16) and (17) to be rewritten as a collection of k independent subsystems:

$$\dot{\hat{\xi}}_{v\alpha}(t) = \varphi_\alpha(t) + N_\alpha \hat{x}(t), \quad \dot{\varphi}_\alpha(t) = G_{v\alpha} \varphi_\alpha(t) + (G_{v\alpha} N_\alpha - N_\alpha A_\Sigma) \hat{x}(t) - N_\alpha B_\Sigma u(t),$$

for each $\alpha = 1, 2, \dots, k$. The matrices $N_\alpha \in \mathbb{R}^{q_{v\alpha} \times n}$ are chosen such that the condition below is satisfied:

$$N_\alpha D = [0_{q_{v\alpha}}, \dots, 0_{q_{v\alpha}}, l_{v\alpha}, 0_{q_{v\alpha}}, \dots, 0_{q_{v\alpha}}],$$

where the vector $l_{v\alpha}$ is the α -th column.

4. Synthesis of the control law and adaptation algorithm

The decoupling process transforms system (1) into the form described in (9). In practice, disturbances may not be properly matched within the system. Therefore, to convert system (9) into a form in which the reference signal and external disturbances are compatible with the control input $u(t)$, we use the matrix regulator equation [7, 23, 24]. According to Assumptions 3 and 4, the eigenvalues of the matrices Γ_g and Γ_v or, equivalently, those of $(G_g + L_g \theta_g^\top)$ and $(G_v + L_v \theta_v^\top)$ are ensured not to coincide with the transmission zeros of the transfer matrix $W_u(s)$. Therefore, for system (9), the following results are obtained. There exist matrices $M_g \in \mathbb{R}^{n \times q_g}$ and $\eta_g \in \mathbb{R}^{q_g \times m}$ such that the matrix equalities

$$B_{\Sigma}\eta_g^{\top} = A_{\Sigma}M_g - M_g(G_g + L_g\theta_g^{\top}), \quad CM_g = \theta_g^{\top}. \quad (19)$$

are satisfied. Similarly, there exist matrices $M_v \in \mathbb{R}^{n \times q_v}$, $\eta_v \in \mathbb{R}^{q_v \times k}$ such that the following equalities hold:

$$B_{\Sigma}\eta_v^{\top} = A_{\Sigma}M_v - M_v(G_v + L_v\theta_v^{\top}) + D\theta_v^{\top}, \quad CM_v = -E\theta_v^{\top}. \quad (20)$$

Remark 4. We observe that both matrix θ_g^{\top} and matrix θ_v^{\top} are unknown. Consequently, the matrix pairs (M_g, η_g) and (M_v, η_v) are also unknown. However, in this case, it is sufficient to know that such matrix pairs exist.

We define the state error as $e(t) = x(t) - M\bar{\xi}(t)$, and the output tracking error as $\delta(t) = y(t) - g(t)$, where $M = [M_g, M_v]$ and $\bar{\xi}(t) = [\bar{\xi}_g(t), \bar{\xi}_v(t)]^{\top}$. Then, taking into account equations (9), (12), and (16), we compute the time derivative of $e(t)$ and obtain:

$$\dot{e}(t) = A_{\Sigma}e(t) + B_{\Sigma}u(t) + (A_{\Sigma}M_g - M_g(G_g + L_g\theta_g^{\top}))\bar{\xi}_g(t) + (A_{\Sigma}M_v - M_v(G_v + L_v\theta_v^{\top}) + D\theta_v^{\top})\bar{\xi}_v(t) + \epsilon.$$

Based on the matrix equations (19) and (20), the system can be represented in the form:

$$\dot{e}(t) = A_{\Sigma}e(t) + B_{\Sigma}(\eta^{\top}\bar{\xi}(t) + u(t)) + \epsilon, \quad \delta(t) = Ce(t).$$

Here, the matrix $\eta^{\top} = [\eta_g^{\top}, \eta_v^{\top}]$ is unknown.

Based on (13) and (17), and neglecting the exponentially decaying term due to the stability of $W_u(s)$, the state $\bar{\xi}(t)$ can be replaced by its estimate $\hat{\xi}(t)$. Consequently, the system can be rewritten in the form

$$\dot{e}(t) = A_{\Sigma}e(t) + B_{\Sigma}[\eta^{\top}\hat{\xi}(t) + u(t)], \quad \delta(t) = Ce(t). \quad (21)$$

Since the matrix A_{Σ} is Hurwitz, the control law for system (21) can be formulated as follows:

$$u = -\hat{\eta}^{\top}\hat{\xi}(t). \quad (22)$$

Here, the matrix $\hat{\eta}^{\top} = [\hat{\eta}_1^{\top}(t), \hat{\eta}_2^{\top}(t), \dots, \hat{\eta}_m^{\top}(t)] \in \mathbb{R}^{m \times q}$ is determined using an adaptive algorithm.

As a result, the system described in equation (21) can be reformulated as

$$\delta(t) = W_u(s)[\tilde{\eta}^{\top}\hat{\xi}(t)], \quad (23)$$

where $\tilde{\eta}^{\top} = \eta^{\top} - \hat{\eta}^{\top}$ is the matrix of the adjustable parameters.

Based on model (23), a gradient-based adaptive algorithm can be applied to estimate the tuning parameter. However, this algorithm exhibits poor convergence performance and may not allow acceleration of convergence even when the regressor satisfies the persistent excitation condition [25]. In this study, we employ an adaptive algorithm with memory regressor extension (MRE) [7] to improve the convergence rate of signals in the closed-loop system.

Proposition 1. Under Assumptions 1 to 4, if system (1) satisfies the decoupling condition in Theorem 1, then by applying the adaptive algorithm with MRE to the decoupled system (9), the adaptation gain can be adjusted independently for each control channel.

Proof:

From equation (23), we define the extended error variable

$$\hat{\epsilon} = \delta(t) + \Delta^{\top}\hat{\eta}, \quad (24)$$

Where

$$\Delta^{\top} = W_u(s)[\hat{\xi}^{\top}(t)] = \begin{bmatrix} W_{11}(s)[\hat{\xi}_1^{\top}(t)] & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & W_{mm}(s)[\hat{\xi}_m^{\top}(t)] \end{bmatrix}. \quad (25)$$

From (25), we see that each diagonal element is a regressor filtered through the dynamics of channel i :

$$\Delta_i^{\top} = W_{ii}(s)[\hat{\xi}_i^{\top}(t)], \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

By taking into account (23), equation (24) is rewritten:

$$\hat{\epsilon} = \Delta^{\top}\eta. \quad (26)$$

We multiply both sides of equation (26) by $\Delta = W_u(s)[\hat{\xi}(t)]$ and applying the transfer function $H(s) = \frac{1}{\beta s + 1}$ with $\beta > 0$, we obtain the following expression:

$$H(s)[\Delta \hat{\varepsilon}] = H(s)[\Delta \Delta^\top] \eta, \quad (27)$$

Based on equation (27), the adaptive algorithm is constructed as follows:

$$\dot{\hat{\eta}} = \mu(Y - \Omega \hat{\eta}), \quad (28)$$

where $Y = H(s)[\Delta \hat{\varepsilon}]$, $\Omega = H(s)[\Delta \Delta^\top]$, $\mu > 0$. is the adaptation gain.

Since the vector Y and the matrix Ω are constructed from a the matrix Δ matrix with a diagonal structure, Y and Ω can therefore be represented in the following form:

$$Y = \text{Col}(H(s)[\Delta_i \hat{\varepsilon}_i]), \text{ for } i = 1, 2, \dots, m; \quad (29)$$

$$\Omega = \text{blkdiag}(H(s)[\Delta_i \Delta_i^\top]), \text{ for } i = 1, 2, \dots, m. \quad (30)$$

From expressions (28), (29), and (30), we can present the adaptive algorithm for each control channel in the form:

$$\dot{\hat{\eta}}_i = \mu_i(Y_i - \Omega_{ii} \hat{\eta}_i), \quad (31)$$

where $Y_i = H(s)[\Delta_i \hat{\varepsilon}_i]$, $\Omega_i = H(s)[\Delta_i \Delta_i^\top]$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Based on expression (31), Proposition 1 has been proved.

Remark 5. The adaptive algorithm in the form of (31) ensures that the parameters between channels are no longer interdependent, and each parameter only needs to be adjusted based on the error of its own channel. As a result, the convergence process for each channel becomes independent, and the adaptive algorithm becomes easier to tune.

By employing the adaptation algorithm (31), it can be concluded that the control objective (2) is achievable [7, 26] with the proposed method, and the following theorem can be stated.

Theorem 2. Suppose that Assumptions 1 to 4 are satisfied. Then, the state observer (6) applied to system (5), and the control law (22) together with the reference observer (13), the disturbance observer (17) and (18), and the adaptation algorithm (31), when applied to system (9), which is obtained from system (1) by applying the control law (7) with the matrices introduced in Theorem 1, ensure that all signals in the closed loop system are bounded and the control objective (2) is achieved.

5. Numerical example

We consider a third-order unstable linear system (1) with

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,1 & -0,9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Suppose the reference signal $g_1(t) = 3\sin(2t)$ is a harmonic signal characterized by unknown parameters such as frequency, amplitude, phase, and bias. Additionally, let $g_2(t) = 2$ be an unknown constant. Under this assumption, $g_1(t)$ can be represented using a second-order exosystem as described in (10), whereas $g_2(t)$ can be represented by a first-order exosystem. Therefore, the reference observer (13) is constructed using the matrices

$$G_{g1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -7 \end{bmatrix}, \quad l_{g1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad G_{g2} = -9, \quad l_{g2} = 1, \quad G_g = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -6 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}, \quad L_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Similarly, the external disturbance is assumed to have the form $v_1 = 3\sin(2t)$, $v_2 = 3\sin(3t) + 2$. Therefore, the disturbance observer (17)–(18) is constructed using the matrices

$$G_{v1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad l_{v1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad G_{v2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix},$$

$$l_{v2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

In designing the Luenberger observer, the eigenvalues -2 , -3 and -4 are selected. Using the pole placement technique, the observer gain matrix L is calculated as:

$$L = \begin{bmatrix} 16,1 & 0 \\ 57,61 & 0 \\ -8 & 8 \end{bmatrix}.$$

Based on equation (8), we determine $\sigma_1 = 2$ and $\sigma_2 = 1$ for the respective outputs. Choosing the poles for the first channel as $\lambda_{11} = -2, \lambda_{12} = -3$ and for the second channel as $\lambda_{21} = -4$, the decoupling control law (7) is designed using the following matrices:

$$F = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 6,1 & 4,1 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

For the adaptation algorithm with MRE (31), we choose $H(s) = \frac{1}{s+1}$.

The simulation results are presented in Figures 1 and 2 to verify the effectiveness of the proposed approach. In Figure 1, we simulate the algorithm with the adaptation gain for channel 1 set to $\mu_1 = 1$ and for channel 2 set to $\mu_2 = 0,5$, whereas in Figure 2 we simulate with the adaptation gain for channel 1 set to $\mu_1 = 3$ and for channel 2 set to $\mu_2 = 1$.

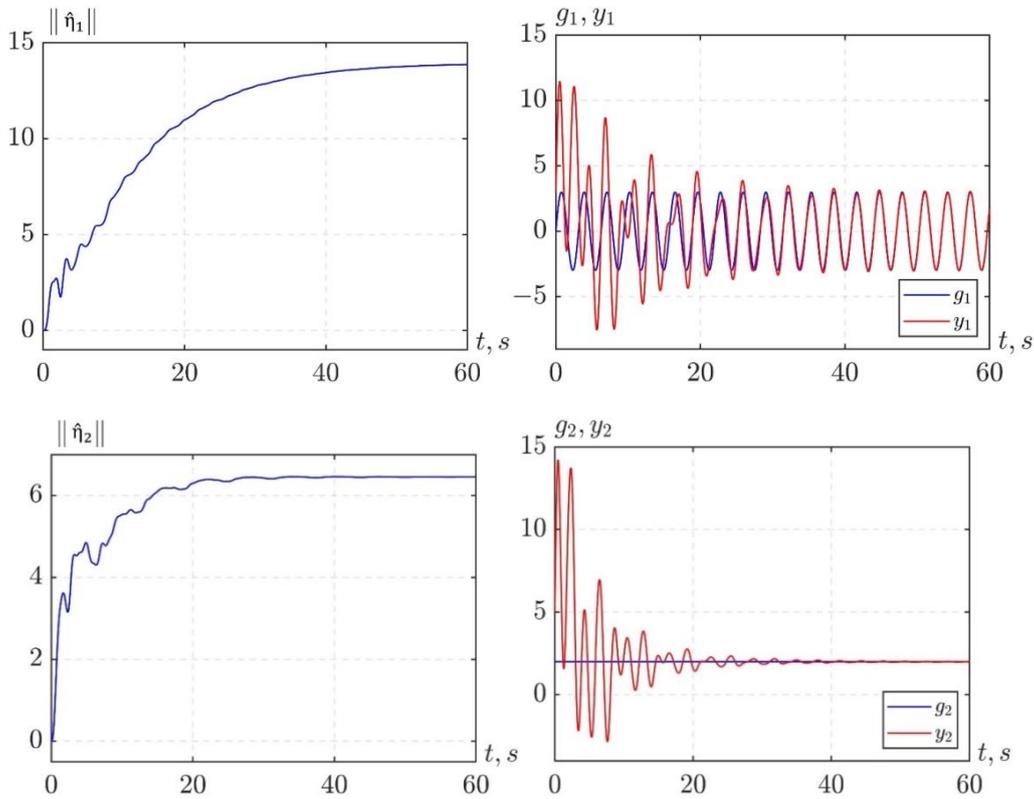


Fig. 1. Transients in the closed-loop control system with $\mu_1 = 1$ and $\mu_2 = 0,5$

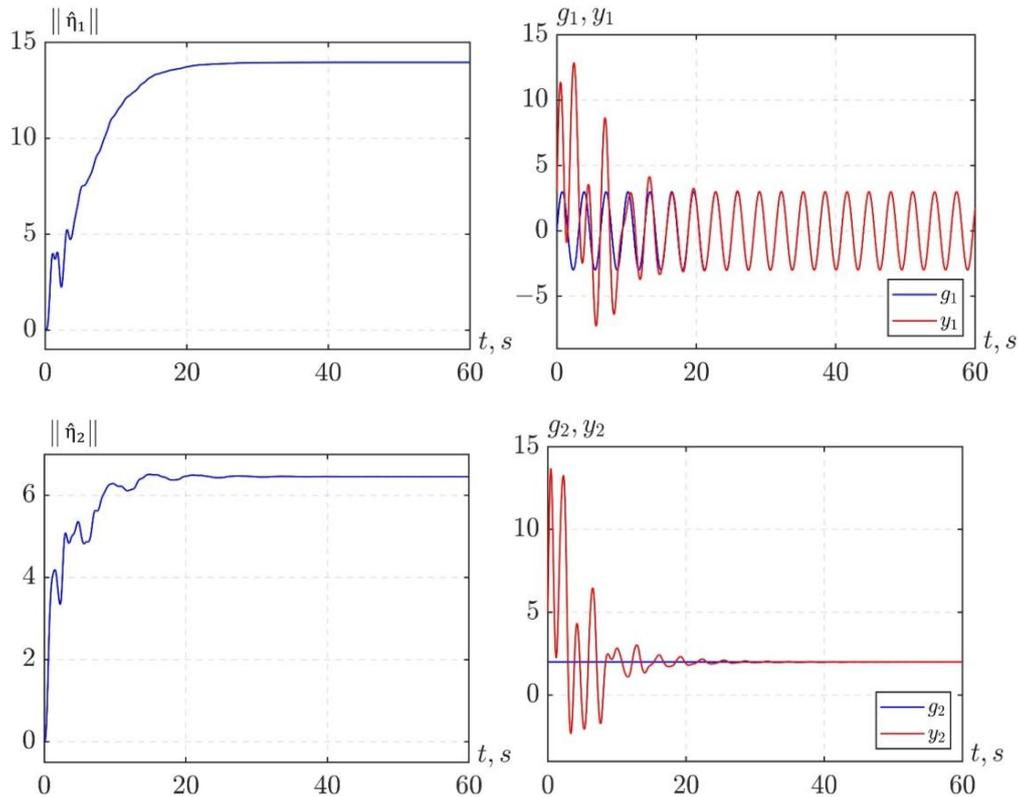


Fig. 2. Transients in the closed-loop control system with $\mu_1 = 3$ and $\mu_2 = 1$

By observing the simulation results, we can see that the control objective (2) is achieved and the proposed algorithm allows independent adjustment of the adaptation gains between the channels. Comparing Figures 1 and 2, we observe that the convergence speed increases when the adaptation gains are increased. Moreover, we also see that in this case the convergence is fast even with small adaptation gains.

Conclusion

This paper presents the development of the method for adaptive disturbance compensation in linear multivariable systems subjected to unknown multi-harmonic disturbances presented in [7]. The application of a system decoupling strategy based on the Falb–Wolovich approach makes the adaptive law easier to tune due to the independent adjustment of the adaptation gains. By properly selecting these gains, the designer can balance the convergence speed and robustness according to the required performance specifications. In addition, it is possible to get improved control performance in situations where negative inter-channel coupling of an original system has an adverse effect to the overall dynamic of the system. In the future, the authors plan to extend this method to address the problem of output-based disturbance compensation for systems with multiple input delays.

References

1. Wang, Q. (2003) Decoupling control. In: *Lecture notes in control and information sciences*. Springer. doi: 10.1007/3-540-46151-5
2. Liu, L., Tian, S., Xue, D., Zhang, T., Chen, Y. & Zhang, S. (2019) A review of industrial MIMO decoupling control. *International Journal of Control, Automation and Systems*. 17(5). pp. 1246–1254. doi: 10.1007/s12555-018-0367-4
3. Morgan, B. (1964) The synthesis of linear multivariable systems by state-variable feedback. *IEEE Electronic Library (IEL) Journals*. 9(4). pp. 405–411. doi: 10.1109/tac.1964.1105733
4. Gilbert, E.G. (1969) The decoupling of multivariable systems by state feedback. *SIAM Journal on Control*. 7(1). pp. 50–63. doi: 10.1137/0307004
5. Falb, P. & Wolovich, W. (1967) Decoupling in the design and synthesis of multivariable control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 12(6). pp. 651–659. doi: 10.1109/TAC.1967.1098737

6. Angelico, B., Dos Santos Barbosa, F. & Toriumi, F. (2016) State feedback decoupling control of a control moment gyroscope. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*. 28. pp. 26–35. doi: 10.1007/s40313-016-0277-8
7. Nikiforov, V. & Gerasimov, D. (2022) *Adaptive regulation: reference tracking and disturbance rejection*. Springer Nature. doi: 10.1007/978-3-030-96091-9
8. Pyrkin, A. & Isidori, A. (2019) Adaptive output regulation of right-invertible MIMO LTI systems, with application to vessel motion control. *European Journal of Control*. 46. pp. 63–79. doi: 10.1016/j.ejcon.2018.04.001
9. Nikiforov, V., Paramonov, A. & Gerasimov, D. (2020) Adaptive control algorithms in MIMO linear systems with control delay. *Automation and Remote Control*. 81. pp. 1091–1106. doi: 10.1134/S0005117920060107
10. Obregón-Pulido, G., Castillo-Toledo, B. & Loukianov, A.G. (2011) A structurally stable globally adaptive internal model regulator for MIMO linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 56(1). pp. 160–165. doi: 10.1109/TAC.2010.2090409
11. Borisov, O., Isidori, A. & Pyrkin, A. (2023) Adaptive output regulation of MIMO LTI systems with unmodeled input dynamics. *62nd IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. pp. 1537–1542. doi: 10.1109/CDC49753.2023.10383343
12. Marino, R. & Tomei, P. (2003) Output regulation for linear systems via adaptive internal model. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 48(12). pp. 2199–2202. doi: 10.1109/TAC.2003.820143
13. Bobtsov, A.A. (2008) Output control algorithm with the compensation of biased harmonic disturbances. *Automation and Remote Control*. 69(8). pp. 1289–1296. doi: 10.1134/S000511790808002X
14. Bobtsov, A.A. & Pyrkin, A.A. (2009) Compensation of unknown sinusoidal disturbances in linear plants of arbitrary relative degree. *Automation and Remote Control*. 70(3). pp. 449–456. doi: 10.1134/S0005117909030102
15. Yilmaz, C.T. & Basturk, H.I. (2019) Output feedback control for unknown LTI systems driven by unknown periodic disturbances. *Automatica*. 99. pp. 112–119. doi: 10.1016/j.automatica.2018.10.020
16. Marino, R. & Santosuoso, G.L. (2007) Regulation of linear systems with unknown exosystems of uncertain order. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 52(2). pp. 352–359. doi: 10.1109/TAC.2006.890376
17. Nikiforov, V.O., Gerasimov, D.N. & Dudarenko, N.A. (2025) Output adaptive compensation of external disturbances in MIMO systems. *Automation and Remote Control*. 86(4). pp. 291–305. doi: 10.31857/S0005117925040013
18. Luenberger, D. (1971) An introduction to observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 16(6). pp. 596–602. doi: 10.1109/TAC.1971.1099826
19. Nikiforov, V.O. (1996) Adaptive servocompensation of input disturbances. *IFAC Proceedings Volumes*. 29(1). pp. 5114–5119. doi: 10.1016/S1474-6670(17)58492-X
20. Nikiforov, V.O. (1998) Adaptive non-linear tracking with complete compensation of unknown disturbances. *European Journal of Control*. 4(2). pp. 132–139. doi: 10.1016/S0947-3580(98)70107-4
21. Chen, C.-T. (1999) *Linear system theory and design*. New York: Oxford University Press.
22. Nikiforov, V.O., Paramonov, A.V. & Gerasimov, D.N. (2023) Adaptive compensation of unmatched disturbances in unstable MIMO LTI plants with distinct input delays. *IFAC-PapersOnLine*. 56(2). pp. 9179–9184. doi: 10.1016/j.ifacol.2023.10.159
23. Marino, R. & Tomei, P. (2013) Disturbance cancellation for linear systems by adaptive internal models. *Automatica*. 49(5). pp. 1494–1500. doi: 10.1016/j.automatica.2013.02.011
24. Isidori, A. (2017) *Lectures in Feedback Design for Multivariable Systems*. Springer. doi: 10.1007/978-3-319-42031-8
25. Narendra, K. & Annaswamy, A. (1989) *Stable Adaptive System*. New Jersey: Prentice Hall.
26. Gerasimov, D.N. & Nikiforov, V.O. (2020) On key properties of the Lion's and Kreisselmeier's adaptation algorithms. *IFAC-PapersOnLine*. 53(2). pp. 3773–3778. doi: 10.1016/j.ifacol.2020.12.2066

Information about the authors:

Tu Cong Vinh (Post-graduate Student, Faculty of Control Systems and Robotics, National Research University ITMO, Saint Petersburg, Russian Federation). E-mail: congvinhvkd@gmail.com

Dudarenko Natalia A. (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Faculty of Control Systems and Robotics, National Research University ITMO, Saint Petersburg, Russian Federation). E-mail: dudarenko@itmo.ru

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Информация об авторах:

Ты Конг Винь – аспирант факультета систем управления и робототехники Национального исследовательского университета ИТМО (Санкт-Петербург, Россия). E-mail: congvinhvkd@gmail.com

Дударенко Наталия Александровна – доцент, кандидат технических наук, доцент факультета систем управления и робототехники Национального исследовательского университета ИТМО (Санкт-Петербург, Россия). E-mail: dudarenko@itmo.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Received 10.07.2025; accepted for publication 05.03.2026

Поступила в редакцию 10.07.2025; принята к публикации 05.03.2026

Научная статья

УДК 621.313.2+004.032.26

doi: 10.17223/19988605/74/4

Модификация синтеза нейросетевого регулятора двигателя постоянного тока**Игорь Альбертович Шмидт¹, Илья Алексеевич Попов², Дмитрий Романович Жуков³***^{1, 2, 3} Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия**¹ shmidt@pstu.ru**² ilya.popov2801@mail.ru**³ dimonzhukov1503@gmail.com*

Аннотация. Предложен и исследован подход к синтезу нейросетевого регулятора с использованием модификации функции потерь. В качестве объекта управления рассмотрен двигатель постоянного тока, его модель дополнена зависимостью сопротивления обмотки якоря от температурного коэффициента. Предложена также модификация архитектуры путем использования слоев Batch-Normalization в скрытых слоях, метода оптимизации Nadam и пакетного градиентного спуска. Сформированы и обоснованы основные правила задания критериев в выходных нейронах искусственной нейронной сети. Предложен новый способ задания управляющего воздействия для исключения появления ложного влияния не используемых выходов на процесс обучения искусственной нейронной сети. Моделирование на модифицированной модели двигателя постоянного тока продемонстрировало высокое качество управления: точное поддержание заданной скорости, соблюдение ограничений по току и отсутствие колебаний тока якоря при исследованных режимах.

Ключевые слова: искусственная нейронная сеть; нейрорегулятор; обучение нейронной сети; функция потерь; двигатель постоянного тока; критерий управления.

Для цитирования: Шмидт И.А., Попов И.А., Жуков Д.Р. Модификация синтеза нейросетевого регулятора двигателя постоянного тока // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2026. № 74. С. 40–50. doi: 10.17223/19988605/74/4

Original article

doi: 10.17223/19988605/74/4

Neural network controller synthesis modification for a direct current motor**Igor A. Shmidt¹, Ilya A. Popov², Dmitriy R. Zhukov³***^{1, 2, 3} Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation**¹ shmidt@pstu.ru**² ilya.popov2801@mail.ru**³ dimonzhukov1503@gmail.com*

Abstract. This paper proposes and investigates a modified approach to synthesizing a neural-network controller based on the loss-function substitution method. A DC motor is considered as the control object. The model is extended to include a temperature-dependent armature winding resistance. The architecture is improved by using Batch Normalization layers in the hidden layers and the Nadam optimizer together with batch gradient descent. Principles for assigning performance criteria to the network's output neurons are formulated and justified. A novel method for determining control actions is proposed to eliminate the spurious influence of inactive outputs on the training process. Simulation of the upgraded DC-motor model demonstrates high control performance: accurate maintenance of the target speed, adherence to current limits, and absence of armature current oscillations under the examined operating modes.

Keywords: artificial neural network; neuroregulator; neural network training; loss function; DC motor; control criterion.

For citation: Shmidt, I.A., Popov, I.A., Zhukov, D.R. (2026) Neural network controller synthesis modification for a direct current motor. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 74. pp. 40–50. doi: 10.17223/19988605/74/4

Введение

Искусственные нейронные сети (ИНС) и методы их обучения активно развиваются и применяются в современных технологических системах для повышения эффективности управления. Их использование особенно актуально в случаях, когда классические методы регулирования не обеспечивают необходимого уровня качества. В зависимости от специфики объекта управления (ОУ) и задач управления существует множество различных методов синтеза регуляторов на основе ИНС, базирующихся на различных методах и правилах глубокого машинного обучения.

На данный момент существует ряд обзоров, рассматривающих существующие методы глубокого обучения в управлении сложными объектами, представляющими собой физические, механические и химические системы [1, 2]. Использование ИНС применительно к производственным процессам рассматривается в работах [3, 4] и для непосредственного управления процессами, и для создания моделей объектов управления. Кроме того, существует множество исследований, посвященных синтезу регуляторов для различных типов приводов, охватывающих как системы автоматического управления (САУ) [5, 6], включая тестирование алгоритмов на реальных объектах [7–9], так и анализ существующих подходов в рамках обзорных работ [10].

Методология обучения и применения ИНС в САУ варьирует от «подражания» ПИД-регулятору или подбора его коэффициентов с помощью ИНС [6, 11] до инверсного управления с обучением «без учителя» на модели ОУ [12]. Во всех рассмотренных работах применяется стандартный подход к вычислению функции потерь ИНС, основанный на сравнении выходных значений нейронов последнего слоя с заданным целевым значением.

Ранее в работе [12] был предложен оригинальный подход к синтезу регулятора на основе ИНС, т.е. нейрорегулятора, предполагающий обучение ИНС на модели объекта управления с подменой метода вычисления функции потерь. Этот подход заключается в замене традиционного расчета ошибки на расчет специализированных критериев, отражающих целевые показатели качества управления (время нарастания функции, перерегулирование, статическая ошибка, соблюдение ограничений, нелинейностей и особенностей ОУ), которые будут вносить величины ошибки в функцию потерь по выходным нейронам ИНС и, таким образом, влиять на процесс ее обучения.

Однако необходимо учитывать, что внесение множества одновременно учитываемых критериев эффективности в случае, когда достижение одного критерия приводит к ухудшению другого, может свести задачу обучения нейронной сети к сложной многокритериальной задаче, обладающей труднодостижимыми Парето-оптимумами. В разделе 2.4. работы [13] такой случай описан на примере применения эволюционных алгоритмов в многокритериальных задачах, а именно задачи одновременной минимизации времени нарастания и перерегулирования переходной характеристики САУ.

В настоящей работе предлагается развитие подхода из работы [12], поскольку последующие исследования показали, что предложенный в ней нейрорегулятор имеет ряд недостатков и требует доработки для его практического применения.

1. Постановка задачи

Для устранения описанных выше недостатков в настоящей работе были поставлены следующие задачи: определение конфигурации и подходов к обучению ИНС, обеспечивающих устойчивый синтез нейрорегулятора для модели двигателя постоянного тока (ДПТ); интеграция дополнительного возмущающего воздействия на ОУ; отслеживание колебательных процессов тока якоря для оценки различных конфигураций ИНС при синтезе нейрорегулятора; выбор оптимальной реализации с соблюдением следующих требований к управлению:

- 1) минимизация отклонения угловой скорости вращения вала от заданного значения;
- 2) снижение колебательности тока якоря;
- 3) ограничение длительного превышения тока якоря выше трех номинальных значений.

Процесс обучения и тестирования нейрорегулятора осуществлялся на модифицированной модели ДПТ, используемой в работе [12]. Математическая модель ДПТ независимого возбуждения,

работающего при постоянном магнитном потоке, представлена системой дифференциальных уравнений электрической цепи и вращающейся части двигателя

$$\begin{cases} u_{\text{я}} = R_{\text{я}}(1 + k_t)i_{\text{я}} + L_{\text{я}} \frac{di_{\text{я}}}{dt} + e, \\ M - M_c = J \frac{d\omega}{dt}, \end{cases} \quad (1)$$

где $u_{\text{я}}$ – напряжение на якорной обмотке двигателя, $R_{\text{я}}$ – активное сопротивление якорной цепи, k_t – температурный коэффициент, $i_{\text{я}}$ – ток якоря, $L_{\text{я}}$ – индуктивность якорной цепи, e – электродвижущая сила (ЭДС) якоря, M – электромагнитный момент двигателя, M_c – момент сопротивления движению, J – суммарный момент инерции якоря и нагрузки, ω – скорость вращения вала двигателя. Момент сопротивления движению M_c является возмущающим воздействием, которое подается на вход ОУ.

Для проверки возможности нейрорегулятора учитывать множество возмущающих воздействий в уравнение якорной цепи в системе ДУ (1) был добавлен коэффициент k_t , учитывающий изменение сопротивления якоря в зависимости от температуры:

$$k_t = \alpha(T_2 - T_1) + \Delta k_t, \quad (2)$$

где α – температурный коэффициент сопротивления, T_1 – начальная температура якорной цепи, T_2 – температура якорной цепи после нагрева. Коэффициент k_t также подается на вход ОУ. В (2) коэффициент k_t зависит от неконтролируемого возмущения Δk_t .

В демонстрационных целях для увеличения значимости возмущающего воздействия k_t задается таким образом, что диапазон изменения сопротивления значительно превышает диапазон, характерный для реальных двигателей.

Дифференциальные уравнения (1) дополняются алгебраическими уравнениями (3), описывающими зависимости для электродвижущей силы и вращающего момента двигателя:

$$\begin{cases} e = k_e \Phi \omega = C_e \omega, \\ M = k_m \Phi i_{\text{я}} = C_m i_{\text{я}}, \end{cases} \quad (3)$$

где Φ – поток, создаваемый обмоткой возбуждения, k_e – коэффициент связи между скоростью и ЭДС, k_m – коэффициент связи между током якоря и электромагнитным моментом, C_e , C_m – переменные, описывающие связь между скоростью вращения и ЭДС и между током якоря и электромагнитным моментом.

2. Оптимизация процесса обучения и архитектуры ИНС

В подходе из работы [12] при обучении ИНС используется обучающая выборка $V = \{P_i, P'_i\}$, содержащая векторы текущего состояния ОУ P_i , подаваемые на вход ИНС, и векторы критериев управления P'_i , необходимые для расчета функции потерь при помощи критериев управления, которые будут рассмотрены в разд. 3. Каждая эпоха обучения состоит из n тактов управления, на каждом из которых вырабатывается управляющее воздействие на модель ОУ, после чего формируются векторы P_i и P'_i .

Для решения задачи поддержания заданной скорости в векторе P_i необходимо учитывать следующие параметры ДПТ на i -м такте процесса управления: задание угловой скорости $\omega_{\text{зад},i}$; угловую скорость ω_i ; ток якоря $i_{\text{я},i}$; нагрузку, выраженную статическим моментом сопротивления на валу $M_{c,i}$; температурный коэффициент $k_{t,i}$, отражающий изменение характеристик двигателя при нагреве. Кроме того, чтобы нейронный регулятор корректно воспринимал динамику системы, в его входной вектор включаются значения угловой скорости и тока якоря предыдущих двух тактов работы ДПТ. Таким образом, входной вектор состоит из 9 значений: $P_i = [\omega_{\text{зад},i}; \omega_i; i_{\text{я},i}; M_{c,i}; k_{t,i}; \omega_{i-1}; \omega_{i-2}; i_{\text{я},i-1}; i_{\text{я},i-2}]$. Выход ИНС отражает напряжение, подаваемое на якорную обмотку двигателя, т.е. ИНС вырабатывает управляющее воздействие u_i для ОУ.

Часть обучающей выборки формировалась вручную и содержит 3 изменяющихся во времени параметра: $\omega_{\text{зад}}$; M_c ; k_t , нормализованных относительно номинальных значений. Прочие данные о состоянии ОУ определяются в процессе управления моделью при обучении ИНС. Обучающая выборка была

сформирована таким образом, чтобы равнозначно отразить все желаемые режимы работы ДПТ и все возможные при этом переходы из одного режима в другой минимально повторяющееся количество раз. Для проверки результатов обучения по аналогичным правилам была сформирована тестовая выборка, отражающая другие вариации этих режимов и переходов между ними.

Поскольку входные параметры нормализуются и могут принимать отрицательные значения, в качестве функции активации для скрытых слоев используется гиперболический тангенс (\tanh). Для выходного слоя применяется линейная функция активации, что является стандартным подходом для задач регрессии.

Подбор гиперпараметров осуществлялся экспериментальным путем, так как такой подход является довольно распространенным при отсутствии возможности использования уже известной архитектуры или готовой модели для достижения конкретной цели [14]. Итоговая конфигурация приведена в разд. 4.

2.1. Внедрение слоев *Batch-Normalization*

Помимо номинальных режимов работы, ДПТ может работать в условиях повышенной нагрузки, при которых нормированные относительно номинальных значений параметры, включая ток якоря и механический момент, принимают значения больше единицы. При использовании в скрытых слоях активационной функции \tanh (гиперболический тангенс), выходные значения которой лежат в диапазоне от -1 до $+1$, часть активаций попадает в область насыщения. Это приводит к затуханию градиентов и, следовательно, к замедлению или полному прекращению процесса обучения.

Данная проблема была решена при помощи добавления слоев *Batch-Normalization* (BN) [15]. Суть метода заключается в преобразовании входных данных слоя для приведения их к нулевому среднему значению и единичному стандартному отклонению. Такой подход снижает зависимость сети от масштаба исходных данных и повышает устойчивость обучения нейронной модели.

В работе [16] описывается, что BN-слои сглаживают ландшафт оптимизации, это, в свою очередь, делает градиенты более предсказуемыми, что ускоряет сходимость и помогает избежать локальных минимумов при поиске глобального.

Для функций активации типа \tanh , в которых присутствует ограничение, наиболее эффективным способом является применение BN после функции активации, поскольку оно дает более устойчивое и симметричное распределение, уменьшает насыщение и облегчает обучение [17].

2.2. Повышение стабильности обучения ИНС

Обучение нейрорегулятора базируется на классическом алгоритме обратного распространения ошибки с использованием градиентного спуска. Тем не менее уже на первоначальных экспериментах стало ясно, что выбор алгоритма оптимизации напрямую влияет на устойчивость и скорость сходимости модели, в том числе на появление явления «взрывных» градиентов, которое описанное в работе [18]. Данное явление проявляется в виде экстремального роста значений градиентов при обратном распространении ошибки, что приводит к нестабильности процесса обучения: значение ошибки не уменьшается с прохождением эпох, а изменяется от крайне больших до крайне малых значений. При этом наилучшая полученная в процессе обучения конфигурация, как правило, находилась в зоне появления «взрывных градиентов», т.е. она обнаруживалась случайным образом в результате «взрывного» смещения весов. При подобном процессе обучения невозможно гарантировать нахождение оптимальной конфигурации регулятора. График обучения представлен на рис. 1, а.

Одной из причин возникновения «взрывных» градиентов является специфика обновления весов при использовании стохастического градиентного спуска (СГС) и мини-пакетного градиентного спуска (МПС). Поскольку обучающая выборка содержит режимы, существенно различающиеся между собой, их применение приводит к тому, что обновление весов осуществляется на основе ограниченной подвыборки, не отражающей всей совокупности режимов, из-за чего величины смещений весов изменяются нестабильно.

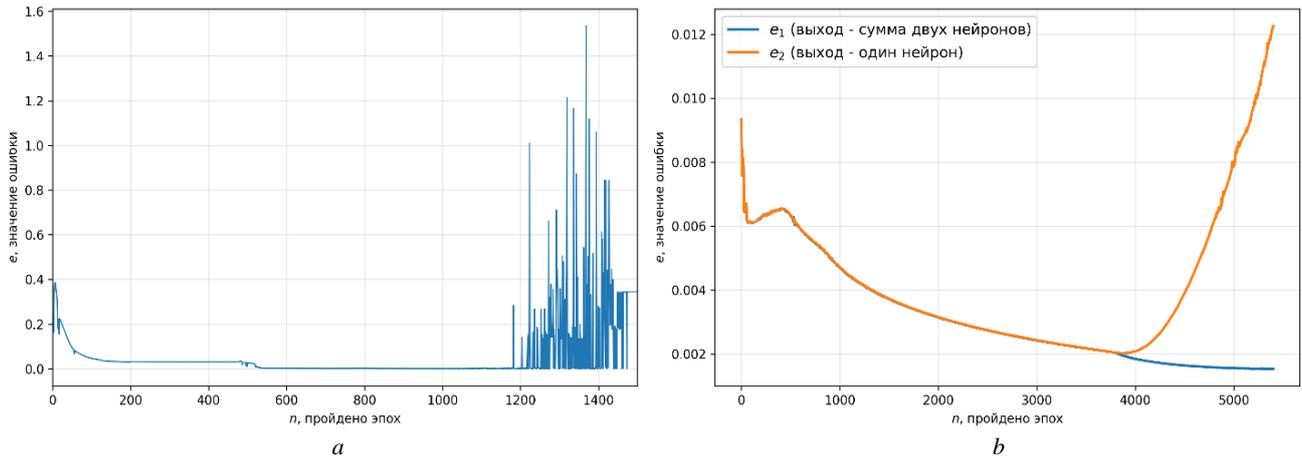


Рис. 1. Графики процессов обучения ИНС: *a* – метод Нестерова с МПГС; *b* – метод Nadam с ПГС и слоями BN
 Fig. 1 The ANN training processes plots: *a*) Nesterov with Mini-batch SGD; *b*) Nadam with SGD and BN layers

Для обеспечения стабильности процесса обучения в данной работе применялся пакетный градиентный спуск (ПГС), при котором обновление весов выполнялось после обработки всей обучающей выборки. Вместо классического алгоритма Нестерова, используемого в работе [12], в качестве алгоритма оптимизации в данной работе предлагается использовать ускоренный по Нестерову метод адаптивной оценки моментов Nadam, впервые описанный в [19] и доказавший свою эффективность при обучении моделей на временных рядах [20]. Такой подход позволил повысить устойчивость обучения и сгладить колебания градиентов. График обучения с устраненной проблемой взрывных градиентов представлен на рис. 1, *b* и обозначен как e_1 . Подробное описание графика e_2 на рис. 1, *b* представлено в разд. 3.1.

3. Принцип учета критериев управления в функции потерь ИНС

В данной работе используется два основных критерия управления для синтеза нейрорегулятора угловой скорости двигателя, разработанных в работе [12]: минимизация отклонения угловой скорости вращения от заданной; ограничение превышения тока якоря над заданным значением. Каждый критерий выражен значением ошибки, рассчитываемой на каждом такте управления.

Рассмотрим расчет критериев на i -м такте управления (среднеквадратичной ошибки): минимума отклонения угловой скорости вращения

$$e_{\omega,i} = (\omega_i - \omega_{3,i})^2, \quad (4)$$

где ω_i – реальная угловая скорость на i -м шаге, $\omega_{3,i}$ – задание по угловой скорости на i -м шаге, и минимизации превышения тока над заданным значением

$$e_{c,i} = \left(f(i_{я,i}) (|i_{я,i}| - i_{огр}) \right)^2, \quad f(i_{я,i}) = \begin{cases} 0 & \text{при } |i_{я,i}| < i_{огр}, \\ 1 & \text{при } |i_{я,i}| \geq i_{огр}, \end{cases} \quad (5)$$

где $i_{я,i}$ – реальное значение тока якоря на i -м шаге, $i_{огр}$ – заданное значение ограничения тока якоря.

Общая ошибка (функция потерь) по выходным нейронам ИНС за эпоху обучения рассчитывается следующим образом:

$$C = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_{j,i} e_{j,i} \right) = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_{\omega,i} e_{\omega,i} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_{c,i} e_{c,i} \right), \quad (6)$$

где p – количество выходных нейронов, m – количество введенных критериев, n – количество тактов управления, $e_{j,i}$ – значение ошибки по j -му критерию управления на i -м такте управления, $k_{j,i}$ – коэффициент значимости j -го критерия на i -м такте управления, $k_{\omega,i}$ – коэффициент значимости критерия минимума отклонения угловой скорости вращения на i -м такте управления, $k_{c,i}$ – коэффициент значимости критерия минимизации превышения тока над заданным значением на i -м такте управления.

Немаловажным аспектом является подбор коэффициентов $k_{j,i}$, поскольку они влияют на значимость j -го критерия на i -ом такте управления при обучении нейрорегулятора. Коэффициент значимости $k_{j,i}$ позволяет варьировать добавляемую величину $e_{j,i}$ на каждом такте в общую ошибку C , тем самым задавая относительный вклад данного критерия и его значимость в процессе обучения.

3.1. Исключение влияния неиспользующихся нейронов при внедрении критериев управления

Ранее в работе [12] был предложен подход, когда под каждый критерий управления в выходном слое ИНС выделялся свой нейрон, при этом в качестве управляющего воздействия u_i использовалось выходное значение только первого нейрона, в котором происходит расчет критерия $e_{\omega,i}$.

Каждый критерий управления фактически является слагаемым в расчете суммарной общей ошибки по выходным нейронам (6), в каком бы выходном нейроне он ни рассчитывался. Однако было обнаружено, что, несмотря на это, имеет существенное значение, рассчитываются ли критерии в нейронах, выходные значения которых используются при управлении. Связано это с тем, что все значения a с выходных нейронов, используются в формуле расчета смещения по каждому весу при обратном распространении ошибки [21]:

$$\frac{\partial C}{\partial w_{jk}^l} = a_k^{l-1} \sigma'(z_j^l) \frac{\partial C}{\partial a_j^l}, \quad (7)$$

где C – значение функции потерь (общая ошибка за всю эпоху обучения), w – значение веса, a – выходное значение нейрона (значение активации), σ – функция активации, z – взвешенная сумма всех входов, l – индекс слоя, j – индекс нейрона в слое l , k – индекс нейрона в слое $l-1$.

То есть выделение выходного нейрона под каждый дополнительный критерий, сигнал с которого не используется в процессе управления, а лишь служит для расчета слагаемого общей ошибки, приводит к лишнему влиянию этих нейронов на веса ИНС при обратном распространении ошибки. Следовательно, в процессе обучения при управлении не задействуются соответствующие значения выходных нейронов, из-за чего изменение весов не приводит к уменьшению ошибки по данным критериям: ошибки по связанным с манипулируемой величиной критериям уменьшаются, тогда как по несвязанным – увеличиваются. При наличии нейронов, выходные значения которых не используются, регулятору не удастся определить влияние соответствующих весов на функцию потерь из-за отсутствия обратной связи между ошибкой по критериям и сигналом с выходного нейрона.

В данной работе предлагается использовать отдельный нейрон под каждый критерий, при этом в качестве значения манипулируемой величины использовать сумму значений выходных нейронов, как показано на рис. 3 в разд. 4.

На рис. 1, б показаны процессы изменения функции потерь при обучении нейрорегулятора с использованием в качестве u_i выходного значения только первого нейрона (e_2) и суммы значений выходных нейронов (e_1). Из рисунка видно, что в момент, когда управляющее воздействие, вырабатываемое нейрорегулятором, приводит к превышению током якоря допустимого значения, происходит рост ошибки по ограничивающему критерию. Ошибка регулятора при старом подходе продолжает расти, в то время как регулятор при новом подходе учитывает критерий (5) и продолжает корректное обучение.

Отсюда следует, что для корректного учета критериев управления, во-первых, нельзя допускать использования выходных нейронов, значения которых не связаны с некоторой манипулируемой величиной, во-вторых, в нейронах, влияющих на эту величину, необходимо учитывать все критерии, напрямую или косвенно зависящие от этой величины.

Таким образом, использование модифицированного подхода позволяет получить нейрорегулятор, корректно учитывающий все критерии управления.

3.2. Необходимость учета качества тока якоря при обучении ИНС

Помимо основных введенных критериев управления (5) и (6), существенное значение имел бы критерий, учитывающий поведение тока во времени, а именно минимизирующий колебательность

тока, так как это является важным условием качественного управления, однако формализация данного критерия представляет значительные трудности. В отличие критерия (6), который можно явно задать через пороговое условие, отсутствие колебаний тока не имеет однозначной количественной метрики. На практике оценка «качества» формы тока часто носит экспертный или визуальный характер: по графику можно легко определить удачную конфигурацию регулятора, при которой ток не содержит существенных колебаний. Однако по функции потерь этого сделать не получится: в процессе обучения ИНС может продолжать снижать ошибку по целевому критерию (5), однако ток якоря становится все более нестабильным – возрастают амплитуда и частота колебаний, т.е. текущая функция потерь не отражает реальных требований к качеству управления.

На текущий момент оценка «качества» формы тока производится визуальным путем по итогам регулирования. В результате экспертной оценки было обнаружено, что оптимизация процесса обучения позволила получить конфигурации, в которых отсутствуют колебания тока.

Таким образом, отсутствие формализованного критерия для подавления колебаний тока остается одним из узких мест разработки нейросетевого регулятора. Несмотря на то, что визуальная оценка позволяет выделить удачные конфигурации на отдельных эпохах обучения, автоматизация этого процесса необходима и требует дальнейших исследований и разработки гибких математических показателей, описывающих стабильность тока.

4. Итоговая архитектура ИНС

Конфигурация нейронной сети представляет собой полносвязный перцептрон, включающий входной слой из 9 параметров, три скрытых слоя и выходной слой с функцией активации Identity (linear) и одним нейроном. Первый и второй скрытые слои содержат по три нейрона с функцией активации tanh, за каждым из них следует слой BN. Третий скрытый слой состоит из одного нейрона с функцией активации tanh. Полученный экспериментальным путем вариант архитектуры (рис. 2, b) показывает наилучшую эффективность.

Инициализация весов осуществляется методом Xavier. Механизм оптимизации основан на алгоритме ПГС с обратным распространением ошибки. В качестве метода обновления весов применяется Nadam при скорости обучения 0,002. Для введенных критериев (5) и (6) оптимальными оказались коэффициенты $k_{j,i}$, равные единице, т.е. они должны равнозначно учитываться в процессе обучения. На рис. 2 представлены итоговая архитектура из работы [12] и полученная в данной работе после модификации.

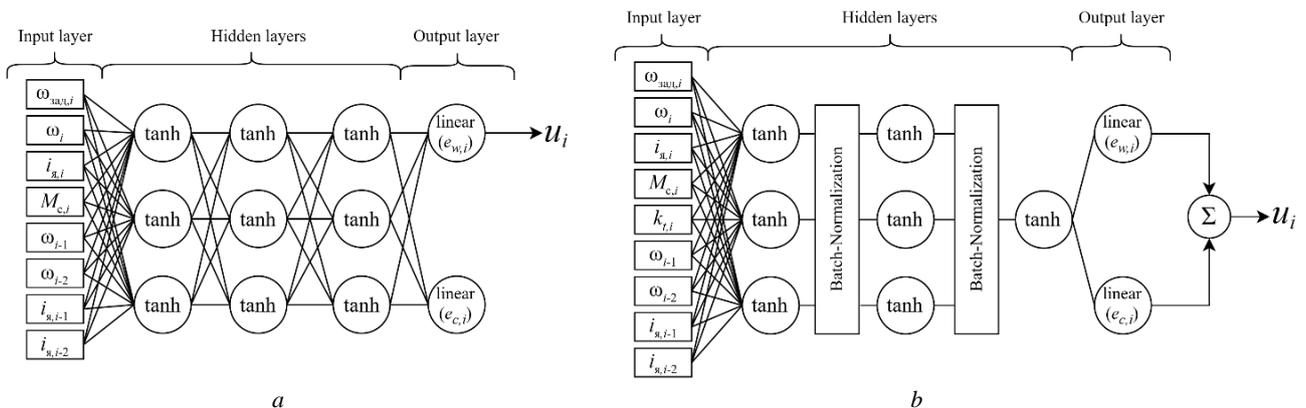


Рис. 2. Сравнение архитектур ИНС: *a* – предыдущая, *b* – текущая
 Fig. 2 Comparison of ANN architectures: *a* – previous, *b* – current

Применение описанных модификаций архитектуры повысило устойчивость и предсказуемость процесса обучения: устранились резкие колебания функции потерь и обеспечилась более плавная сходимость (см. рис. 1, b). При этом требуемое число эпох для достижения устойчивого решения увеличилось

примерно в 3,5 раза. Такое увеличение времени обучения можно считать приемлемым с учетом вышеописанных преимуществ.

Предложенный подход к синтезу нейросетевого регулятора применим не только для двигателя постоянного тока. В качестве ОУ может быть рассмотрена, в принципе, любая динамическая система, единственным ограничением является наличие ее адекватной математической модели.

Синтезированный нейрорегулятор тестировался на выборке, отличной от обучающей, в ходе чего были построены графики изменения параметров системы регулирования во времени, представленные на рис. 3. Первая часть графика демонстрирует регулирование угловой скорости ДПТ ω (1) в зависимости от задания угловой скорости $\omega_{\text{зад}}$. На второй части представлены входные воздействия на ДПТ: момент сопротивления M_c (1) и температурный коэффициент k_t (2). На третьей части представлен ток якоря i_a (1), величина которого ограничена тремя номинальными значениями критерием для регулятора.

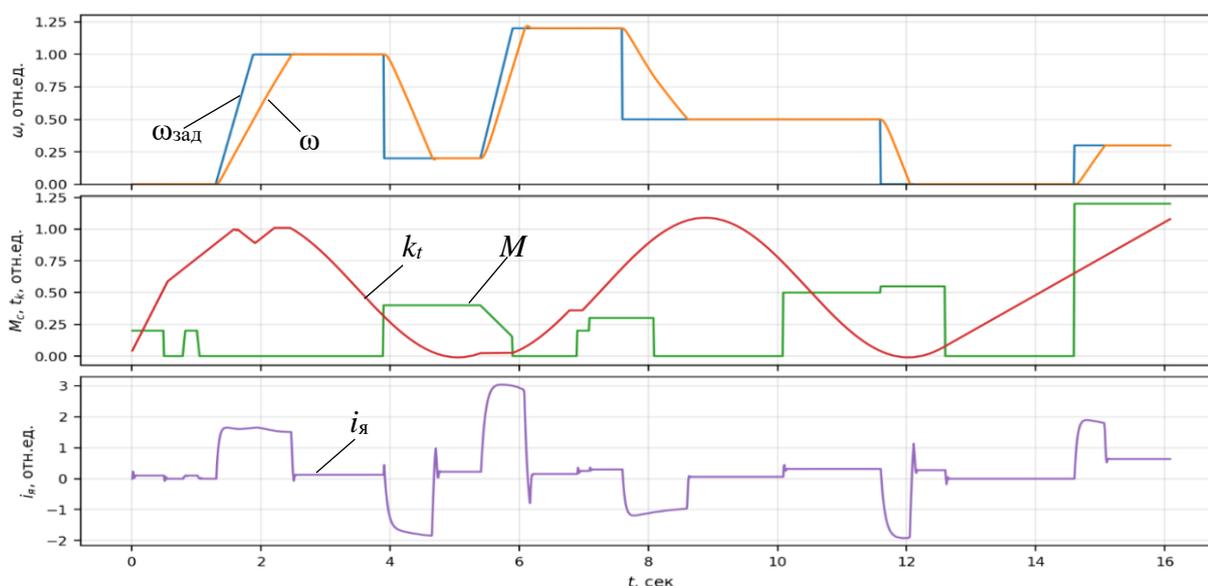


Рис. 3. Графики изменения во времени: угловой скорости (оранжевый) и ее задания (синий); момента сопротивления (зеленый) и температурного коэффициента (красный); тока якоря (фиолетовый) при моделировании системы регулирования с обученным нейрорегулятором

Fig. 3 Simulation of a control system with a trained neural controller: angular velocity (orange) and its setpoint (blue); resistance torque (green) and temperature coefficient (red); armature current (violet)

Результаты моделирования, представленные на рис. 3, подтверждают устойчивость работы разработанного регулятора: изменение нагрузки компенсируется заранее практически без снижения скорости, а при смене уставки наблюдается лишь минимальное перерегулирование, не превышающее 1%. На всех исследованных режимах токовые колебания отсутствуют (оценка колебаний производилась экспертно): возникающие переходные процессы быстро затухают, обеспечивая стабильность и надежность функционирования системы.

Заключение

Предложен усовершенствованный метод синтеза нейросетевого регулятора для ДПТ на основе модификации функции потерь, который заключается в замене традиционного расчета ошибки на расчет специализированных критериев, отражающих целевые показатели качества управления. В работе показано, что применение BN, ПГС и Nadam существенно повышает стабильность процесса обучения.

Моделирование подтвердило высокое качество управления даже при значительных входных воздействиях на ОУ: точность поддержания заданной скорости, быстрое затухание переходных процессов и минимальное перерегулирование.

Сформированы основные правила учета критериев на выходных нейронах ИНС.

Предложенный способ задания управляющего воздействия устраняет ложное влияние «неуправляемых» выходных нейронов на градиенты и позволяет корректно находить локальные минимумы функции потерь.

Список источников

1. Mohammadzaheri M., Chen L., Grainger S. A Critical Review of the Most Popular Types of Neuro Control // *Asian Journal of Control*. 2012. V. 14 (1). P. 1–11. doi: 10.1002/asjc.449
2. Чернодуб А.Н., Дзюба Д.А. Обзор методов нейроуправления // *Проблемы программирования*. 2011. № 2. С. 79–94.
3. Bonassi F., Farina M., Xie J., Scattolini R. On Recurrent Neural Networks for learning-based control: recent results and ideas for future developments // *Journal of Process Control*. 2022. V. 114. P. 92–104. doi: 10.1016/j.jprocont.2022.04.01
4. Chinnam R.B., Kolarik W.J. Neural network-based quality controllers for manufacturing systems // *International Journal of Production Research*. 1997. V. 35 (9). P. 2601–2620. doi: 10.1080/002075497194688
5. Nouri K., Dhaouadi R., Braiek N.B. Nonlinear speed control of a dc motor drive system with online trained recurrent neural network // 9th IEEE International Workshop on Advanced Motion Control, 2006. Istanbul, Turkey. P. 704–708. doi: 10.1109/amc.2006.1631746
6. Вельченко А.А., Павлюковец С.А., Радкевич А.А., Ибрагим А.К. Энергоэффективное нейросетевое управление бесколлекторным двигателем постоянного тока // *Энергетика. Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ*. 2025. Т. 68, № 1. С. 45–57. doi: 10.21122/1029-7448-2025-68-1-45-57
7. Nouri K., Dhaouadi R., Braiek N.B. Adaptive Control of a Nonlinear DC Motor Drive Using Recurrent Neural Networks // *Applied Soft Computing*. 2008. V. 8. P. 371–382.
8. Rubaai A., Young P. Hardware/Software Implementation of Fuzzy-Neural-Network Self-Learning Control Methods for Brushless DC Motor Drives // *IEEE Transactions on Industry Applications*. 2016. V. 52 (1). P. 414–424. doi: 10.1109/tia.2015.2468191
9. Nouri K., Dhaouadi R., Braiek N.B. Adaptive control of a nonlinear dc motor drive using recurrent neural networks // *Applied Soft Computing*. 2008. V. 8, is. 1. P. 371–382. doi: 10.1016/j.asoc.2007.03.002
10. Kaminski M., Tarczewski T. Neural Network Applications in Electrical Drives – Trends in Control, Estimation, Diagnostics, and Construction // *Energies*. 2023. V. 16 (11). Art. 4441. doi: 10.3390/en16114441
11. Lee Y.-S., Jang D.-W. Optimization of Neural Network-Based Self-Tuning PID Controllers for Second Order Mechanical Systems // *Applied Sciences*. 2021. V. 11 (17). Art. 8002. doi: 10.3390/app11178002
12. Шмидт И.А., Даденков Д.А. Использование искусственной нейронной сети в электромеханической системе регулирования скорости двигателя постоянного тока // *Электротехника*. 2024. № 11. С. 26–32.
13. Fleming P.J., Purshouse R.C. Evolutionary algorithms in control systems engineering: a survey // *Control Engineering Practice*. 2002. V. 10 (11). P. 1223–1241. doi: 10.1016/s0967-0661(02)00081-3
14. Обходский А.В., Кульбакин Д.Е., Обходская Е.В., Попов А.С., Родионов Е.О., Сачков В.И., Чернов В.И., Чойнзонов Е.Л. Программный комплекс нейросетевой классификации данных газоаналитического обследования дыхательной системы // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2024. № 69. С. 112–123. doi: 10.17223/19988605/69/12
15. Ioffe S., Szegedy C. Batch Normalization: Accelerating Deep Network Training by Reducing Internal Covariate Shift // *Proc. of the 32nd International Conference on Machine Learning*. 2015. P. 448–456.
16. Santurkar S., Tsipras D., Ilyas A., Madry A. How Does Batch Normalization Help Optimization? // *Advances in Neural Information Processing Systems 31 (NeurIPS 2018)*. Montréal, Canada, 3–8 December 2018. doi: 10.48550/arXiv.1805.11604
17. Kim D., Kim W., Kim S. Tanh Works Better with Asymmetry // *Advances in Neural Information Processing Systems 36 (NeurIPS 2023)*. Main Conference Track.
18. Philipp G., Song D., Carbonell J.G. The exploding gradient problem demystified - definition, prevalence, impact, origin, tradeoffs, and solutions. 2017. doi: 10.48550/arXiv:1712.05577
19. Dozat T. Incorporating Nesterov Momentum into Adam // *Proceedings of the 4th International Conference on Learning Representations, Workshop Track*. San Juan, Puerto Rico, 2–4 May 2016. P. 1–4.
20. Дель И.В., Старченко А.В. Использование методов нейросетевого моделирования для прогнозирования качества атмосферного воздуха // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2023. № 65. С. 15–24. doi: 10.17223/19988605/65/2
21. Goodfellow I., Bengio Y., Courville A. *Deep Learning*. Cambridge, MA: MIT Press, 2016. 800 p.

References

1. Mohammadzaheri, M., Chen, L. & Grainger, S. (2012) A Critical Review of the Most Popular Types of Neuro Control. *Asian Journal of Control*. 14(1). pp. 1–11. doi: 10.1002/asjc.449
2. Chernodub, A.N. & Dzyuba, D.A. (2011) Obzor metodov neyropravleniya [Neurocontrol methods review]. *Problemy programmirovaniya*. 2. pp. 79–94.

3. Bonassi, F., Farina, M., Xie, J. & Scattolini, R. (2022) On Recurrent Neural Networks for learning-based control: recent results and ideas for future developments. *Journal of Process Control*. 114. pp. 92–104. doi: 10.1016/j.jprocont.2022.04.011
4. Chinnam, R.B. & Kolarik, W.J. (1997) Neural network-based quality controllers for manufacturing systems. *International Journal of Production Research*. 35(9). pp. 2601–2620. doi: 10.1080/002075497194688
5. Nouri, K., Dhaouadi, R. & Braiek, N.B. (2006) Nonlinear speed control of a dc motor drive system with online trained recurrent neural network. *9th IEEE International Workshop on Advanced Motion Control*. Istanbul, Turkey. pp. 704–708. doi: 10.1109/amc.2006.1631746
6. Velchenko, A.A., Pavlyukovets, S.A., Radkevich, A.A. & Ibrahim, A.K. (2025) Energoeffektivnoe neyrosetevoe upravlenie beskollektornym dvigatelem postoyannogo toka [Energy-Efficient Neural Network Control of a Brushless DC Motor]. *Energetika. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy i energeticheskikh ob"edineniy SNG*. 68(1). pp. 45–57. doi: 10.21122/1029-7448-2025-68-1-45-57
7. Nouri, K., Dhaouadi, R. & Braiek, N.B. (2008) Adaptive Control of a Nonlinear DC Motor Drive Using Recurrent Neural Networks. *Applied Soft Computing*. 8. pp. 371–382.
8. Rubaai, A. & Young, P. (2016) Hardware/Software Implementation of Fuzzy-Neural-Network Self-Learning Control Methods for Brushless DC Motor Drives. *IEEE Transactions on Industry Applications*. 52(1). pp. 414–424. doi: 10.1109/tia.2015.2468191
9. Nouri, K., Dhaouadi, R. & Braiek, N.B. (2008) Adaptive control of a nonlinear dc motor drive using recurrent neural networks. *Applied Soft Computing*. 8(1). pp. 371–382. doi: 10.1016/j.asoc.2007.03.002
10. Kaminski, M. & Tarczewski, T. (2023) Neural Network Applications in Electrical Drives—Trends in Control. *Estimation, Diagnostics, and Construction. Energies*. 16(11). Art. 4441. doi: 10.3390/en16114441
11. Lee, Y.-S. & Jang, D.-W. (2021) Optimization of Neural Network-Based Self-Tuning PID Controllers for Second Order Mechanical Systems. *Applied Sciences*. 11(17). Art. 8002. doi: 10.3390/app11178002
12. Schmidt, I.A. & Dadenkov, D.A. (2024) Ispol'zovanie iskusstvennoy neyronnoy seti v elektromekhanicheskoy sisteme regulirovaniya skorosti dvigatelya postoyannogo toka [Use of an Artificial Neural Network in an Electromechanical Speed Control System of a DC Motor]. *Elektrotehnika*. 11. pp. 26–32.
13. Fleming, P.J. & Purshouse, R.C. (2002) Evolutionary algorithms in control systems engineering: a survey. *Control Engineering Practice*. 10(11). pp. 1223–1241. doi: 10.1016/s0967-0661(02)00081-3
14. Obkhodskiy, A.V., Kulbakin, D.E., Obkhodskaya, E.V., Popov, A.S., Rodionov, E.O., Sachkov, V.I., Chernov, V.I. & Choyznov, E.L. (2024) Neural network classification software for the gas analytical survey data of respiratory system. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 69. pp. 112–123. doi: 10.17223/19988605/69/12
15. Ioffe, S. & Szegedy, C. (2015) Batch Normalization: Accelerating Deep Network Training by Reducing Internal Covariate Shift. *Proceedings of the 32nd International Conference on Machine Learning*. pp. 448–456.
16. Santurkar, S., Tsipras, D., Ilyas, A. & Madry, A. (2018) How Does Batch Normalization Help Optimization? *Advances in Neural Information Processing Systems 31 (NeurIPS 2018)*. Montréal, Canada, December 3–8, 2018.
17. Kim, D., Kim, W. & Kim, S. (2023) Tanh Works Better with Asymmetry. *Advances in Neural Information Processing Systems 36 (NeurIPS 2023)*. Main Conference Track.
18. Philipp, G., Song, D. & Carbonell, J.G. (2017) The exploding gradient problem demystified - definition, prevalence, impact, origin, tradeoffs, and solutions. *arXiv preprint*. arXiv:1712.05577.
19. Dozat, T. (2016) Incorporating Nesterov Momentum into Adam. *Proc. of the 4th International Conference on Learning Representations, Workshop Track*. San Juan, Puerto Rico, May 2-4, 2016. pp. 1–4.
20. Del, I.V. & Starchenko, A.V. (2023) Using neural network modeling for air quality prediction. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 65. pp. 15–24. doi: 10.17223/19988605/65/2
21. Goodfellow, I., Bengio, Y. & Courville, A. (2016) *Deep Learning*. Cambridge, MA: MIT Press.

Информация об авторах:

Шмидт Игорь Альбертович – кандидат технических наук, доцент кафедры микропроцессорных средств автоматизации Пермского национального исследовательского политехнического университета (Пермь, Россия). E-mail: shmidt@pstu.ru

Попов Илья Алексеевич – магистрант кафедры микропроцессорных средств автоматизации Пермского национального исследовательского политехнического университета (Пермь, Россия). E-mail: ilya.popov2801@mail.ru

Жуков Дмитрий Романович – магистрант кафедры микропроцессорных средств автоматизации Пермского национального исследовательского политехнического университета (Пермь, Россия). E-mail: dimonzhukov1503@gmail.com

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Schmidt Igor A. (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Microprocessor Automation Tools, Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation). E-mail: shmidt@pstu.ru

Popov Ilya Alekseevich (Master's Student, Department of Microprocessor Automation Tools, Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation). E-mail: ilya.popov2801@mail.ru

Zhukov Dmitry R. (Master's Student, Department of Microprocessor Automation Tools, Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation). E-mail: dimonzhukov1503@gmail.com

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 06.11.2025; принята к публикации 05.03.2026

Received 06.11.2025; accepted for publication 05.03.2026

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MATHEMATICAL MODELING

Научная статья

УДК 004.7

doi: 10.17223/19988605/74/5

Комбинаторно-вероятностная модель надежности многоуровневых кластерных систем с учетом зависимого восстановления узлов разных уровней**Владимир Анатольевич Богатырев¹, Станислав Владимирович Богатырев²**^{1,2} *Национальный исследовательский университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия*¹ *vladimir.bogatyrev@gmail.com*² *realloc@gmail.com*

Аннотация. Предложена оценка надежности восстанавливаемых многоуровневых систем с обеднением на каждом уровне в кластеры идентичных по надежности узлов, рассматриваемых в работоспособном или отказавшем состоянии, при ограниченном числе операторов, что обуславливает возможное образование очереди на восстановление узлов. Новизна предлагаемого подхода к оценке коэффициента готовности многоуровневой системы заключается в том, что на основе известной из теории массового обслуживания модели с конечным числом источников нагрузки и одним обслуживающим прибором находятся вероятности различного числа отказавших узлов без привязки их расположения по уровням, а затем на основе комбинаторики находится условная вероятность того, что при этом число исправных элементов на каждом уровне соответствует условию работоспособности системы. Предлагаемый подход позволяет избежать завышенной оценки надежности системы, получаемой в предположении восстановления с назначением для каждого уровня отдельного оператора.

Ключевые слова: многоуровневый кластер; коэффициент готовности; восстанавливаемая система; ограниченное восстановление; модель надежности.

Для цитирования: Богатырев В.А., Богатырев С.В. Комбинаторно-вероятностная модель надежности многоуровневых кластерных систем с учетом зависимого восстановления узлов разных уровней // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2026. № 74. С. 51–61. doi: 10.17223/19988605/74/5

Original article

doi: 10.17223/19988605/74/5

Combinatorial-probabilistic model of reliability of multi-level cluster systems taking into account dependent recovery of nodes at different levels**Vladimir A. Bogatyrev¹, Stanislav V. Bogatyrev²**^{1,2} *National Research University ITMO, Saint Petersburg, Russian Federation*¹ *vladimir.bogatyrev@gmail.com*² *realloc@gmail.com*

Abstract. An assessment of the reliability of recoverable multilevel systems with depletion at each level into clusters of nodes of identical reliability, considered in an operational or failed state, with a limited number of operators, which causes the possible formation of a queue for node restoration. The novelty of the proposed approach to estimating the availability coefficient of a multilevel system lies in the fact that, based on a model known from queuing theory

with a finite number of load sources and one servicing device, the probabilities of a different number of failed nodes are found without linking their location by levels, and then, based on combinatorics, a conditional probability is found that the number of serviceable elements at each level, it corresponds to the condition of the system's operability. The proposed approach avoids overestimating the reliability of the system, which is obtained under the assumption of recovery with the assignment of a separate operator for each level.

Keywords: multi-level cluster; availability coefficient; recoverable system; limited recovery; reliability model.

For citation: Bogatyrev, V.A., Bogatyrev, S.V. (2026) Combinatorial-probabilistic model of reliability of multi-level cluster systems taking into account dependent recovery of nodes at different levels. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 74. pp. 51–61. doi: 10.17223/19988605/74/5

Введение

В современных распределенных инфокоммуникационных системах остро стоит задача обеспечения высокой надежности и отказоустойчивости. Обоснование мер по достижению необходимой надежности требует ее оценку с учетом вариантности дисциплин восстановления, которая может быть сопряжена с определенными трудностями из-за сложности объекта. Для восстанавливаемых инфокоммуникационных систем оценка надежности прежде всего важна по коэффициенту готовности и, возможно, по коэффициенту оперативной готовности при выполнении задач ответственного назначения [1–3]. Распределенные компьютерные системы, реализующие передачу, хранение и обработку данных, как правило, являются многоуровневыми с резервированием всех ресурсов для исключения единой точки отказа и достижения высокой надежности и отказоустойчивости [4–7]. В распределенных системах консолидация ресурсов на каждом уровне обработки и хранения данных осуществляется при объединении резервированных узлов в кластеры [8–12], доступ к которым осуществляется через многопутевую сеть [13–15]. В многопутевых сетях возможно адаптивное распределение трафика к адресуемым узлам, в том числе при репликации и сегментации пакетов с их передачей по разным пересекающимся или непересекающимся маршрутам, возможно, характеризующимся разной надежностью и временем доставки [16, 17].

Для систем с неограниченным восстановлением, в которых очереди на восстановление отказавших элементов не образуются, коэффициент готовности может быть оценен через коэффициенты готовности элементов. Однако следует отметить, что точность такого расчета обеспечивается, только если на обслуживание (восстановление после отказа) каждого элемента выделяется отдельный оператор, что в реальных системах труднореализуемо, в том числе из экономических соображений. При ограничении числа операторов использование моделей неограниченного восстановления приводит к завышенной оценке надежности, что в принципе недопустимо. Для структурно сложных систем (не сводящихся к параллельно-последовательной схеме соединения элементов) при неограниченном восстановлении расчет может быть основан на граничных оценках по методам Эзари–Прошана или Литвака–Ушакова [18, 19]. При расчете по минимальным путям метод Эзари–Прошана дает верхнюю оценку надежности, а метод Литвака–Ушакова нижнюю, но при этом модель неограниченного восстановления, по сути, всегда дает верхнее приближение, – в результате этого противоречия нижнюю оценку (которая с точки зрения надежности более интересна) в принципе получить не удастся. Тот же эффект невозможности нижнего приближения имеет место при расчете на основе минимальных сечений, так как в этом случае метод Эзари–Прошана дает нижнее приближение, что противоречит верхней оценке при использовании модели неограниченного восстановления. При этом метод Литвака–Ушакова по минимальным сечениям дает верхнюю оценку, которая дополнительно усиливает погрешность за счет предположения неограниченного восстановления элементов.

Для восстанавливаемых резервированных структурно-сложных компьютерных систем из узлов с множеством работоспособных состояний метод минимальных путей и сечений при допущении независимого восстановления узлов приводит к дополнительному увеличению погрешности расчета коэффициента готовности.

Для снижения погрешности расчета надежности восстанавливаемых систем, если число операторов меньше числа узлов, требуется учет зависимости восстановления узлов из-за возможного формирования очереди на их восстановление, который возможен при построении марковских моделей [18–21]. Для параллельного объединения в одноуровневый кластер узлов, рассматриваемых в двух состояниях – работоспособном либо отказавшем, при наличии одного оператора, обслуживающего кластер, расчет вероятностей всех состояний системы возможен на основе процесса размножения и гибели при использовании известной из теории массового обслуживания модели с конечным числом источников нагрузки и одним обслуживающим прибором [19, 22]. При таком подходе после суммирования вероятностей всех работоспособных состояний кластера удастся вычислить его коэффициент готовности.

Для одноуровневых кластеров из параллельно соединенных узлов сложной структуры, способных находиться в множестве состояний, в том числе в нескольких работоспособных с различной эффективностью вычислений [20] и различной сложностью восстановления при ограниченном числе операторов, сложность оценки коэффициента готовности одноуровневого кластера на основе марковской модели возрастает [20], в том числе из-за размерности и сложности построения диаграммы состояний и переходов. В связи с этим в статье [22] предложен подход к оценке коэффициента готовности систем из структурно сложных узлов, основанный на декомпозиции марковской модели, при формировании диаграммы состояний и переходов для одного выделенного узла кластера с учетом замедления его восстановления из-за очереди на восстановления других узлов кластера. При этом предлагается многоэтапная процедура уточнения влияния восстановления ранее отказавших в системе узлов на замедление восстановления выделенного узла при формировании верхней и нижней оценок надежности. Определив по диаграмме состояний выделенного узла вероятности его состояний при идентичности всех узлов кластера, на основе перебора гипотез определяются среднее число требующих восстановления элементов и, соответственно, среднее время восстановления ранее отказавших узлов. Ограничение метода, предложенное в [23], обусловлено предположением идентичности всех узлов кластера и ориентацией только на одноуровневый кластер при наличии одного оператора, осуществляющего очередное восстановление структурно сложных узлов. Использование этого подхода для многоуровневых систем требует дополнительных исследований.

Рассмотрим подходы к оценке надежности на основе марковских процессов одноуровневых и многоуровневых систем из элементов, рассматриваемых в двух состояниях: отказавшем и работоспособном. В этом случае для одноуровневых систем возможен расчет надежности на основе модели с конечным числом источников нагрузки и одним обслуживающим прибором [19, 22], позволяющей по известным формулам вычислить вероятности всех состояний и при суммировании вероятностей работоспособных состояний вычислить коэффициент готовности системы.

При объединении одноуровневых кластеров в многоуровневую систему оценка коэффициента ее готовности как произведения коэффициентов готовности всех уровней дает точный результат, только если каждый уровень независимо восстанавливается закрепленным за ним оператором. Если же число операторов в системе меньше числа уровней, такой расчет без учета замедления из-за зависимого восстановления разных уровней дает верхнее приближение, что для расчета надежности неприемлемо.

Для двухуровневых систем из узлов, рассматриваемых в двух состояниях: работоспособном либо отказавшем, при одном операторе, восстанавливающем систему, возможно построение марковской модели оценки коэффициента готовности при различных приоритетах восстановления узлов (например, приоритет выше у первого или второго уровня или он выше у уровня, число отказавших узлов которого больше). Однако такой подход для кластеров с числом уровней больше двух становится нереализуемым из-за громоздкости диаграммы состояний и переходов.

Цель данной работы – точная оценка надежности по коэффициенту готовности многоуровневых систем с обеднением на каждом уровне идентичных по надежности узлов, рассматриваемых в работоспособном или отказавшем состоянии, при восстановлении системы ограниченным числом операторов, что обуславливает возможность образования очереди на восстановление узлов.

Новизна предлагаемого подхода к оценке коэффициента готовности многоуровневой системы из идентичных узлов, рассматриваемых в состоянии работоспособности или отказа, заключается в том,

что на основе известной из теории массового обслуживания модели с конечным числом источников нагрузки и одним обслуживающим прибором находятся вероятности различного числа работоспособных узлов без привязки их расположения по уровням, а затем на основе комбинаторного перебора находится условная вероятность того, что при этом число исправных узлов на каждом уровне соответствует условию работоспособности системы.

Ограничение представленной модели надежности заключается в предположении идентичности всех узлов системы по надежности (одинаковые для всех узлов интенсивности отказов и восстановления; заметим, что возможно усреднение интенсивностей для всех узлов) и их рассмотрении в двух состояниях: работоспособном либо отказавшем.

Достоинство подхода заключается в возможности при указанных условиях (ограничениях) получения точной оценки коэффициента готовности многоуровневой системы при преодолении комбинаторной сложности построения марковской модели, когда число уровней больше двух, а восстановление многоуровневой системы осуществляется одним оператором. Предлагаемый подход позволяет избежать завышенной оценки надежности системы, получаемой в предположении выделения для восстановления узлов каждого уровня отдельного оператора.

1. Модель надежности многоуровневого кластера при независимом восстановлении узлов на разных уровнях

Объектом исследования является многоуровневый восстанавливаемый кластер, укомплектованный на i -м уровне n_i одинаковыми по надежности узлами, рассматриваемыми в двух состояниях: работоспособном либо отказавшем (рис. 1).

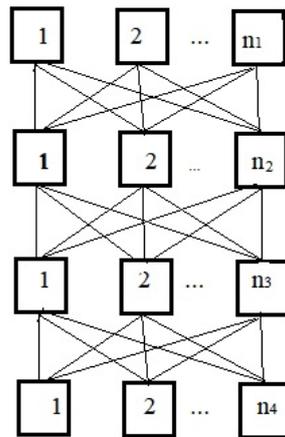


Рис. 1. Многоуровневый кластер
Fig. 1. Multi-level cluster

Вначале рассмотрим случай, когда восстановление узлов внутри каждого уровня зависимо, а восстановление узлов разных уровней независимо. На разных уровнях могут использоваться узлы разной надежности. Этому случаю соответствует выделение одного оператора на каждый уровень для восстановления узлов внутри уровня после их отказов. При таком подходе на каждом уровне может формироваться очередь на восстановление узлов, но обслуживание очередей разных уровней является независимым.

Процесс отказов и восстановлений на j -м уровне представим в виде хорошо изученного процесса размножения и гибели [22], для которого при отказе i из n_j узлов интенсивность отказов будет $\lambda_{j,i} = \lambda_j (n_j - i)$, $0 \leq i \leq n_j$, а интенсивность восстановления узлов j -го уровня равна μ_j .

На основе известной формулы теории массового обслуживания для системы с конечным числом источников нагрузки и одним обслуживающим прибором [22] вероятность отказа i из n_j узлов для j -го уровня вычисляется как

$$p_{j,i} = p_{j,0} \left(\frac{\lambda_{j,i}}{\mu_j} \right)^i \left(\frac{n_j!}{(n_j-i)!} \right), \quad 0 \leq i \leq n_j,$$

где $p_{j,0}$ – вероятность работоспособности всех n_j узлов j -го уровня:

$$p_{j,0} = \left[\sum_{i=0}^{n_j} \left(\frac{\lambda_{j,i}}{\mu_j} \right)^i \left(\frac{n_j!}{(n_j-i)!} \right) \right]^{-1}.$$

Если для функционирования уровня достаточно работоспособности хотя бы одного из узлов, то коэффициент готовности j -го уровня $k_j = 1 - p_{j,n_j}$, а если не менее d_j узлов, то $k_j = \sum_{i=0}^{d_j} p_{j,i}$.

Для L уровневой системы коэффициент готовности при независимом восстановлении узлов разных уровней вычисляется как $k_L = \prod_{j=1}^L k_j$.

Для рассмотренного случая независимого восстановления на разных уровнях предполагается наличие одного ремонтника на каждом уровне. Такое решение не всегда экономически оправдано, поэтому остановимся на случае обслуживания всех уровней кластера одним оператором.

2. Модель надежности многоуровневого кластера при зависимом восстановлении узлов разных уровней

При ограниченном восстановлении из-за наличия одного оператора (ремонтника) на весь многоуровневый кластер ранее рассмотренная модель приводит к завышенной оценке надежности кластера, так как предполагает возможность одновременного (независимого) восстановления узлов разных уровней. При ограниченных возможностях восстановления, когда в каждый момент времени предполагается восстановление только одного узла многоуровневой системы, марковская модель отказов и восстановлений многоуровневого кластера резко усложняется, в том числе по размерности. Так, на рис. 2 представлен пример диаграммы состояний и переходов марковской модели двухуровневого кластера, содержащего по четыре узла на каждом уровне. Все узлы внутри каждого уровня одинаковы по интенсивности отказов и восстановлений, но могут различаться для разных уровней.

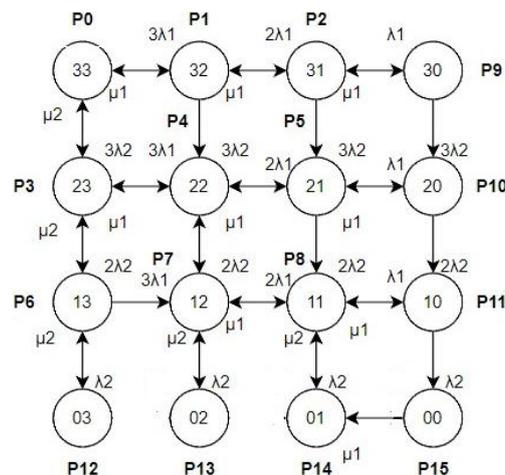


Рис. 2. Марковская модель двухуровневого кластера
Fig. 2. Markov model of a two-level cluster

При кодировании состояний кластера на диаграмме по рис. 2 первый символ обозначает число исправных узлов на его первом уровне, а второй – на втором. Приоритет восстановления выше для уровня, в котором число работоспособных узлов меньше. Для неработоспособных состояний кластера

происходит его отключение, при котором дальнейшие отказы узлов исключаются. Изменения дисциплин (приоритетов) обслуживания сопровождается изменением диаграммы состояний и переходов. Представленная диаграмма может быть легко адаптирована к изменению числа узлов уровней и различным дисциплинам восстановления узлов двухуровневой системы.

По представленной диаграмме состояний и переходов на основе известного подхода составляется система алгебраических (или дифференциальных) уравнений, которая позволяет найти вероятности состояний кластера и, соответственно, стационарный (нестационарный) коэффициент готовности кластера, суммируя вероятности его работоспособных состояний. Так, если условие работоспособности кластера заключается в работоспособности хотя бы одного узла на каждом уровне, то коэффициент готовности вычисляется как $k = \sum_{i=0}^8 p_i$, где $p_0, p_1, p_2, \dots, p_8$ – вероятности работоспособных состояний кластера.

Заметим, что при трех и большем числе уровней кластера граф становится многомерным, а построение марковской модели – практически нереализуемым из-за размерности. Сведение модели надежности кластера к случаю независимого обслуживания на каждом уровне при назначении для него отдельного оператора, если число операторов меньше числа уровней, приводит к завышенной оценке надежности, что недопустимо.

В связи с этим требуется построение модели надежности многоуровневого кластера, обслуживаемого ограниченным числом операторов (одним оператором). Для начала рассмотрим оценку коэффициента готовности многоуровневого кластера, компонуемого на всех уровнях одинаковыми по надежности узлами, рассматриваемыми в одном из двух состояний: отказа либо работоспособности. Построение модели многоуровневой системы ограниченного восстановления предлагается на основе сочетания марковской модели и комбинаторики.

3. Оценка надежности многоуровневого кластера ограниченного восстановления на основе сочетания марковской модели и комбинаторики

Рассмотрим многоуровневый кластер из одинаковых по надежности элементов с интенсивностью отказов λ , а восстановлений μ . Обслуживание всех уровней кластера осуществляется одним оператором. Выбор узла на восстановление производится случайно без привязки к уровню его расположения. Если для функционирования системы достаточно работоспособности хотя бы одного узла на каждом уровне, то для трехуровневой системы минимально необходимое число работоспособных элементов три при условии их расположения на разных уровнях.

Вероятность того, что в системе из n узлов исправно i узлов (отказало $n - i$ узлов) без учета расположения отказавших элементов по уровням, можно найти по известной формуле процесса размножения и гибели как

$$p_i = \left[\sum_{i=0}^n \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i \left(\frac{n!}{(n-i)!} \right) \right]^{-1} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{n-i} \left(\frac{n!}{i!} \right).$$

Заметим, что вычисление коэффициента готовности трехуровневого кластера как $k = \sum_{i=3}^n p_i$ дает завышенный результат, так как не исключает комбинаций, для которых общее число работоспособных узлов больше трех, но при этом на одном или нескольких уровнях отказали все узлы. Для исключения учета подобных комбинаций расчет коэффициента готовности поведем как

$$k = \sum_{i=3}^n \frac{p_i}{C_n^i} \left[\sum_{i_1}^{n_1} \sum_{i_2}^{n_2} \sum_{i_3}^{n_3} \delta(i_1, i_2, i_3, i) C_{n_1}^{i_1} C_{n_2}^{i_2} C_{n_3}^{i_3} \right], \quad (1)$$

где условие работоспособности кластера

$$\delta(i_1, i_2, i_3, i) = \begin{cases} 1, & \text{if } (i_1 + i_2 + i_3 = i), \\ 0, & \text{if } (i_1 + i_2 + i_3 \neq i). \end{cases}$$

Расчет основан на переборе всевозможных состояний n узлов кластера с суммированием вероятностей состояний с работоспособностью хотя бы одного узла на каждом уровне.

Сократить перебор удастся при использовании следующей формулы:

$$k = \sum_{i=3}^n \frac{P_i}{C_n^i} \left[\sum_{i_1}^{N_1} \sum_{i_2}^{N_2} \delta_1(i_1, i_2, i) C_{n_1}^{i_1} C_{n_2}^{i_2} C_{n_3}^{i-i_1-i_2} \right], \quad (2)$$

$$N_1 = \begin{cases} n_1, & \text{if } (i-2 \geq n_1), \\ 0, & \text{if } (i-2 < n_1), \end{cases} \quad N_2 = \begin{cases} n_2, & \text{if } (i-i_1-1 \geq n_2), \\ 0, & \text{if } (i-i_1-1 < n_2), \end{cases} \quad \delta_1(i_1, i_2, i) = \begin{cases} 1, & \text{if } (i-i_1-i_2 \leq n_3), \\ 0, & \text{if } (i-i_1-i_2 > n_3). \end{cases}$$

Заметим, что расчет по (1) и (2) дает совпадение результатов.

Представленный расчет коэффициента готовности многоуровневого кластера при его обслуживании одним оператором в предположении идентичности узлов по интенсивности отказов и восстановлений дает точный результат.

Сравним коэффициент готовности для трехуровневого кластера, на каждом из трех уровней которого имеется по четыре одинаковых по надежности узла, для случаев когда на обслуживание каждого уровня выделяется отдельный оператор и когда все три уровня обслуживаются одним оператором. Результаты сравнения в зависимости от интенсивности восстановления μ при интенсивности отказов $\lambda = 5 \cdot 10^{-4} 1/\text{ч}$ представлены на рис. 3 кривыми k_1 и k_2 . Приведенные расчеты показывают влияние очереди на восстановление узлов разных уровней при назначении одного оператора на обслуживание всех уровней. Расчеты позволяют установить погрешность завышенной оценки в предположении наличия оператора на каждом уровне и обосновать выбор числа операторов для обслуживания многоуровневого кластера.

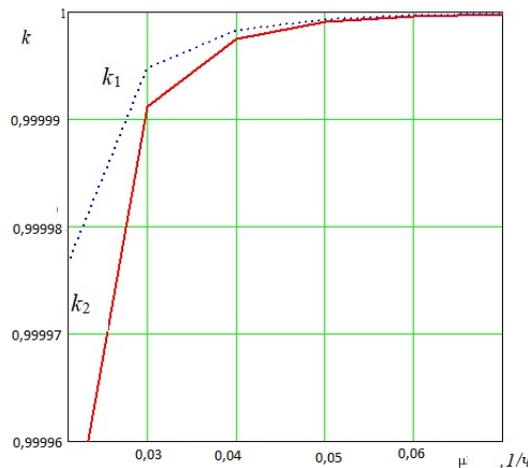


Рис. 3. Коэффициенты готовности кластера, когда на обслуживание каждого уровня выделяется отдельный оператор (k_1) и когда все три уровня обслуживаются одним оператором (k_2)

Fig. 3. Cluster availability coefficients when a separate operator is assigned to service each level (k_1) and when all three levels are serviced by a single operator (k_2)

Расчеты выполнены с условием работоспособности кластера при работоспособности хотя бы одного узла на каждом уровне. Если при заданном входном потоке требуется выполнения условий стационарности обслуживания запросов, то надежность системы оценим по коэффициенту готовности кластера к обслуживанию запросов в стационарном режиме. Искомый коэффициент оценим по формуле (1) или (2) при изменении условий работоспособности. Так, для (1) условие работоспособности преобразуется к виду:

$$\delta(i_1, i_2, i_3, i) = \begin{cases} 1, & \text{if } (i_1 + i_2 + i_3 = i) \wedge \left(\frac{\Lambda}{i_1} v_1 < 1\right) \wedge \left(\frac{\Lambda}{i_2} v_2 < 1\right) \wedge \left(\frac{\Lambda}{i_3} v_3 < 1\right) = 1, \\ 0, & \text{if } (i_1 + i_2 + i_3 = i) \wedge \left(\frac{\Lambda}{i_1} v_1 < 1\right) \wedge \left(\frac{\Lambda}{i_2} v_2 < 1\right) \wedge \left(\frac{\Lambda}{i_3} v_3 < 1\right) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где Λ – суммарная интенсивность потока запросов, поступающих на каждый уровень кластера, а v_1, v_2, v_3 – их среднее время выполнения на соответствующих уровнях.

Зависимость коэффициента готовности к выполнению запросов в стационарном режиме от интенсивности входного потока Λ для кластера, на каждом уровне которого имеется по четыре одинаковых по надежности узла, если все три уровня обслуживаются одним оператором, представлена на рис. 4. Расчет выполнен при $\lambda = 5 \cdot 10^{-4}$ 1/ч, $v_1 = v_2 = v_3 = 0,1$ с и интенсивности восстановления узлов $\mu = 0,02, 0,03, 0,04$ 1/ч. Из графиков видна ступенчатость влияния интенсивности входного потока Λ на готовность работы кластера в стационарном режиме.

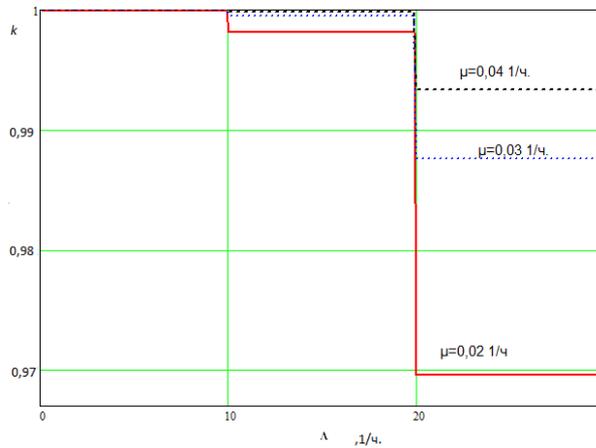


Рис. 4. Зависимость коэффициента готовности к выполнению запросов в стационарном режиме от интенсивности входного потока Λ

Fig. 4. The dependence of the coefficient of readiness to fulfill requests in stationary mode on the intensity of the input stream Λ

Предложенные модели могут быть применены для оценок среднего времени ожидания в стационарном режиме и среднего запаса времени ожидания относительно некоторой заданной величины t , характеризующей предельно допустимое время ожидания.

Так, запас среднего времени пребывания запросов относительно некоторого заданного значения можно оценить при модернизации формулы (1) как

$$k_t = \sum_{i=3}^n \frac{P_i}{C_n^i} \left[\sum_{i_1}^{n_1} \sum_{i_2}^{n_2} \sum_{i_3}^{n_3} D(i_1, i_2, i_3, i, t) C_{n_1}^{i_1} C_{n_2}^{i_2} C_{n_3}^{i_3} \right],$$

$$D(i_1, i_2, i_3, i, t) = \begin{cases} \left(t - \frac{v_1}{1 - \frac{v_1 \Lambda}{i_1}} + \frac{v_2}{1 - \frac{v_2 \Lambda}{i_2}} + \frac{v_3}{1 - \frac{v_3 \Lambda}{i_3}} \right), & \text{if } \left\{ \delta(i_1, i_2, i_3, i) = 1 \wedge t \geq \frac{v_1}{1 - \frac{v_1 \Lambda}{i_1}} + \frac{v_2}{1 - \frac{v_2 \Lambda}{i_2}} + \frac{v_3}{1 - \frac{v_3 \Lambda}{i_3}} \right\}, \\ 0, & \text{if } \left\{ \delta(i_1, i_2, i_3, i) = 0 \vee t < \frac{v_1}{1 - \frac{v_1 \Lambda}{i_1}} + \frac{v_2}{1 - \frac{v_2 \Lambda}{i_2}} + \frac{v_3}{1 - \frac{v_3 \Lambda}{i_3}} \right\}, \end{cases}$$

$\delta(i_1, i_2, i_3, i)$ определяется по формуле (3), а $\frac{v_1}{1 - \frac{v_1 \Lambda}{i_1}}, \frac{v_2}{1 - \frac{v_2 \Lambda}{i_2}}, \frac{v_3}{1 - \frac{v_3 \Lambda}{i_3}}$ – средние времена пребывания за-

просов [21] на первом, втором и третьем уровнях.

Результаты расчета запаса среднего времени пребывания запросов k_t в трехуровневой системе, которая в исходном состоянии на каждом уровне имеет по четыре узла, при интенсивности их отказов $\lambda = 5 \cdot 10^{-4}$ 1/ч, а восстановлений $\mu = 1,0$ 1/ч при допустимом времени ожидания $t = 2, 1,5, 1,0$ с представлены на рис. 5.

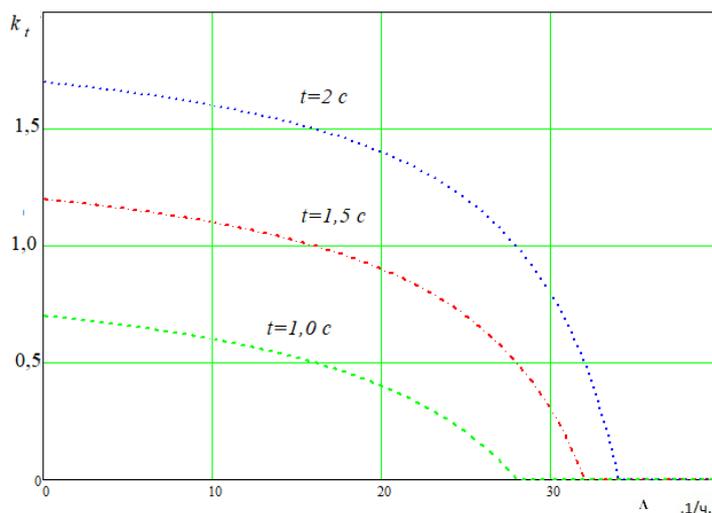


Рис. 5. Запас среднего времени пребывания запросов
 Fig. 5. The margin of the average time spent by requests

Заключение

Для многоуровневых систем с обеднением на каждом уровне в кластеры идентичных по надежности узлов, рассматриваемых в работоспособном или отказавшем состоянии, предложена оценка надежности по коэффициенту готовности при восстановлении системы ограниченным числом операторов, что может привести к формированию очереди на восстановление узлов.

Отличие предлагаемой оценки надежности многоуровневого кластера заключается в том, что на основе известной модели обслуживания с конечным числом источников нагрузки и одним обслуживающим прибором находятся вероятности различного числа работоспособных узлов без привязки их расположения по уровням, а затем на основе комбинаторного перебора находится условная вероятность того, что при этом число исправных узлов на каждом уровне соответствует условию работоспособности системы.

Предложенный подход позволяет преодолеть возрастание сложности построения марковской модели, когда число уровней больше двух, а восстановление многоуровневой системы осуществляется ограниченным числом операторов, меньшим, чем число уровней системы, при этом удастся избежать завышенной оценки надежности системы, получаемой в предположении выделения для восстановления узлов каждого уровня отдельного оператора.

На основе предложенной модели оценены коэффициент готовности кластера к обслуживанию запросов в стационарном режиме и средний запас времени ожидания относительно предельно допустимого времени ожидания.

Список источников

1. Aysan H. Fault-tolerance strategies and probabilistic guarantees for real-time systems Mälardalen University: Doctoral dissertation, Mälardalen University, 2012. 109 p.
2. Shubinsky I.B., Rozenberg I.N., Papic L. Adaptive fault tolerance in real-time information systems // Reliability: Theory & Applications. 2017. V. 12 (1). P. 18–25.
3. Koren H. Fault tolerant systems. San Francisco, CA: Morgan Kaufmann, 2009. 309 p.
4. Haider S., Nazir B. Fault tolerance in computational grids: perspectives, challenges, and issues // Springer Plus. 2016. V. 5 (1). P. 1–20. doi: 10.1186/s40064-016-3669-0
5. Nalini N. Fault tolerant software systems using software configurations for cloud computing // Chinnaiyah and Niranjana Journal of Cloud Computing: Advances, Systems and Applications. 2018. V. 7 (3). doi: 10.1186/s13677-018-0104-9
6. Татарникова Т.М., Архипцев Е.Д. Гибридный метод синхронизации времени в распределенных системах // Информационно-управляющие системы. 2025. № 4 (137). С. 26–35.
7. Татарникова Т.М., Архипцев Е.Д., Кармановский Н.С. Определение размера кластера и числа реплик высоконагруженных информационных систем // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2023. Т. 66, № 8. С. 646–651

8. Krasnobaev V., Kuznetsov A., Kiian A., Kuznetsova K. Fault tolerance computer system structures functioning in residue classes // Proc. of the 11th IEEE International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications, IDAACS 2021. 2011. P. 471–474.
9. Гончаренко В.А., Хомоненко А.Д., Ермаков С.Г., Абу Хасан Р. К управлению уровнем надежности кластерных информационных систем на основе нечеткого вывода // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2025. № 2. С. 52–58.
10. Гончаренко В.А., Хомоненко А.Д., Халил М.М. Исследование балансировки нагрузки в трехканальных кластерных системах с адаптивной диспетчеризацией // Научные технологии в космических исследованиях Земли. 2025. Т. 17, № 2. С. 19–31.
11. Хомоненко А.Д., Благовещенская Е.А., Проурзин О.В., Андрук А.А. Прогноз надежности кластерной вычислительной системы с помощью полумарковской модели альтернирующих процессов и мониторинга // Научные технологии в космических исследованиях Земли. 2018. Т. 10, № 4. С. 72–82.
12. Wang Y., Zhao X. Reliability Analysis of RAID Systems Using Fuzzy Logic Models // Journal of Computer Science. 2020. V. 18 (3). P. 250–264.
13. Бушеленков С.Н. Эффективный метод многопутевой маршрутизации // Электросвязь. 2022. № 3. С. 12–18.
14. Кашкаров Д.В., Парамонов А.И., Кучерявый А.Е. Метод повышения эффективности URLLC в перспективных сетях связи // Электросвязь. 2022. № 2. С. 32–37.
15. Keum D., Lim J., Ko Y. Trust Based Multipath QoS Routing Protocol for Mission-Critical Data Transmission in Tactical Ad-Hoc Networks // Sensors. 2020. V. 20. Art. 3330. doi: 10.3390/s20113330
16. Bogatyrev V.A., Bogatyrev S.V., Bogatyrev A.V. Control of Multipath Transmissions in the Nodes of Switching Segments of Reserved Paths // Proc. of the 2022 International Conference on Information, Control, and Communication Technologies, ICCT 2022. Conference Paper 2022EID: 2-s2.0-85145651591. doi: 10.1109/ICCT56057.2022.9976839
17. Bogatyrev V.A., Parshutina S.A. Redundant distribution of requests through the network by transferring them over multiple paths // Communications in Computer and Information Science. 2016. V. 601. P. 199–207. doi: 10.1007/978-3-319-30843-2_21
18. Половко А.М., Гуров С.В. Основы теории надежности. СПб.: БХВ-Петербург, 2006. 702 с.
19. Ушаков И.А. Курс теории надежности систем. М.: Дрофа, 2008. 239 с.
20. Богатырев В.А., Богатырев С.В., Богатырев А.В. Оценка готовности компьютерной системы к своевременному обслуживанию запросов при его совмещении с информационным восстановлением памяти после отказов // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2023. Т. 23, № 3. С. 608–617. doi: 10.17586/2226-1494-2023-23-3-608-617
21. Bogatyrev V.A., Vinokurova M.S. Control and Safety of Operation of Duplicated Computer Systems // Communications in Computer and Information Science. 2017. V. 700. P. 331–342.
22. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1979. 432 с.
23. Богатырев В.А., Богатырев С.В., Богатырев А.В. Граничная оценка надежности кластерных систем на основе декомпозиции марковской модели при ограниченном восстановлении узлов с накоплением отказов // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2025. Т. 25, № 3. С. 574–583. doi: 10.17586/2226-1494-2025-25-3-574-583

References

1. Aysan, H. (2012) *Fault-tolerance strategies and probabilistic guarantees for real-time systems*. Mälardalen University. Dr. Diss. Mälardalen University.
2. Shubinsky, I.B., Rozenberg, I.N. & Papic, L. (2017) Adaptive fault tolerance in real-time information systems. *Reliability: Theory & Applications*. 12(1). pp. 18–25.
3. Koren, H. (2009) *Fault Tolerant Systems*. San Francisco, CA: Morgan Kaufmann.
4. Haider, S. & Nazir, B. (2016) Fault Tolerance in Computational Grids: Perspectives, Challenges, and Issues. *SpringerPlus*. 5(1). pp. 1–20. doi: 10.1186/s40064-016-3669-0
5. Nalini, N. (2018) Fault tolerant software systems using software configurations for cloud computing. *Chinnaiah and Niranjana Journal of Cloud Computing: Advances, Systems and Applications*. 7(3). doi: 10.1186/s13677-018-0104-9
6. Tatarnikova, T.M. & Arkhiptsev, E.D. (2025) Gibridnyy metod sinkhronizatsii vremeni v raspredelennykh sistemakh [Hybrid Time Synchronization Method in Distributed Systems]. *Informatsionno-upravlyayushchie sistemy*. 137. pp. 26–35.
7. Tatarnikova, T.M., Arkhiptsev, E.D. & Karmanovsky, N.S. (2023) Opredelenie razmera klastera i chisla replik vysokonagruzhennykh informatsionnykh sistem [Determining Cluster Size and Number of Replicas for High-Load Information Systems]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Priborostroenie*. 66(8). pp. 646–651
8. Krasnobaev, V., Kuznetsov, A., Kiian, A. & Kuznetsova, K. (2021) Fault Tolerance Computer System Structures Functioning in Residue Classes. *Proceedings of the 11th IEEE International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications (IDAACS 2021)*. pp. 471–474.
9. Goncharenko, V.A. Khomonenko A.D., Ermakov S.G. & Abu Hassan, R. (2025) K upravleniyu urovnem nadezhnosti klasternykh informatsionnykh sistem na osnove nechetkogo vyvoda [On Controlling the Reliability Level of Cluster Information Systems Based on Fuzzy Inference]. *Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol', diagnostika*. 2. pp. 52–58.

10. Goncharenko, V.A. Khomonenko, A.D. & Khalil M.M. (2025) Issledovanie balansirovki nagruzki v trekhkhalal'nykh klasternykh sistemakh s adaptivnoy dispetcherizatsiei [Study of Load Balancing in Three-Channel Cluster Systems with Adaptive Dispatching]. *Naukoemkie tekhnologii v kosmicheskikh issledovaniyakh Zemli*. 17(2). pp. 19–31.
11. Khomonenko, A.D., Blagoveshchenskaya, E.A., Prourzin, O.V. & Andruk, A.A. (2018) Prognoz nadezhnosti klasternoy vychislitel'noy sistemy s pomoshch'yu polumarkovskoy modeli al'terniruyushchikh protsessov i monitoringa [Reliability Prediction of a Cluster Computing System Using a Semi-Markov Model of Alternating Processes and Monitoring]. *Naukoemkie tekhnologii v kosmicheskikh issledovaniyakh Zemli*. 10(4). pp. 72–82.
12. Wang, Y. & Zhao, X. (2020) Reliability Analysis of RAID Systems Using Fuzzy Logic Models. *Journal of Computer Science*. 18(3). pp. 250–264.
13. Bushelenkov, S.N. (2022) Effektivnyy metod mnogoputevoy marshrutizatsii [Efficient Multipath Routing Method]. *Elektrosvyaz'*. 3. pp. 12–18.
14. Kashkarov, D.V., Paramonov, A.I. & Kucheryavy, A.E. (2022) Metod povysheniya effektivnosti URLLC v perspektivnykh setyakh svyazi [Method for Improving URLLC Efficiency in Advanced Communication Networks]. *Elektrosvyaz'*. 2. pp. 32–37.
15. Keum, D. Lim, J. & Ko, Y. (2020) Trust Based Multipath QoS Routing Protocol for Mission-Critical Data Transmission in Tactical Ad-Hoc Networks. *Sensors*. 20. 3330. doi: 10.3390/s20113330.
16. Bogatyrev, V.A., Bogatyrev, S.V. & Bogatyrev, A.V. (2022) Control of Multipath Transmissions in the Nodes of Switching Segments of Reserved Paths. *Proc. of the 2022 International Conference on Information, Control, and Communication Technologies, ICCT 2022*. Conference Paper2022EID: 2-s2.0-85145651591. doi: 10.1109/ICCT56057.2022.9976839
17. Bogatyrev, V.A. & Parshutina, S.A. (2016) Redundant Distribution of Requests Through the Network by Transferring Them over Multiple Paths. *Communications in Computer and Information Science*. 601. pp. 199–207. doi: 10.1007/978-3-319-30843-2_21
18. Polovko, A.M. & Gurov S.V. (2008) *Osnovy teorii nadezhnosti* [Fundamentals of Reliability Theory]. St. Petersburg: BKhV-Peterburg.
19. Ushakov, I.A. (2008) *Kurs teorii nadezhnosti sistem* [A Course in System Reliability Theory]. Moscow: Drofa.
20. Bogatyrev, V.A., Bogatyrev, S.V. & Bogatyrev, A.V. (2023) Otsenka gotovnosti komp'yuternoy sistemy k svoevremennomu obsluzhivaniyu zaprosov pri ego sovmeshchenii s informatsionnym vosstanovleniem pamyati posle otkazov [Assessment of Computer System Readiness for Timely Request Processing When Combined with Informational Memory Recovery After Failures]. *Nauchno-tekhnicheskiiy vestnik informatsionnykh tekhnologiy, mekhaniki i optiki*. 23(3). pp. 608–617. doi: 10.17586/2226-1494-2023-23-3-608-617
21. Bogatyrev V.A. & Vinokurova M.S. (2017) Control and Safety of Operation of Duplicated Computer Systems. *Communications in Computer and Information Science*. 700. pp. 331–342.
22. Kleinrock, L. (1979) *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [Queueing Theory]. Moscow: Mashinostroenie.
23. Bogatyrev, V.A., Bogatyrev, S.V. & Bogatyrev, A.V. (2025) Granichnaya otsenka nadezhnosti klasternykh sistem na osnove dekompozitsii markovskoy modeli pri ogranichenom vosstanovlenii uzlov s nakopleniem otkazov [Boundary Reliability Estimation of Cluster Systems Based on Markov Model Decomposition with Limited Recovery of Nodes and Failure Accumulation]. *Nauchno-tekhnicheskiiy vestnik informatsionnykh tekhnologiy, mekhaniki i optiki*. 25(3). pp. 574–583. doi: 10.17586/2226-1494-2025-25-3-574-583

Информация об авторах:

Богатырев Владимир Анатольевич – доктор технических наук, профессор факультета программной инженерии и компьютерной техники Национального исследовательского университета ИТМО (Санкт-Петербург, Россия). E-mail: vladimir.bogatyrev@gmail.com

Богатырев Станислав Владимирович – аспирант факультета программной инженерии и компьютерной техники Национального исследовательского университета ИТМО (Санкт-Петербург, Россия). E-mail: realloc@gmail.com

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Bogatyrev Vladimir A. (Doctor of Technical Sciences, Professor in Computer Engineering National Research University ITMO, Saint Petersburg, Russia Federation. E-mail: vladimir.bogatyrev@gmail.com.

Bogatyrev Stanislav V. (Post-graduate Student in Computer Engineering National Research University ITMO, Saint Petersburg, Russia Federation). E-mail: realloc@gmail.com

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 22.10.2025; принята к публикации 05.03.2026

Received 22.10.2025; accepted for publication 05.03.2026

Научная статья
УДК 537.874.6
doi: 10.17223/19988605/74/6

Моделирование рассеяния электромагнитной волны на тонком идеально проводящем цилиндре, расположенном внутри эллипсоида из дважды негативного метаматериала

Анатолий Григорьевич Дмитренко¹, Ольга Михайловна Балашова²

^{1,2} *Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия*

¹ *dmitr.tsu.202@mail.ru*

² *balashovajkz@mail.ru*

Аннотация. Методом вспомогательных источников выполнено моделирование рассеяния электромагнитной волны на тонком идеально проводящем цилиндре, расположенном внутри шара или эллипсоида из дважды негативного метаматериала. Представлены результаты вычисления сечений обратного рассеяния цилиндров различной длины, расположенных внутри сферы или эллипсоида, имеющих различные значения относительных диэлектрической и магнитной проницаемостей. Установлено, что при расположении цилиндра внутри тела из дважды негативного метаматериала можно существенно уменьшить сечение обратного рассеяния структуры.

Ключевые слова: рассеяние; электромагнитная волна; идеально проводящий цилиндр, эллипсоид; дважды негативный метаматериал, сечение обратного рассеяния.

Для цитирования: Дмитренко А.Г., Балашова О.М. Моделирование рассеяния электромагнитной волны на тонком идеально проводящем цилиндре, расположенном внутри эллипсоида из дважды негативного метаматериала // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2026. № 74. С. 62–69. doi: 10.17223/19988605/74/6

Original article
doi: 10.17223/19988605/74/6

Simulation of scattering of an electromagnetic wave by a thin perfectly conducting cylinder located inside an ellipsoid formed from double negative metamaterial

Anatoly G. Dmitrenko¹, Olga M. Balashova²

^{1,2} *National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*

¹ *dmitr.tsu.202@mail.ru*

² *balashovajkz@mail.ru*

Abstract. We use the method of auxiliary sources for simulation of scattering of an electromagnetic wave by a thin perfectly conducting cylinder located inside a sphere or an ellipsoid formed from double negative metamaterial. The results of calculating the backscattering cross sections are presented for cylinders of different length located inside a sphere or an ellipsoid having different relative permittivity and permeability. It is shown that by locating a cylinder inside a body formed from double negative metamaterial one can significantly reduce the backscattering cross section of the structure.

Keywords: scattering; electromagnetic wave; perfectly conducting cylinder; ellipsoid; double negative metamaterial, backscattering cross section.

For citation: Dmitrenko, A.G., Balashova, O.M. (2026) Simulation of scattering of an electromagnetic wave by a thin perfectly conducting cylinder located inside an ellipsoid formed from double negative metamaterial. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnik i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 74. pp. 62–69. doi: 10.17223/19988605/74/6

Введение

К настоящему времени в литературе уже опубликовано большое число теоретических и экспериментальных работ, посвященных исследованию физических явлений в новых материалах, получивших название «метаматериалы» (см., например, обзор [1]). К метаматериалам обычно относят искусственные материалы, которые характеризуются отрицательными значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей (или одной из них). Метаматериалы открывают новые возможности для разработки различных СВЧ и оптических устройств. Одно из интересных приложений метаматериалов связано с идеями разработки невидимых объектов и оболочек для электромагнитной маскировки объектов [2–4]. В данной статье изложены результаты моделирования методом вспомогательных источников рассеяния плоской электромагнитной волны на тонком идеально проводящем цилиндре, расположенном внутри шара или эллипсоида из дважды негативного метаматериала. Эти результаты в основном касаются зависимости сечений обратного рассеяния структуры от угла падения волны при различных значениях радиуса шара и его относительных диэлектрической и магнитной проницаемостей. Приведены также результаты исследований зависимости сечений обратного рассеяния структуры от значений полуосей эллипсоида при различных углах падения волны.

1. Электрофизические свойства метаматериалов

Метаматериалы обычно создаются путем внедрения в исходный природный материал различных периодических элементов с самыми различными формами, которые модифицируют диэлектрическую и магнитную проницаемости исходного материала [1]. Если размер этих элементов мал по сравнению с длиной волны, то метаматериал можно рассматривать как изотропную однородную среду, характеризующуюся эффективными значениями относительных диэлектрической и магнитной проницаемостей. При используемой в наших работах временной зависимости в виде $\exp(-i\omega t)$, где ω – циклическая частота стационарного электромагнитного поля, они в общем случае имеют вид:

$$\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon'' = |\varepsilon| \exp(i\alpha), \quad \mu = \mu' + i\mu'' = |\mu| \exp(i\beta), \quad (1)$$

где ε'' и μ'' определяют соответственно электрические и магнитные потери.

В зависимости от знаков реальных частей ε и μ выделяют следующие типы метаматериалов [6]: если $\varepsilon' < 0$ и $\mu' < 0$, то материал называют «дважды негативным» (DNGM); если $\varepsilon' > 0$, а $\mu' < 0$, то материал называют «мю-негативным» (MNGM); если $\varepsilon' < 0$, а $\mu' > 0$, то материал называют «эпсилон-негативным» (ENGМ).

Волновые характеристики среды (волновое число k и характеристическое сопротивление Z) связаны с (1) соотношениями

$$k = k_0 \sqrt{|\varepsilon||\mu|} \exp\left(i \frac{\alpha + \beta}{2}\right), \quad Z = Z_0 \sqrt{\frac{|\mu|}{|\varepsilon|}} \exp\left(i \frac{\beta - \alpha}{2}\right), \quad (2)$$

$$k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}},$$

где ε_0, μ_0 – абсолютные электрическая и магнитная проницаемости вакуума, а $n = \sqrt{|\varepsilon||\mu|} \exp\left(i \frac{\alpha + \beta}{2}\right)$ – показатель преломления среды. Для идеального DNGM $\alpha = \beta = \pi$ и, в соответствии с (2),

$$k = -k_0 \sqrt{|\varepsilon||\mu|}, \quad Z = Z_0 \sqrt{\frac{|\mu|}{|\varepsilon|}}. \quad (3)$$

2. Численные результаты

С учетом свойств (3) дважды негативного метаматериала методом вспомогательных источников было выполнено моделирование рассеяния плоской электромагнитной волны на тонком идеально проводящем цилиндре, расположенном внутри шара или эллипсоида (шар – частный случай эллипсоида, когда его полуоси равны). Алгоритм моделирования во многом напоминает подробно представленный в работе [5] алгоритм моделирования рассеяния плоской волны на подобной структуре, когда эллипсоид выполнен из обычного диэлектрика, поэтому здесь он не приводится.

Исследуемая структура показана на рис. 1. В этой структуре цилиндр расположен внутри трехосного эллипсоида, изготовленного из DNGM. Центр эллипсоида совпадает с началом декартовой системы координат $Oxyz$. Полуоси эллипсоида $k_e a, k_e b, k_e c$ ($k_e = 2\pi / \lambda$, λ – длина волны возбуждающего структуру поля) ориентированы вдоль осей x, y, z соответственно. Идеально проводящий цилиндр безразмерной длины $k_e l$ и безразмерного радиуса $k_e r$ расположен внутри эллипсоида таким образом, что его осевая линия ориентирована вдоль оси z , а ее центр совпадает с центром эллипсоида. Структура возбуждается линейно поляризованной плоской волной, падающей таким образом, что векторы \vec{k}_e и \vec{E}_0 расположены в плоскости xOz , при этом вектор \vec{k}_e образует с осью z угол ψ , называемый углом падения плоской волны.

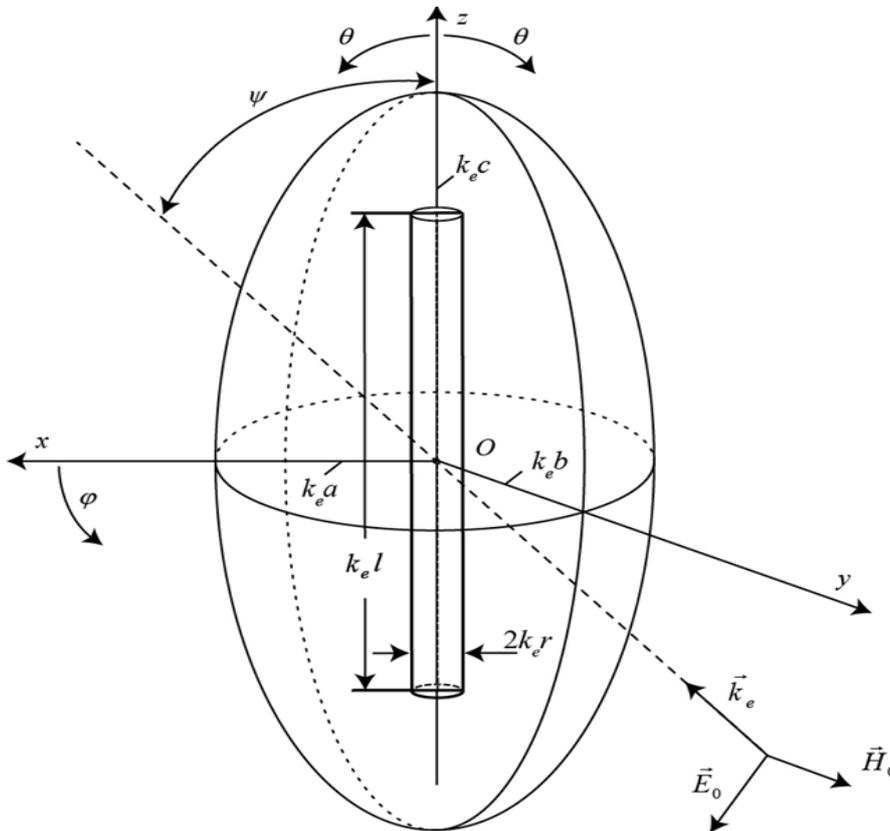


Рис. 1. Исследуемая структура
Fig. 1. The structure under consideration

На рис. 2 и 3 представлены зависимости сечения обратного рассеяния от угла ψ падения плоской волны для цилиндра длиной $k_e l = 3,1416$, радиуса $k_e r = 0,1$, расположенного внутри шара из обычного диэлектрика и DNGM. Рисунок 2 относится к случаю, когда радиус шара $k_e R = k_e a = k_e b = k_e c = 2$, а рис. 3 – к случаю, когда радиус шара $k_e R = k_e a = k_e b = k_e c = 3$. Кривая 1 на рис. 2 соответствует обычному диэлектрику с $\epsilon = 2$, $\mu = 1$; кривая 2 – DNGM с $\epsilon = -2$, $\mu = -1$. На рис. 3 кривая 1 соответствует

обычному диэлектрику с $\epsilon = 4$, $\mu = 1$; кривая 2 – DNGM с $\epsilon = -4$, $\mu = -1$. По оси абсцисс на рис. 2 и 3 отложен угол падения плоской волны ψ (см. рис. 1) в градусах, по оси ординат – сечение обратного рассеяния, нормированное на квадрат длины волны и выраженное в децибелах.

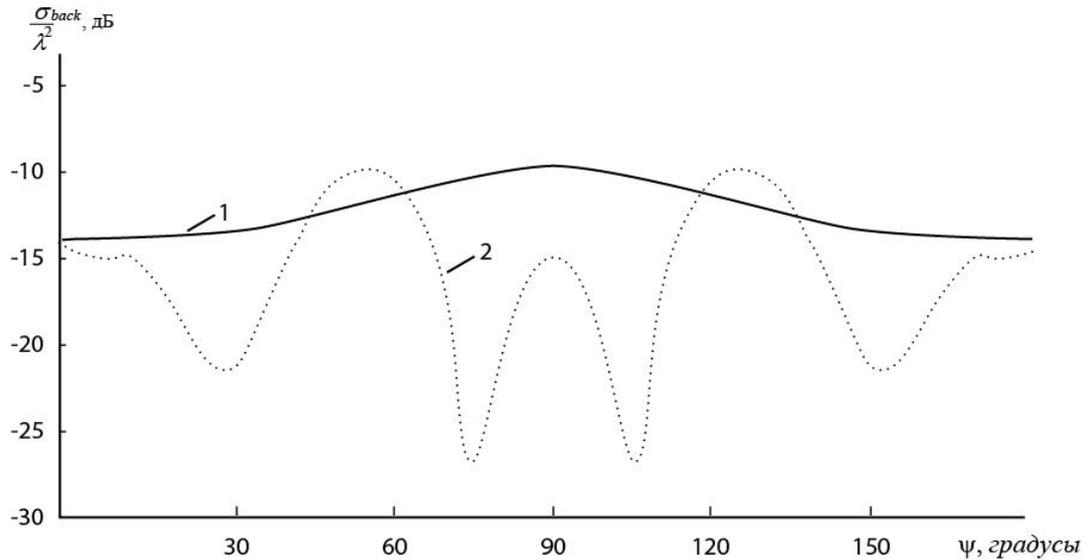


Рис. 2. Зависимость сечения обратного рассеяния от угла ψ падения плоской волны для цилиндра длиной $k_e l = 3,1416$, расположенного внутри шара радиуса $k_e R = 2$. Кривая 1 соответствует обычному диэлектрику с $\epsilon = 2$, $\mu = 1$; кривая 2 – DNGM с $\epsilon = -2$, $\mu = -1$

Fig. 2. Backscattering cross section as a function of the incidence angle ψ of the plane wave for a cylinder of length $k_e l = 3,1416$, located inside the sphere with radius $k_e R = 2$. Curve 1 corresponds to the sphere from ordinary dielectric with $\epsilon = 2$, $\mu = 1$; curve 2 – to the sphere from DNGM with $\epsilon = -2$, $\mu = -1$

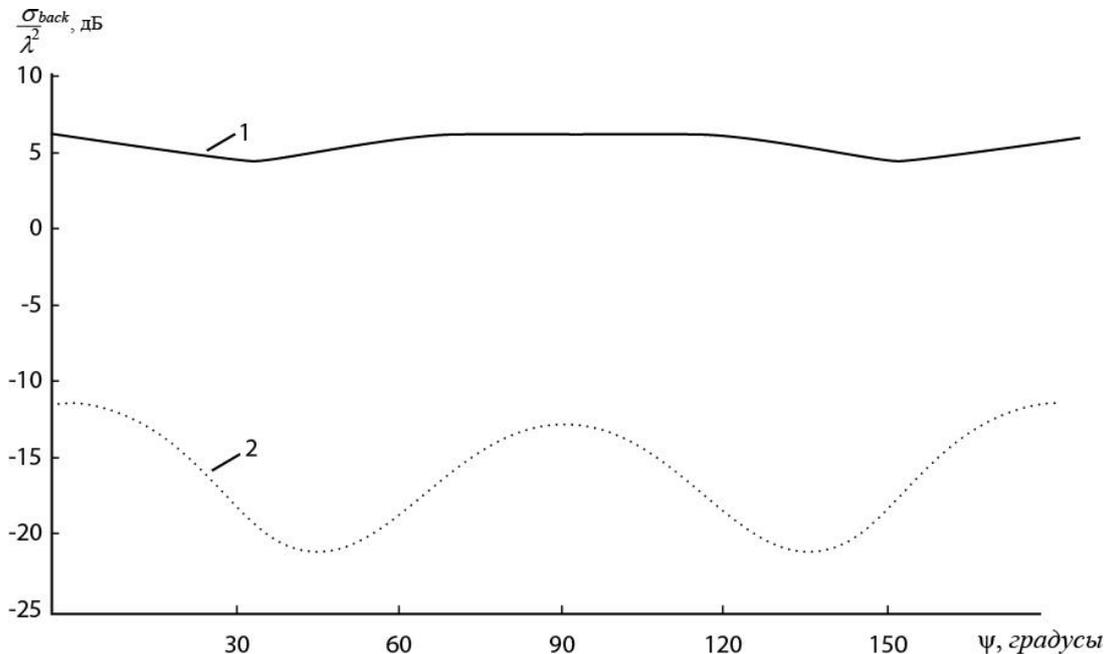


Рис. 3. Зависимость сечения обратного рассеяния от угла ψ падения плоской волны для цилиндра длиной $k_e l = 3,1416$, расположенного внутри шара радиуса $k_e R = 3$. Кривая 1 соответствует обычному диэлектрику с $\epsilon = 4$, $\mu = 1$; кривая 2 – DNGM с $\epsilon = -4$, $\mu = -1$

Fig. 3. Backscattering cross section as a function of the incidence angle ψ of the plane wave for a cylinder of length $k_e l = 3,1416$, located inside the sphere with radius $k_e R = 3$. Curve 1 corresponds to the sphere from ordinary dielectric with $\epsilon = 4$, $\mu = 1$; curve 2 – to the sphere from DNGM with $\epsilon = -4$, $\mu = -1$

Необходимо отметить, что при использовании для решения данной задачи метода, представленного в [5], точность решения задачи (невязка граничных условий) существенно зависит от положения внутренней и внешней вспомогательных поверхностей, на которых располагаются вспомогательные диполи. Эти положения определяются значениями параметров подобия K_e (для внутренней вспомогательной поверхности) и K_i (для внешней вспомогательной поверхности). Для диэлектрического тела оптимальные (в смысле минимума нормы невязки граничных условий) значения K_e и K_i определены в работе [7]. Они лежат в интервалах $0,3 < K_e < 0,6$; $3 < K_i < 6$. Для тел из метаматериала этот вопрос оставался неясным. Чтобы его прояснить, были выполнены подобные исследования для тел из метаматериалов различного типа в рассматриваемой задаче. Оказалось, что для тел из DNGM оптимальные значения параметров K_e и K_i лежат в тех же интервалах, что и для тел из обычного диэлектрика.

На основании этих исследований как для эллипсоида из обычного диэлектрика, так и для эллипсоида из DNGM параметр K_e выбран равным 0,5, а K_i – равным 4. Что касается выбора других параметров метода [5], а именно чисел N_e и N_i точек размещения вспомогательных диполей на внутренней и внешней вспомогательных поверхностях, чисел L и L_p точек коллокации на поверхностях тела и цилиндра, а также числа участков разбиения осевой линии цилиндра N_p , то значения этих параметров, выбранные ранее в случае диэлектрического тела и представленные в работе [5], оказались вполне пригодными и в тех случаях, когда тело, внутри которого располагается цилиндр, выполнено из DNGM. Конкретно при получении всех результатов, представленных в данной статье, использовались следующие параметры метода: $N_e = N_i = 400$, $L = 800$, $L_p = 100$ при $k_{el} = 3,1416$ и $L_p = 120$ при $k_{el} = 4,712$, $N_p = 25$ при $k_{el} = 3,1416$ и $N_p = 30$ при $k_{el} = 4,712$. Подробности, касающиеся размещения точек расположения диполей и точек коллокации, представлены в работе [5. С. 19]. При данных значениях параметров метода и указанных выше значениях K_e и K_i для всех результатов, представленных в данной статье, значения нормы невязки граничных условий на поверхностях структуры не превышают 0,03.

Анализ результатов, представленных на рис. 2, 3, позволяет сделать следующие выводы. При расположении цилиндра внутри тела из DNGM можно существенно уменьшить сечение обратного рассеяния структуры по сравнению со случаем расположения цилиндра внутри обычного диэлектрика, характеризуемого относительными диэлектрической и магнитной проницаемостями с такими же модулями. Это особенно заметно при сравнении кривых 1 и 2 на рис. 3, относящихся соответственно к обычному диэлектрику с параметрами $\varepsilon = 4$, $\mu = 1$ и DNGM с параметрами $\varepsilon = -4$, $\mu = -1$. В данном случае при использовании DNGM удастся уменьшить сечение обратного рассеяния не менее чем на 16 дБ во всем диапазоне углов падения плоской волны. Как показывает сравнение кривых 1 и 2 на рис. 2, и при расположении цилиндра внутри сферы радиуса $k_{el} = 2$ из DNGM с параметрами $\varepsilon = -2$, $\mu = -1$ сечение обратного рассеяния структуры существенно уменьшается для большинства углов падения плоской волны по сравнению со случаем расположения цилиндра внутри такой же сферы из обычного диэлектрика с параметрами $\varepsilon = 2$, $\mu = 1$.

Рисунок 4 иллюстрирует влияние величины потерь в DNGM на значение сечения обратного рассеяния цилиндра длиной $k_{el} = 3,1416$, радиуса $k_{er} = 0,1$, расположенного внутри шара радиуса $k_e R = k_e a = k_e b = k_e c = 3$ из DNGM. Предполагается, что для каждого случая величины электрических и магнитных потерь, характеризуемые значениями мнимых частей ε и μ , одинаковы. Кривая 1 относится к DNGM без потерь с параметрами $\varepsilon = -4$, $\mu = -1$; кривая 2 – к DNGM с параметрами $\varepsilon = -4 + 0,05i$, $\mu = -1 + 0,05i$; кривая 3 – к DNGM с параметрами $\varepsilon = -4 + 0,1i$, $\mu = -1 + 0,1i$; кривая 4 – к DNGM с параметрами $\varepsilon = -4 + 0,15i$, $\mu = -1 + 0,15i$; кривая 5 – к DNGM с параметрами $\varepsilon = -4 + 0,2i$, $\mu = -1 + 0,2i$. Сравнение кривых 2–5 с кривой 1, характеризующей сечение обратного рассеяния структуры с шаром из DNGM без потерь, позволяет сделать заключение, что наличие потерь не всегда приводит к уменьшению сечения обратного рассеяния. При малых потерях в DNGM (см. кривую 2) действительно наблюдается уменьшение сечения обратного рассеяния во всем диапазоне углов падения плоской волны, но с увеличением величины потерь сечения обратного рассеяния возрастают и могут даже превышать сечения обратного рассеяния для DNGM без потерь (см. кривую 5).

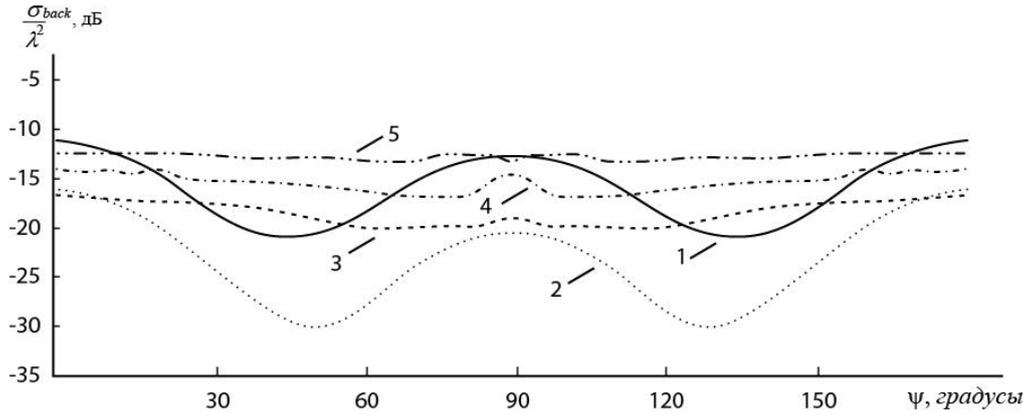


Рис. 4. Зависимость сечения обратного рассеяния от угла ψ падения плоской волны для цилиндра длиной $k_e l = 3,1416$, расположенного внутри шара радиуса $k_e R = 3$ из DNGM с различными потерями. Кривая 1 соответствует DNGM без потерь с $\epsilon = -4, \mu = -1$; кривая 2 – DNGM с $\epsilon = -4 + 0,05i, \mu = -1 + 0,05i$; кривая 3 – DNGM с $\epsilon = -4 + 0,1i, \mu = -1 + 0,1i$; кривая 4 – DNGM с $\epsilon = -4 + 0,15i, \mu = -1 + 0,15i$; кривая 5 – DNGM с $\epsilon = -4 + 0,2i, \mu = -1 + 0,2i$

Fig. 4. Backscattering cross section as a function of the incidence angle ψ of the plane wave for a cylinder of length $k_e l = 3,1416$, located inside the sphere with radius $k_e R = 3$ from DNGM with different losses. Curve 1 corresponds to lossless DNGM with $\epsilon = -4, \mu = -1$; curve 2 – to DNGM with $\epsilon = -4 + 0,05i, \mu = -1 + 0,05i$; curve 3 – to DNGM with $\epsilon = -4 + 0,1i, \mu = -1 + 0,1i$; curve 4 – to DNGM with $\epsilon = -4 + 0,15i, \mu = -1 + 0,15i$; curve 5 – to DNGM with $\epsilon = -4 + 0,2i, \mu = -1 + 0,2i$

На рис. 5 представлены некоторые результаты, иллюстрирующие зависимость сечения обратного рассеяния структуры от размеров полуосей эллипсоида при различных углах падения плоской волны ψ при размещении цилиндра длиной $k_e l = 4,712$ внутри эллипсоида из DNGM с параметрами $\epsilon = -4, \mu = -1$. Изменение полуосей эллипсоида осуществлялось следующим образом. В качестве исходной формы выбран шар, для которого $k_e a = k_e b = k_e c = 3$. Далее величина полуоси $k_e c$ предполагалась неизменной, а полуоси $k_e a$ и $k_e b$ менялись по правилу $k_e a = k_e b = k_e c - \Delta$, т.е. шар был превращен в сфероид, размеры полуосей $k_e a$ и $k_e b$ которого постепенно уменьшались. На рис. 5 по оси абсцисс отложен параметр Δ , по оси ординат – сечение обратного рассеяния, нормированное на квадрат длины волны и выраженное в децибелах.

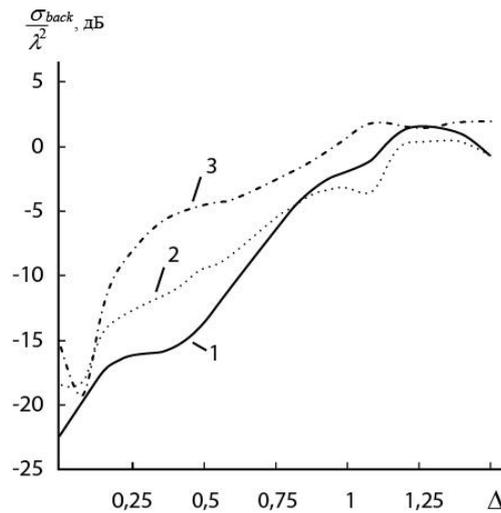


Рис. 5. Зависимость сечения обратного рассеяния от формы тела из DNGM с параметрами $\epsilon = -4, \mu = -1$ при различных углах ψ падения плоской волны. Кривая 1 соответствует углу $\psi = 45^\circ$, кривая 2 – $\psi = 60^\circ$, кривая 3 – $\psi = 90^\circ$

Fig. 5. Backscattering cross section as a function of the shape of a body from DNGM with $\epsilon = -4, \mu = -1$ at a difference incidence angles ψ of the plane wave. Curves 1, 2 and 3 corresponds to $\psi = 45^\circ, 60^\circ$ and 90° respectively

Кривая 1 на рис. 5 соответствует углу падения ψ , равному 45° , кривая 2 – $\psi = 60^\circ$, кривая 3 – $\psi = 90^\circ$. На рис. 3 в статье [5] приведены аналогичные результаты для случая, когда такой же идеально

проводящий цилиндр расположен внутри тела из обычного диэлектрика с параметрами $\varepsilon = 4$, $\mu = 1$. Как показывает рис. 5, в случае тела из DNGM при уменьшении полуосей k_{ea} и k_{eb} от 3 до 1,75 (уменьшение объема эллипсоида) наблюдается существенное увеличение сечения обратного рассеяния для всех рассмотренных углов падения плоской волны. Такое поведение сечения обратного рассеяния при изменении формы тела из DNGM принципиально отличается от его поведения в случае тела из обычного диэлектрика. Как видно из рис. 3 в [5], для тела из обычного диэлектрика имеет место тенденция уменьшения сечения обратного рассеяния при уменьшении полуосей k_{ea} и k_{eb} эллипсоида.

Заключение

Таким образом, в данной работе представлены результаты моделирования методом вспомогательных источников сечений обратного рассеяния для цилиндров, расположенных внутри шара или сфероида из «дважды негативного метаматериала». Установлено, что при расположении цилиндра внутри тела из DNGM можно существенно уменьшить сечение обратного рассеяния структуры. Установлено также, что наличие потерь в «дважды негативном метаматериале» не всегда приводит к уменьшению сечения обратного рассеяния структуры. Наконец, установлено, что при уменьшении размеров сфероида из «дважды негативного материала» в направлении, перпендикулярном по отношению к цилиндру, может наблюдаться существенное увеличение сечения обратного рассеяния структуры, тогда как для тела из обычного диэлектрика в этом случае имеет место тенденция уменьшения сечения обратного рассеяния структуры.

Список источников

1. Лагарьков А.Н., Кисель В.Н., Сарычев А.К., Семенов В.Н. Электрофизика и электродинамика метаматериалов // Теплофизика высоких температур. 2010. Т. 48, № 6. С. 1031–1048.
2. Лагарьков А.Н., Кисель В.Н., Семенов В.Н. Радиопоглощающие материалы на основе метаматериалов // Радиотехника и электроника. 2012. Т. 57, № 10. С. 1119–1127.
3. Дубинов А.Е., Мытарева Л.А. Маскировка материальных тел методом волнового обтекания // Успехи физических наук. 2010. Т. 180, № 5. С. 478–501.
4. Dubey A., Chami T.C. Metamaterials in electromagnetic wave absorbers // Defence Science Journal. 2012. V. 62 (4). P. 261–268.
5. Балашова О.М., Дмитренко А.Г. Моделирование электромагнитного рассеяния на тонком идеально проводящем цилиндре, расположенном внутри диэлектрического эллипсоида // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2024. № 66. С. 11–20. doi: 10.17223/19988605/66/2
6. Sihvola A. Metamaterials in electromagnetics // Metamaterials. 2007. V. 1. P. 2–11. doi: 10.1016/j.metmat.2007.02.003
7. Дмитренко А.Г., Мукомолов А.И. Численный метод решения задач электромагнитного рассеяния на трехмерном магнито-диэлектрическом теле произвольной формы // Радиотехника и электроника. 1995. Т. 40, № 6. С. 875–880.

References

1. Lagarkov, A.N., Kisel, V.N., Sarychev, A.K. & Semenenko, V.N. (2010) Elektrofizika i elektrodinamika matematicheskikh materialov [Electrophysics and Electrodynamics of Metamaterials]. *Teplofizika vysokikh temperatur*. 48(6). pp. 1031–1048.
2. Lagarkov, A.N., Kisel, V.N. & Semenenko, V.N. (2012) Radiopogloshchayushchie materialy na osnove metamaterialov [Radar-Absorbing Materials Based on Metamaterials]. *Radiotekhnika i elektronika*. 57(10). pp. 1119–1127.
3. Dubinov, A.E. & Mytareva, L.A. (2010) Maskirovka material'nykh tel metodom volnovogo obtekaniya [Cloaking of Material Bodies by the Wave Flow Method]. *Uspekhi fizicheskikh nauk*. 180(5). pp. 478–501.
4. Dubey, A. & Chami, T.C. (2012) Metamaterials in Electromagnetic Wave Absorbers. *Defence Science Journal*. 62(4). pp. 261–268.
5. Balashova, O.M. & Dmitrenko, A.G. (2024) Modeling of Electromagnetic Scattering by a Thin Perfectly Conducting Cylinder Located Inside a Dielectric Ellipsoid. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 66. pp. 11–20. (In Russian). doi: 10.17223/19988605/66/2
6. Sihvola, A. (2007) Metamaterials in Electromagnetics. *Metamaterials*. 1. pp. 2–11. doi: 10.1016/j.metmat.2007.02.003
7. Dmitrenko, A.G. & Mukomolov, A.I. (1995) Chislennyy metod resheniya zadach elektromagnitnogo raseyaniya na trekhmernom magnitodielektricheskom tele proizvol'noy formy [Numerical Method for Solving Problems of Electromagnetic Scattering by a Three-Dimensional Magneto-Dielectric Body of Arbitrary Shape]. *Radiotekhnika i elektronika*. 40(6). pp. 875–880.

Информация об авторах:

Дмитренко Анатолий Григорьевич – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: dmitr.tsu.202@mail.ru

Балашова Ольга Михайловна – аспирант кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: balashovajkz@mail.ru

Вклад авторов: *все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.*

Information about the authors:

Dmitrenko Anatoly G. (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: dmitr.tsu.202@mail.ru

Balashova Olga M. (Post-graduate Student, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: balashovajkz@mail.ru

Contribution of the authors: *the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.*

Поступила в редакцию 03.11.2025; принята к публикации 05.03.2026

Received 03.11.2025; accepted for publication 05.03.2026

Original article

UDC 519.213

doi: 10.17223/19988605/74/7

Hybrid replenishment policy in a dual-source queuing-inventory system with finite buffer

Ramil R. Mirzayev¹, Sevinj H. Aliyeva²^{1,2} Baku Engineering University, Baku, Azerbaijan¹ ramirzayev@beu.edu.az² sorucova@beu.edu.az

Abstract. This paper investigates a double-source queuing-inventory system with a finite buffer operating under a hybrid replenishment policy. When the inventory level decreases to the reorder point s , a regular order of fixed size $Q = S - s$ is placed with a slow but economical supplier, where S denotes the maximum warehouse capacity. If the inventory level further drops below a lower threshold r ($r < s$), the ongoing regular order is canceled and an emergency order is submitted to a faster yet more expensive supplier in order to restore the inventory to level S upon delivery. The steady-state probability distribution of the system is obtained, and analytical expressions for key performance measures are derived.

Ключевые слова: queuing-inventory system; double sources; hybrid replenishment policy; finite buffer; approximate product solution.

For citation: Mirzayev, R.R., Aliyeva, S.H. (2026) Hybrid replenishment policy in a dual-source queuing-inventory system with finite buffer. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 74. pp. 70–81. doi: 10.17223/19988605/74/7

Научная статья

doi: 10.17223/19988605/74/7

Гибридная политика пополнения запасов в двухисточниковой системе массового обслуживания и управления запасами с конечным буфером

Рамиль Рамиз Мирзоев¹, Севиндж Гамзага Алиева²^{1,2} Бакинский инженерный университет, Баку, Азербайджан¹ ramirzayev@beu.edu.az² sorucova@beu.edu.az

Аннотация. Исследуется двухисточниковая система массового обслуживания и управления запасами с конечным буфером, функционирующая при гибридной политике пополнения запасов. При снижении уровня запасов до точки заказа s размещается обычный заказ фиксированного объема $Q = S - s$ у медленного, но более экономичного поставщика, где S обозначает максимальную вместимость склада. Если уровень запасов продолжает падать и опускается ниже нижнего порогового значения r ($r < s$), текущий обычный заказ аннулируется и оформляется экстренный заказ у более быстрого, но дорогостоящего поставщика, для восстановления уровня запасов до значения S в момент доставки. Получено стационарное распределение вероятностей состояний системы, выведены аналитические выражения для основных показателей эффективности.

Ключевые слова: система массового обслуживания и управления запасами; два источника; гибридная политика пополнения запасов; конечный буфер; приближенное решение.

Для цитирования: Мирзоев Р.Р., Алиева С.Г. Гибридная политика пополнения запасов в двухисточниковой системе массового обслуживания и управления запасами с конечным буфером // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2026. № 74. С. 70–81. doi: 10.17223/19988605/74/7

Introduction

Queuing-inventory systems (QISs) constitute a significant class of stochastic models that integrate customer arrivals, service mechanisms, and inventory replenishment strategies. These systems are widely used to analyze and optimize the performance of operations in manufacturing, logistics, telecommunications, and service industries. The defining feature of QISs lies in the dynamic interaction between inventory control and queuing behavior, where item availability affects service, and customer arrival patterns influence inventory policies.

The theoretical foundation for QISs was laid by the pioneering works of Melikov and Molchanov [1] and Sigman and Simchi-Levi [2]. In [2], models were introduced that allow customers to enter the system even when inventory is unavailable, reflecting more realistic conditions in service environments. They also studied the implications of non-exponential lead time distributions, emphasizing the importance of relaxing memoryless assumptions in complex supply chains. Meanwhile, Melikov and Molchanov analyzed the steady-state behavior of QISs and proposed probabilistic tools for performance analysis.

Further developments extended QISs by incorporating various service-time distributions and inventory policies. Berman and co-authors [3] introduced models in which service requires a positive processing time, departing from the traditional assumption of instantaneous service. Their works employed dynamic programming and renewal theory to derive optimal policies and emphasized the practical relevance of such models for real-world systems.

A substantial body of literature has emerged from the contributions of Krishnamoorthy and others [4–7], who employed matrix-analytic methods (MAMs) to investigate QISs with complex structures, including level-dependent behavior, phase-type distributions, retrials, and production inventory systems. These models often addressed scenarios where items are manufactured or ordered on demand, and included features like random shelf life, intermediate buffers, and bulk service mechanisms.

The integration of retrial behavior into QISs began with Artalejo et al. [8], who considered positive inventory lead times. Analytical solutions were later investigated by Ushakumari [9] and a series of studies by Krishnamoorthy et al. [10–12], focusing on retrial QISs with perishable items, limited buffers, and various replenishment strategies.

Despite these advancements, many classical QISs are based on the assumption of a single supply source and use static replenishment policies, such as continuous review (s, S), periodic review, or reorder point mechanisms. These systems are vulnerable to disruptions and delays, making them unsuitable for high-risk applications in healthcare, military logistics, and disaster recovery. To mitigate such risks, multiple-source inventory models have gained attention. Soujanya and Laxmi [13], and Vinitha et al. [14] studied QISs with multiple suppliers – typically categorized as fast (high-cost, low lead time) and slow (low-cost, high lead time) – and aimed to optimize the trade-off between cost and responsiveness.

However, most models in this area still rely on fixed replenishment rules, which do not adapt to real-time system dynamics. In contrast, hybrid replenishment policies (HRPs) offer greater flexibility by dynamically switching between suppliers based on the current inventory level. For example, the system may cancel orders from the slow source and order from the fast source when inventory is critically low. This adaptivity is essential in minimizing stockouts and customer loss under fluctuating demand.

Melikov, Mirzayev, and Nair [15] proposed a double-source QIS with a hybrid replenishment policy and an infinite waiting room, showing that adaptive policies improve service levels and cost-efficiency. However, many real-life systems operate with finite buffer capacity, where customers arriving during full capacity are either lost or balk. Addressing this realistic constraint, a recent study by Melikov, Mirzayev, and Sztrik [16] investigated a finite-buffer QIS with two supply sources and destructible inventory, emphasizing the role of system limits and inventory decay.

In [17], a Markovian queuing-inventory system with two supply sources operating under an $(S - 1, S)$ base-stock policy was analyzed, where emergency orders are placed from a fast but costly source when the inventory level reaches a critical threshold. The model accounts for different lead times and destructive inventory events, and provides ergodicity conditions and stationary performance measures. In [18], a finite-buffer double-source QIS under a hybrid replenishment policy was studied with the objective of minimizing the total

expected cost, showing that properly chosen thresholds significantly improve both cost efficiency and service performance.

In this paper, we extend this line of research by developing a double-source queuing-inventory model with a finite buffer, governed by a hybrid replenishment policy. The model incorporates two independent suppliers with different lead times and cost characteristics. Customers arrive according to a Poisson process and are classified as c -customers, who demand an item from inventory. If inventory is unavailable, they may enter a finite-capacity waiting buffer.

We model the system as a continuous-time Markov process and develop exact analytical solutions along with approximation algorithms to compute steady-state probabilities. From these, we derive key performance measures such as average queue length, probability of stockout, customer loss probability, and long-run total cost. Numerical experiments illustrate the impact of system parameters and policy design on performance outcomes.

The contributions of this study are threefold: (1) it extends the theory of QISs by incorporating both finite buffers and dual-source replenishment; (2) it introduces a hybrid control mechanism adaptable to real-time inventory levels; and (3) it provides computational tools suitable for practical decision-making in supply chain and service system design.

1. The description of the queuing-inventory system and problem statement

We consider a double-source, single-server, finite queuing-inventory system (QIS) with a restricted buffer capacity denoted by N , where $N < \infty$. This system is designed to simultaneously manage inventory levels and customer service operations, where inventory is essential for fulfilling service requirements. The system serves two types of external arrivals: consumer customers (c -customers) and destructive customers (d -customers). The arrival process of c -customers follows a Poisson distribution with a constant rate λ , indicating that their arrivals are memoryless and occur independently over time. Each c -customer is assumed to request a single item of standard size upon arrival. These customers require immediate access to inventory to initiate the service process.

In addition to c -customers, the system is subject to a stochastic flow of d -customers, which also arrive according to a Poisson process but with a distinct rate κ . The role of d -customers is purely detrimental to the inventory: each arrival results in the destruction or removal of one inventory item. Notably, d -customers are capable of reducing inventory even if an item is currently in the process of being released to a c -customer. However, if the inventory level is already zero at the time of a d -customer's arrival, the system state remains unchanged, and no further action is taken in response to the d -customer.

When a c -customer arrives and finds both the server idle and the inventory level strictly positive, the service process commences immediately. Conversely, if the server is currently occupied but inventory is available, the arriving c -customer is placed into a finite waiting buffer. However, in situations where inventory is depleted at the time of a c -customer's arrival, the system adopts a probabilistic admission control. Specifically, the customer may choose to join the queue with probability φ_1 or may exit the system without receiving service with probability $\varphi_2 = 1 - \varphi_1$.

To model customer impatience, the system incorporates a mechanism for abandonment: when the inventory level hits zero, a c -customer already waiting in the buffer becomes impatient. Such a customer will remain in the system for a random time period, modeled by an exponentially distributed random variable with mean τ^{-1} . If the inventory is not replenished within this time, the customer will leave the system unsatisfied.

Following the completion of service, c -customers face a decision point. They may either reject the item they were served with a probability σ_1 , or proceed with the purchase with probability $\sigma_2 = 1 - \sigma_1$. The service time in both cases is governed by exponential distributions, although the mean differs depending on the outcome. If the item is rejected, the mean service duration is μ_1^{-1} , while acceptance corresponds to a longer mean service time μ_2^{-1} , reflecting the additional processing involved in completing a transaction.

Inventory replenishment in this model is sourced from two distinct suppliers, each characterized by different delivery dynamics and costs. The system has the flexibility to adapt both the lead time and the order

quantity based on the prevailing inventory level. The slow supplier (Source-1) and fast supplier (Source-2) both have exponentially distributed lead times, with mean delivery delays of v_1^{-1} and v_2^{-1} , respectively, satisfying $v_2 > v_1$, which implies that Source-2 is significantly faster. However, Source-2 is also more expensive, introducing a trade-off between responsiveness and cost.

The hybrid replenishment policy employed in the system operates under a dual-threshold mechanism. When the inventory level decreases to a lower threshold s , where $0 < s < S/2$, an order of size $Q = S - s$ is placed with Source-1, following a conventional (s, Q) policy. However, if the inventory continues to drop and reaches a more critical threshold r , with $0 \leq r < s$, the system triggers an urgent replenishment protocol: the existing order from Source-1 is canceled (incurring a penalty), and a new “Up-to- S ” policy order is immediately submitted to Source-2 to quickly restore inventory. This switching behavior introduces a hybrid replenishment mechanism that balances cost-efficiency under normal conditions with rapid response capabilities in critical situations.

The primary problem of this study is to derive the joint steady-state probability distribution of the number of c -customers in the system and the current inventory level, which together define the state of the queuing-inventory process. Furthermore, the study seeks to evaluate a variety of key performance measures, such as the expected number of customers in the system, the probability of customer loss due to buffer overflow or inventory depletion, average waiting time, service utilization, and inventory turnover rates. These insights can support both theoretical analysis and practical decision-making in inventory-dependent service environments subject to stochastic disruptions.

2. Exact and approximate algorithms

Mathematical model of this QIS is two-dimensional Markov chain (2D MC) with states (n, m) , where n is the total number of c -customers in the system (in buffer or being serviced), $n = 0, 1, \dots, N$, and m is on-hand inventory level, $m = 0, 1, \dots, S$. State space of this 2D MC is given as $E = \{0, 1, \dots, N\} \times \{0, 1, \dots, S\}$.

Transition rates from state $(n_1, m_1) \in E$ to state $(n_2, m_2) \in E$ are denoted by $q((n_1, m_1); (n_2, m_2))$. These parameters are calculated as follows:

$$q((n_1, m_1); (n_2, m_2)) = \begin{cases} \lambda\phi_1, & \text{if } n_2 = n_1 + 1, m_2 = m_1 = 0, \\ \lambda, & \text{if } n_2 = n_1 + 1, m_2 = m_1 > 0, \\ \mu_1\sigma_1, & \text{if } n_2 = n_1 - 1, m_2 = m_1 > 0, \\ \mu_2\sigma_2, & \text{if } n_2 = n_1 - 1, m_2 = m_1 - 1, \\ \kappa, & \text{if } n_2 = n_1, m_1 > 0, m_2 = m_1 - 1, \\ \tau, & \text{if } n_1 > 0, n_2 = n_1 - 1, m_2 = m_1 = 0, \\ v_1, & \text{if } n_2 = n_1, r < m_1 \leq s, m_2 = m_1 + S - s, \\ v_2, & \text{if } n_2 = n_1, 0 \leq m_1 \leq r, m_2 = S. \end{cases} \quad (1)$$

From relations (1), it follows that the constructed finite 2D MC is reducible, i.e. a stationary mode exists for any positive values of initial parameters. Let $p(n, m)$ denote the probability of being in the state $(n, m) \in E$. These probabilities can be determined from the system of global balance equations (SGBE) that represents the system of linear algebraic equations with a dimension of $(N + 1)(S + 1)$:

$$p(n_1, m_1) \sum_{(n_2, m_2) \in E_{(n_1, m_1)}^+} q((n_1, m_1); (n_2, m_2)) = \sum_{(n_2, m_2) \in E_{(n_1, m_1)}^-} q((n_2, m_2); (n_1, m_1)) p(n_2, m_2).$$

Here, the following notations are used: $E_{(n_1, m_1)}^+$ is the subset of states of E , that can be reached from state (n_1, m_1) in one step; $E_{(n_1, m_1)}^-$ is the subset of states of E , from which it is possible to go to the state (n_1, m_1) in one step.

For moderate values of parameters N and S , the SGBE can be solved using available software tools. However, when the dimension of the SGBE becomes large, computational difficulties arise. To address these challenges, below is an approximate method for calculating steady-state probabilities that is proposed.

The method described below is applicable to QIS models under the assumption that $\lambda \gg \max(\kappa, \nu_2)$. This assumption aligns with the typical working mode of real QISs. Furthermore, in practical QIS applications, the average service time for c -customers receiving inventory is significantly longer than the service time for c -customers receiving only service, meaning $\mu_1 > \mu_2$.

Based on these assumptions, the state space E of the studied 2D MC can be split as follows:

$$E = \bigcup_{m=0}^S E_m, E_{m_1} \cap E_{m_2} = \emptyset, m_1 \neq m_2, \quad (2)$$

where $E_m = \{(n, m) \in E : n = 0, 1, \dots, N\}, m = 0, 1, \dots, S$.

States from the subset E_m are glued together into a single merged state $\langle m \rangle$, and the following mapping space of merged states is constructed: $\hat{E} = \{\langle m \rangle : m = 0, 1, \dots, S\}$. In accordance with the Space Merging Method, the approximate values of steady-state probabilities are expressed as follows, see [16]:

$$p(n, m) \approx \rho_m(n) \pi(\langle m \rangle), \quad (3)$$

where $\rho_m(n)$ denote the probability of state (n, m) in the splitting model with state space E_m and $\pi(\langle m \rangle)$ denote the probability of merged state $\langle m \rangle \in \hat{E}$.

This heuristic technique decomposes the complex state space into manageable subspaces, allowing the steady-state probabilities to be approximated in a specific product form known as the Approximate Product Solution (APS). As shown in equation (3), the APS decouples the interaction between the queue length and inventory level, representing the joint distribution as the product of the conditional distribution of the queue (obtained from the split models) and the marginal distribution of the inventory (obtained from the merged model).

From relations (1) and the splitting (2), we conclude that the stationary distributions for all subsets $E_m, m = 1, \dots, S$, align with the stationary distribution of a single-server queuing system M/M/1/N, with a load $\theta = \lambda / \mu_1 \sigma_1$. In other words, for any $m > 0$ state probabilities $\rho_m(n)$ does not depend on m and these probabilities are calculated as follows (for simplicity, below in case $m > 0$ subscript m is omitted):

$$\rho(n) = \theta^n \frac{1 - \theta}{1 - \theta^{N+1}}, n = 0, 1, \dots, N. \quad (4)$$

The stationary distribution for the splitting model with state space E_0 coincides with distribution of single-server M/M/1/N with load $\psi = \lambda \varphi_1 / \tau$, i.e., we have

$$\rho_0(n) = \psi^n \frac{1 - \psi}{1 - \psi^{N+1}}, n = 0, 1, \dots, N. \quad (5)$$

By combining equations (4) and (5), we conclude that steady-state probabilities of splitting models are calculated as follows:

$$\rho_m(n) = \begin{cases} \theta^n \frac{1 - \theta}{1 - \theta^{N+1}}, m > 0, n = 0, 1, \dots, N, \\ \psi^n \frac{1 - \psi}{1 - \psi^{N+1}}, m = 0, n = 0, 1, \dots, N. \end{cases} \quad (6)$$

The merged model represents a one-dimensional Markov chain with the state space \hat{E} in which transition rates between states are calculated as

$$q(\langle m_1 \rangle, \langle m_2 \rangle) = \sum_{(n_2, m_2) \in E_{m_2}} q((n_1, m_1), (n_2, m_2)) \rho_{m_1}(n_1). \quad (7)$$

Using relations (1) and (6) from (7) we obtain

$$q(\langle m_1 \rangle, \langle m_2 \rangle) = \begin{cases} v_2, & 0 \leq m_1 \leq r, m_2 = S, \\ v_1, & r+1 \leq m_1 \leq s, m_2 = m_1 + S - s, \\ a, & m_1 > 0, m_2 = m_1 - 1, \end{cases} \quad (8)$$

where $a = \mu_2 \sigma_2 (1 - \rho(0)) + \kappa$.

Balance equations based on relations (8) have following form:

For cases $0 \leq m \leq r$:

$$\pi(\langle m \rangle) (a(1 - \delta(m, 0)) + v_2) = \pi(\langle m+1 \rangle) a, \quad (9)$$

where $\delta(i, j)$ are Kronecker's symbols.

For cases $r+1 \leq m \leq s$:

$$\pi(\langle m \rangle) (a + v_1) = \pi(\langle m+1 \rangle) a. \quad (10)$$

For cases $s+1 \leq m \leq r + (S - s)$:

$$\pi(\langle m \rangle) a = \pi(\langle m+1 \rangle) a. \quad (11)$$

For cases $(r+1) + (S - s) \leq m \leq S - 1$:

$$\pi(\langle m \rangle) a = \pi(\langle m+1 \rangle) a + v_1 \pi(\langle m - (S - s) \rangle). \quad (12)$$

For case $m = S$:

$$\pi(S) a = v_1 \pi(s) + v_2 \sum_{i=0}^r \pi(i). \quad (13)$$

For solving system of equations (9)–(13) we used recursive method. So, from equation (9) for cases $m = 1, \dots, r+1$, we obtain

$$\pi(\langle m \rangle) = \alpha_m \pi(\langle 0 \rangle), \quad (14)$$

where $\alpha_m = \frac{v_2}{a} \left(1 + \frac{v_2}{a} \right)^{m-1}$.

Similarly, from equation (10) for cases $m = r+2, \dots, s+1$, we have

$$\pi(\langle m \rangle) = \beta_m \pi(\langle 0 \rangle), \quad (15)$$

where

$$\beta_m = \frac{v_2}{a} \left(1 + \frac{v_2}{a} \right)^r \left(1 + \frac{v_1}{a} \right)^{m-r-1}.$$

From equation (11) for cases $m = s+2, \dots, r + (S - s)$, we have

$$\pi(\langle m \rangle) = \beta_{s+1} \pi(\langle 0 \rangle). \quad (16)$$

Finally, from equations (12) and (13) we have following relations:

For case $m = (r+1) + (S - s)$:

$$\pi(\langle r+1 + S - s \rangle) = \gamma \pi(\langle 0 \rangle),$$

where

$$\gamma = \frac{1}{a} \left(v_1 \left(\alpha_{r+1} + \sum_{i=r+2}^s \beta_i \right) + v_2 \sum_{i=0}^r \alpha_i \right) \quad (17)$$

and $\alpha_0 = 1$.

For case $m = (r+2) + (S - s), \dots, S$,

$$\pi(\langle m \rangle) = \gamma_m \pi(\langle 0 \rangle), \quad (18)$$

where

$$\gamma_m = \frac{1}{a} \left(v_1 \sum_{i=m+(S-s)}^s \beta_i + v_2 \sum_{i=0}^r \alpha_i \right).$$

Unknown parameter $\pi(\langle 0 \rangle)$ in equations (14)–(18) is found from normalizing condition, i.e.

$$\sum_{m=0}^S \pi(\langle m \rangle) = 1.$$

In other words, we have

$$\pi(0) = \left(1 + \sum_{i=1}^{r+1} \alpha_i + \sum_{i=r+2}^{s+1} \beta_i + (r + S - 2s - 1)\beta_{s+1} + \gamma + \sum_{m=r+2+S-s}^S \gamma_m \right)^{-1}. \quad (19)$$

Finally, the stationary probabilities of the original 2D MC are calculated approximately using (3) and relations (6) and (14)–(19).

3. Performance measures

Performance measures of the investigated system are calculated via steady-state probabilities, which provide insights into the long-term behavior of the system. Below, both exact and approximate formulas are given for the main performance measures, allowing for flexibility in analytical and computational approaches.

- Average inventory level (S_{av})

$$S_{av} = \sum_{m=1}^S m \sum_{n=0}^N p(n, m) \approx \sum_{m=1}^S m \pi(\langle m \rangle);$$

- Average supply from Source- i , $i = 1, 2$, ($V_{av}(i)$)

$$V_{av}(1) = (S - s) \sum_{m=r+1}^s \sum_{n=0}^N p(n, m) \approx (S - s) \sum_{m=r+1}^s \pi(\langle m \rangle);$$

$$V_{av}(2) = \sum_{m=0}^r (S - m) \sum_{n=0}^N p(n, m) \approx \sum_{m=0}^r (S - m) \pi(\langle m \rangle);$$

- Average number of c -customers in system (L_{av})

$$L_{av} = \sum_{n=1}^N n \sum_{m=0}^S p(n, m) \approx \sum_{n=1}^N n \sum_{m=0}^S \rho_m(n) \pi(\langle m \rangle);$$

- Average damaging rate of stocks (DRS):

$$DRS = \kappa \left(1 - \sum_{n=0}^N p(n, 0) \right) \approx (1 - \pi(\langle 0 \rangle));$$

- Average reorder rate from Source-1 (RR_1):

$$RR_1 = \kappa p(0, s+1) + (\mu_2 \sigma_2 + \kappa) \sum_{n=1}^N p(n, s+1) \approx \pi(s+1) (\kappa + \mu_2 \sigma_2 (1 - \rho(0)));$$

- Average reorder rate from Source-2 (RR_2):

$$RR_2 = \kappa p(0, r+1) + (\mu_2 \sigma_2 + \kappa) \sum_{n=1}^N p(n, r+1) \approx \pi(\langle r+1 \rangle) (\kappa + \mu_2 \sigma_2 (1 - \rho(0)));$$

- Loss rate of c -customers (RL):

$$\begin{aligned} RL &= \varphi_2 \sum_{n=0}^N p(n, 0) + \lambda \sum_{m=0}^S p(N, m) + \tau \sum_{n=1}^N p(n, 0) \approx \\ &\approx \varphi_2 \pi(\langle 0 \rangle) + \lambda \sum_{m=0}^S \rho_m(N) \pi(m) + \tau (1 - \rho_0(0)) \pi(0). \end{aligned}$$

4. Numerical results

To delve deeper into the practical implications of the proposed HRP, this section presents a comprehensive numerical analysis. By systematically varying key system parameters, we aim to elucidate their impact on

crucial performance metrics. Tables 1–10 will showcase these dependencies under a consistent set of baseline conditions. Specifically, unless otherwise stated, our numerical experiments assume the following parameter values:

$$S = 24, N = 50, s = 10, \lambda = 20, \mu_1 = 35, \mu_2 = 15, \sigma_1 = 0.4, \sigma_2 = 0.6, \\ s = 10, r = 5, \varphi_1 = 0.7, \varphi_2 = 0.3, v_1 = 0.5, v_2 = 1, \tau = 2, \kappa = 1.$$

The analysis of the results presented in these tables will provide valuable insights into the operational characteristics and sensitivity of the HRP under various conditions.

Table 1

Dependence of the performance measures on parameter N

N	S_{av}	$V_{av}(1)$	$V_{av}(2)$	L_{av}	DRS	RR_1	RR_2	RL
50	14,48	2,79	1,13	47,67	2,99	0,7	0,46	6,05
70	14,48	2,79	1,13	67,67	2,99	0,7	0,46	6,05
90	14,48	2,79	1,13	87,67	2,99	0,7	0,46	6,05
110	14,48	2,79	1,13	107,67	2,99	0,7	0,46	6,05
130	14,48	2,79	1,13	127,67	2,99	0,7	0,46	6,05

Table 1 shows that as the buffer capacity N increases, the average number of c -customers in the system (L_{av}) increases linearly, indicating effective utilization of the additional buffer space. However, all other performance measures remain constant. This suggests that inventory dynamics and loss behavior are insensitive to buffer size in this configuration, likely because inventory depletion and d -customer activity dominate customer losses, not buffer overflow.

Table 2

Dependence of the performance measures on parameter s

s	S_{av}	$V_{av}(1)$	$V_{av}(2)$	L_{av}	DRS	RR_1	RR_2	RL
6	14,133	1,030	1,686	47,675	2,988	0,561	0,687	6,077
7	14,343	1,560	1,488	47,674	2,989	0,577	0,606	6,068
8	14,451	2,010	1,336	47,674	2,991	0,605	0,544	6,061
9	14,490	2,413	1,221	47,673	2,991	0,645	0,498	6,056
10	14,480	2,793	1,135	47,673	2,992	0,700	0,462	6,052

As the replenishment threshold s increases (see Table 2), the average inventory level (S_{av}) rises slightly, indicating earlier and more stable stock replenishment. The system increasingly relies on Source-1, as reflected by rising $V_{av}(1)$ and RR_1 , while dependence on the faster, costlier Source-2 decreases ($V_{av}(2)$ and RR_2 decline). Other performance measures such as L_{av} , DRS , and RL remain nearly unchanged, suggesting that raising s enhances cost-efficiency without compromising service quality or system stability.

Table 3

Dependence of the performance measures on parameter r

r	S_{av}	$V_{av}(1)$	$V_{av}(2)$	L_{av}	DRS	RR_1	RR_2	RL
2	12,687	4,229	0,840	47,687	2,972	0,828	0,345	6,178
3	13,338	3,694	0,941	47,680	2,982	0,771	0,375	6,116
4	13,932	3,226	1,036	47,675	2,988	0,729	0,413	6,077
5	14,480	2,793	1,135	47,673	2,992	0,700	0,462	6,052
6	14,982	2,373	1,244	47,671	2,995	0,680	0,524	6,035

With an increase in the critical replenishment threshold r , the average inventory level (S_{av}) gradually rises, reflecting more frequent replenishment activity (see Table 3). Simultaneously, the usage of the slower Source-1 ($V_{av}(1)$, RR_1) decreases, while reliance on the faster Source-2 ($V_{av}(2)$, RR_2) increases. This shift indicates that higher threshold values promote a more balanced and efficient inventory supply from both sources. Other performance measures such as L_{av} , DRS , and RL remain relatively stable, confirming system robustness.

Table 4

Dependence of the performance measures on parameter λ

λ	S_{av}	$V_{av}(1)$	$V_{av}(2)$	L_{av}	DRS	RR_1	RR_2	RL
15	14,481	2,792	1,133	37,591	2,992	0,699	0,461	1,078
17	14,480	2,793	1,135	45,348	2,992	0,700	0,462	3,049
19	14,480	2,793	1,135	47,207	2,992	0,700	0,462	5,051
21	14,480	2,793	1,135	48,005	2,992	0,700	0,462	7,052
23	14,480	2,793	1,135	48,448	2,992	0,700	0,462	9,054

From Table 4 we see that as the arrival rate of c -customers (λ) increases, the average number of customers in the system (L_{av}) and the customer loss rate (RL) rise significantly, reflecting higher congestion and more frequent service denials due to buffer or inventory limitations. In contrast, the average inventory level (S_{av}) and replenishment-related measures ($V_{av}(i)$ and RR_i , $i = 1,2$) remain largely unchanged, indicating that the replenishment mechanism is already operating at full capacity. The average damaging rate of stocks (DRS) also stabilizes, suggesting inventory vulnerability is unaffected by demand intensity under the current policy.

Table 5

Dependence of the performance measures on parameter κ

κ	S_{av}	$V_{av}(1)$	$V_{av}(2)$	L_{av}	DRS	RR_1	RR_2	RL
1	14,634	2,707	0,896	47,670	0,999	0,606	0,365	6,026
2	14,557	2,754	1,016	47,671	1,996	0,653	0,414	6,037
3	14,480	2,793	1,135	47,673	2,992	0,700	0,462	6,052
4	14,402	2,824	1,253	47,674	3,986	0,746	0,510	6,069
5	14,325	2,850	1,371	47,677	4,977	0,791	0,558	6,089

Increasing the destructive arrival rate κ leads to a gradual decrease in the average inventory level (S_{av}), indicating more frequent stock depletion (see Table 5). At the same time, the average usage and replenishment rate of the faster Source-2 ($V_{av}(2)$ and RR_2) increase, while those of the slower Source-1 ($V_{av}(1)$ and RR_1) also rise but at a slower pace. The average damaging rate of stocks (DRS) grows proportionally with κ , reflecting higher overall system load. L_{av} and RL remain nearly constant, suggesting stable system performance despite increased demand.

Table 6

Dependence of the performance measures on parameter τ

τ	S_{av}	$V_{av}(1)$	$V_{av}(2)$	L_{av}	DRS	RR_1	RR_2	RL
1	14,480	2,793	1,135	47,673	2,992	0,7	0,462	6,053
3	14,480	2,793	1,135	47,672	2,992	0,7	0,462	6,051
5	14,480	2,793	1,135	47,672	2,992	0,7	0,462	6,048
7	14,480	2,793	1,135	47,670	2,992	0,7	0,462	6,046
9	14,480	2,793	1,135	47,668	2,992	0,7	0,462	6,044

Table 6 shows that as the mean patience time (τ) of c -customers increases, system performance measures remain almost constant. Only a very slight decline is observed in the average number of customers in the system (L_{av}) and the loss rate (RL), suggesting minimal sensitivity of the system to customer patience under the current configuration.

Table 7

Dependence of the performance measures on parameter μ_1

μ_1	S_{av}	$V_{av}(1)$	$V_{av}(2)$	L_{av}	DRS	RR_1	RR_2	RL
30	14,480	2,793	1,135	48,504	2,992	0,700	0,462	8,046
40	14,480	2,793	1,135	46,011	2,992	0,700	0,462	4,057
50	14,493	2,787	1,114	25,063	2,992	0,691	0,454	0,455
60	14,596	2,732	0,956	5,068	2,995	0,629	0,390	0,041
70	14,678	2,674	0,827	2,550	2,997	0,579	0,337	0,027

As the service rate μ_1 increases, the average number of customers in the system (L_{av}) and the loss rate (RL) decrease sharply, indicating reduced congestion and fewer lost customers (see Table 7). At the same time, service times $V_{av}(1)$ and $V_{av}(2)$ decrease, while inventory-related measures remain almost stable, showing that faster service mainly improves queue performance rather than inventory dynamics.

Table 8

Dependence of the performance measures on parameter μ_2

μ_2	S_{av}	$V_{av}(1)$	$V_{av}(2)$	L_{av}	DRS	RR_1	RR_2	RL
10	14,836	2,508	0,568	2,516	2,999	0,474	0,232	0,009
20	14,513	2,777	1,084	2,612	2,993	0,680	0,442	0,059
30	14,183	2,885	1,587	2,829	2,979	0,874	0,645	0,175
40	13,863	2,924	2,074	3,168	2,958	1,061	0,840	0,355
50	13,556	2,928	2,547	3,608	2,930	1,238	1,025	0,589

From Table 8 we see that as the service rate μ_2 increases, the average service time $V_{av}(2)$, the average number of customers L_{av} , and the loss rate RL all increase, indicating slower system turnover and higher congestion. Meanwhile, the average inventory level (S_{av}) decreases and both replenishment rates RR_1 and RR_2 rise, showing stronger pressure on the inventory system due to longer service durations.

Table 9

Dependence of the performance measures on parameter v_1

v_1	S_{av}	$V_{av}(1)$	$V_{av}(2)$	L_{av}	DRS	RR_1	RR_2	RL
2	14,480	2,793	1,135	47,673	2,992	0,700	0,462	6,052
3	14,510	2,569	0,844	47,671	2,994	0,787	0,344	6,038
4	14,560	2,348	0,624	47,670	2,996	0,857	0,254	6,028
5	14,618	2,141	0,462	47,669	2,997	0,913	0,188	6,021
6	14,679	1,954	0,344	47,668	2,998	0,956	0,140	6,016

Table 10

Dependence of the performance measures on parameter v_2

v_2	S_{av}	$V_{av}(1)$	$V_{av}(2)$	L_{av}	DRS	RR_1	RR_2	RL
8	14,480	2,793	1,135	47,673	2,992	0,700	0,462	6,052
9	14,585	2,794	1,049	47,671	2,994	0,693	0,481	6,036
10	14,680	2,794	0,979	47,670	2,996	0,687	0,499	6,025
11	14,765	2,793	0,921	47,669	2,997	0,680	0,517	6,018
12	14,844	2,791	0,872	47,668	2,998	0,673	0,534	6,013

As the slow supplier rate (v_1) increases, the average inventory (S_{av}) rises, service times $V_{av}(1)$ and $V_{av}(2)$ decrease, and the slow replenishment rate (RR_1) grows while the fast rate (RR_2) declines, with queue length L_{av} and loss level RL nearly unchanged (see: Table 9).

Similarly, increasing the fast supplier rate (v_2) also raises S_{av} and reduces $V_{av}(2)$, but in this case RR_2 increases while RR_1 slightly decreases, again without significant impact on L_{av} or RL (see: Table 10).

Conclusions

In this paper, we developed a comprehensive model of a double-source QIS with a finite buffer, operating under a hybrid replenishment policy. This model addresses the need for robust supply chain management in environments with potential supply disruptions. By incorporating a slow, cost-effective source and a fast, expensive emergency source, the system adaptively manages inventory. The hybrid policy switches from regular to emergency orders when inventory reaches a critical threshold, balancing cost efficiency and responsiveness.

The principal contribution is a 2D MC model capturing customer population and inventory dynamics. We developed an approximate algorithm to compute steady-state probabilities, as well as explicit formulas for key performance measures.

This study extends QIS theory applications by integrating finite buffers and a dual-source HRP. The model and algorithm under more realistic assumption provide tools for analyzing complex supply chains. Numerical results highlight the hybrid policy's effectiveness in balancing cost and responsiveness, its adaptability, and its potential to enhance system efficiency and customer satisfaction. Future research may explore models of QIS with MAP flows and PH-distributed service and lead times.

References

- Melikov, A.Z. & Molchanov, A.A. (1992) Stock optimization in transportation/storage systems. *Cybernetics and System Analysis*. 28(3). pp. 484–487. doi: 10.1007/BF01125431
- Sigman, K. & Simchi-Levi, D. (1992) Light traffic heuristic for an M/G/1 queue with limited inventory. *Annals of Operations Research*. 40. pp. 371–380. doi: 10.1007/BF02060488
- Berman, O. & Sapna, K.P. (2002) Optimal service rates of a service facility with perishable inventory items. *Naval Research Logistics*. 49. pp. 464–482.
- Krishnamoorthy, A., Lakshmy, B. & Manikandan, R. (2011) A survey on inventory models with positive service time. *OPSEARCH*. 48(2). pp. 153–169.
- Krishnamoorthy, A., Manikandan, R. & Lakshmy, B. (2015) A revisit to queueing-inventory system with positive service time. *Annals of Operations Research*. 233. pp. 221–236.
- Krishnamoorthy, A., Shajin, D. & Lakshmy, B. (2016) GI/M/1 type queueing-inventory systems with postponed work, reservation, cancellation and common lifetime. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*. 47(2). pp. 357–388.
- Krishnamoorthy, A., Varghese, R. & Lakshmy, B. (2014) An (s, Q) inventory system with positive lead time and service time under N-policy. *Calcutta Statistical Association Bulletin*. 66. pp. 85–100.
- Artalejo, J.R., Joshua, V.C. & Krishnamoorthy, A. (2002) An M/G/1 retrial queue with orbital search by the server. In: Artalejo, J.R. & Krishnamoorthy, A. (eds) *Advances in Stochastic Modelling*. NJ: Notable Publications. pp. 41–54.
- Ushakumari, P.V. (2006) On inventory system with random lead time and repeated demands. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*. 2006. pp. 1–22.
- Krishnamoorthy, A., Shajin, D. & Narayanan, V.C. (2021) Inventory with positive service time: A Survey. In: Anisimov, V. & Limnios, N. (eds) *Advanced Trends in Queueing Theory*. London: ISTE & Wiley. pp. 201–238.
- Krishnamoorthy, A., Benny, B. & Chakravarthy, S.R. (2018) Queueing-inventory system with two commodities. *Journal of the Indian Society for Probability and Statistics*. 19. pp. 1–18. doi: 10.1007/s41096-018-0052-1
- Krishnamoorthy, A., Melikov, A.Z. & Shajin, D. (2011) On partial and complete blocking set of states in queueing-inventory model. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*. 18(2). pp. 189–201.
- Soujanya, M.L. & Laxmi, P.V. (2021) Analysis on dual supply inventory model having negative arrivals and finite lifetime inventory. *Reliability: Theory & Applications*. 16. pp. 295–301.
- Vinitha, V., Anbazhagan, N., Amutha, S., Jeganathan, K., Shrestha, B., Song, H.-K., Joshi, G.P. & Moon, H. (2022) Analysis of a stochastic inventory model on random environment with two classes of suppliers and impulse customers. *Mathematics*. 10(2235). doi: 10.3390/math10132235
- Melikov, A.Z., Mirzayev, R.R. & Nair, S.S. (2022) Double sources queueing-inventory system with hybrid replenishment policy. *Mathematics*. 10(2423). doi: 10.3390/math10142423
- Melikov, A.Z., Mirzayev, R.R. & Sztrik, J. (2023) Double-sources queueing-inventory systems with finite waiting room and destructible stocks. *Mathematics*. 11(226). doi: 10.3390/math11010226
- Mirzayev, R.R. (2022) A model of a queueing system with a base stock policy and two supply sources. *Informatics and Control Problems*. 42(1). pp. 26–32.
- Mirzayev, R. (2025) Optimal cost analysis in a double-source queueing-inventory system under hybrid replenishment policy. *J. of Baku Eng. University – Mathematics and Computer Science*. 9(1). pp. 19–25.

Information about the authors:

Mirzoyev Ramil R. (Senior Lecturer of the Department of Mathematics and Computer Science, Baku Engineering University, Baku, Azerbaijan). E-mail: ramirzayev@beu.edu.az

Aliyeva Sevinj H. (Associate Professor, Candidate of Technical Sciences, Head of the Department of Information Technologies and Programming, Baku Engineering University, Baku, Azerbaijan). E-mail: sorucova@beu.edu.az

Contribution of the authors: *Mirzoyev R.R. gave the formulation of the problem, the mathematical derivation of formulas, calculations, obtaining and interpreting the results, writing the main text of the article. Aliyeva S.G. performed scientific consulting, definition of research methodology, critical analysis and approval of the final version of the article. The authors declare no conflicts of interests.*

Информация об авторах:

Мирзоев Рамиль Рамиз – старший преподаватель кафедры математики и компьютерных наук Бакинского инженерного университета (Баку, Азербайджан). E-mail: ramirzayev@beu.edu.az

Алиева Севиндж Гамзага – доцент, кандидат технических наук, заведующая кафедрой информационных технологий и программирования Бакинского инженерного университета (Баку, Азербайджан). E-mail: sorucova@beu.edu.az

Вклад авторов: *Мирзоевым Р.Р. дана постановка задачи, математический вывод формул, проведение вычислений, получение и интерпретация результатов, написание основного текста статьи. Алиева С.Г. выполнила научное консультирование, определение методологии исследования, критический анализ и утверждение окончательного варианта статьи. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.*

Поступила в редакцию 23.11.2025; принята к публикации 05.03.2026

Received 23.11.2025; accepted for publication 05.03.2026

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

DATA PROCESSING

Научная статья
УДК 681.324
doi: 10.17223/19988605/74/8

Влияние ошибок вытеснения на вероятность попадания в кэш

Сергей Эрикович Воробейчиков¹, Александр Викторович Корсун², Анна Сергеевна Морозова³,
Сергей Петрович Сущенко⁴, Алексей Сергеевич Шкуркин⁵

^{1, 2, 3, 4, 5} Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия

⁴ Томский филиал Федерального исследовательского центра
информационных и вычислительных технологий, Томск, Россия

¹ sev@mail.tsu.ru

² aleksnfs15@gmail.com

³ annamo12@yandex.ru

⁴ ssp.inf.tsu@gmail.com

⁵ shkurkin@mail.tsu.ru

Аннотация. Рассмотрен процесс заполнения ассоциативного кэша самыми востребованными адресуемыми объектами. Исследование основано на стратегии идеального вытеснения с ошибками, моделируемой многомерной марковской цепью. В аналитическом виде получены оценки вероятности попадания в кэш произвольной ассоциативности. Показана область применимости полученных оценок.

Ключевые слова: кэш; стратегии вытеснения; ошибки вытеснения; вероятность попадания в кэш; распределение вероятностей востребованности адресуемых объектов; цепь Маркова.

Для цитирования: Воробейчиков С.Э., Корсун А.В., Морозова А.С., Сущенко С.П., Шкуркин А.С. Влияние ошибок вытеснения на вероятность попадания в кэш // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2026. № 74. С. 82–94. doi: 10.17223/19988605/74/8

Original article
doi: 10.17223/19988605/74/8

The effect of preemption errors on the probability of cache hits

Sergey E. Vorobeychikov¹, Alexander V. Korsun², Anna S. Morozova³,
Sergey P. Sushchenko⁴, Alexey S. Shkurkin⁵

^{1, 2, 3, 4, 5} National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

⁴ Tomsk Branch of the Federal Research Center for Information and Computing Technologies, Tomsk, Russian Federation

¹ sev@mail.tsu.ru

² aleksnfs15@gmail.com

³ annamo12@yandex.ru

⁴ ssp.inf.tsu@gmail.com

⁵ shkurkin@mail.tsu.ru

Abstract. The process of filling an associative cache with the most frequently accessed objects is examined. The study is based on a perfect eviction strategy with errors, modeled by a multivariate Markov chain. Estimates of the cache hit probability for arbitrary associativity are obtained analytically. The applicability of these estimates is demonstrated.

Keywords: cache; eviction strategies; eviction errors; cache hit probability; addressable object demand probability distribution; Markov chain.

For citation: Vorobeychikov, S.E., Korsun, A.V., Morozova, A.S., Sushchenko, S.P., Shkurkin, A.S. (2026) The effect of preemption errors on the probability of cache hits. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 74. pp. 82–94. doi: 10.17223/19988605/74/8

Введение

Важнейшей характеристикой кэш-памяти вычислительных систем является вероятность попадания, в значительной мере определяющая скорость доступа к адресуемым объектам. Основа применения кэша для балансировки скоростей обработки потока команд процессором и доступа к адресуемым объектам в оперативной памяти – принцип пространственно-временной локальности [1]. Основным фактором, определяющим вероятность попадания в ассоциативный кэш, является механизм вытеснения уже загруженных в кэш блоков памяти при возникновении конфликта адресов [2, 3]. Обычно вытеснению подлежат самые неиспользуемые процессором блоки памяти. Такое вытеснение реализует идеальная стратегия [2]. Для реализации идеальной стратегии вытеснения требуется знание вероятностей востребованности блоков оперативной памяти с загруженными в нем приложениями. Данные вероятности оцениваются на основе статистики обращения процессора к загруженным в кэш блокам памяти. При этом возможны ошибки оценивания, которые приводят к вытеснению «нужных» процессору блоков памяти. Как правило, ошибки обусловлены несовершенством реализуемых стратегий вытеснения, степенью рассеяния распределения востребованности адресуемых объектов процессором и недостаточной ассоциативностью кэша, приводящей к преждевременному вытеснению «нужных» объектов [4, 5]. Сравнительное исследование эффективности различных стратегий вытеснения и трудоемкости их реализации проводилось в работах [4–10]. Повышение эффективности работы кэша программными методами локализации размещения массивов и структур обрабатываемых данных рассмотрено в [4]. Авторы [5, 6] выполнили логический анализ различных стратегий вытеснения и ресурсоемкости алгоритмизации стратегий (затраты на память и время выполнения), а также экспериментальные измерения их эффективности. В работе [7] исследованы методы нейтрализации конфликта адресов ассоциативным кэшированием и стратегиями замещения в кэше загруженных объектов. В [8] проведено имитационное моделирование интенсивности попадания в кэш для различных приложений с широким спектром показателей локальности. Авторы [9] предложили способ натуральных измерений быстродействия элементов иерархической памяти и политик вытеснения адресуемых объектов. В [10] проанализирована зависимость быстродействия иерархической памяти от ассоциативности и коэффициента неблокируемости транзакций доступа к адресуемым объектам при промахах в кэше. Однако анализ зависимости эффективности стратегий и ресурсоемкости их алгоритмизации от ассоциативности кэша, глубины его неблокируемости и объема отображаемой на кэш оперативной памяти выполнялся только численно. Исследование идеальной стратегии вытеснения наименее востребованного блока с ошибками проводилось в [2], но только для кэша с коэффициентом ассоциативности, равным двум, и существенно ограниченным числом блоков памяти, отображаемых на группу кэша. В данной работе выполнен анализ влияния таких ошибок на вероятность попадания в кэш произвольной ассоциативности и емкости отображаемой памяти.

1. Модель кэша для вытесняющей стратегии с ошибками

Известные исследования эффективности ассоциативного кэширования [2] опираются на математическую модель кэша с идеальной стратегией вытеснения самого неиспользуемого процессором блока памяти (с наименьшей вероятностью востребованности). При этом предполагается, что номера блоков памяти m , отображаемых на заданную группу кэша ассоциативности $A > 1$, упорядочены по убыванию вероятности востребованности процессором f_m , $m = \overline{0, M-1}$. Модель основана на многомерной (размерности A) марковской цепи, описывающей процесс замещения блоков памяти, загруженных в кэш, при конфликте адресов. Состояниям цепи соответствует набор номеров блоков памяти, содержащихся в группе кэша [2]. Переходы между состояниями задаются вероятностями востребованных процессором

отсутствующих в заполненной группе кэша блоков памяти. В стационарных условиях марковская цепь распадается на $A!$ неприводимых подцепей [2]. При идеальном вытеснении множество стационарных состояний цепи Маркова имеет вид, приведенный на рис. 1. Если допустить, что ошибки вытеснения возможны в любом состоянии марковской цепи, то получаем неразрешимую в аналитическом виде систему уравнений равновесия.

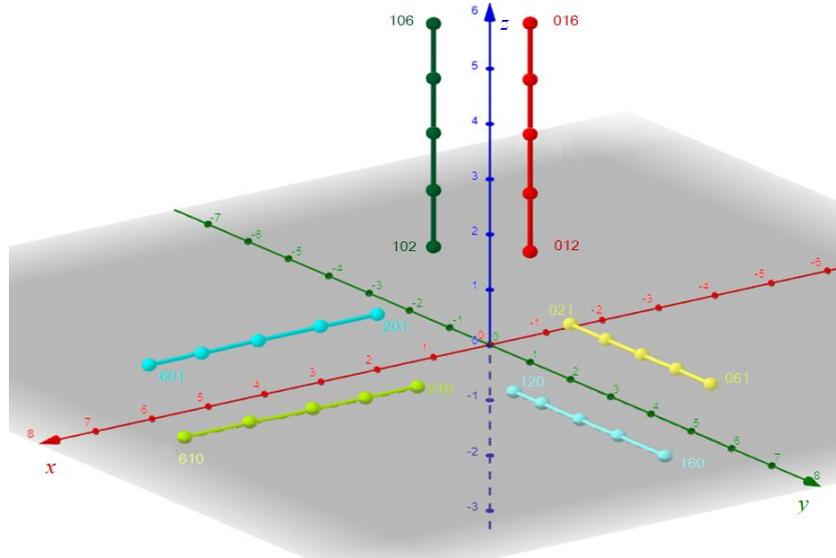


Рис. 1. Цепь Маркова, описывающая динамику идеального вытеснения блоков памяти при $A = 3, M = 6$
 Fig. 1. Markov chain describing the dynamics of ideal memory block eviction under $A = 3, M = 6$

Для получения аналитического решения допустим, что ошибки, обусловленные недостаточной статистикой обращения к адресуемым объектам, имеют место только в состоянии, в котором группа кэша содержит A самых востребованных блоков памяти (с номерами $m = \overline{0, A-1}$). Полагаем, что с вероятностью ошибки $e_a, a = \overline{0, A-2}, \sum_{a=0}^{A-2} e_a \leq 1$, в данном состоянии из кэша вытесняются блоки памяти с номером a . Очевидно, что неидеальное вытеснение блоков в этом состоянии приведет к самому значимому снижению вероятности попадания в кэш в силу вытеснения объективно наиболее востребованных блоков памяти. Полагаем, что в остальных состояниях цепи Маркова механизм вытеснения работает идеально.

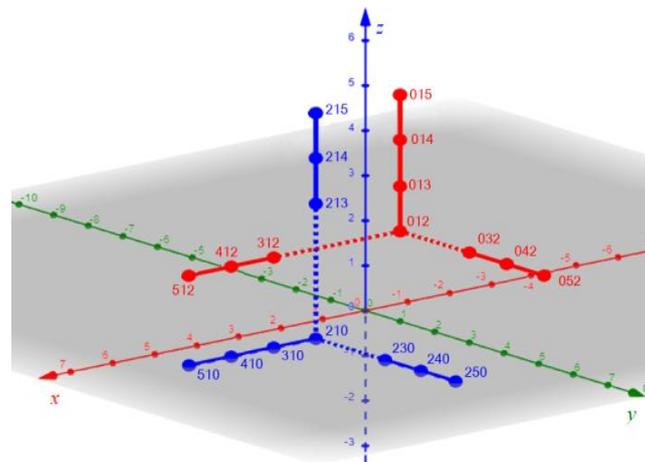


Рис. 2. Две из шести подцепей цепи Маркова, описывающей динамику неидеального вытеснения блоков памяти при $A = 3, M = 5$
 Fig. 2. Two of the six subchains of the Markov chain describing the dynamics of non-ideal eviction of memory blocks under $A = 3, M = 5$

Считаем, что известны объективные вероятности востребованности процессором блоков памяти вычислителя и в зависимости от механизма, реализующего вытеснение блоков при конфликте адресов, заданы вероятности ошибки, возможные при оценке вероятности востребованности адресуемых объектов f_m . Полагаем, что данные ошибки приводят к некорректному вытеснению адресуемых объектов. Цепь Маркова при этом распадается на факториальное число ($A!$) структурно одинаковых неприводимых подцепей (рис. 2), в пределах которых переходные вероятности примут вид:

$$\pi_{IJ} = \begin{cases} f_m \left(1 - \sum_{l=0}^{A-2} e_l \right), I = \{i_0, i_1, \dots, i_{A-1}\}, i_a = \overline{0, M-1}, a = \overline{0, A-1}, J = \{j_0, j_1, \dots, j_{A-1}\}, j_k = m, k = \arg \left\{ \frac{\max m_a}{a = \overline{0, A-1}} \right\}, \\ j_a = i_a, a = \overline{0, A-1}, a \neq k; \\ f_m e_l, I = \{i_0, i_1, \dots, i_{A-1}\}, i_a = \overline{0, A-1}, a = \overline{0, A-1}, J = \{j_0, j_1, \dots, j_{A-1}\}, j_k = m, k = \arg \left\{ \frac{m_a = l}{a = \overline{0, A-1}} \right\}, \\ j_a = i_a, a = \overline{0, A-1}, a \neq k; \\ f_m, I = \{i_0, i_1, \dots, i_{A-1}\}, i_a = \overline{0, M-1}, a = \overline{0, A-1}, J = \{j_0, j_1, \dots, j_{A-1}\}, j_k = m, k = \arg \left\{ \frac{\max m_a}{a = \overline{0, A-1}} \right\}, \\ j_a = i_a, a = \overline{0, A-1}, a \neq k. \end{cases}$$

Предположим, что $P(m_0, m_1, \dots, m_{A-1})$ – вероятность состояния, в котором кэш с коэффициентом ассоциативности A содержит блоки памяти с номерами m_0, m_1, \dots, m_{A-1} , $m_a = \overline{0, M-1}$, $a = \overline{0, A-1}$, $m_i \neq m_j$, $i, j = \overline{0, A-1}$. Тогда оценка вероятности обнаружения m -го блока памяти в кэше определится соотношением [2]

$$\hat{\Pi}_m(A, \vec{F}) = \sum_{m_0=0}^{M-1} \sum_{m_1=m_0+1}^{M-1} \dots \sum_{m_{A-2}=m_{A-3}+1}^{M-1} A! P(m, m_0, \dots, m_{A-2}), m = \overline{0, M-1}. \quad (1)$$

Здесь $\vec{F} = \{f_0; f_2; \dots; f_{M-1}\}$ – вектор упорядоченных по убыванию вероятностей востребованности процессором блоков памяти, отображаемых на ассоциативный кэш. Оценка вероятности попадания адресуемого объекта в кэш ассоциативности A задается выражением [2]

$$\hat{\Pi}(A, \vec{F}) = \sum_{m=0}^{M-1} \hat{\Pi}_m(A, \vec{F}) f_m. \quad (2)$$

2. Вероятности состояний цепи Маркова

Для ассоциативности $A = 2$ цепь Маркова распадается на две неприводимые подцепи. Одна подцепь содержит набор состояний $(0, m)$, $m = \overline{1, M-1}$, и $(m, 1)$, $m = \overline{2, M-1}$, а другая – набор $(m, 0)$, $m = \overline{1, M-1}$, и $(1, m)$, $m = \overline{2, M-1}$. Уравнения равновесия для первой подцепи принимают вид:

$$P(0, 1) \sum_{m=2}^{M-1} f_m = f_0 \sum_{m=2}^{M-1} P(m, 1) + f_1 \sum_{m=2}^{M-1} P(0, m); \quad P(0, n) \sum_{m=1, m \neq n}^{M-1} f_m = f_n \left(P(0, 1)(1 - e_0) + \sum_{m=2, m \neq n}^{M-1} P(0, m) \right); \\ P(n, 1) \sum_{m=0, m \neq n}^{M-1} f_m = f_n \left(P(0, 1)e_0 + \sum_{m=2, m \neq n}^{M-1} P(m, 1) \right), \quad n = \overline{2, M-1}.$$

Вторая подцепь в стационарных условиях описывается симметричными уравнениями

$$P(1, 0) \sum_{m=2}^{M-1} f_m = f_0 \sum_{m=2}^{M-1} P(1, m) + f_1 \sum_{m=2}^{M-1} P(m, 0); \quad P(n, 0) \sum_{m=1, m \neq n}^{M-1} f_m = f_n \left(P(1, 0)(1 - e_0) + \sum_{m=2, m \neq n}^{M-1} P(m, 0) \right); \\ P(1, n) \sum_{m=0, m \neq n}^{M-1} f_m = f_n \left(P(1, 0)e_0 + \sum_{m=2, m \neq n}^{M-1} P(1, m) \right), \quad n = \overline{2, M-1}.$$

С учетом условия нормировки отсюда получаем вероятности состояний цепи Маркова

$$P(0,1) = P(1,0) = \frac{f_0 f_1}{2U_2}; \quad P(0,m) = P(m,0) = \frac{f_0 f_m (1 - e_0)}{2U_2}; \quad P(1,m) = P(m,1) = \frac{f_0 f_m e_0}{2U_2}, \quad m = \overline{2, M-1}; \quad (3)$$

$$U_2 = f_0(1 - f_0) - e_0(f_0 - f_1)(1 - f_0 - f_1).$$

При $A = 3$ цепь Маркова в стационарных условиях распадается на шесть неприводимых подцепей, две из которых проиллюстрированы на рис. 2. Уравнения равновесия для одной из подцепей имеют вид:

$$P(0,1,2) \sum_{m=3}^{M-1} f_m = f_0 \sum_{m=3}^{M-1} P(m,1,2) + f_1 \sum_{m=3}^{M-1} P(0,m,2) + f_2 \sum_{m=3}^{M-1} P(0,1,m);$$

$$P(0,1,n) \sum_{m=2, m \neq n}^{M-1} f_m = f_0 \sum_{m=n+1}^{M-1} P(m,1,n) + f_1 \sum_{m=n+1}^{M-1} P(0,m,n) + f_n \left[(1 - e_0 - e_1) P(0,1,2) + \sum_{m=3, m \neq n}^{M-1} P(0,1,m) \right];$$

$$P(0,n,2) \left(f_1 + \sum_{m=3, m \neq n}^{M-1} f_m \right) = f_0 \sum_{m=n+1}^{M-1} P(m,n,2) + f_2 \sum_{m=n+1}^{M-1} P(0,n,m) + f_n \left[e_1 P(0,1,2) + \sum_{m=3, m \neq n}^{M-1} P(0,m,2) \right];$$

$$P(n,1,2) \left(f_0 + \sum_{m=3, m \neq n}^{M-1} f_m \right) = f_1 \sum_{m=n+1}^{M-1} P(n,m,2) + f_2 \sum_{m=n+1}^{M-1} P(n,1,m) + f_n \left[e_0 P(0,1,2) + \sum_{m=3, m \neq n}^{M-1} P(m,1,2) \right], \quad n = \overline{3, M-1}.$$

Отсюда с учетом того, что возвратными [11] являются только состояния $(0, 1, m)$, $m = \overline{2, M-1}$; $(0, m, 2)$, $(m, 1, 2)$, $m = \overline{3, M-1}$, получаем вероятности состояний цепи Маркова

$$\begin{cases} P(0,1,2) = P(0,2,1) = P(1,0,2) = P(1,2,0) = P(2,0,1) = P(2,1,0) = \frac{f_0 f_1 f_2}{6U_3}; \\ P(0,1,m) = P(0,m,1) = P(1,0,m) = P(1,m,0) = P(m,0,1) = P(m,1,0) = \frac{f_0 f_1 f_m (1 - e_0 - e_1)}{6U_3}, \quad m = \overline{3, M-1}; \\ P(m,1,2) = P(1,2,m) = P(1,m,2) = P(2,1,m) = P(2,m,1) = P(m,2,1) = \frac{f_1 f_2 f_m e_0}{6U_3}, \quad m = \overline{3, M-1}; \end{cases} \quad (4)$$

$$U_3 = f_0 f_1 (1 - f_0 - f_1) - (1 - f_0 - f_1 - f_2)(e_0 f_1 (f_0 - f_2) + e_1 f_0 (f_1 - f_2)).$$

При $e_a = 0$, $a = \overline{0,1}$, вероятности состояний цепи Маркова принимают известный вид [2]:

$$P(0,1,m) = P(0,m,1) = P(1,0,m) = P(1,m,0) = P(m,0,1) = P(m,1,0) = \frac{f_m}{6(1 - f_0 - f_1)}, \quad m = \overline{2, M-1}.$$

Стационарный режим для ассоциативности $A = 4$ описывается следующей системой уравнений равновесия одной из 24 неприводимых подцепей Маркова:

$$P(0,1,2,3) \sum_{m=4}^{M-1} f_m = f_0 \sum_{m=4}^{M-1} P(m,1,2,3) + f_1 \sum_{m=4}^{M-1} P(0,m,2,3) + f_2 \sum_{m=4}^{M-1} P(0,1,m,3) + f_3 \sum_{m=4}^{M-1} P(0,1,2,m);$$

$$P(0,1,2,n) \sum_{m=3, m \neq n}^{M-1} f_m = f_0 \sum_{m=n+1}^{M-1} P(m,1,2,n) + f_1 \sum_{m=n+1}^{M-1} P(0,m,2,n) + f_2 \sum_{m=n+1}^{M-1} P(0,1,m,n) + f_n \left[(1 - e_0 - e_1 - e_2) P(0,1,2,3) + \sum_{m=4, m \neq n}^{M-1} P(0,1,2,m) \right], \quad n = \overline{4, M-1};$$

$$P(0,1,n,3) \left(f_2 + \sum_{m=4, m \neq n}^{M-1} f_m \right) = f_0 \sum_{m=n+1}^{M-1} P(m,1,n,3) + f_1 \sum_{m=n+1}^{M-1} P(0,m,n,3) + f_3 \sum_{m=n+1}^{M-1} P(0,1,n,m) + f_n \left[e_2 P(0,1,2,3) + \sum_{m=4, m \neq n}^{M-1} P(0,1,m,3) \right], \quad n = \overline{4, M-1};$$

$$P(0,n,2,3) \left(f_1 + \sum_{m=4, m \neq n}^{M-1} f_m \right) = f_0 \sum_{m=n+1}^{M-1} P(m,n,2,3) + f_2 \sum_{m=n+1}^{M-1} P(0,n,m,3) + f_3 \sum_{m=n+1}^{M-1} P(0,n,2,m) +$$

$$\begin{aligned}
 & + f_n \left[e_1 P(0,1,2,3) + \sum_{m=4, m \neq n}^{M-1} P(0,m,2,3) \right], n = \overline{4, M-1}; \\
 P(n,1,2,3) \left(f_0 + \sum_{m=4, m \neq n}^{M-1} f_m \right) & = f_1 \sum_{m=n+1}^{M-1} P(n,m,2,3) + f_2 \sum_{m=n+1}^{M-1} P(n,1,m,3) + f_3 \sum_{m=n+1}^{M-1} P(n,1,2,m) + \\
 & + f_n \left[e_0 P(0,1,2,3) + \sum_{m=4, m \neq n}^{M-1} P(m,1,2,3) \right], n = \overline{4, M-1}.
 \end{aligned}$$

С учетом условия нормировки решение данной системы уравнений примет вид:

$$\left\{ \begin{aligned}
 P(m_0, m_1, m_2, m_3) & = \frac{1}{24U_4} \prod_{a=0}^3 f_a, m_a = \overline{0,3}, a = \overline{0,3}, m_i \neq m_j, i, j = \overline{0,3}, i \neq j; \\
 P(m_0, m_1, n_a, m_3) & = \frac{1}{24U_4} f_{n_a} \prod_{i=0}^2 f_i \left(1 - \sum_{j=0}^{A-2} e_j \right), n_a = \overline{4, M-1}, a = \overline{0,3}, m_i = \overline{0,2}, m_i \neq m_j, i, j = \overline{0,3}, i \neq j; \\
 P(m, l, n_a, k) & = \frac{1}{24U_4} e_b f_{n_a} \prod_{i=0}^2 f_i, n_a = \overline{4, M-1}, a = \overline{0,3}, m, l, k = \overline{0,3}, m \neq l \neq k;
 \end{aligned} \right. \quad (5)$$

$$U_4 = \left(1 - \sum_{i=0}^2 f_i \right) \prod_{i=0}^2 f_i - \left(1 - \sum_{i=0}^3 f_i \right) \left[\sum_{a=0}^{A-2} e_a (f_a - f_3) \prod_{i=0, i \neq a}^2 f_i \right].$$

Здесь b – разность двух множеств, $b = B \setminus B, B = \{0,1,2,3\}, B = \{m,l,k\}$. При нулевых ошибках ($e_a = 0, a = \overline{0,2}$) вероятности состояний преобразуются к виду[2]:

$$P(m_0, \dots, m_1, \dots, m_2) = \frac{f_m}{24(1 - f_0 - f_1 - f_2)}, m = \overline{3, M-1}, m_a = \overline{0,2}, a = \overline{0,2}.$$

В случае произвольной ассоциативности для одной из неприводимых подцепей Маркова условия равновесия описываются уравнениями

$$\begin{aligned}
 P(0,1, \dots, A-1) \sum_{m=A}^{M-1} f_m & = \sum_{a=0}^{A-1} f_a \sum_{k_a=A}^{M-1} P(0,1, \dots, k_a, \dots, A-1); \\
 P(0,1, \dots, A-2, n) \sum_{m=A-1, m \neq n}^{M-1} f_m & = \sum_{a=0}^{A-2} f_a \sum_{m_a=n+1}^{M-1} P(0,1, \dots, m_a, \dots, A-2, n) + \\
 & + f_n \left[\left(1 - \sum_{a=0}^{A-2} e_a \right) P(0,1, \dots, A-1) + \sum_{m=A, m \neq n}^{M-1} P(0,1, \dots, A-2, m) \right], n = \overline{A, M-1}; \\
 P(0,1, \dots, n_a, \dots, A-1) \left[f_a + \sum_{m=A, m \neq n_a}^{M-1} f_m \right] & = \sum_{i=0, i \neq a}^{A-1} f_i \sum_{m_i=n_a+1}^{M-1} P(0,1, \dots, m_i, \dots, n_a, \dots, A-1) + \\
 & + f_n \left[e_a P(0,1, \dots, A-1) + \sum_{m_i=A, m_i \neq n_a}^{A-1} P(0,1, \dots, k_i, \dots, A-2, n) \right], a = \overline{0, A-2}, n = \overline{A, M-1}.
 \end{aligned}$$

Решение с учетом условия нормировки принимает вид:

$$\left\{ \begin{aligned}
 P(0,1, \dots, A-1) & = \prod_{a=0}^{A-1} f_a / A! U_A; \\
 P(0,1, \dots, A-2, m) & = \left(1 - \sum_{a=0}^{A-2} e_a \right) f_m \prod_{i=0}^{A-2} f_i / A! U_A, m = \overline{A, M-1}; \\
 P(0,1, \dots, a-1, m, a+1, \dots, A-2) & = e_a f_m \prod_{i=0}^{A-2} f_i / A! U_A, m = \overline{A, M-1};
 \end{aligned} \right. \quad (6)$$

$$U_A = \left(1 - \sum_{a=0}^{A-2} f_a \right) \prod_{i=0}^{A-2} f_i - \left(1 - \sum_{a=0}^{A-1} f_a \right) \left[\sum_{a=0}^{A-2} e_a (f_a - f_{A-1}) \prod_{i=0, i \neq a}^{A-2} f_i \right].$$

3. Вероятность попадания адресуемых объектов в кэш

Найдем оценки вероятности попадания в кэш востребованных процессором блоков памяти. Согласно (1) при $A = 2$ для оценок вероятностей попадания в кэш отдельных блоков памяти из (3) получаем:

$$\hat{\Pi}_0(2, \vec{F}) = \frac{f_0 [1 - f_0 - e_0(1 - f_0 - f_1)]}{U_2}, \quad \hat{\Pi}_1(2, \vec{F}) = \frac{f_1 [f_0 + e_0(1 - f_0 - f_1)]}{U_2},$$

$$\hat{\Pi}_m(2, \vec{F}) = \frac{f_m [f_0 - e_0(f_0 - f_1)]}{U_2}, \quad m = \overline{2, M-1}.$$

Оценка вероятности попадания в кэш (2) составит

$$\hat{\Pi}(2, \vec{F}) = \frac{1}{U_2} \left\{ f_0 (f_0 (1 - f_0) + f_1^2) - e_0 (1 - f_0 - f_1) (f_0 - f_1) (f_0 + f_1) + [(f_0 - e_0 (f_0 - f_1))] \sum_{m=2}^{M-1} f_m^2 \right\}.$$

Нетрудно убедиться, что при отсутствии ошибок вытеснения ($e_0 = 0$) вероятность попадания в кэш отдельных блоков памяти принимает известный вид [2]: $\Pi_0(2, \vec{F}) = 1$, $\Pi_m(2, \vec{F}) = \frac{f_m}{1 - f_0}$, $m = \overline{1, M-1}$.

На рис. 3 приведена зависимость оценок вероятностей обнаружения отдельных блоков памяти в кэше от вероятности корректного вытеснения блоков памяти при $A = 2$ и $M = 4$ для распределения востребованности адресуемых объектов вида: $\vec{F} = \{0, 4; 0, 3; 0, 2; 0, 1\}$.

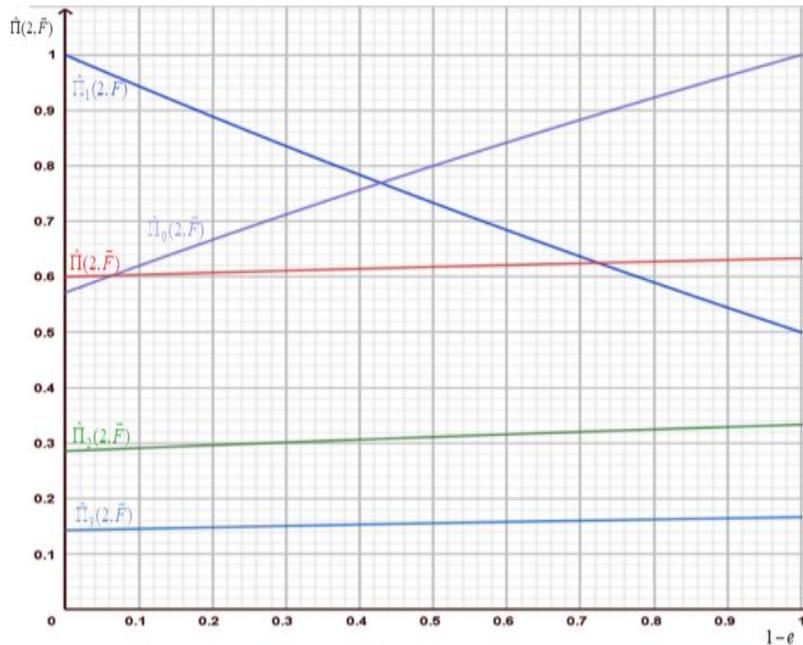


Рис. 3. Зависимость оценок вероятностей обнаружения отдельных блоков памяти в кэше $\hat{\Pi}_m(2), m = \overline{0, 3}$ и оценки попадания в кэш от вероятности правильного решения при $A = 2, M = 4$

Fig. 3. Dependence of estimates of the probabilities of detecting individual memory blocks in the cache $\hat{\Pi}_m(2), m = \overline{0, 3}$ and the estimate of hitting the cache on the probability of a correct decision when $A = 2, M = 4$

Для кэша с коэффициентом ассоциативности $A = 3$ вероятности обнаружения в нем блоков памяти и вероятности попадания в кэш из (1), (2) и (4) определяются соотношениями

$$\hat{\Pi}_0(3, \vec{F}) = f_0 [f_1 (1 - f_0 - f_1) - (1 - f_0 - f_1 - f_2) (e_0 f_1 + e_1 (f_1 - f_2))] / U_3,$$

$$\hat{\Pi}_1(3, \vec{F}) = f_1 [f_0 (1 - f_0 - f_1) - (1 - f_0 - f_1 - f_2) (e_0 (f_0 - f_2) + e_1 f_0)] / U_3,$$

$$\hat{\Pi}_2(3, \vec{F}) = f_2 [f_0 f_1 + (1 - f_0 - f_1 - f_2) (e_0 f_1 + e_1 f_0)] / U_3,$$

$$\hat{\Pi}_m(3, \bar{F}) = f_m [f_0 f_1 - e_0 f_1 (f_0 - f_2) - e_1 f_0 (f_1 - f_2)] / U_3, \quad m = \overline{3, M-1}.$$

$$\hat{\Pi}(3, \bar{F}) = \frac{1}{U_3} \left\{ f_0 f_1 [(1 - f_0 - f_1)(f_0 + f_1) + f_2^2] - (1 - f_0 - f_1 - f_2) \times \right.$$

$$\times \left\{ e_0 f_1 [(f_0 - f_2)(f_0 + f_1 + f_2)] + e_1 f_0 [(f_1 - f_2)(f_0 + f_1 + f_2)] \right\} +$$

$$\left. + [f_0 f_1 - e_0 f_1 (f_0 - f_2) - e_1 f_0 (f_1 - f_2)] \sum_{m=3}^{M-1} f_m^2 \right\}.$$

Вид зависимости оценок обнаружения отдельных блоков памяти в кэше ассоциативности, равной трем, для распределения востребованности $\bar{F} = \{0, 4; 0, 3; 0, 15; 0, 1; 0, 05\}$ иллюстрируется на рис. 4.

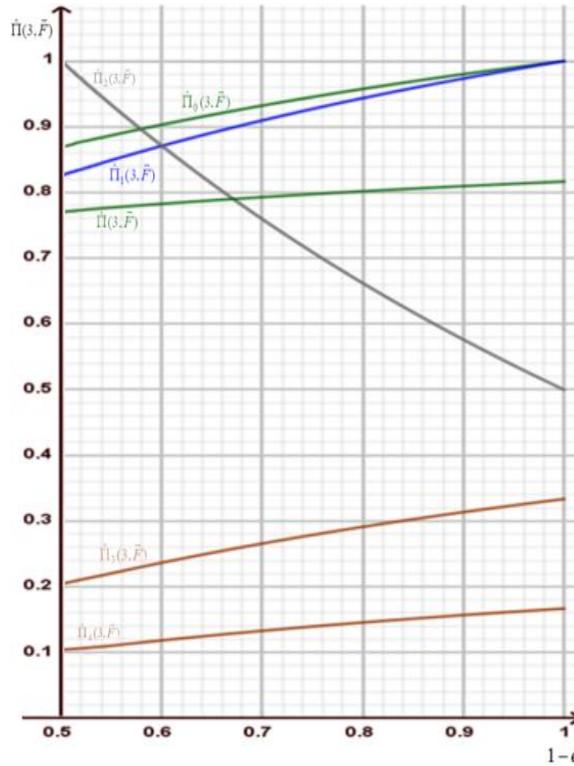


Рис. 4. Зависимость оценок вероятностей обнаружения отдельных блоков памяти в кэше $\hat{\Pi}_m(3), m = \overline{0, 3}$ и оценки попадания в кэш от вероятности правильного решения при $A = 3, M = 5$ и равновероятных ошибках
 Fig. 4. Dependence of estimates of the probabilities of detecting individual memory blocks in the cache $\hat{\Pi}_m(3), m = \overline{0, 3}$ and the cache hit rate from the probability of a correct solution when $A = 3, M = 5$ and equally probable errors

Для четырехходового кэша ($A = 4$) из (1) и (2) согласно (5) получаем оценки обнаружения блоков памяти в кэше и вероятности попадания в кэш

$$\hat{\Pi}_0(4, \bar{F}) = f_0 [f_1 f_2 (1 - f_0 - f_1 - f_2) - (1 - f_0 - f_1 - f_2 - f_3)(e_0 f_1 f_2 + e_1 f_2 (f_1 - f_3) + e_2 f_1 (f_2 - f_3))] / U_4,$$

$$\hat{\Pi}_1(4, \bar{F}) = f_1 [f_0 f_2 (1 - f_0 - f_1 - f_2) - (1 - f_0 - f_1 - f_2 - f_3)(e_0 f_2 (f_0 - f_3) + e_1 f_0 f_2 + e_2 f_0 (f_2 - f_3))] / U_4,$$

$$\hat{\Pi}_2(4, \bar{F}) = f_2 [f_0 f_1 (1 - f_0 - f_1 - f_2) - (1 - f_0 - f_1 - f_2 - f_3)(e_0 f_1 (f_0 - f_3) + e_1 f_0 (f_1 - f_3) + e_2 f_0 f_1)] / U_4,$$

$$\hat{\Pi}_3(4, \bar{F}) = f_3 [f_0 f_1 f_2 + (1 - f_0 - f_1 - f_2 - f_3)(e_0 f_1 f_2 + e_1 f_0 f_2 + e_2 f_0 f_1)] / U_4,$$

$$\hat{\Pi}_m(4, \bar{F}) = f_m [f_0 f_1 f_2 - e_0 f_1 f_2 (f_0 - f_3) - e_1 f_0 f_2 (f_1 - f_3) - e_2 f_0 f_1 (f_2 - f_3)] / U_4, \quad m = \overline{4, M-1}.$$

$$\hat{\Pi}(4, \bar{F}) = \frac{1}{U_4} \left\{ f_0 f_1 f_2 [(1 - f_0 - f_1 - f_2)(f_0 + f_1 + f_2) + f_3^2] - (1 - f_0 - f_1 - f_2 - f_3) \times \right.$$

$$\times \{e_0 f_1 f_2 (f_0 - f_3)(f_0 + f_1 + f_2 + f_3) + e_1 f_0 f_2 (f_1 - f_3)(f_0 + f_1 + f_2 + f_3) + e_2 f_0 f_1 (f_2 - f_3)(f_0 + f_1 + f_2 + f_3)\} + [f_0 f_1 f_2 - e_0 f_1 f_2 (f_0 - f_3) - e_1 f_0 f_2 (f_1 - f_3) - e_2 f_0 f_1 (f_2 - f_3)] \sum_{m=4}^{M-1} f_m^2 \}.$$

Зависимость полученных оценок при $A = 4$ от уровня равновероятных ошибок приведена на рис. 5 для вектора вероятностей востребованности $\vec{F} = \{0,35; 0,25; 0,15; 0,1; 0,09; 0,06\}$.

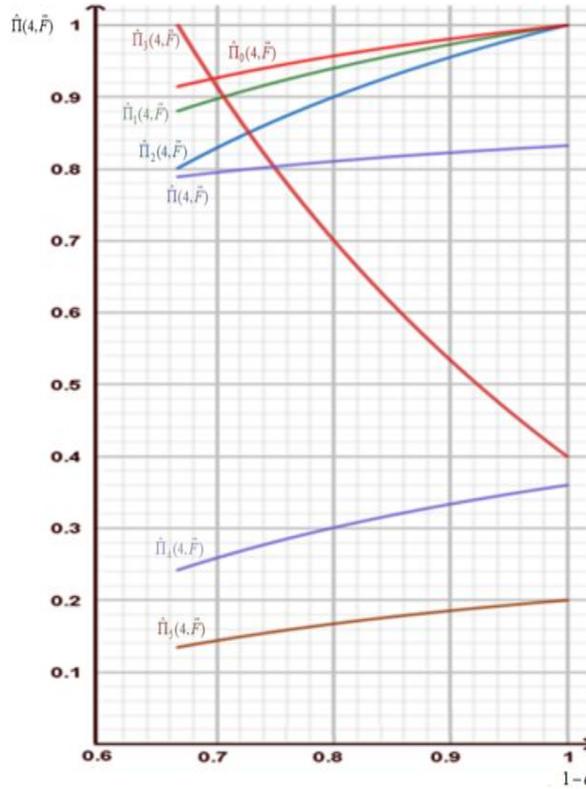


Рис. 5. Зависимость оценок вероятностей обнаружения отдельных блоков памяти в кэше $\hat{P}_m(4), m = \overline{0,5}$ и оценки попадания в кэш от вероятности правильного решения при $A = 4, M = 6$ и равновероятных ошибках
 Fig. 5. Dependence of estimates of the probabilities of detecting individual memory blocks in the cache $\hat{P}_m(4), m = \overline{0,5}$ and the cache hit rate from the probability of a correct solution when $A = 4, M = 6$ and equally probable errors

Сравнительные зависимости оценок вероятности попадания в кэш для различных ассоциативностей $A = \overline{2,4}$, вектора востребованности $\vec{F} = \{0,3; 0,25; 0,15; 0,1; 0,05; 0,05; 0,05; 0,05\}$ и равновероятных ошибок вытеснения блоков памяти приведены на рис. 6. Нетрудно видеть, что для $\sum_{a=0}^{A-2} e_a \leq 0,3$ оценка вероятности попадания в кэш $\hat{P}(A, \vec{F})$ незначительно отклоняется от идеального варианта вытеснения.

Для произвольной ассоциативности из (1), (2) и (6) получаем оценки вероятности обнаружения заданного блока памяти в кэше и вероятности попадания в кэш

$$\hat{P}_a(A, \vec{F}) = \frac{f_a}{U_A} \left[\left(1 - \sum_{i=0}^{A-2} f_i \right) \prod_{i=0, i \neq a}^{A-2} f_i - \left(1 - \sum_{i=0}^{A-1} f_i \right) \left(e_a \prod_{i=0, i \neq a}^{A-2} f_i + \sum_{n=0, n \neq a}^{A-2} e_n (f_n - f_{A-1}) \prod_{i=0, i \neq a, i \neq n}^{A-2} f_i \right) \right], a = \overline{0, A-2},$$

$$\hat{P}_{A-1}(A, \vec{F}) = \frac{f_{A-1}}{U_A} \left[\prod_{i=0}^{A-2} f_i + \left(1 - \sum_{a=0}^{A-1} f_a \right) \sum_{a=0}^{A-2} e_a \prod_{i=0, i \neq a}^{A-2} f_i \right], \hat{P}_m(A, \vec{F}) = \frac{f_m}{U_A} \left[\prod_{i=0}^{A-2} f_i - \sum_{a=0}^{A-2} e_a (f_a - f_{A-1}) \prod_{i=0, i \neq a}^{A-2} f_i \right], m = \overline{A, M-1},$$

$$\hat{P}(A, \vec{F}) = \frac{1}{U_A} \left\{ \prod_{i=0}^{A-2} f_i \left[f_{A-1}^2 + \left(1 - \sum_{i=0}^{A-2} f_i \right) \sum_{i=0}^{A-2} f_i \right] - \left(1 - \sum_{i=0}^{A-1} f_i \right) \left\{ \sum_{a=0}^{A-2} e_a \prod_{i=0, i \neq a}^{A-2} f_i \left[(f_a - f_{A-1}) \sum_{i=0}^{A-1} f_i \right] \right\} + \right.$$

$$+ \left[\prod_{i=0}^{A-2} f_i - \sum_{a=0}^{A-2} e_a (f_a - f_{A-1}) \prod_{i=0, i \neq a}^{A-2} f_i \right] \sum_{m=4}^{M-1} f_m^2 \} \quad (7)$$

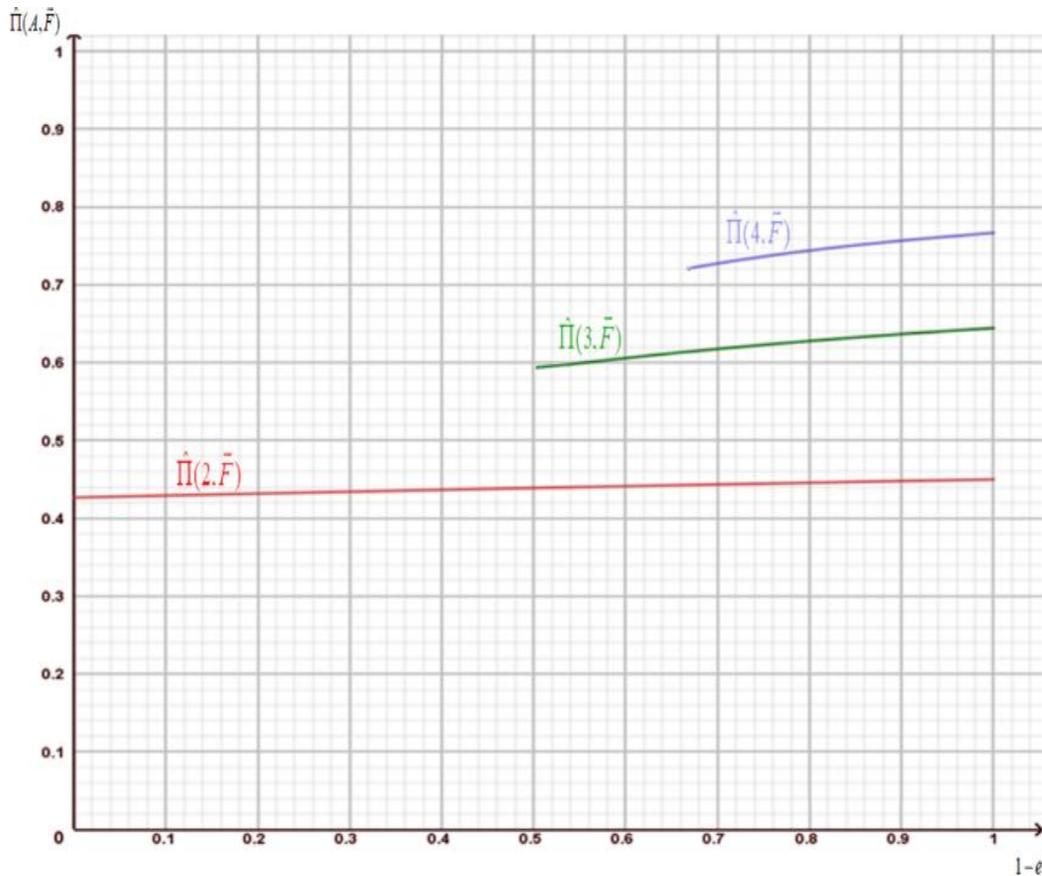


Рис. 6. Сравнительные кривые зависимостей оценок вероятностей попадания в кэш $\hat{P}(A)$ при $M = 8$ и равновероятных ошибках

Fig. 6. Comparative curves of dependencies of cache hit probability estimates $\hat{P}(A)$ at $M = 8$ and equally probable errors

4. Чувствительность оценки вероятности попадания в кэш к виду распределения вероятностей востребованности адресуемых объектов

В реальных вычислительных системах ошибки при различных стратегиях вытеснения адресуемых объектов могут происходить в произвольных состояниях ассоциативного кэша. Проанализируем влияние реальных процессов вытеснения на адекватность полученных оценок вероятности попадания в кэш. Рассмотрим кэш ассоциативности $A = 2$, на который отображается пять блоков памяти ($M = 5$). Полагаем, что ошибки вытеснения могут быть в любом состоянии моделирующей цепи Маркова с одинаковой вероятностью. Результирующая система уравнений равновесия допускает только численное решение. В таблице приведены сравнительные значения вероятности попадания в кэш $P(2, \bar{F}_k), k = \overline{1,3}$ при ошибках в произвольных состояниях цепи Маркова и их оценки $\hat{P}(2, \bar{F}_k), k = \overline{1,3}$ для различных уровней ошибок и трех распределений востребованности процессором блоков памяти с адресуемыми объектами соответственно:

$$\begin{aligned} \bar{F}_1 &= \{f_0 = 0,47; f_1 = 0,26; f_2 = 0,15; f_3 = 0,09; f_4 = 0,03\}, \\ \bar{F}_2 &= \{f_0 = 0,35; f_1 = 0,3; f_2 = 0,2; f_3 = 0,1; f_4 = 0,05\}, \\ \bar{F}_3 &= \{f_0 = 0,24; f_1 = 0,22; f_2 = 0,2; f_3 = 0,18; f_4 = 0,16\}. \end{aligned}$$

Сравнительные значения вероятности попадания в кэш и ее оценки

$P(2, \overline{F_k})/e$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$P(2, \overline{F_1})$	0,657	0,640	0,624	0,607	0,590	0,572	0,551	0,528	0,498	0,456	0,359
$\hat{P}(2, \overline{F_1})$	0,657	0,653	0,648	0,643	0,638	0,633	0,627	0,621	0,615	0,608	0,601
$P(2, \overline{F_2})$	0,569	0,558	0,546	0,534	0,521	0,506	0,489	0,469	0,442	0,403	0,326
$\hat{P}(2, \overline{F_2})$	0,569	0,567	0,566	0,564	0,562	0,56	0,558	0,556	0,554	0,552	0,55
$P(2, \overline{F_3})$	0,433	0,426	0,42	0,415	0,411	0,406	0,401	0,396	0,39	0,383	0,372
$\hat{P}(2, \overline{F_3})$	0,433	0,431	0,43	0,429	0,428	0,426	0,425	0,424	0,422	0,421	0,419

Из таблицы нетрудно видеть, что при движении вектора вероятностей востребованности адресуемых объектов к равномерному распределению (от $\overline{F_1}$ к $\overline{F_3}$) вероятность попадания в кэш и ее оценка для уровня ошибок $e \leq 0,3$ сближаются. Очевидно, что с ростом ассоциативности увеличивается разность значений вероятности между «наиболее» и «наименее» востребованными процессором адресуемыми объектами, загруженными в кэш. Тогда в ассоциативном кэше ошибки вытеснения различных объектов, загруженных в кэш, будут связаны между собой неравенством $e_a \leq e_{a+1}, a = 0, A-3$. Как следствие, при этом снижается уровень ошибочных действий, связанных с вытеснением востребованных блоков памяти (с номерами $m < A-1$). Тогда для интегрального уровня ошибок $\sum_{a=0}^{A-2} e_a \leq 0,3$ оценка (7) может быть использована при расчетах вероятности попадания в кэш. Таким образом, с ростом ассоциативности влияние степени рассеяния вероятностей востребованности процессором адресуемых объектов на оценку вероятности попадания в кэш также снижается. Аналогичная картина имеет место с увеличением числа блоков памяти, отображаемых на кэш заданной ассоциативности A .

Заключение

Предложена модель идеального ассоциативного кэша с ошибками вытеснения востребованных процессором блоков памяти в виде цепи Маркова. Для получения аналитической оценки вероятности попадания в кэш введено допущение о неидеальном вытеснении только в состоянии, когда кэш заполнен самыми востребованными блоками памяти. Получены оценки вероятностей обнаружения отдельных блоков памяти в кэше и оценка вероятности попадания в кэш произвольной ассоциативности (7). Показано, что применение полученных оценок возможно при отклонении от стратегии идеального вытеснения с ошибками, не превышающими уровня 0,3. Отмечается, что с ростом ассоциативности кэша и объема отображаемой на кэш памяти влияние ошибок вытеснения снижается. Направлением дальнейших исследований возможен анализ с помощью имитационного моделирования или натуральных измерений вероятностей ошибочных замещений для различных стратегий вытеснения адресуемых объектов и широкого спектра приложений с различной степенью локализации.

Список источников

1. Танненбаум Э., Остин Т. Архитектура компьютера. 6-е изд. СПб.: Питер, 2021. 816 с.
2. Сущенко М.С., Сущенко С.П. Математические модели иерархической памяти вычислительных систем. Новосибирск: Наука; Томск: Изд-во НТЛ, 2012. 148 с.
3. Сущенко С.П. Архитектура вычислительных систем: учеб. пособие. Томск: СКК-Пресс, 2006. 198 с.
4. Герасимов С.В., Машечкин И.В., Петровский М.И., Попов И.С., Терехин А.Н., Чернов А.В. Организация кэширования: учеб.-метод. пособие. М.: Изд. отд. факультета ВМК МГУ, 2011. 26 с.
5. Song J., Xiaodong Z. LIRS: An efficient low inter-reference recency set replacement policy to improve buffer cache performance // ACM Sigmetrics Performance Evaluation Review. 2002. V. 30, is. 1. P. 31–42.
6. Zhou Y., Philbin J.F. The Multi-Queue Replacement Algorithm for Second Level Buffer Caches // Proc. of the General Track: 2001 USENIX Annual Technical Conference. 2001. P. 91–104.
7. Лускинд Ю.И. Буферные запоминающие устройства типа кэш // Зарубежная радиоэлектроника. 1990. № 4. С. 29–42.

8. Толмачев В.В., Булах С.С., Клычков И.А. Результаты экспериментального исследования кэш-памяти микропроцессорных систем на основе имитационного моделирования // T-Comm: телекоммуникации и транспорт. 2017. Т. 11, № 11. С. 41–47.
9. Ключев А.О., Антонов А.А. Измерение производительности компонентов подсистемы памяти для гетерогенных систем на кристалле // Программные продукты и системы. 2016. Т. 29, № 4. С. 78–84.
10. Сущенко М.С., Сущенко С.П. Моделирование иерархической памяти вычислительных систем неблокирующего типа // Вестник Томского государственного университета. 2000. № 269. С. 87–90.
11. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1979. 432 с.

References

1. Tannenbaum, E. & Ostin, T. (2021) *Arkhitektura komp'yutera* [Computer Architecture]. 6th ed. St. Petersburg: Piter.
2. Sushchenko, M.S. & Sushchenko, S.P. (2012) *Matematicheskie modeli ierarkhicheskoy pamyati vychislitel'nykh sistem* [Mathematical models of hierarchical memory of computing systems]. Novosibirsk: Nauka; Tomsk: NTL.
3. Sushchenko, S.P. (2006) *Arkhitektura vychislitel'nykh sistem* [Architecture of Computing Systems]. Tomsk: SKK-Press.
4. Gerasimov, S.V., Mashechkin, I.V., Petrovsky, M.I., Popov, I.S., Terekhin, A.N. & Chernov, A.V. (2011) *Organizatsiya keshirovaniya* [Organization of Caching]. Moscow: Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University.
5. Song, J. & Xiaodong, Z. (2002) LIRS: An efficient low inter-reference recency set replacement policy to improve buffer cache performance. *ACM Sigmetrics Performance Evaluation Review*. 30(1). pp. 31–42.
6. Zhou, Y. & Philbin, J.F. (2001) The Multi-Queue Replacement Algorithm for Second Level Buffer Caches. *Proceedings of the General Track: 2001 USENIX Annual Technical Conference*. pp. 91–104.
7. Luskind, Yu.I. (1990) Bufernye zapominayushchie ustroystva tipa kesh [Cache Buffer Storage Devices]. *Zarubezhnaya radioelektronika*. 4. pp. 29–42.
8. Tolmachev, V.V., Bulach, S.S. & Klychkov, I.A. (2017) Rezul'taty eksperimental'nogo issledovaniya kesh-pamyati mikroprotse-sornykh sistem na osnove imitatsionnogo modelirovaniya [Results of Experimental Study of Cache Memory of Microprocessor Systems Based on Simulation Modeling]. *T-Comm: Telekommunikatsii i transport*. 11(11). pp. 41–47.
9. Klyuchev, A.O. & Antonov, A.A. (2016) Izmerenie proizvoditel'nosti komponentov podsystemy pamyati dlya geterogennykh sistem na kristalle [Measuring the Performance of Memory Subsystem Components for Heterogeneous Systems on a Chip]. *Programmnye produkty i sistemy*. 29(4). pp. 78–84.
10. Sushchenko, M.S. & Sushchenko, S.P. (2000) Modelirovanie ierarkhicheskoy pamyati vychislitel'nykh sistem neblokiryuyushchego tipa [Modeling of Hierarchical Memory of Non-Blocking Computing Systems]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 269. pp. 87–90.
11. Kleinrock, L. (1979) *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [Queueing Theory]. Moscow: Mashinostroenie.

Информация об авторах:

Воробейчиков Сергей Эрикович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры системного анализа и математического моделирования Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: sev@mail.tsu.ru

Корсун Александр Викторович – аспирант кафедры прикладной информатики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: aleksnfs15@gmail.com

Морозова Анна Сергеевна – доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: annamo12@yandex.ru

Сущенко Сергей Петрович – профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой прикладной информатики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета; Томский филиал Федерального исследовательского центра информационных и вычислительных технологий (Томск, Россия). E-mail: ssp.inf.tsu@gmail.com

Шкуркин Алексей Сергеевич – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной информатики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: shkurkin@mail.tsu.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Vorobeychikov Sergey E. (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: sev@mail.tsu.ru

Korsun Alexander V. (Post-graduate Student, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: aleksnfs15@gmail.com

Morozova Anna S. (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: annamo12@yandex.ru

Sushchenko Sergey P. (Doctor of Technical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University; Tomsk Branch of the Federal Research Center for Information and Computing Technologies Tomsk, Russian Federation). E-mail: ssp.inf.tsu@gmail.com

Shkurkin Alexey S. (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: shkurkin@mail.tsu.ru

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 10.11.2025; принята к публикации 05.03.2026

Received 10.11.2025; accepted for publication 05.03.2026

Научная статья
УДК 519.233.22
doi: 10.17223/19988605/74/9

Равновесная оценка в условно оптимальном и компромиссном семействах M -оценок

Константин Викторович Гаврилов¹, Евгения Леонидовна Веретельникова²

^{1,2} Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия

¹ aenigma77@mail.ru

² janever@mail.ru

Аннотация. Работа посвящена дальнейшему развитию теории устойчивых M -оценок, оптимизирующих весовую L_2 -норму функции влияния. Рассматривается случай двух произвольных критериев, каждый из которых представляет собой квадрат весовой L_2 -нормы функции влияния. На их базе строятся условно оптимальное и компромиссное семейства оценок, получаемые в результате оптимизации линейных комбинаций данных критериев. На практике нередко возникает вопрос обоснованного выбора одной оценки из семейства, однако в условиях нехватки априорной информации такой выбор не всегда может быть сделан объективно, и требуется эвристический подход. Для решения указанной проблемы предлагается использовать равновесную оценку, которая определяется независимо от способа нормирования критериев. В работе в общем виде исследованы свойства равновесной оценки, в том числе показано, что она существует, единственна и минимизирует произведение критериев. Построенная теория проиллюстрирована на примере оценивания параметра сдвига косинусной модели.

Ключевые слова: M -оценки; функция влияния; устойчивые оценки; условно оптимальные оценки; компромиссные оценки; выпуклая линейная комбинация; косинусное распределение.

Для цитирования: Гаврилов К.В., Веретельникова Е.Л. Равновесная оценка в условно оптимальном и компромиссном семействах M -оценок // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2026. № 74. С. 95–106. doi: 10.17223/19988605/74/9

Original article
doi: 10.17223/19988605/74/9

Equilibrium estimator in conditionally optimal and compromise families of M -estimators

Konstantin V. Gavrilov¹, Evgeniya L. Veretel'nikova²

^{1,2} Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation

¹ aenigma77@mail.ru

² janever@mail.ru

Abstract. The paper is devoted to the further development of the theory of robust M -estimators optimizing the weighted L_2 -norm of the influence function. This paper considers the case of two arbitrary criteria, each representing the square of the weighted L_2 -norm of the influence function. These criteria are used to construct conditionally optimal and compromise families of estimators, obtained by optimizing linear combinations of these criteria. In practice, the question of justify choice of one estimator from the family often arises. However, under conditions of insufficient a priori information, such a choice cannot always be made objectively, requiring a heuristic approach. To solve this problem, it is proposed to use an equilibrium estimator, which is defined independently of the criteria normalization way. This paper studies the properties of the equilibrium estimator in general terms, including showing that it exists, is unique, and minimizes the product of criteria. The constructed theory is illustrated using the example of estimating the shift parameter of a cosine model.

Keywords: M -estimators; influence function; robust estimators; conditionally optimal estimators; compromise estimators; convex linear combination; cosine distribution.

For citation: Gavrilov, K.V., Veretel'nikova, E.L. (2026) Equilibrium estimator in conditionally optimal and compromise families of M -estimators. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 74. pp. 95–106. doi: 10.17223/19988605/74/9

Введение

Обеспечение устойчивости является важной частью современных подходов к решению задач, связанных со статистической обработкой данных [1–3]. В связи с этим активно развиваются робастные методы оценивания параметров моделей [2–5]. К ним относятся и методы, основанные на анализе весовой L_2 -нормы функции влияния [6]. При подходящем выборе весовой функции получаемые в результате решения, как правило, относятся к так называемым сниженным оценкам [4, 5], в которых влияние периферийных наблюдений снижено по сравнению с классическими робастными решениями (или равно нулю). Благодаря этому применение сниженных оценок обеспечивает важное на практике свойство устойчивости к асимметричному засорению данных. Указанный подход является достаточно общим, охватывающим многие практически значимые устойчивые решения [7, 8].

Известный пример таких решений – семейство условно оптимальных оценок [2, 6, 9], построенное на базе функционалов неустойчивости (квадрата L_2 -нормы функции влияния) и асимптотической дисперсии оценки. Оно может определяться как результат оптимизации неустойчивости при ограничении на асимптотическую дисперсию (или, что то же самое, оптимизации асимптотической дисперсии при ограничении на величину неустойчивости). Эта задача сводится к оптимизации линейной комбинации критериев. Вместе с тем обратим внимание, что критерии асимптотической дисперсии и неустойчивости, вообще говоря, несопоставимы, поскольку обычно имеют отличающиеся размерности – соответственно квадрата и куба случайной величины (если оценивается параметр сдвига или масштаба). Подобная ситуация типична для аддитивных критериев [10]. Поэтому выбор одной оценки из семейства, обеспечивающей разумный компромисс между критериями (поиск условного «центра» семейства), бывает затруднительным. Общепринятым подходом здесь является введение нормирующих коэффициентов (в их роли могут выступать и коэффициенты линейной комбинации), которые согласуют размерности базовых критериев и их вклады в сумму.

Проблема состоит в том, что исследователь не всегда располагает априорной информацией, позволяющей достаточно объективно присвоить нормирующие коэффициенты каждому из критериев, если по смыслу задачи даны лишь сами критерии, и эта проблема хорошо известна [11]. Поэтому задача, в которой нормирующие коэффициенты являются полностью неопределенными, относится к классу некорректных; стандартные приемы решения задач многокритериальной оптимизации в данном случае не подходят. Для решения этой проблемы в случае рассмотренного выше условно оптимального семейства А.М. Шурыгин [2] предложил выбирать компромиссную оценку, которая минимизирует сумму базовых критериев, нормированных к своим минимальным значениям. Какие-либо свойства оптимальности компромиссной оценки не обсуждались, но используемый для нее эвристический способ нормирования базовых критериев представляется достаточно удобным и интуитивно привлекательным, он обсуждался в работе [12]. В нашей работе [9], где тоже рассматривалось условно оптимальное семейство, для решения проблемы был предложен другой эвристический подход: согласно ему «центр» семейства определяется таким образом, чтобы соответствующая оценка обладала определенными свойствами оптимальности. А именно, берется середина отрезка, задаваемого выпуклой линейной комбинацией нормированных базовых критериев, причем неопределенность в выборе способа их нормирования устраняется путем решения максиминной задачи относительно аргументов получившегося функционала. Построенная таким образом оценка названа равновесной. Заметим, что компромиссная оценка тоже соответствует середине отрезка, задаваемого выпуклой линейной комбинацией базовых критериев, но они нормированы к своим минимальным значениям, т.е. различие заключается в способе нормирования. Однако равновесная оценка обладает замечательным свойством – минимизирует произведение критериев на множестве всех регулярных оценочных функций [9].

В представленной работе понятие равновесной оценки обобщается на случай двух произвольных критериев, каждый из которых является квадратом весовой L_2 -нормы функции влияния; исследуются свойства этой оценки.

Наряду с условно оптимальным бывает удобно использовать эквивалентное¹ ему компромиссное семейство оценок [12, 13], для которого оптимизируемый функционал является выпуклой линейной комбинацией согласованных базовых критериев (т.е. критериев, которые заранее определенным образом нормированы и имеют одинаковую размерность). В работе [12] в качестве «центра» компромиссного семейства предлагалось использовать равнооптимальную оценку, которая доставляет равные значения согласованным базовым критериям. Показано, что ей соответствует седловая точка оптимизируемого функционала, т.е. равнооптимальная оценка обладает свойствами оптимальности и может представлять практический интерес. Однако она неинвариантна относительно способа нормирования базовых критериев (способа параметризации компромиссного семейства) и даже необязательно существует. По этой причине понятие равнооптимальной оценки, введенное для компромиссного семейства, не может быть однозначно определено для условно оптимального семейства. Также ввиду указанной зависимости свойства оптимальности данной оценки, изучавшиеся в [12], имеют смысл ровно настолько, насколько осмысленно были согласованы базовые критерии. Важно, чтобы исследователь ответственно подходил к нормированию базовых критериев, если он планирует использовать равнооптимальную оценку. При этом исследователь может руководствоваться как имеющейся у него априорной информацией, так и эвристическими соображениями, примеры которых даются в [12]. Во втором случае надежность полученных теоретических выводов может снижаться. В условиях существенного недостатка или полного отсутствия априорной информации о том, как следует согласовывать базовые критерии, целесообразно использовать равновесную оценку.

В настоящей работе получены условия существования и единственности равновесной оценки, показано, что она доставляет минимум произведению базовых критериев на множестве всех регулярных оценочных функций. Устанавливаются границы расширенных семейств. Изложенная теория иллюстрируется на примере задачи оценивания параметра сдвига косинусной модели.

1. Основные теоретические положения

Пусть x_1, \dots, x_m – наблюдения случайной величины, которая моделирует измеряемую в некотором эксперименте числовую характеристику. Для описания случайной величины используется модельное распределение с плотностью $f(x, \theta)$, заданной в прямоугольнике $X \times \Theta$, где $x \in X \subseteq R$, $\theta \in \Theta \subseteq R$ – неизвестный параметр модели, который требуется оценить. M -оценка параметра θ может определяться как решение оценочного уравнения [1–5]

$$\sum_{i=1}^m \psi(x_i, \theta) = 0,$$

где $\psi(x, \theta)$ – оценочная функция, удовлетворяющая условиям регулярности [7, 14]. Специальным образом нормированная оценочная функция $IF(x, \theta) = \psi(x, \theta)/N(\theta)$ называется функцией влияния [5]. Функция $N(\theta)$ – непрерывная, не равная 0 для всех $\theta \in \Theta$ и может быть представлена в виде [4, 15]:

$$N(\theta) = - \int_X f(x, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \psi(x, \theta) dx = \int_X \psi(x, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) dx.$$

¹ Эквивалентность условно оптимального и компромиссного семейств имеет место, если рассматриваются неотрицательные коэффициенты линейной комбинации базовых критериев. Для более широкого множества коэффициентов этот вопрос требует дополнительного исследования в каждом конкретном случае, поскольку границы расширенных семейств могут не совпадать.

Качество оценки, получаемой в результате решения оценочного уравнения, согласно описываемому подходу тем выше, чем меньшее значение принимает квадрат весовой L_2 -нормы функции влияния с весом $s(x, \theta) \geq 0$:

$$U(\psi; s) = \frac{1}{N^2(\theta)} \int_X \psi^2(x, \theta) s(x, \theta) dx = \int_X \mathbb{F}^2(x, \theta) s(x, \theta) dx. \quad (1)$$

Функционал (1) возникает, например, как асимптотическое квадратичное отклонение оценки в модели байесовского точечного засорения [2, 7, 13, 14], где весовая функция $s(x, \theta)$ представляет собой плотность распределения засоряющей точки. В общем случае $s(x, \theta)$ может не быть плотностью. Частными случаями функционала (1) являются асимптотическая дисперсия $V(\psi) = U(\psi; f)$ [1] и неустойчивость $W(\psi) = U(\psi; 1)$ [2]. Минимизация функционала $V(\psi)$ приводит к оценке максимального правдоподобия (ОМП) [1], минимизация $W(\psi)$ – к оценке максимальной устойчивости (ОМУ) [2]. Соответствующие значения функционалов обозначим $V_{\text{ОМП}}$ и $W_{\text{ОМУ}}$. Эффективностью и устойчивостью оценки называются соответственно относительные характеристики [1, 2]

$$\text{eff } \psi = V_{\text{ОМП}}/V(\psi), \quad \text{stb } \psi = W_{\text{ОМУ}}/W(\psi).$$

В [2] показано, что функционал (1) достигает минимума по ψ на функции

$$\psi(x, \theta) = c(\theta) \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x, \theta) + \beta(\theta) \right] \frac{f(x, \theta)}{s(x, \theta)}, \quad (2)$$

где $c(\theta)$ – произвольная непрерывная функция, не равная 0 для всех $\theta \in \Theta$; функция $\beta(\theta)$ определяется из условия асимптотической несмещенности оценки [1, 15]

$$\int_X \psi(x, \theta) f(x, \theta) dx = 0.$$

Оценочные функции, различающиеся только множителем $c(\theta)$, являются эквивалентными. Аналогично эквивалентными являются весовые функции $s(x, \theta)$ и соответствующие им функционалы вида (1), если они различаются постоянным положительным множителем.

В данной работе будет рассматриваться оптимизируемый функционал вида (1), представленный в виде линейной комбинации двух базовых критериев, каждый из которых тоже является частным случаем функционала (1).

Пусть $\tilde{U}_1(\psi) = U(\psi; \tilde{s}_1)$ и $\tilde{U}_2(\psi) = U(\psi; \tilde{s}_2)$ – базовые критерии, нормированные произвольным образом (т.е. определенные с точностью до произвольного положительного множителя). Согласно (1) им соответствуют весовые функции \tilde{s}_1 и \tilde{s}_2 . Решение задачи минимизации функционала $\tilde{U}_1(\psi)$ при ограничении-неравенстве на значения $\tilde{U}_2(\psi)$ в соответствии с методом множителей Лагранжа сводится к минимизации функционала

$$\tilde{U}(\psi, \lambda) = \tilde{U}_1(\psi) + \lambda \tilde{U}_2(\psi) \quad (3)$$

и дает условно оптимальное семейство оценок [2, 13], где $\lambda \geq 0$ – множитель Лагранжа. В отличие от [2] мы используем более общее определение семейства. Также заметим, что базовые критерии в (3) имеют, вообще говоря, несовпадающие размерности, так что параметр λ может быть размерным.

Оценочные функции элементов условно оптимального семейства обозначим $\psi_\lambda = \arg \min_{\psi} \tilde{U}(\psi, \lambda)$.

Они имеют вид (2) с весовой функцией $\tilde{s}_1 + \lambda \tilde{s}_2$. Введем обозначения для функций, которые для каждого λ совпадают со значениями базовых критериев на элементах условно оптимального семейства: $\tilde{U}_1(\lambda) = \tilde{U}_1(\psi_\lambda)$; $\tilde{U}_2(\lambda) = \tilde{U}_2(\psi_\lambda)$.

Базовые критерии являются согласованными [12], если они имеют сопоставимый вид (т.е. одинаковую размерность) и приведены к единой шкале. Второе условие в общем случае является неформальным и выполняется на усмотрение исследователя. Для согласования критериев производится их

нормирование – умножение или деление на некоторую положительную константу (нормирующий коэффициент). Поскольку функционалы, различающиеся постоянным положительным сомножителем, являются эквивалентными, для нормирования базовых критериев достаточно использовать только один нормирующий коэффициент.

Итак, положим $U_1(\psi) = U(\psi; s_1)$ и $U_2(\psi) = U(\psi; s_2)$ – согласованные базовые критерии вида (1), которым соответствуют весовые функции s_1 и s_2 . Не уменьшая общности построений, примем следующие соглашения:

$$U_1(\psi) = \tilde{U}_1(\psi)/\lambda_0, \quad U_2(\psi) = \tilde{U}_2(\psi), \quad (4)$$

где $\lambda_0 > 0$ – нормирующий коэффициент.

Семейство компромиссных оценок определяется [12] как результат минимизации выпуклой линейной комбинации согласованных базовых критериев:

$$U(\psi, k) = (1-k)U_1(\psi) + kU_2(\psi), \quad (5)$$

где k – безразмерный параметр, задающий семейство и определяющий компромисс между критериями. Функционалу (5) согласно (1) соответствует весовая функция

$$s = (1-k)s_1 + ks_2. \quad (6)$$

Сопоставляя выражения (3) и (5), нетрудно увидеть [9], что они различаются постоянным сомножителем (не обязательно положительным), если параметр λ связан с параметром k соотношениями

$$\lambda = \lambda_0 k/(1-k); \quad k = \lambda/(\lambda + \lambda_0). \quad (7)$$

Как и в работе [12], понятие компромиссных оценок мы не будем ограничивать диапазоном $0 \leq k \leq 1$, естественным ограничением служит условие $s \geq 0$ в (6). Члены компромиссного семейства, для которых $k > 1$ или $k < 0$, относятся к расширенной области семейства. Аналогично расширение условно оптимального семейства задается отрицательными значениями λ . Более подробно расширенные семейства исследуются в разд. 3 статьи.

Оценочные функции элементов компромиссного семейства обозначим $\psi_k = \arg \min_{\psi} U(\psi, k)$. Они имеют вид (2) с весовой функцией (6). Также введем обозначения для следующих функций параметра k : $U_1(k) = U_1(\psi_k)$; $U_2(k) = U_2(\psi_k)$; $U(k) = \min_{\psi} U(\psi, k) = U(\psi_k, k) = (1-k)U_1(k) + kU_2(k)$. Это значения функционалов, фигурирующих в (5), на элементах компромиссного семейства. Выписанные функции от k положим непрерывно дифференцируемыми на своей области определения.

Оценка из компромиссного семейства с оценочной функцией ψ_k , удовлетворяющая условию $U_1(k) = U_2(k)$, называется равнооптимальной (ОРО) [12].

2. Равновесная оценка

Определение 1. Равновесной оценкой (ОРВ) называется член условно оптимального семейства с параметром λ , удовлетворяющим условиям

$$\lambda = \tilde{U}_1(\lambda)/\tilde{U}_2(\lambda), \quad 0 < \lambda < \infty. \quad (8)$$

Теорема 1. В компромиссном семействе ОРВ удовлетворяет условиям

$$k/(1-k) = U_1(k)/U_2(k), \quad 0 < k < 1.$$

Доказательство. При $0 < \lambda < \infty$ оценочная функция ψ_λ эквивалентна ψ_k , если их параметры λ и k связаны соотношениями (7). В этом случае равенства (4) можно переписать в виде: $\tilde{U}_1(\lambda) = \lambda_0 U_1(k)$, $\tilde{U}_2(\lambda) = U_2(k)$. С учетом этих выражений, а также (7) и (8) для ОРВ получаем

$$\frac{k}{1-k} = \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{\tilde{U}_1(\lambda)}{\lambda_0 \tilde{U}_2(\lambda)} = \frac{U_1(k)}{U_2(k)},$$

причем эта величина положительная и конечная в силу условия $0 < \lambda < \infty$. Отсюда следует $0 < k < 1$. Теорема доказана.

Теорема 2. В компромиссном семействе ОРО соответствует параметр $k = 1/2$ тогда и только тогда, когда она совпадает с ОРВ.

Доказательство. Запишем равенство в утверждении теоремы 1 с учетом определения ОРО:

$$k/(1-k) = U_1(k)/U_2(k) = 1.$$

Данное равенство имеет место только при $k = 1/2$. Теорема доказана.

Прикладное значение теоремы 2 заключается в том, что ОРВ оказывается разумным выбором в условиях нехватки априорной информации, поскольку эта оценка наследует свойства оптимальности ОРО, выведенные в [12]. Главное из них – ОРО доставляет седловую точку оптимизируемому функционалу (5). Неопределенность в выборе способа нормирования базовых критериев согласно предлагаемому эвристическому подходу разрешается так, чтобы ОРО соответствовала середине отрезка, задаваемого их выпуклой линейной комбинацией.

Теорема 3. ОРВ существует и единственна.

Доказательство. Используя (4) и (7), условие $U_1(k) = U_2(k)$ для ОРО можно записать в виде:

$\tilde{U}_1(\lambda)/\lambda_0 = \tilde{U}_2(\lambda)$. Очевидно, для каждого $\lambda \in (0; \infty)$ существует единственное значение λ_0 такое, что это равенство имеет место. В терминах компромиссного семейства для каждого $k \in (0; 1)$ существует единственное значение λ_0 такое, что данному k соответствует ОРО. В частности, при $k = 1/2$ по теореме 2 ОРО совпадает с ОРВ. Допустим, существует другая ОРВ, которая совпадает с ОРО при некотором другом λ_0 . Но по теореме 2 ей тоже соответствует $k = 1/2$, а значит – и то же значение λ_0 , т.е. ОРВ единственна. Теорема доказана.

Теорема 4. Оценочная функция ОРВ является решением задач

$$U_1(\psi)U_2(\psi) \rightarrow \min_{\psi} \text{ и } \tilde{U}_1(\psi)\tilde{U}_2(\psi) \rightarrow \min_{\psi}.$$

Доказательство. Эквивалентность задач в формулировке теоремы очевидна, поскольку минимизируемые функционалы в них различаются постоянным положительным множителем λ_0 .

Сначала покажем, что решение задачи $\tilde{U}_1(\psi)\tilde{U}_2(\psi) \rightarrow \min_{\psi}$ принадлежит условно оптимальному

семейству. Данное семейство может быть определено как решение задачи на поиск условного минимума функционала $\tilde{U}_1(\psi)$ при фиксированном $\tilde{U}_2(\psi) = \gamma$. Рассмотрим другую задачу – на поиск условного минимума функционала $\tilde{U}_1(\psi)\tilde{U}_2(\psi)$ при фиксированном значении $\tilde{U}_2(\psi) = \gamma$. Поскольку при каждом γ минимизируемые функционалы в этих задачах различаются постоянным множителем $\gamma > 0$, они достигают минимума на одной и той же ψ , т.е. данные задачи являются эквивалентными. Таким образом, решение задачи на условную минимизацию функционала $\tilde{U}_1(\psi)\tilde{U}_2(\psi)$ тоже принадлежит условно оптимальному семейству, а следовательно, этому же семейству при некотором γ принадлежит и безусловный минимум этого функционала.

Теперь нужно конкретизировать член условно оптимального или компромиссного семейства. Для этого решим задачу $U_1(k)U_2(k) \rightarrow \min_k$. В дальнейших выкладках нам понадобится свойство 2 в [12]: $(1-k)U_1'(k) + kU_2'(k) = 0$. В частности, из него и свойства 5 в [12] следует, что стационарными точками функций $U_1(k)$ и $U_2(k)$ могут быть только $k = 0$ и $k = 1$ соответственно. Необходимое условие локального минимума функции $U_1(k)U_2(k)$ принимает вид:

$$(U_1(k)U_2(k))' = U_1'(k)U_2(k) + U_1(k)U_2'(k) = U_1'(k)[kU_2(k) - (1-k)U_1(k)]/k = 0. \quad (9)$$

Уравнение (9) совместно с условием $0 < k < 1$ по теореме 1 однозначно определяет ОРВ.

Осталось показать, что стационарная точка, являющаяся решением (9), – это локальный минимум, и для нее справедливо $0 < k < 1$. Знаки производных $U_1'(k)$ и $U_2'(k)$ будем определять согласно свойству 6 в [12]. Рассмотрим правую окрестность точки $k = 0$. Если $\lim_{k \rightarrow +0} U_2(k) = \infty$, то убывание

функции $U_1(k)U_2(k)$ в правой окрестности точки $k=0$ очевидно. Пусть теперь $\lim_{k \rightarrow +0} U_2(k) < \infty$. Если $\lim_{k \rightarrow +0} U_1'(k) > 0$, то знак производной $(U_1(k)U_2(k))'$ определяется выражением в квадратных скобках (9) и является отрицательным. Если же $\lim_{k \rightarrow +0} U_1'(k) = 0$, то из левого равенства в (9) получаем $\lim_{k \rightarrow +0} (U_1(k)U_2(k))' = \lim_{k \rightarrow +0} U_1(k)U_2'(k) < 0$, поскольку $U_2'(k) < 0$ при $k < 1$. Рассмотрим левую окрестность точки $k=1$. Если $\lim_{k \rightarrow 1-0} U_1(k) = \infty$, то возрастание функции $U_1(k)U_2(k)$ в левой окрестности точки $k=1$ очевидно. Если $\lim_{k \rightarrow 1-0} U_1(k) < \infty$, то выражение в квадратных скобках (9) положительное, и $U_1'(k) > 0$ при $k > 0$, поэтому $\lim_{k \rightarrow 1-0} (U_1(k)U_2(k))' > 0$. Таким образом, убывание функции $U_1(k)U_2(k)$ сменяется возрастанием при некотором $k \in (0; 1)$, т.е. найденная стационарная точка – это точка минимума. Теорема доказана.

3. Расширенные семейства

Расширение семейств может иметь теоретическую и практическую значимость, поскольку позволяет дополнительно усилить некоторые качества оценок, за которые отвечает один из критериев. Например, среди оценок параметра масштаба нормального распределения представляет интерес наилучшая B -робастная оценка в расширенном условно оптимальном семействе [5, 6].

При расширении семейств один из коэффициентов линейной комбинации базовых критериев берется отрицательным, а ограничивающим условием на значения коэффициентов служит условие сохранения знака весовой функции. Возникающие при этом нюансы обсуждаются ниже.

Рассмотрим расширение условно оптимального семейства. Если отрицательный коэффициент находится при $\tilde{U}_2(\psi)$, условием сохранения знака весовой функции $\tilde{s}_1 + \lambda\tilde{s}_2$ выступает неравенство

$$-\inf_{x \in X} (\tilde{s}_1/\tilde{s}_2) < \lambda < 0. \quad (10)$$

Коэффициент при $\tilde{U}_1(\psi)$ в (3) всегда равен 1, поэтому элементы семейства, соответствующие отрицательному значению этого коэффициента, получим следующим образом: условие неотрицательности весовой функции заменим условием неположительности, а минимизацию (3) заменим максимизацией. Тогда ограничение на значения параметра λ примет вид:

$$\lambda < -\sup_{x \in X} (\tilde{s}_1/\tilde{s}_2), \quad (11)$$

а задачу минимизации функционала (3) потребуется записать в более общем виде:

$$|\tilde{U}(\psi, \lambda)| = |\tilde{U}_1(\psi) + \lambda\tilde{U}_2(\psi)| \rightarrow \min_{\psi}. \quad (12)$$

Множество оценочных функций, удовлетворяющих (12), не зависит от того, как нормированы критерии. Подобным образом расширенное условно оптимальное семейство построено, например, в [6, 9].

Рассмотрим расширение компромиссного семейства, формально записав для него условия, повторяющие (10) и (11). Согласно (4) имеем $\tilde{s}_1 = \lambda_0 s_1$ и $\tilde{s}_2 = s_2$, поэтому условие (10) с учетом (7) можно переписать в виде: $-\lambda_0 \inf_{x \in X} (s_1/s_2) < \lambda = \lambda_0 k/(1-k) < 0$ или

$$-\inf_{x \in X} (s_1/s_2) < k/(1-k) < 0. \quad (13)$$

Условие (11), используя (4) и (7), запишем как $\lambda = \lambda_0 k/(1-k) < -\lambda_0 \sup_{x \in X} (s_1/s_2)$ или

$$k/(1-k) < -\sup_{x \in X} (s_1/s_2). \quad (14)$$

Вторая формула в (7) показывает, что неравенства (13) и (14) могут определять лишние значения k , для которых не выполняется требование сохранения знака весовой функции (6). Действительно, для

части значений λ , удовлетворяющих (10), может выполняться условие $\lambda < -\lambda_0$, но при переходе λ через точку $-\lambda_0$ параметр k меняет знак, проходя через $\pm\infty$, и то же происходит с весовой функцией (6) (это становится очевидным, если записать ее в виде $s = k(s_2 - s_1) + s_1$). А именно, такая ситуация возникает при $\inf_{x \in X} (\tilde{s}_1/\tilde{s}_2) > \lambda_0$ или $\inf_{x \in X} (s_1/s_2) > 1$. Аналогично среди значений λ , удовлетворяющих (11), могут оказаться значения $\lambda > -\lambda_0$, которым соответствуют лишние значения k . Такая ситуация возникает при $\sup_{x \in X} (\tilde{s}_1/\tilde{s}_2) < \lambda_0$ или $\sup_{x \in X} (s_1/s_2) < 1$.

Определение 2. Компромиссное семейство называется полным, если ему принадлежат все решения задачи (12). Если компромиссному семейству принадлежит все подмножество решений задачи (12), определяемое условиями (10) или (11), то компромиссное семейство называется полным соответственно для подмножеств $k < 0$ или $k > 1$.

Свойство. Компромиссное семейство является полным, если выполнено условие

$$\inf_{x \in X} (s_1/s_2) \leq 1 \leq \sup_{x \in X} (s_1/s_2), \quad (15)$$

причем полнота семейства имеет место в области $k > 1$, если $\sup_{x \in X} (s_1/s_2) \geq 1$, и в области $k < 0$, если

$$\inf_{x \in X} (s_1/s_2) \leq 1.$$

С учетом приведенных рассуждений расширенные диапазоны для параметра k компромиссного семейства определяются неравенствами

$$-\min\{\inf_{x \in X} (s_1/s_2); 1\} < k/(1-k) < 0 \text{ при } k < 0; \quad (16)$$

$$k/(1-k) < -\max\{\sup_{x \in X} (s_1/s_2); 1\} \text{ при } k > 1. \quad (17)$$

4. Пример

Рассмотрим задачу оценивания параметра сдвига θ косинусного распределения [9, 16] с плотностью

$$f(x, \theta) = \frac{1}{l} \cos^2 \frac{\pi(x-\theta)}{2l} = \frac{1}{2l} \left[1 + \cos \frac{\pi(x-\theta)}{l} \right], \quad |x-\theta| \leq l. \quad (18)$$

Поскольку модель (18) является финитной, при ее робастном оценивании допускаются наблюдения вне промежутка $|x-\theta| \leq l$, но оценочная функция для них принимается равной нулю [17].

Базовыми критериями выберем функционалы $\tilde{U}_1(\psi) = V(\psi)$, $\tilde{U}_2(\psi) = W(\psi)$, им соответствуют $\tilde{s}_1 = f$, $\tilde{s}_2 = 1$. Определим диапазоны параметра λ расширенного условно оптимального семейства: условие (10) дает пустое множество λ , а из (11) и (18) находим $\lambda < -1/l$; кроме того, $\lambda \geq 0$. Оценочные функции семейства, совпадающие с функциями влияния, имеют вид [16]:

$$\psi(x, \theta) = \frac{l(\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 1})}{\pi} \sin \frac{\pi(x-\theta)}{l} \left/ \left[\kappa + \cos \frac{\pi(x-\theta)}{l} \right] \right., \quad |x-\theta| \leq l,$$

где $\kappa = 2\lambda l + 1$, $\kappa \geq 1$ или $\kappa < -1$ (параметр κ введен для удобства записи формул). Согласно [16]

$$\tilde{U}_1(\lambda) = \frac{l^2}{\pi^2} \left(1 + \sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}} \right); \quad \tilde{U}_2(\lambda) = \frac{2l^3}{\pi^2} \left(1 + \frac{|\kappa|}{\sqrt{\kappa^2 - 1}} \right). \quad (19)$$

При переходе к компромиссному семейству полезно определить ограничение на параметр λ_0 , чтобы обеспечивалась полнота семейства. Для этого проверим неравенства (15), подставив в них $s_1 = \tilde{s}_1/\lambda_0 = f/\lambda_0$ и $s_2 = \tilde{s}_2 = 1$. Из правого неравенства в (15) находим $\lambda_0 \leq 1/l$.

Найдем ОРО для двух способов параметризации компромиссного семейства, описанных в [12]. В первом случае базовые критерии нормируются к своим минимальным значениям,

т.е. $\lambda_0 = V_{\text{ОМП}}/W_{\text{ОМУ}} = 1/(4l)$, во втором – так, чтобы их весовые функции были плотностями², для этого необходимо принять $\lambda_0 = 1/(2l)$. Соответствующие значения λ согласно (4) и определению ОРО находятся из условия $\tilde{U}_1(\lambda)/\lambda_0 = \tilde{U}_2(\lambda)$. В первом случае решение $\lambda = 1/(8l)$ известно [9], а во втором ОРО совпадает с ОМУ ($\lambda = \infty$), поскольку из (19) следует $V_{\text{ОМУ}}/\lambda_0 = W_{\text{ОМУ}} = 4l^3/\pi^2$. Также рассмотрим параметризацию, при которой ОРО совпадает с ОРВ, в этом случае $\lambda_0 = 1/(3l)$ [9]. При всех трех способах параметризации компромиссное семейство является полным.

В таблице для перечисленных оценок приведены значения параметров λ и κ , характеристики эффективности и устойчивости и значения параметра k компромиссного семейства для каждого из используемых способов его параметризации. В таблицу добавлены и некоторые другие оценки: ОМП, компромиссная оценка (ОК) [2, 9] и оценка с параметром $\lambda = 1/(2l)$. Оценка, названная в таблице ОРО₁ – это ОРО для способа параметризации с $\lambda_0 = 1/(4l)$ (для других способов параметризации она не является ОРО). Здесь k_{max} – верхняя грань допустимого множества значений параметра k , определяемая по формуле (17). Формула (16), определяющая нижнюю грань при $k < 0$, дает пустое множество во всех рассмотренных случаях, поэтому имеем $0 \leq k < k_{\text{max}}$.

Характеристики некоторых условно оптимальных оценок

Название оценки	λ	κ	eff ψ_λ , %	stb ψ_λ , %	k при $\lambda_0 = 1/(4l)$ ($k_{\text{max}} = 4/3$)	k при $\lambda_0 = 1/(3l)$ ($k_{\text{max}} = 3/2$)	k при $\lambda_0 = 1/(2l)$ ($k_{\text{max}} = 2$)
ОМП	0	1	100	0	0	0	0
ОРО ₁	1/(8l)	5/4	75	75	1/3	3/11	1/5
ОК	1/(4l)	3/2	69,10	85,41	1/2	3/7	1/3
ОРВ	1/(3l)	5/3	66,67	88,89	4/7	1/2	2/5
–	1/(2l)	2	63,40	92,82	2/3	3/5	1/2
ОМУ	∞	∞	50	100	1	1	1

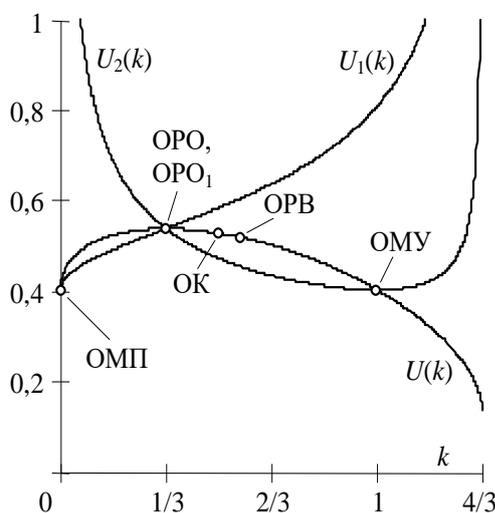


Рис. 1. Функции U, U_1, U_2 для $l = 1, \lambda_0 = 1/4$
Fig. 1. Functions U, U_1, U_2 for $l = 1, \lambda_0 = 1/4$

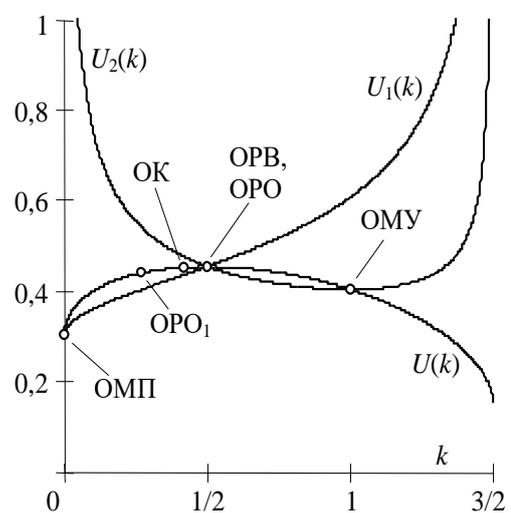


Рис. 2. Функции U, U_1, U_2 для $l = 1, \lambda_0 = 1/3$
Fig. 2. Functions U, U_1, U_2 for $l = 1, \lambda_0 = 1/3$

Графики оценочных функций для оценок из таблицы (кроме оценки с $\lambda = 1/(2l)$) приведены в работе [9]. На рис. 1 и 2 показаны графики функций $U_1(k), U_2(k)$ и $U(k)$ при $l = 1$ для случаев $\lambda_0 = 1/(4l)$ и $\lambda_0 = 1/(3l)$ соответственно. На графиках $U(k)$ помечены значения для основных оценок.

² Такой способ нормирования критериев применим, если весовые функции интегрируемы на X .

Все три графика пересекаются в одной точке, соответствующей ОРО, и это точка максимума $U(k)$ согласно максиминному свойству ОРО [12]. Для каждого из рассмотренных способов параметризации «центром» семейства удобно выбрать значение $k = 1/2$. В случае $\lambda_0 = 1/(4l)$ (см. рис. 1) ему соответствует ОК, в случае $\lambda_0 = 1/(3l)$ (см. рис. 2) – ОРО и ОРВ. Случай $\lambda_0 = 1/(2l)$ примечателен тем, что функция $U(k)$ для него симметрична относительно точки $k = 1$ (т.е. $U(k) = U(2-k)$), в ней ОРО совпадает с ОМУ и минимаксной оценкой [6]. Этот случай также показывает, что ОРО, в отличие от ОРВ, не всегда обеспечивает компромисс между критериями. Более того, при $1/(2l) < \lambda_0 < 1/l$ ОРО принадлежит расширенной области семейства ($k > 1$), а при $\lambda_0 \geq 1/l$ – не существует.

На практике параметризация компромиссного семейства либо бывает однозначно определенной, если базовые критерии заранее согласованы, либо может выбираться из соображений удобства и наглядности для анализа различных компромиссов между критериями.

Заключение

В работе в общем виде проведено теоретическое исследование условно оптимального и компромиссного семейств M -оценок, построенных на базе двух критериев. Оптимизируемые функционалы в обоих семействах имеют вид линейных комбинаций базовых критериев, каждый из которых представляет собой квадрат весовой L_2 -нормы функции влияния [6, 12]. Основная цель исследований – разработать подход, позволяющий делать обоснованный выбор одной оценки из семейства в условиях недостатка априорной информации. В результате проведенных исследований:

- введено понятие равновесной оценки;
- показаны ее существование и единственность;
- показано, что она совпадает с равнооптимальной оценкой [12], которой соответствует середина отрезка, задаваемого выпуклой линейной комбинацией нормированных базовых критериев;
- показано, что равновесная оценка доставляет минимум произведению базовых критериев на множестве всех регулярных оценочных функций.

Равновесная оценка, в отличие от равнооптимальной, определяется независимо от способа параметризации компромиссного семейства и демонстрирует показатели эффективности и устойчивости, сопоставимые с другими эвристическими решениями (например, компромиссной оценкой [2]), но при этом обладает свойствами оптимальности, поэтому представляется целесообразным ее использование на практике. Кроме того, в работе получены следующие результаты:

- изучен вопрос расширения семейств в область, которая характеризуется отрицательными значениями одного из коэффициентов линейной комбинации критериев;
- установлены условия, при которых компромиссное семейство является полным, т.е. содержит все элементы расширенного условно оптимального семейства;
- представленная теория проиллюстрирована на примере оценивания параметра сдвига косинусного распределения.

Все рассмотренные в работе оценки, кроме ОМП, являются робастными.

Список источников

1. Боровков А.А. Математическая статистика. Новосибирск: Наука, 1997. 772 с.
2. Шурыгин А.М. Прикладная стохастика: робастность, оценивание, прогноз. М.: Финансы и статистика, 2000. 224 с.
3. Shulenin V.P. Robust methods of mathematical statistics. Tomsk: Scientific Technology Publishing House, 2020. 260 p.
4. Хьюбер П. Робастность в статистике. М.: Мир, 1984. 303 с.
5. Хампель Ф., Рончетти Э., Рауссеу П., Штаэль В. Робастность в статистике: подход на основе функций влияния. М.: Мир, 1989. 512 с.
6. Лисицин Д.В., Гаврилов К.В. О свойствах M -оценок, оптимизирующих весовую L_2 -норму функции влияния // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2024. Т. 24, № 2. С. 267–275. doi: 10.17586/2226-1494-2024-24-2-267-275

7. Лисицин Д.В., Гаврилов К.В. Использование принципа максимальной энтропии для конструирования робастных оценок при байесовском точечном засорении. Часть I // Прикладная математика и вопросы управления. 2024. № 1. С. 55–72. doi: 10.15593/2499-9873/2024.1.04
8. Лисицин Д.В., Гаврилов К.В. Использование принципа максимальной энтропии для конструирования робастных оценок при байесовском точечном засорении. Часть II // Прикладная математика и вопросы управления. 2024. № 2. С. 18–33. doi: 10.15593/2499-9873/2024.2.02
9. Гаврилов К.В., Веретельникова Е.Л. Об одном способе выбора компромисса в семействе условно оптимальных оценок // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2024. № 67. С. 60–68. doi: 10.17223/19988605/67/7
10. Горбунов В.М., Синюкова Е.А. Практикум по дисциплине «Теория принятия решений»: учеб. пособие. Томск: Изд-во Том. политехн. ун-та, 2014. 126 с.
11. Подиновский В.В., Потапов М.А. Метод взвешенной суммы критериев в анализе многокритериальных решений: pro et contra // Бизнес-информатика. 2013. № 3 (25). С. 41–48.
12. Лисицин Д.В., Гаврилов К.В. О свойствах компромиссных M -оценок, оптимизирующих весовую L_2 -норму функции влияния // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2025. Т. 25, № 3. С. 527–535. doi: 10.17586/2226-1494-2025-3-527-535
13. Лисицин Д.В. Устойчивое оценивание параметров модели по многомерным неоднородным неполным данным // Научный вестник НГТУ. 2013. № 1 (50). С. 17–30.
14. Лисицин Д.В., Гаврилов К.В. Максиминая задача оценивания параметров в условиях байесовского точечного засорения // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2023. № 62. С. 56–64. doi: 10.17223/19988605/62/6
15. Смоляк С.А., Титаренко Б.П. Устойчивые методы оценивания: статистическая обработка неоднородных совокупностей. М.: Статистика, 1980. 210 с.
16. Лисицин Д.В., Гаврилов К.В. Робастное оценивание финитной модели // Сборник научных трудов НГТУ. 2004. № 2 (36). С. 47–56.
17. Лисицин Д.В., Гаврилов К.В. Оценивание параметров финитной модели, устойчивое к нарушению финитности // Сибирский журнал индустриальной математики. 2013. Т. 16, № 2 (54). С. 109–121.

References

1. Borovkov, A.A. (1997) *Matematicheskaya statistika* [Mathematical Statistics]. Novosibirsk: Nauka.
2. Shurygin, A.M. (2000) *Prikladnaya stokhastika: robastnost', otsenivanie, prognoz* [Applied Stochastics: Robustness, Estimation, Forecast]. Moscow: Finansy i statistika.
3. Shulenin V.P. (2020) *Robust Methods of Mathematical Statistics*. Tomsk: Scientific Technology Publishing House.
4. Huber P. (1984) *Robastnost' v statistike* [Robust Statistics]. Moscow: Mir.
5. Hampel, F., Ronchetti, E., Rousseeuw, P. & Stahel, W. (1989) *Robastnost' v statistike: podkhod na osnove funktsiy vliyaniya* [Robust Statistics: The Approach Based on Influence Functions]. Moscow: Mir.
6. Lisitsin, D.V. & Gavrilov, K.V. (2024) On the properties of M -estimators optimizing weighted L_2 -norm of the influence function. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*. 24(2). pp. 267–275. doi: 10.17586/2226-1494-2024-24-2-267-275
7. Lisitsin, D.V. & Gavrilov, K.V. (2024) The use of maximum entropy principle to construct robust estimators under point Bayesian contamination. Part I. *Applied Mathematics and Control Sciences*. 1. pp. 55–72. doi: 10.15593/2499-9873/2024.1.04
8. Lisitsin, D.V. & Gavrilov, K.V. (2024) The use of maximum entropy principle to construct robust estimators under point Bayesian contamination. Part II. *Applied Mathematics and Control Sciences*. 2. pp. 18–33. doi: 10.15593/2499-9873/2024.2.02
9. Gavrilov, K.V. & Veretelnikova, E.L. (2024) On one way to choose a compromise in a family of conditionally optimal estimators. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 67(2). pp. 60–68. (In Russian). doi: 10.17223/19988605/67/7
10. Gorbunov, V.M. & Sinyukova, E.A. (2014) *Praktikum po distsipline "Teoriya prinyatiya resheniy"* [Workshop on the Discipline "Decision Theory"]. Tomsk: Tomsk Polytechnic University.
11. Podinovski, V.V. & Potapov, M.A. (2013) Metod vzveshennoy summy kriteriev v analize mnogokriterial'nykh resheniy: pro et contra [Weighted Sum Method in Multi-Criteria Decision Analysis: Pro et Contra]. *Biznes-informatika*. 25. pp. 41–48.
12. Lisitsin, D.V. & Gavrilov, K.V. (2025) O svoystvakh kompromisnykh M -otsenok, optimiziruyushchikh vesovuyu L_2 -normu funktsii vliyaniya [On Properties of Compromise M -Estimators Optimizing the Weighted L_2 Norm of the Influence Function]. *Nauchno-tehnicheskii vestnik informatsionnykh tekhnologiy, mekhaniki i optiki*. 25(3). pp. 527–535. doi: 10.17586/2226-1494-2025-3-527-535
13. Lisitsin, D.V. (2013) Ustoychivoe otsenivanie parametrov modeli po mnogomernym neodnorodnym nepolnym dannym [Robust Estimation of Model Parameters from Multivariate Heterogeneous Incomplete Data]. *Nauchnyy vestnik NGTU*. 50. pp. 17–30.
14. Lisitsin, D.V. & Gavrilov, K.V. (2023) Maximin problem of parameter estimation in conditions of point Bayesian contamination. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 62(1). pp. 56–64. (In Russian). doi: 10.17223/19988605/62/6

15. Smolyak, S.A. & Titarenko, B.P. (1980) *Ustoychivye metody otsenivaniya: statisticheskaya obrabotka neodnorodnykh sovokupnostey* [Robust Estimation Methods: Statistical Processing of Heterogeneous Populations]. Moscow: Statistika.
16. Lisitsin, D.V. & Gavrilov, K.V. (2004) Robastnoe otsenivanie finitnoy modeli [Robust Estimation of a Finite Model]. *Sbornik nauchnykh trudov NGTU*. 36. pp. 47–56.
17. Lisitsin, D.V. & Gavrilov, K.V. (2013) Otsenivanie parametrov finitnoy modeli, ustoychivoe k narusheniyu finitnosti [Estimation of Parameters of a Finite Model Robust to Violation of Finiteness]. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki – Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 16(54). pp. 109–121.

Информация об авторах:

Гаврилов Константин Викторович – кандидат технических наук, доцент кафедры автоматике Новосибирского государственного технического университета (Новосибирск, Россия). E-mail: aenigma77@mail.ru

Веретельникова Евгения Леонидовна – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры автоматике Новосибирского государственного технического университета (Новосибирск, Россия). E-mail: janever@mail.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Gavrilov Konstantin Viktorovich (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Automatics, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: aenigma77@mail.ru

Veretel'nikova Evgeniya Leonidovna (Associate Professor, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Automatics, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: janever@mail.ru

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 15.10.2025; принята к публикации 05.03.2026

Received 15.10.2025; accepted for publication 05.03.2026

Научная статья

УДК 519.7

doi: 10.17223/19988605/74/10

Метод идентификации дефектов в нестационарных динамических системах**Алексей Александрович Кабанов¹, Алексей Нилович Жиравок²,
Александр Валерьевич Зуев³, Александр Анатольевич Проценко⁴**¹ Севастопольский государственный университет, Севастополь, Россия² Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия^{3,4} Институт проблем морских технологий Дальневосточного отделения Российской академии наук, Владивосток, Россия³ Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения
Российской академии наук, Владивосток, Россия¹ kabanov@sensu.ru² zhirabok@mail.ru³ alvzuev@yandex.ru⁴ pro293133@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача оценивания (идентификации) величин дефектов в линейных нестационарных системах на основе методов оптимального управления. Для решения задачи строится банк наблюдателей, каждый из которых чувствителен к одной группе дефектов и нечувствителен к другой. Каждый наблюдатель дает суммарную оценку величин дефектов той группы, к которой он чувствителен. При выполнении определенных условий путем решения системы алгебраических уравнений можно найти оценку величины каждого дефекта. Теоретические положения иллюстрируются практическим примером.

Ключевые слова: динамические системы; редуцированная модель; дефекты; оценивание; методы оптимального управления.

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 25-29-00634, <https://rscf.ru/project/25-29-00634/>

Для цитирования: Кабанов А.А., Жиравок А.Н., Зуев А.В., Проценко А.А. Метод идентификации дефектов в нестационарных динамических системах // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2026. № 74. С. 107–114. doi: 10.17223/19988605/74/10

Original article

doi: 10.17223/19988605/74/10

Method of fault identification in non-stationary dynamic systems**Alexey A. Kabanov¹, Alexey N. Zhirabok²,
Alexander V. Zuev³, Alexander A. Protsenko⁴**¹ Sevastopol State University, Sevastopol, Russian Federation² Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russian Federation^{3,4} Institute of Marine Technology Problems of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Russian Federation³ Institute of Automation and Control Processes of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Russian Federation¹ kabanov@sensu.ru² zhirabok@mail.ru³ alvzuev@yandex.ru⁴ pro293133@gmail.com

Abstract. The problem of fault estimation in linear non-stationary systems based on the methods of optimal control is studied. To solve the problem, a bank of observers is sensitive to some group of faults and insensitive to others. Each

observer provides total estimate of faults to which it is sensitive. The estimate of every fault is a result of the algebraic equation solution. The theoretical results are illustrated by practical example.

Keywords: dynamic systems; reduced-order model; faults; estimation; methods of optimal control.

Acknowledgments: The research was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation № 25-29-00634, <https://rscf.ru/project/25-29-00634/>

For citation: Kabanov, A.A., Zhirabok, A.N., Zuev, A.V., Protsenko, A.A. (2026) Method of fault identification in non-stationary dynamic systems. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 74. pp. 107–114. doi: 10.17223/19988605/74/10

Введение

Настоящая статья логически продолжает работы [1, 2] в которых решалась задача идентификации (оценивания) величин дефектов в системах, описываемых линейными стационарными моделями. Популярным средством решения этой задачи являются наблюдатели, работающие в скользящем режиме [3–9]. Использование таких наблюдателей требует наличия высокочастотных переключений, что в реальных системах управления достаточно трудно обеспечить. Подход, предложенный в [1, 2] и основанный на методах оптимального управления, характерен тем, что он свободен от указанного недостатка. В статье этот подход расширен на нестационарные управляемые динамические системы и одновременную оценку величин нескольких возможных дефектов. В его основе лежит преобразование исходной системы к так называемой редуцированной модели минимальной размерности, дополнительно он обладает избирательной нечувствительностью к различным дефектам. На основе редуцированной модели строится вспомогательная система, и для нее путем построения специального наблюдателя решается задача оптимального управления, что позволяет найти оценки величин дефектов, возникших в системе. Полученные оценки могут быть использованы для коррекции возникших дефектов с целью получения свойства отказоустойчивости.

1. Постановка задачи

Рассмотрим нестационарную динамическую систему, описываемую математической моделью

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= F(t)x(t) + G(t)u(t) + \sum_{i=1}^p D_i d_i(t) + L\rho(t), \\ y(t) &= Hx(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, $y(t) \in R^l$ – векторы состояния, управления и выхода; $F(t) \in R^{n \times n}$ и $G(t) \in R^{n \times m}$ – матричные функции с известными законами изменения во времени, мы предполагаем, что функция $F(t)$ дифференцируема; $D_1, \dots, D_p \in R^{n \times 1}$ и $H \in R^{l \times n}$ – постоянные матрицы; функция $d_i(t) \in R$ описывает i -й дефект: при его отсутствии $d_i(t) = 0$, при появлении $d_i(t)$ представляет собой неизвестную функцию времени; матрица D_i указывает, где появился этот дефект; $\rho(t) \in R^P$ описывает действующие на систему возмущения и также предполагается неизвестной. Для простоты предположим вначале, что $L = 0$.

Требуется построить банк (множество) редуцированных моделей, а также вспомогательных систем и наблюдателей, с помощью которых на основе методов теории оптимального управления могут быть найдены оценки величин дефектов, возникших в системе.

2. Построение редуцированной модели

Приведем метод построения модели минимальной размерности, нечувствительной к первому дефекту. Если $x_* \in R^k$, $k < n$, – вектор состояния этой модели, то предполагается, что когда дефектов нет, справедливо равенство

$$x_*(t) = \Phi(t)x(t), \quad (2)$$

где подлежащая определению функция $\Phi(t)$ предполагается дифференцируемой, а также что функция $\dot{\Phi}(t)x(t)$ представима через переменные $x_*(t)$ и $y(t)$, т.е. для всех $t \geq 0$ справедливо равенство

$$\dot{\Phi}(t)x(t) = \delta(x_*(t), y(t), t) \quad (3)$$

для некоторой функции δ . Уравнения, описывающие модель, имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_*(t) &= F_*x_*(t) + G_*(t)u(t) + J_*(t)y(t) + \delta(x_*(t), y(t), t) + D_0(t)d_0(t), \\ y_*(t) &= H_*x_*(t), \end{aligned} \quad (4)$$

где F_* , $G_*(t)$, $J_*(t)$ и H_* – подлежащие определению матрицы. Слагаемое $D_0(t)d_0(t)$ учитывает, что модель (4) может иметь чувствительность к некоторым другим дефектам.

Характерно, что матрица F_* постоянна, чем разрабатываемый подход отличается от [3] и аналогичных работ. В этих работах наблюдатели, как и система (1), являются нестационарными, что заметно усложняет дальнейшие действия. Таким образом, в нашем подходе получается, что модель для нестационарной линейной системы будет нелинейной стационарной.

Естественно предполагать, что если дефектов нет, то $y_*(t) = R_*y(t)$ для подлежащей определению матрицы R_* . Как и в [1, 2], доказывается, что выполняются равенства

$$\Phi(t)F(t) = F_*\Phi(t) + J_*(t)H, \quad R_*H = H_*\Phi(t), \quad G_*(t) = \Phi(t)G. \quad (5)$$

Матрицы F_* и H_* по предположению имеют канонический вид:

$$F_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad H_* = (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0).$$

Из принятого вида этих матриц из первого соотношения в (5) получаются следующие уравнения:

$$\Phi_1 = R_*H, \quad \Phi_i(t)F(t) = \Phi_{i+1}(t) + J_{*i}(t)H, \quad i = \overline{2, k}, \quad \Phi_k(t)F(t) = J_{*k}(t)H. \quad (6)$$

Как и в [1, 2], эти уравнения преобразуются к одному:

$$R_*HF^k(t) = J_{*1}(t)HF^{k-1}(t) + J_{*2}(t)HF^{k-2}(t) + \dots + J_{*k}(t)H,$$

которое можно переписать в виде:

$$(R_* \ J_{*1}(t) \ \dots \ J_{*k}(t))W^{(k)}(t) = 0, \quad (7)$$

где

$$W^{(k)}(t) = \begin{pmatrix} HF^k(t) \\ HF^{k-1}(t) \\ \vdots \\ H \end{pmatrix}.$$

Если $\Phi(t)D_1 = 0$, т.е. модель нечувствительна к первому дефекту, это можно записать в виде:

$$(R_* \ J_{*1}(t) \ \dots \ J_{*k}(t))D_1^{(k)}(t) = 0 \quad [1, 2], \text{ где}$$

$$D_1^{(k)}(t) = \begin{pmatrix} HD_1 & HF(t)D_1 & \dots & HF(t)^{k-1}D_1 \\ 0 & HD_1 & \dots & HF(t)^{k-2}D_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Это условие и уравнение (7) могут быть объединены следующим образом:

$$(R_* \ J_{*1}(t) \ \dots \ J_{*k}(t))(W^{(k)}(t) \ D_1^{(k)}(t)) = 0. \quad (8)$$

Чтобы построить модель минимальной размерности, уравнение (8) решается при k , начиная с $k = 1$, что дает строку $(R_* \ J_{*1}(t) \ \dots \ J_{*k}(t))$. После этого из (6) определяется матрица $\Phi(t)$ и

проверяется, существует ли функция δ , для которой выполняется условие (3). Если существует, то определяется матрица $G_*(t)$, что завершает построение модели (4). Если нет, ищется другое решение уравнения (8), при этом размерность k , как правило, увеличивается на единицу. Поскольку рассматривается первый дефект, обозначим полученную матрицу $\Phi^{(1)}(t)$.

3. Построение банка моделей

Для определения оценок величин одновременно возникающих дефектов выбирается первый по порядку, и по изложенной выше методике строится модель (4), нечувствительная к этому дефекту. Далее методом, рассматриваемым ниже, строится вспомогательная система и решается задача оптимального управления, что дает оценку $w_1(t)$ переменной $D_0 d_0(t)$, представляющей собой сумму тех дефектов, к которым первый наблюдатель чувствителен.

Построенный первый наблюдатель чувствителен к дефектам, для которых $\Phi^{(1)}(t)D_j \neq 0$; выбираем среди них первый по порядку и аналогично строим второй наблюдатель, нечувствительный к этому дефекту, что дает матрицу $\Phi^{(2)}(t)$ и оценку $w_2(t)$. Аналогично выполняются последующие шаги; в результате каждого из них строятся матрицы $w_\Sigma(t) = (w_1(t) \ w_2(t) \ \dots \ w_q(t))^T$,

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \Phi^{(1)}(t) \\ \Phi^{(2)}(t) \\ \vdots \\ \Phi^{(q)}(t) \end{pmatrix}$$

и $\Phi(t)D_\Sigma$, где $D_\Sigma = (D_1 \ D_2 \ \dots \ D_p)$. Число q – минимальное, такое что $\text{rank}(\Phi(t)D_\Sigma) = n$ при всех t . Это означает, что уравнение

$$w_\Sigma(t) = (w_1(t) \ w_2(t) \ \dots \ w_q(t))^T = \Phi(t)(D_1 \ D_2 \ \dots \ D_p)(d_1(t) \ d_2(t) \ \dots \ d_p(t))^T \quad (9)$$

разрешимо относительно всех дефектов из $(d_1(t) \ d_2(t) \ \dots \ d_p(t))$. Условие $\text{rank}(\Phi(t)D_\Sigma) < n$ при всех q означает, что в $(d_1(t) \ d_2(t) \ \dots \ d_p(t))$ есть неразличимые дефекты, которые при имеющихся измерениях идентифицировать по отдельности невозможно.

Если на систему действует возмущение $\rho(t)$, то желательно строить модель, нечувствительную к нему, методом, описанным в [1, 2], однако нужно иметь в виду, что наверняка для некоторых дефектов нечувствительность к ним и возмущениям обеспечить не удастся, и получаемые оценки будут приближенными.

4. Вспомогательная задача и ее решение

Для получения оценок $w_1(t), \dots, w_q(t)$ используется методика, детально разработанная в [1, 2], поэтому ниже приводятся только основные ее положения на основе модели (4), нечувствительной к первому дефекту. Для обеспечения устойчивости модели в нее вводится обратная связь по сигналу невязки $r(t) = R_*y(t) - y_*(t)$ с коэффициентом усиления K , что дает

$$\begin{aligned} \dot{x}_*(t) &= (F_* - KH_*)x_*(t) + G_*u(t) + (J_* + KR_*)y(t) + \delta(x_*(t), y(t), t) + D_0(t)d_0(t), \\ y_*(t) &= H_*x_*(t). \end{aligned} \quad (10)$$

Методы выбора коэффициента K в нелинейном случае можно найти в [10].

Далее строится вспомогательная система

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= (F_* - KH_*)z(t) + G_*u(t) + (J_* + KR_*)y(t) + \delta(z(t), y(t), t) + v(t), \\ y_z(t) &= H_*z(t). \end{aligned}$$

От модели (10) она отличается новым обозначением вектора состояния и заменой неизвестной величины $D_0(t)d_0(t)$ переменной $v(t)$, рассматриваемой как вспомогательное управление. От него требуется перевести систему (9) из состояния $z(0)$ в состояние $z(t)$ такое, что $e(t) = z(t) - x_*(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$, и при этом минимизировать функционал

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (e_y^T(t) Q e_y(t) + v^T(t) P v(t)) dt \rightarrow \min,$$

где P – положительно-определенная матрица, $Q > 0$, $e_y(t) = y(t) - y_*(t)$.

Для поиска управления используется преобразование Риккати [11]

$$\dot{z}(t) = M(t)\lambda(t) + g(t),$$

где $M(t)$ – невырожденная матрица, $g(t)$ – некоторая вектор-функция. Преобразование приводит к уравнениям для матрицы $M(t)$ и функции $g(t)$

$$\dot{M} = \bar{F}_* M + M \bar{F}_*^T + M \bar{H}_*^T Q H_* M - D_0^T P^{-1} D_0 + M \left(\frac{\partial \delta(z, y, t)}{\partial z} \right)^T \bar{F}_*^T, \quad (11)$$

$$\dot{g} = \bar{F}_* g + \bar{J}_* y + G_* u + \delta(x_*, y, t) - M \bar{H}_*^T Q y_* + M \bar{H}_*^T Q H_* g, \quad (12)$$

где $\bar{F}_* = F_* - K H_*$, $\bar{J}_* = J_* + K R$. Окончательно для управления $v(t)$ получаем

$$v(t) = -P^{-1} D_0^T M^{-1}(t)(z(t) - g(t)) \rightarrow w_1(t). \quad (13)$$

Аналогичная задача решается для каждой модели, в результате чего строится банк наблюдателей, определяются матрица $\Phi(t)$, оценки $w_1(t)$, $w_2(t)$, ..., $w_q(t)$, и при выполнении условия $\text{rank}(\Phi(t)D_\Sigma) = n$ решается система алгебраических уравнений (9).

5. Пример

Рассмотрим электропривод манипулятора, описанный уравнениями [12]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \frac{1}{i_r} x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k_\theta + v^*(t)}{J + V^*(t)} x_2(t) + \frac{k_m}{J + V^*(t)} x_3(t) + d_1(t), \\ \dot{x}_3(t) &= -\frac{k_\omega}{L_m} x_2(t) - \frac{R_m}{L_m} x_3(t) + \frac{k_y}{L_m} u(t) + d_2(t). \end{aligned}$$

Здесь $x_1(t)$ – угол поворота выходного вала редуктора, $x_2(t)$ – скорость вращения ротора, $x_3(t)$ – ток якоря; переменная $V^*(t)$ описывает инерционные свойства степени подвижности манипулятора; переменная $v^*(t)$ описывает кориолисовы и скоростные силы. Предполагается, что измеряются переменные $x_1(t)$ и $x_3(t)$. Введем следующие обозначения:

$$\mu_1 = \frac{1}{i_r}, \quad \mu_2(t) = -\frac{k_\theta + v^*(t)}{J + V^*(t)}, \quad \mu_3(t) = \frac{k_m}{J + V^*(t)}, \quad \mu_4 = -\frac{k_\omega}{L_m}, \quad \mu_5 = -\frac{R_m}{L_m}, \quad \mu_6 = \frac{k_y}{L_m}, \quad \mu_6 = \frac{k_y}{L_m}.$$

Приведем матрицы, описывающие электропривод:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 & \mu_3 \\ 0 & \mu_4 & \mu_5 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_6 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Построим модель, нечувствительную к $d_1(t)$. Уравнение (7) имеет решение $R_* = (\mu_4 \quad -\mu_1)$, $J_* = (0 \quad -\mu_1 \mu_5)$, $\Phi^{(1)} = (\mu_4 \quad 0 \quad -\mu_1)$ и модель

$$\dot{x}_*(t) = -\mu_1 \mu_5 y_2(t) - \mu_1 \mu_6 u(t) - \mu_1 d_2(t).$$

Обратная связь по сигналу невязки $r = R_*y(t) - x_*(t) = \mu_4 y_1(t) - \mu_1 y_2(t) - x_*(t)$ с коэффициентом $K = 1$ дает следующее уравнение:

$$\dot{x}_*(t) = -x_*(t) + \mu_4 y_1(t) - (\mu_1 \mu_5 + \mu_1) y_2(t) - \mu_1 \mu_6 u(t) - \mu_1 d_2(t).$$

Наблюдатель строится на основе уравнений (11), (12) с $\delta(x_*, y, t) = 0$.

Построим модель, нечувствительную к $d_2(t)$. Уравнение (7) имеет решение $R_* = (1 \ 0)$,

$$J_* = \begin{pmatrix} \mu_2(t) & 0 \\ 0 & \mu_1 \mu_3(t) \end{pmatrix}, \quad \Phi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\mu_2(t) & \mu_1 & 0 \end{pmatrix}$$

и модель

$$\begin{aligned} \dot{x}_{*1}(t) &= x_{*2}(t) + \mu_2(t) y_1(t), \\ \dot{x}_{*2}(t) &= \mu_1 \mu_3(t) y_2(t) - \delta_*(t) y_1(t) + \mu_1 d_1(t), \\ y_*(t) &= x_{*1}(t), \end{aligned}$$

где

$$\delta_*(t) = \frac{\dot{v}^*(t)(J + V^*(t)) - v^*(t)(k_g + v^*(t))}{(J + V^*(t))^2},$$

поскольку $v^*(t) = \dot{V}^*(t)$ [12]. Обратная связь по сигналу невязки $r = R_*y(t) - y_*(t) = y_1(t) - x_{*1}(t)$ с коэффициентом $K = (2 \ 1)$ дает

$$\begin{aligned} \dot{x}_{*1}(t) &= -2x_{*1}(t) + x_{*2}(t) + (\mu_2(t) + 2) y_1(t), \\ \dot{x}_{*2}(t) &= \mu_1 \mu_3(t) y_2(t) + \delta(y(t), t) + \mu_1 d_1(t) + y_1(t) - x_{*1}(t), \\ y_*(t) &= x_{*1}(t). \end{aligned}$$

Наблюдатель строится на основе уравнений (11), (12). Как видно из уравнений, описывающих модели, дефекты могут быть оценены независимо друг от друга.

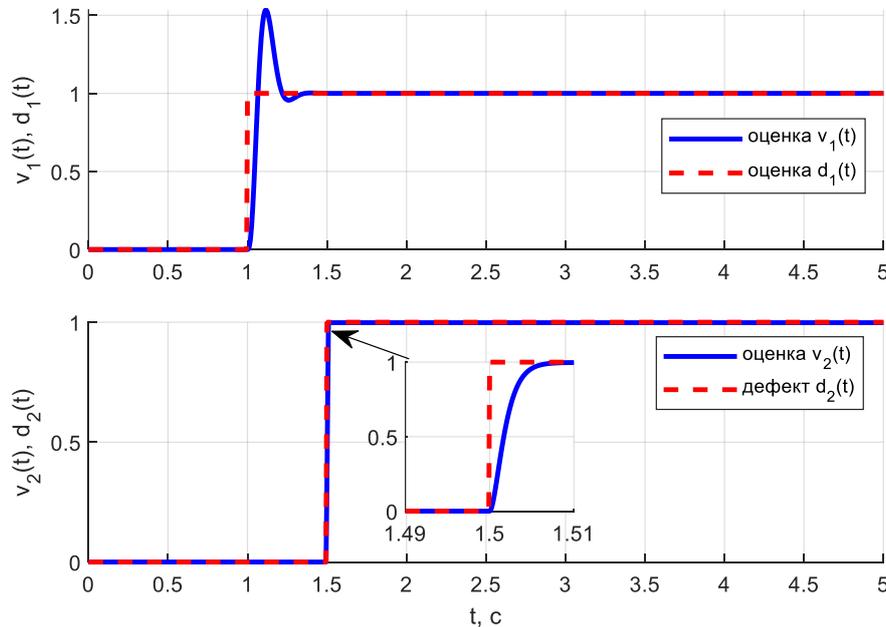


Рис. 1. Результат оценки дефектов наблюдателями
Fig. 1. The result of the estimation of defects by observers

Для численного моделирования одновременной работы наблюдателей по оценке каждого из дефектов параметры модели электропривода возьмем равными $J = 0,001$ кг·м²; $R_m = 0,4$ Ω; $L_m = 0,004$ Гн; $k_m = 0,02$ Н·м/А; $k_\omega = 0,05$ В·с/рад; $i_r = 100$; $k_u = 10$. Параметры нестационарности можно задать в виде: $V^*(t) = (1 + \sin(t)) / i_r^2$, $v^*(t) = \dot{V}^*(t)$.

Параметры Q, P, K наблюдателей выберем в виде: для дефекта $d_1(t) - Q = 10^8, P = 10^{-2}, K = [2 \ 1]$; для дефекта $d_2(t) - Q = 10^{10}, P = 1, K = 1$. Дефекты зададим в виде единичных ступенчатых функций с временем скачка соответственно $t_1 = 1, t_2 = 1,5$ с.

На рис/ 1 показаны результаты моделирования: графики сверху – дефект $d_1(t)$ и его оценка; графики снизу – дефект $d_2(t)$ и его оценка. Результат показывает, что синтезированные наблюдатели позволяют одновременно и независимо обнаружить и идентифицировать оба дефекта с приемлемой точностью.

Заключение

Рассмотрена и решена задача оценивания величин одновременно возникающих дефектов в линейных нестационарных системах. Для решения использованы методы оптимального управления, для чего строится банк наблюдателей с избирательной чувствительностью к различным дефектам. Каждый наблюдатель построен так, что дает суммарную оценку величин дефектов той группы, к которой этот наблюдатель чувствителен. Путем решения системы алгебраических уравнений определяются оценки величин всех дефекта. Теоретические положения проиллюстрированы практическим примером.

Список источников

1. Кабанов А.А., Зуев А.В., Жиравок А.Н., Филаретов В.Ф. Метод идентификации дефектов: подход на основе методов оптимального управления // Автоматика и телемеханика. 2023. № 9. С. 82–94.
2. Кабанов А.А., Зуев А.В., Филаретов В.Ф., Жиравок А.Н. Идентификация дефектов в линейных системах на основе методов оптимального управления // Известия вузов. Приборостроение. 2022. Т. 65, № 5. С. 335–342.
3. Yan X., Edwards C. Nonlinear robust fault reconstruction and estimation using sliding mode observers // Automatica. 2007. V. 43. P. 1605–1614.
4. Rios H., Efimov D., Davila J., Raissi T., Fridman L., Zolghadri A. Non-minimum phase switched systems: HOSM based fault detection and fault identification via volterra integral equation // Intern. J. Adapt. Contr. and Signal Proc. 2014. V. 28. P. 1372–1397.
5. Rajesh R.J., Shtessel Y., Edwards C. Accuracy improvement of dynamic sensors using sliding mode observers with dynamic extension // Sensors and Actuators. 2020. V. A 316. Art. 112396.
6. Hmidi R., Brahim A., Hmida F., Sellami A. Robust fault tolerant control desing for nonlinear systems not satisfying maching and minimum phase conditions // Int. J. Control, Automation and Systems. 2020. V. 18. P. 1–14.
7. Chen L., Edwards C., Alwi H., Sato M. Flight evaluation of a sliding mode online control allocation scheme for fault tolerant control // Automatica. 2020. V. 114. Art. 108829.
8. Hamdi H., Rodrigues M., Rabaout B., Braiek N. A fault estimation and fault tolerant control based sliding mode observer for lpv descriptor systems with time delay // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 2021. V. 31. P. 247–258.
9. Sergiyenko O., Tyrsa V., Zhirabok A., Zuev A. Sliding mode observer based fault identification in automatic vision system of robot // Control Engineering Practice. Elsevier. 2023. V. 139. Art. 105614.
10. Misawa E., Hedrick J. Nonlinear observers – a state of the art. Survey // J. Dynamic Systems, Measurements Control. 1989. V. 111. P. 344–352.
11. Mufti I.H., Chow C.K., Stock F.T. Solution of Ill-conditioned Linear Two-point Boundary Value Problems by the Riccati Transformation // SIAM Rev. 1969. V. 11 (4). P. 616–619
12. Зуев А.В., Жиравок А.Н., Филаретов В.Ф., Проценко А.А. Идентификация дефектов в нестационарных системах на основе скользящих наблюдателей // Мехатроника, автоматизация, управление. 2022. Т. 22, № 12. С. 625–633.

References

1. Kabanov, A.A., Zuev, A.V., Zhirabok, A.N. & Filaretov, V.F. (2023) Fault identification: an approach based on optimal control methods. *Automation and Remote Control*. 9. pp. 82–94.
2. Kabanov, A.A., Zuev, A.V., Filaretov, V.F. & Zhirabok, A.N. (2022) Identifikatsiya defektov v lineynykh sistemakh na osnove metodov optimal'nogo upravleniya [Defect Identification in Linear Systems Based on Optimal Control Methods]. *Izvestiya vuzov. Priborostroenie*. 65(5). pp. 335–342.
3. Yan, X. & Edwards, C. (2007) Nonlinear Robust Fault Reconstruction and Estimation Using Sliding Mode Observers. *Automatica*. 43. pp. 1605–1614.

4. Rios, H., Efimov, D., Davila, J., Raissi, T., Fridman, L. & Zolghadri, A. (2014) Non-Minimum Phase Switched Systems: HOSM Based Fault Detection and Fault Identification via Volterra Integral Equation. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*. 28. pp. 1372–1397.
5. Rajesh, R.J., Shtessel, Y. & Edwards, C. (2020) Accuracy Improvement of Dynamic Sensors Using Sliding Mode Observers with Dynamic Extension. *Sensors and Actuators A: Physical*. 316. 112396.
6. Hmidi, R., Brahim, A., Hmida, F. & Sellami, A. (2020) Robust Fault Tolerant Control Design for Nonlinear Systems Not Satisfying Matching and Minimum Phase Conditions. *International Journal of Control, Automation and Systems*. 18. pp. 1–14.
7. Chen, L., Edwards, C., Alwi, H. & Sato, M. (2020) Flight Evaluation of a Sliding Mode Online Control Allocation Scheme for Fault Tolerant Control. *Automatica*. 114. 108829.
8. Hamdi, H., Rodrigues, M., Rabaout, B. & Braiek, N. (2021) A Fault Estimation and Fault Tolerant Control Based Sliding Mode Observer for LPV Descriptor Systems with Time Delay. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*. 31. pp. 247–258.
9. Sergienko, O., Tyrsa, V., Zhirabok, A. & Zuev, A. (2023) Sliding Mode Observer Based Fault Identification in Automatic Vision System of Robot. *Control Engineering Practice*. 139. 105614.
10. Misawa, E. & Hedrick, J. (1989) Nonlinear Observers – A State of the Art Survey. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*. 111. pp. 344–352.
11. Mufti, I.H., Chow, C.K. & Stock, F.T. (1969) Solution of Ill-Conditioned Linear Two-Point Boundary Value Problems by the Riccati Transformation. *SIAM Review*. 11(4). pp. 616–619.
12. Zuev, A.V., Zhirabok, A.N., Filaretov, V.F. & Protsenko, A.A. (2022) Identifikatsiya defektov v nestatsionarnykh sistemakh na osnove skol'zyashchikh nablyudateley [Fault identification in non-stationary systems based on sliding mode observers]. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*. 22(12). pp. 625–633.

Информация об авторах:

Кабанов Алексей Александрович – кандидат технических наук, доцент Севастопольского государственного университета (Севастополь, Россия). E-mail: kabanovaleksey@gmail.com

Жирабок Алексей Нилович – профессор, доктор технических наук, профессор департамента автоматике и робототехники Дальневосточного федерального университета (Владивосток, Россия). E-mail: zhirabok@mail.ru

Зуев Александр Валерьевич – доктор технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Института проблем морских технологий ДВО РАН; ведущий научный сотрудник Института автоматике и процессов управления ДВО РАН (Владивосток, Россия). E-mail: alvzuev@yandex.ru

Проценко Александр Анатольевич – кандидат технических наук, старший научный сотрудник Института проблем морских технологий ДВО РАН (Владивосток, Россия). E-mail: pro293133@gmail.com

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Kabanov Aleksey A. (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Sevastopol State University, Sevastopol, Russian Federation). E-mail: kabanovaleksey@gmail.com.

Zhirabok Alexey N. (Professor, Doctor of Technical Sciences, Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russian Federation). E-mail: zhirabok@mail.ru.

Zuev Alexander V. (Associate Professor, Doctor of Technical Sciences, Institute of Marine Technology Problems of the Far Eastern Branch of RAS; Institute of Automation and Control Processes of the Far Eastern Branch of RAS, Vladivostok, Russian Federation). E-mail: alvzuev@yandex.ru.

Protsenko Alexander A. (Candidate of Technical Sciences, Institute of Marine Technology Problems, Vladivostok, Russian Federation). E-mail: pro293133@gmail.com.

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 25.09.2025; принята к публикации 05.03.2026

Received 25.09.2025; accepted for publication 05.03.2026

ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

INFORMATICS AND PROGRAMMING

Научная статья

УДК 004.95

doi: 10.17223/19988605/74/11

Проактивное управление ресурсами веб-ГИС визуализации геофизических полей на основе семантической кластеризации потоковых данныхГульнара Равилевна Воробьева¹, Андрей Владимирович Воробьев², Глеб Олегович Орлов³^{1, 2, 3} Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия² Геофизический центр Российской академии наук, Москва, Россия¹ Gulnara.vorobeva@gmail.com² Geomagnet@list.ru³ orlovgleb99@mail.ru

Аннотация. Статья посвящена разработке метода проактивного управления ресурсами веб-ГИС для визуализации геофизических полей. Предложен подход на основе семантической кластеризации потоковых данных, учитывающий не только пространственные координаты, но и тензорные характеристики объектов. Модифицированный алгоритм кластеризации с адаптивным механизмом переключения между режимами обеспечивает оптимизацию использования вычислительных ресурсов за счет упреждающей подготовки данных. Экспериментальные результаты демонстрируют эффективность предложенного подхода: сокращение времени загрузки контента до 2,3 с, снижение потребления видеопамати на 42% и повышение интерактивности на 35–40% по сравнению с традиционными методами.

Ключевые слова: геофизические данные; тензорное поле; векторное поле; визуализация пространственных данных; кластерный анализ.

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-21-00143, <https://rscf.ru/project/25-21-00143/>

Для цитирования: Воробьева Г.Р., Воробьев А.В., Орлов Г.О. Проактивное управление ресурсами веб-ГИС визуализации геофизических полей на основе семантической кластеризации потоковых данных // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2026. № 74. С. 115–125. doi: 10.17223/19988605/74/11

Original article

doi: 10.17223/19988605/74/11

Proactive resource management for web-based GIS visualization of geophysical fields using semantic clustering of streaming dataGulnara R. Vorobeva¹, Andrei V. Vorobev², Gleb O. Orlov³^{1, 2, 3} Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russian Federation² Geophysical Center of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation¹ Gulnara.vorobeva@gmail.com² Geomagnet@list.ru³ orlovgleb99@mail.ru

Abstract. This article is devoted to the development of a method for proactively managing web GIS resources for visualizing geophysical fields. An approach based on semantic clustering of streaming data is proposed, taking into

account not only spatial coordinates but also tensor characteristics of objects. A modified clustering algorithm with an adaptive switching mechanism between modes optimizes the use of computing resources through proactive data preparation. Experimental results demonstrate the effectiveness of the proposed approach: content loading time is reduced to 2.3 seconds, video memory consumption is reduced by 42%, and interactivity is increased by 35-40% compared to traditional methods.

Keywords: geophysical data; tensor field; vector field; spatial data visualization; cluster analysis.

Acknowledgments: The research was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation, grant No. 25-21-00143, <https://rscf.ru/project/25-21-00143/>

For citation: Vorobeva, G.R., Vorobev, A.V., Orlov, G.O. (2026) Proactive resource management for web-based GIS visualization of geophysical fields using semantic clustering of streaming data. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 74. pp. 115–125. doi: 10.17223/19988605/74/11

Введение

Современные геоинформационные системы визуализации геофизических полей сталкиваются с фундаментальным вызовом, обусловленным ростом объемов и сложности пространственных данных. Особую остроту эта проблема приобретает при обработке многокомпонентных геофизических полей, характеризующихся высокой размерностью и пространственно-временной неоднородностью. Традиционные архитектуры веб-ГИС, основанные на потоковой передаче статических тайлов, достигают практических пределов при работе с динамическими тензорными полями в режиме, приближенном к реальному времени. Низкая реактивность интерфейсов с задержками рендеринга снижает эффективность анализа в таких критически важных областях, как мониторинг геофизической обстановки или управление природными ресурсами [1, 2].

Анализ существующих подходов к оптимизации выявляет их принципиальные ограничения. Методы, основанные на упрощении геометрии и снижении детализации, неприменимы для геофизических задач, поскольку приводят к потере семантически значимых особенностей полей [3]. Альтернативные решения, такие как потоковая передача данных и серверный предрендеринг, хотя и снижают время начальной загрузки до $2,1 \pm 0,3$ с [4], но ограничивают интерактивность работы с данными [5]. Современные методы WebGL-оптимизации, включая инстансный рендеринг, демонстрируют ограниченную эффективность при визуализации неоднородных глифовых представлений [6]. Перспективное направление разработки гибридных архитектур, сочетающих кластерный анализ с распределенной обработкой данных [7], не нашло эффективной реализации для работы с тензорными характеристиками полей. Распространенные технические решения (кэширование, пространственное индексирование, многопоточность и др.) обладают существенными ограничениями и не учитывают специфику работы с динамически изменяющимися многомерными данными геофизических полей [8–12].

Ключевым узким местом является неэффективность механизмов управления вычислительными ресурсами. Стандартные подходы к оптимизации демонстрируют ограниченную эффективность при работе с объектами, несущими семантически значимую нагрузку. Проблема усугубляется при визуализации с использованием сложных графических примитивов для отображения многомерных характеристик геофизических полей.

Данная работа предлагает метод проактивного управления ресурсами веб-ГИС визуализации геофизических полей, основанный на семантической кластеризации потоковых данных. В отличие от известных решений предлагаемый подход оперирует не только с пространственными координатами, но и с многомерным фазовым пространством атрибутивных характеристик. В его основе лежит гипотеза о том, что динамическое прогнозирование областей интереса и семантической значимости данных позволяет проактивно инициировать загрузку и подготовку только релевантных фрагментов геофизической информации, минимизируя задержки и потребление ресурсов. Такой метод переводит архитектуру взаимодействия с данными от реактивной к проактивной модели, что открывает новые возможности для построения высокоотзывчивых интерфейсов для работы с масштабными массивами геофизической информации в условиях ограниченной пропускной способности каналов связи.

1. Характеристика пространственных данных

Исследование посвящено обработке пространственно-временных данных геофизических полей, обладающих принципиально иной структурой по сравнению с традиционными геопрограмными данными. Особенность таких данных заключается в их тензорной природе, где каждая точка наблюдения характеризуется не скалярным значением или вектором, а полноценным тензором второго ранга, описывающим сложную систему взаимосвязей между компонентами поля [13]. Эта многокомпонентность создает фундаментальные сложности для визуализации, поскольку традиционные методы, основанные на изолированном отображении отдельных компонент, не позволяют адекватно передать структурные особенности поля.

В качестве математической основы предлагается использование метрического тензора, адаптированного для задач анализа геофизических полей. Хотя исторически метрический тензор нашел применение в теории относительности, его структурные свойства идеально соответствуют требованиям работы с геофизическими данными. Симметричный тензор второго ранга g_{ij} определяет скалярное произведение в касательном пространстве многообразия M , что позволяет компактно описывать сложные полевые структуры:

$$g_{ij} = \langle \partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j \rangle, \quad (1)$$

где g_{ij} – компонента метрического тензора, определяющая меру искажения пространства в направлениях i и j ; $\partial x^i, \partial x^j$ – базисные векторы касательного пространства, соответствующие координатным направлениям.

Для данных спутниковых измерений геомагнитного поля метрический тензор строится на основе векторов напряженности $B_i = (n_i, e_i, c_i)$, где компоненты n, e, c соответствуют северной, восточной и меридиональной составляющим. С учетом угловых параметров поля – магнитного склонения D и наклона I – компоненты тензора принимают вид:

$$g_{11} = |B|^2 \cos^2 I \cos^2 D + |B|^2 \sin^2 I, \quad (2)$$

где $|B|^2$ – квадрат модуля вектора напряженности магнитного поля, определяющий общую интенсивность; $\cos^2 I \cos^2 D$ – весовой коэффициент, учитывающий проекцию вектора на горизонтальную плоскость через углы наклона I и склонения D ; $\sin^2 I$ – компонента, отражающая вертикальную составляющую поля. Сумма двух слагаемых обеспечивает инвариантное представление метрики относительно ориентации поля.

Особенностью предлагаемого подхода является учет пространственной корреляции измерений через весовые коэффициенты w_k и билинейный функционал F_k , включающий угловые параметры поля [13]. Это позволяет сохранять структурную целостность данных при преобразованиях и агрегации, что критически важно для последующей визуализации и анализа.

Для визуального представления тензорных данных предлагается использовать суперэллипсоидные глифы, обладающие значительными преимуществами по сравнению с традиционными методами [14]. Геометрическая гибкость суперэллипсоидов позволяет плавно варьировать форму глифа между эллипсоидальными и квадратными конфигурациями, обеспечивая точное соответствие локальным особенностям поля. Пространственная ориентация глифа кодирует направление градиента поля, а эксцентриситет отражает степень анизотропии распределения напряженности.

Математически форма суперэллипсоида описывается параметрическими уравнениями, где коэффициенты a и b определяют вытянутость вдоль соответствующих осей, а показатель степени n контролирует плавность переходов между различными зонами поля. Интеграция цветового кодирования с суперэллиптической геометрией формирует двумерную систему визуального представления, в которой пространственные параметры глифа передают векторные свойства поля, а цветовая палитра отображает скалярные характеристики. Ключевым достоинством суперэллипсоидных глифов выступает их устойчивость к взаимному перекрытию в зонах с повышенной плотностью измерений, что обеспечивает сохранение читаемости структуры поля при существенной пространственной неоднородности данных. Указанное качество приобретает особую значимость в задачах оперативного мониторинга, где классические подходы к визуализации часто порождают эффект наложения графических элементов с последующей утратой информационной содержательности.

Разработанная методология, интегрирующая метрический тензор для структурного анализа и суперэллипсоидные глифы для визуализации, создает принципиально новые возможности целостного восприятия пространственно-временных закономерностей геофизических полей. Такой синтез математического аппарата и визуальных решений позволяет преодолеть принципиальные ограничения традиционных методов отображения многокомпонентных данных, обеспечивая одновременное восприятие как структурных, так и динамических характеристик исследуемых полей. Комплексный характер предложенного подхода открывает перспективы для качественно нового уровня интерпретации геофизической информации в условиях возрастающих объемов и сложности данных мониторинга.

2. Метод семантической кластеризации для проактивного управления ресурсами

Предлагаемый алгоритм пространственно-анизотропной кластеризации представляет собой модифицированную версию метода k -средних, адаптированную для работы с многомерными геофизическими данными [15]. Особенностью предложенного подхода является учет не только пространственных координат точек наблюдения, но и тензорных характеристик геофизического поля, что позволяет осуществлять семантически значимую группировку данных для оптимизации процесса визуализации. В отличие от традиционных методов кластеризации, оперирующих исключительно с пространственными координатами [16], предложенный алгоритм обеспечивает интеллектуальное распределение вычислительных ресурсов, что позволяет осуществлять проактивное управление ресурсами за счет учета физической природы данных и их визуальных характеристик (рис. 1).

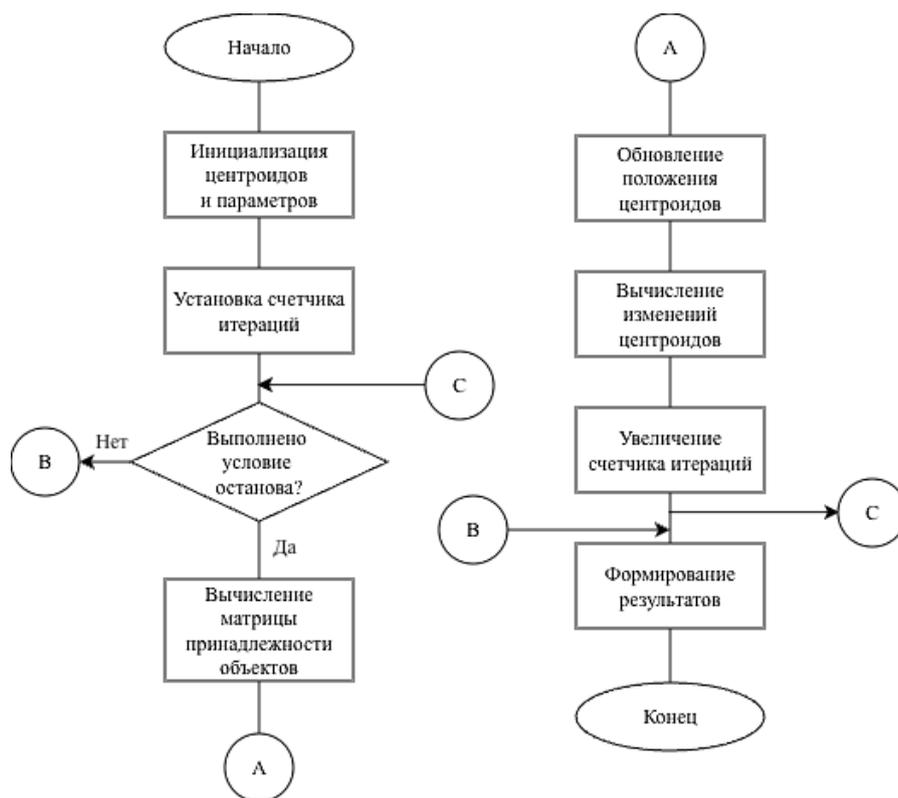


Рис. 1. Блок-схема алгоритма пространственно-анизотропной кластеризации
Fig. 1. Flowchart of the spatially anisotropic clustering algorithm

Фундаментальным отличием предложенного метода является его ориентация на специфические требования систем визуализации геофизических данных. В отличие от стандартных задач кластеризации, где основной целью является минимизация внутрикластерных расстояний, здесь критически важным становится сохранение семантической целостности визуального представления. Это означает, что объекты, имеющие схожие физические характеристики и визуальные свойства, должны группироваться

вместе даже при значительном пространственном разнесении. Такой подход позволяет оптимизировать процесс рендеринга за счет сокращения количества уникальных графических примитивов без потери информативности визуализации.

Основу проактивного механизма составляет модифицированная функция расстояния [17]

$$d(X_i, C_j) = \alpha \|x_i - c_j\|^2 + \beta \|T_i - T_j\|_p + \gamma \|A_i - A_j\|^2, \quad (3)$$

где d – обобщенное расстояние между объектом и центроидом; X_i – многомерный вектор характеристик i -го объекта; C_j – вектор характеристик j -го центроида; x_i – пространственные координаты i -го объекта; c_j – пространственные координаты j -го центроида; T_i – тензор геофизических характеристик i -го объекта; T_j – тензор геофизических характеристик j -го центроида; A_i – атрибутивные параметры визуализации i -го объекта; A_j – атрибутивные параметры визуализации j -го центроида; α, β, γ – весовые коэффициенты компонент расстояния.

Введение многокомпонентной метрики решает проблему игнорирования семантической близости объектов. Динамическая адаптация весовых коэффициентов обеспечивает контекстно-зависимую настройку алгоритма. Фундаментальным преимуществом разработанной метрики расстояния выступает ее способность к интегральной оценке многомерных характеристик данных. Вычисление тензорной компоненты $\|T_i - T_j\|_p$, основанное на применении спектральной нормы разности тензоров, позволяет учитывать структурные особенности геофизических полей:

$$\|T_i - T_j\|_p = \sqrt{\lambda_{\max}[(T_i - T_j)^T (T_i - T_j)]}, \quad (4)$$

где λ_{\max} – максимальное собственное значение матрицы; $T_i - T_j$ – разность тензоров характеристик; $(T_i - T_j)^T$ – транспонированная матрица разности тензоров

Применение спектральной нормы в предлагаемой метрике обеспечивает принципиальную инвариантность результатов кластеризации относительно выбора системы координат. Данное свойство приобретает особую значимость при обработке геофизических данных, которые часто агрегируются из разнородных источников с различными системами отсчета и методами измерений [18, 19]. Благодаря инвариантности относительно ортогональных преобразований спектральная норма гарантирует корректное распознавание физически подобных тензорных структур вне зависимости от их пространственной ориентации. Это позволяет исключить систематические погрешности кластеризации, связанные исключительно с особенностями математического представления тензоров, и обеспечивает содержательную интерпретацию выделяемых кластеров на основе объективных физических свойств геофизических полей.

Выбор максимального собственного значения в качестве основы для вычисления нормы обусловлен необходимостью учета наиболее значимых различий между тензорами. В контексте геофизических данных максимальное собственное значение часто соответствует основной оси анизотропии поля, что делает его наиболее информативным параметром для сравнения. Такой подход позволяет эффективно выделять области с различной структурой геофизических аномалий, что непосредственно влияет на качество их визуального представления. Кроме того, использование спектральной нормы обеспечивает устойчивость алгоритма к малым возмущениям данных, что особенно важно при работе с зашумленными измерениями.

Экспериментальные исследования показали оптимальность разделения на три кластера ($k = 3$), соответствующих различным уровням геомагнитной активности. Такой выбор обусловлен физической природой геофизических данных и позволяет эффективно балансировать между детализацией визуализации и производительностью системы [20, 21]. Каждый кластер соответствует определенному типу визуального представления: высокоинтенсивные аномалии требуют максимальной детализации, средние интенсивности допускают некоторое упрощение, а слабые аномалии могут визуализироваться в значительно упрощенном виде без потери общей информативности картины.

Процедура кластеризации включает итеративное обновление центроидов с учетом пространственно-временных характеристик данных:

$$C_j^{(k+1)} = \sum U_{ij}^{(k)} W_i X_i / \sum U_{ij}^{(k)} W_i, \quad (5)$$

где $C_j^{(k+1)}$ – обновленное положение j -го центроида на следующей итерации; $U_{ij}^{(k)}$ – функция принадлежности объекта i к кластеру j на итерации k ; W_i – весовой коэффициент пространственной плотности; X_i – многомерный вектор характеристик i -го объекта.

Итеративная коррекция позиций центроидов составляет вычислительное ядро алгоритма, позволяя адаптивно учитывать пространственную неоднородность данных. На каждом цикле осуществляется рекалибровка центроидов с интеграцией пространственных координат и физических атрибутов объектов. Введение весового коэффициента W_i , отражающего пространственную плотность измерений, предотвращает образование статистически незначимых кластеров в зонах с разреженной сеткой наблюдений и способствует сбалансированному покрытию всего исследуемого пространства.

Процедура итеративного уточнения продолжается до достижения условий сходимости, фиксируемых по стабилизации координат центроидов и значений функций принадлежности. В качестве критериев остановки алгоритма применяется либо минимальное смещение центроидов на последовательных итерациях, либо достижение установленного лимита вычислительных циклов. Данная стратегия обеспечивает формирование конечной кластерной конфигурации, адекватно отражающей структурные особенности данных и учитывающей комплекс факторов, определяющих качество визуализационного представления.

Для обработки пограничных случаев разработан адаптивный механизм, переключающийся между жесткой и мягкой кластеризацией в зависимости от доступных вычислительных ресурсов. При достаточной производительности системы применяется мягкая кластеризация с функцией принадлежности:

$$U_{ij} = [\sum_m d(X_i, C_j) / d(X_i, C_m)^{2m}]^{-1}, \quad (6)$$

где U_{ij} – степень принадлежности объекта i к кластеру j ; m – параметр нечеткости кластеризации; $d(X_i, C_j)$ – расстояние между объектом i и центроидом j ; $d(X_i, C_m)$ – расстояние между объектом i и центроидом m ; \sum_m – оператор суммирования по всем центроидам.

Механизм адаптивной кластеризации позволяет гибко управлять точностью классификации в зависимости от доступных вычислительных ресурсов и требований к производительности. В режиме мягкой кластеризации объекты могут частично принадлежать к нескольким кластерам, что повышает точность модели, но требует дополнительных вычислений [22, 23]. В условиях ограниченных ресурсов система автоматически переключается в режим жесткой кластеризации, обеспечивая минимально необходимую точность при значительном снижении вычислительной нагрузки. Этот адаптивный подход особенно важен для веб-приложений, работающих на разнородных клиентских устройствах с различными вычислительными возможностями.

Параметр нечеткости m играет важную роль в управлении точностью кластеризации. При значениях m , близких к 1, алгоритм приближается к жесткой кластеризации, где каждый объект однозначно относится к одному кластеру. Увеличение m приводит к «размытию» границ между кластерами, что позволяет более адекватно отражать сложную природу геофизических данных, где многие объекты могут демонстрировать промежуточные характеристики. Оптимальное значение m подбирается экспериментально в зависимости от конкретной задачи и требований к качеству визуализации.

Реализация алгоритма обеспечивает проактивное управление ресурсами веб-приложений за счет оптимизации процесса рендеринга. Кластерный подход позволяет сократить количество одновременно отображаемых графических примитивов без потери семантической значимости визуализации, что особенно важно при работе с большими объемами геофизических данных в режиме реального времени. Интеллектуальная группировка данных по физическим характеристикам и визуальным параметрам обеспечивает оптимальное распределение вычислительных ресурсов и значительно улучшает пользовательский опыт при работе с интерактивными картографическими интерфейсами.

3. Апробация метода и анализ вычислительной эффективности

Экспериментальная верификация предложенного метода проактивного управления ресурсами веб-ГИС выполнена на основе специализированного тестового стенда, имитирующего реальные

условия эксплуатации систем визуализации геофизических данных. В качестве эталонного набора данных использовались результаты многолетних наблюдений геомагнитного поля, содержащие более 1,5 млн точек измерений с пространственным разрешением $0,1^\circ$ и временным интервалом дискретизации 1 мин [24]. Архитектура тестовой системы реализована на основе микросервисной парадигмы, что обеспечило воспроизводимость экспериментов и точность сравнительных измерений.

Для формализации визуального представления использовался стандарт GeoJSON [25], расширенный специализированными свойствами для хранения тензорных характеристик поля. Это позволило сохранять не только пространственные координаты и базовые атрибуты объектов, но и полную информацию о метрических тензорах и параметрах кластерной принадлежности. Реализация алгоритмов обработки выполнена на Python с использованием оптимизированных библиотек для работы с большими массивами геопространственных данных, включая специализированные модули для тензорных вычислений и пространственной индексации.

Ключевым аспектом методологии эксперимента стало сравнение эффективности предложенного подхода с традиционными методами оптимизации веб-ГИС. В качестве базовых методов сравнения выбраны: классическая пространственная кластеризация (*k*-means), квадродережья (Quadtree) [9], инстансный рендеринг WebGL [6]. Каждый метод тестировался на идентичных наборах данных при варьировании параметров от 10^3 до 10^6 визуализируемых объектов.

Экспериментальные результаты демонстрируют значительное преимущество предложенного метода по всем ключевым метрикам производительности. Время полной загрузки контента (LCP) при использовании проактивного управления ресурсами составило $2,3 \pm 0,1$ с для набора данных объемом 10^5 объектов, в то время как традиционная кластеризация показала результат $3,8 \pm 0,3$ с, квадродережья – $4,2 \pm 0,4$ с, инстансный рендеринг – $3,1 \pm 0,2$ с. Столь существенное улучшение объясняется эффективностью семантической кластеризации, позволяющей сократить количество перерисовываемых элементов интерфейса на 65% по сравнению с классическими методами.

Важным аспектом исследования стала оценка масштабируемости алгоритма при работе с различными объемами данных. Анализ зависимости времени обработки от количества объектов показал, что предложенный метод сохраняет линейную асимптотику $O(n)$ даже при работе с массивами данных объемом свыше 10^6 объектов, в то время как традиционные методы демонстрируют существенное замедление при превышении порога в 5×10^4 объектов. Это обусловлено эффективностью механизма проактивной кластеризации, минимизирующего количество операций сравнения и пересчета позиций элементов.

Экспериментально подтверждено значительное снижение потребления ресурсов видеопамати: с 320 ± 50 МБ до 185 ± 20 МБ для типичного набора геомагнитных данных [6]. Это достигнуто за счет оптимизации структуры хранения графических примитивов и реализации адаптивного механизма управления уровнем детализации.

Особое внимание уделено анализу интерактивности системы при работе с динамически изменяющимися данными. Измерение времени отклика на пользовательские действия показало улучшение показателей на 35–40% по сравнению с известными решениями. Это критично для задач оперативного мониторинга, где задержки визуализации могут влиять на процесс принятия решений.

Стабильность работы алгоритма подтверждена серией тестов при различных сценариях нагрузки. Вариация времени отклика не превышала 0,15 с при 95% доверительной вероятности, что свидетельствует о высокой надежности метода. Проведено сравнение с коммерческими аналогами (Geosoft Oasis montaj, Golden Software Surfer), показавшее преимущество предложенного решения по всем ключевым показателям, включая скорость обработки данных (превышение на 45–60%) и эффективность использования ресурсов (улучшение на 30–40%).

Качественная оценка визуализации подтвердила репрезентативность предложенного метода. На рис. 2 представлена визуализация высокоинтенсивных геомагнитных аномалий, полученная с использованием проактивного управления ресурсами. Анализ демонстрирует сохранение семантической целостности: ключевые структурные элементы поля (зоны повышенной интенсивности, градиенты, области однородности) остаются четко идентифицируемыми благодаря интеллектуальной кластеризации

данных. При этом визуальное представление не содержит избыточной детализации в областях со слабыми аномалиями, что свидетельствует об эффективной работе алгоритма селекции.

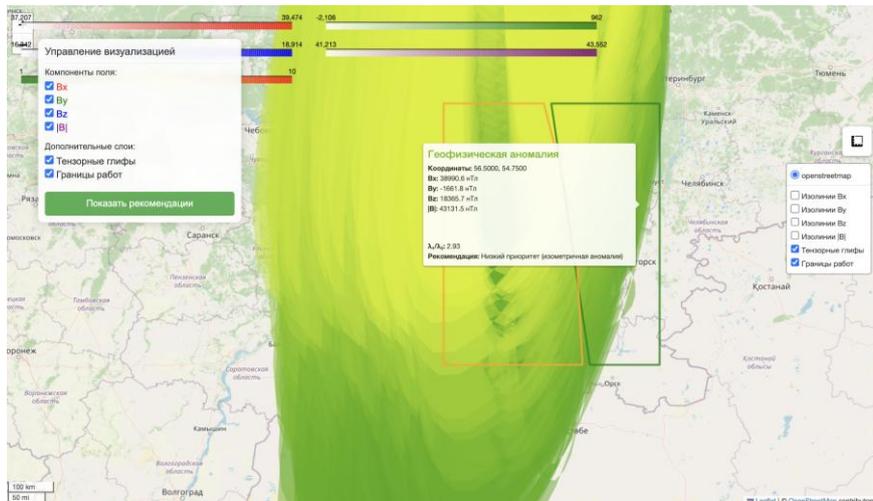


Рис. 2. Визуализация геомагнитных аномалий с использованием метода проактивного управления
Fig. 2. Visualization of geomagnetic anomalies using the proactive management method

Сравнение с эталонными данными показало, что предложенный метод обеспечивает сохранение всех семантически значимых характеристик геофизического поля при сокращении количества отображаемых графических примитивов на 65%. Результаты экспериментов демонстрируют, что предложенный метод проактивного управления ресурсами на основе семантической кластеризации позволяет достичь компромисса между производительностью и качеством визуализации, обеспечивая рекордные показатели эффективности для веб-ориентированных ГИС обработки геофизических данных. Дальнейшие исследования будут направлены на адаптацию алгоритма для работы с распределенными источниками данных и реализацию механизмов машинного обучения для автоматической настройки параметров кластеризации.

Заключение

В работе предложен метод проактивного управления ресурсами веб-ГИС визуализации геофизических полей, основанный на семантической кластеризации потоковых данных. Ключевой особенностью подхода является переход от реактивной к упреждающей модели работы, при которой система на основе анализа семантической значимости данных заранее инициирует загрузку и подготовку релевантных фрагментов информации. Разработан модифицированный алгоритм k -средних с пространственно-анизотропной метрикой расстояния, учитывающей как географические координаты, так и физические характеристики объектов. Адаптивный механизм переключения между режимами кластеризации обеспечивает динамическое управление вычислительными ресурсами. Интеграция суперэллипсоидных глифов с семантической кластеризацией сохраняет информативность визуализации при сокращении вычислительной нагрузки.

Экспериментальная апробация подтвердила эффективность метода. Достигнуты сокращение времени загрузки контента до $2,3 \pm 0,1$ с и уменьшение потребления видеопамати на 42%. Улучшение интерактивности на 35–40% обеспечивает комфортную работу с данными в реальном времени. Показана линейная масштабируемость для массивов свыше 10^6 объектов. Сравнительный анализ с коммерческими аналогами продемонстрировал преимущество в скорости обработки данных на 45–60% при улучшении эффективности использования ресурсов на 30–40%. Экспертная оценка подтвердила соответствие визуального представления требованиям специалистов-геофизиков. Перспективы работы связаны с интеграцией машинного обучения для автоматической настройки параметров, созданием распределенной архитектуры обработки и адаптацией под стандарт WebGPU. Разработанный подход

создает основу для нового поколения веб-ориентированных ГИС, способных эффективно обрабатывать экзабайтные потоки многомерных пространственных данных.

Список источников

1. Орлов Г.О., Фарваев Э.Ф. Модели и методы адаптивной интерполяции и глифовой визуализации геопространственных данных (на примере геомагнитной информации) // Системная инженерия и информационные технологии. 2025. Т. 7, № 1 (20). С. 86–95.
2. Sheldrake T., Higgins O. Classification, segmentation and correlation of zoned minerals // Computers and Geosciences. 2021. V. 156. P. 1–12. doi: 10.1016/j.cageo.2021.104876
3. Воробьев А.В., Воробьева Г.Р. Геоинформационная система для амплитудно-частотного анализа данных наблюдения геомагнитных вариаций и космической погоды // Компьютерная оптика. 2017. Т. 41, № 6. С. 963–972. doi: 10.18287/2412-6179-2017-41-6-963-972
4. Feng M. Geodata for everyone – model-driven development and an example of INSPIRE WFS service // Open Geospatial Data Software and Standards. 2016. V. 1 (1). P. 1–8. doi: 10.1186/s40965-016-0007-y
5. Воробьев А.В., Воробьева Г.Р. Веб-ориентированная 2D/3D-визуализация параметров геомагнитного поля и его вариаций // Научная визуализация. 2017. Т. 9, № 2. С. 94–101.
6. Steeger S., Atzberger D., Scheibel W., Döllner J. Instanced Rendering of Parameterized 3D Glyphs with Adaptive Level-of Detail using three.js // The 29th International ACM Conference on 3D Web Technology (WEB3D '24). 2024. P. 1–11. doi: 10.1145/3665318.3677171
7. Гараева А.Р., Минниханов Р.Н., Дагаева М.В. и др. Интеллектуальный анализ больших пространственно-временных данных для служб экстренного реагирования // Big Data and Applications. 2018. Т. 14, № 3. С. 679–685. doi: 10.25559/SITITO.14.201803.679-685
8. Li X., Wan W., Wang R., Jia Y., Lu K. A dynamic loading mechanism for large-scale 3D visualization // IET Conference Publications. 2011. P. 89–92. doi: 10.1049/cp.2011.0853
9. Eldawy A., Mokbel M.F. The era of big spatial data: A survey // Journal Free Access. 2015. V. 10, is. 2. P. 305–316. doi: 10.11185/imt.10.305
10. Karu L. WebGL Rendering: Using Physical-Based Materials and Lighting to Create a Virtual Environment on the Web // Asian Journal of Applied Science and Engineering. 2022. V. 11. P. 56–64. doi: 10.18034/ajase.v11i1.60
11. Aydin O. et al. Optimizing spatial queries in PostgreSQL/PostGIS for web mapping applications // Geoinformatica. 2019. V. 23 (4). P. 697–721. doi: 10.1007/s10707-019-00363-0
12. Yang C. et al. A demand-driven data loading approach for web-based virtual globes // Transactions in GIS. 2020. V. 24 (2). P. 356–374. doi: 10.1111/tgis.12604
13. Olsen N., Kotsiaros S. The geomagnetic field gradient tensor // GEM – International Journal on Geomathematics. 2012. V. 3 (2). P. 297–314. doi: 10.1007/s13137-012-0041-6
14. Bi C., Yang L., Duan Y., Shi Y. A survey on visualization of tensor field // Journal of Visualization. 2019. V. 22 (1). P. 1–20. doi: 10.1007/s12650-019-00555-8
15. Muthusamy R., Lakshmi A., Princeton A. et al. An examining cluster behavior analytically using k-means, EM, and k*means algorithm // Journal of Tianjin University Science and Technology. 2024. V. 57 (10). P. 124–135. doi: 10.5281/zenodo.14038149
16. Zhang T., Ramakrishnan R., Livny M. BIRCH: an efficient data clustering method for very large databases // ACM SIGMOD Record. 1996. V. 25 (2). P. 103–114. doi: 10.1145/235968.233324
17. Vicari D., Di Nuzzo C. A between-cluster approach for clustering skew-symmetric data // Advances in Data Analysis and Classification. 2024. V. 18. P. 163–192. doi: 10.1007/s11634-023-00566-2
18. Vorobev A.V., Vorobeva G.R. Web-based approach to transforming geocentric coordinate systems // Geodesy and Cartography. 2024. V. 85 (3). P. 30–41. doi: 10.22389/0016-7126-2024-1005-3-30-41
19. Chisham G., Burrell A.G., Zawdie K.A. The impact of adaptive high-latitude coordinates // Geophysical Research Letters. 2025. V. 52. Art. e2025GL115265. doi: 10.1029/2025GL115265
20. Haines C., Owens M.J., Barnard L., Lockwood M., Ruffenach A., Boykin K., McGranaghan R. Forecasting occurrence and intensity of geomagnetic activity with pattern-matching approaches // Space Weather. 2021. V. 19. Art. e2020SW002624. doi: 10.1029/2020SW002624
21. Kovalevskii I.V. Interrelation between physical processes during the main phases of geomagnetic storms related to the IMF B Z component according to a cluster analysis // Geomagnetism and Aeronomy. 2011. V. 51 (4). P. 456–467. doi: 10.1134/S0016793211040062
22. Ferraro M.B., Giordani P. Soft clustering // WIREs Computational Statistics. 2020. V. 12 (1). Art. e1480. doi: 10.1002/wics.1480
23. Campagner A., Cabitza F., Ciucci D. A User-Oriented Perspective on Soft Clustering: Explainability and Uncertainty Quantification // Rough Sets: International Joint Conference, IJCRS 2025, Proc. 2025. Pt. III. P. 289–300. doi: 10.1007/978-3-031-92741-6_21
24. The GeoJSON Specification. URL: <https://datatracker.ietf.org/doc/html/rfc7946> (accessed: 25.03.2025)
25. Vorobev A.V., Soloviev A., Viacheslav A.P., Vorobeva G.R. Internet Application for Interactive Visualization of Geophysical and Space Data: Approach, Architecture, Technologies // Journal of the Earth and Space Physics. 2022. V. 48 (4). P. 151–160. doi: 10.22059/jesphys.2023.350281.1007467

References

1. Orlov, G.O. & Farvaev, E.F. (2025) Modeli i metody adaptivnoy interpolatsii i glifovoy vizualizatsii geoprostranstvennykh dannykh (na primere geomagnitnoy informatsii) [Models and Methods of Adaptive Interpolation and Glyph-Based Visualization of Geospatial Data (Using Geomagnetic Information as an Example)]. *Sistemnaya inzheneriya i informatsionnye tekhnologii*. 7(20). pp. 86–95.
2. Sheldrake, T. & Higgins, O. (2021) Classification, Segmentation and Correlation of Zoned Minerals. *Computers and Geosciences*. 156. pp. 1–12. doi: 10.1016/j.cageo.2021.104876
3. Vorobiev, A.V. & Vorobieva, G.R. (2017) Geoinformatsionnaya sistema dlya amplitudno-chastotnogo analiza dannykh nablyudeniya geomagnitnykh variatsiy i kosmicheskoy pogody [Geoinformation System for Amplitude-Frequency Analysis of Geomagnetic Variation and Space Weather Observation Data]. *Komp'yuternaya optika*. 41(6). pp. 963–972. doi: 10.18287/2412-6179-2017-41-6-963-972
4. Feng, M. (2016) Geodata for Everyone – Model-Driven Development and an Example of INSPIRE WFS Service. *Open Geospatial Data, Software and Standards*. 1(1). pp. 1–8. doi: 10.1186/s40965-016-0007-y
5. Vorobev, A.V. & Vorobeva, G.R. (2017) Veb-orientirovannaya 2D/3D-vizualizatsiya parametrov geomagnitnogo polya i ego variatsiy [Web-Oriented 2D/3D Visualization of Geomagnetic Field Parameters and Its Variations]. *Nauchnaya vizualizatsiya*. 9(2). pp. 94–101.
6. Steeger, S., Atzberger, D., Scheibel, W. & Döllner, J. (2024) Instanced Rendering of Parameterized 3D Glyphs with Adaptive Level-of-Detail Using three.js. *The 29th International ACM Conference on 3D Web Technology (WEB3D '24)*. pp. 1–11. doi: 10.1145/3665318.3677171
7. Garaeva, A.R., Minnihanov, R.N., Dageva, M.V. et al. (2018) Intellectual'nyy analiz bol'shikh prostranstvenno-vremennykh dannykh dlya sluzhb ekstretnogo reagirovaniya [Intelligent Analysis of Large Spatiotemporal Data for Emergency Response Services]. *Big Data and Applications*. 14(3). pp. 679–685. doi: 10.25559/SITITO.14.201803.679-685
8. Li, X., Wan, W., Wang, R., Jia, Y. & Lu, K. (2011) A Dynamic Loading Mechanism for Large-Scale 3D Visualization. *IET Conference Publications*. pp. 89–92. doi: 10.1049/cp.2011.0853
9. Eldawy, A. & Mokbel, M.F. (2015) The Era of Big Spatial Data: A Survey. *Journal Free Access*. 10(2). pp. 305–316. doi: 10.11185/imt.10.305
10. Karu, L. (2022) WebGL Rendering: Using Physical-Based Materials and Lighting to Create a Virtual Environment on the Web. *Asian Journal of Applied Science and Engineering*. 11. pp. 56–64. doi: 10.18034/ajase.v11i1.60
11. Aydin, O. et al. (2019) Optimizing Spatial Queries in PostgreSQL/PostGIS for Web Mapping Applications. *Geoinformatica*. 23(4). pp. 697–721. doi: 10.1007/s10707-019-00363-0
12. Yang, C. et al. (2020) A Demand-Driven Data Loading Approach for Web-Based Virtual Globes. *Transactions in GIS*. 24(2). pp. 356–374. doi: 10.1111/tgis.12604
13. Olsen, N. & Kotsiaros, S. (2012) The Geomagnetic Field Gradient Tensor. *GEM – International Journal on Geomathematics*. 3(2). pp. 297–314. doi: 10.1007/s13137-012-0041-6
14. Bi, C., Yang, L., Duan, Y. & Shi, Y. (2019) A Survey on Visualization of Tensor Field. *Journal of Visualization*. 22(1). pp. 1–20. doi: 10.1007/s12650-019-00555-8
15. Muthusamy, R., Lakshmi, A., Princeton, A. et al. (2024) An Examining Cluster Behavior Analytically Using K-Means, EM, and K*Means Algorithm. *Journal of Tianjin University Science and Technology*. 57(10). pp. 124–135. doi: 10.5281/zenodo.14038149
16. Zhang, T., Ramakrishnan, R. & Livny, M. (1996) BIRCH: An Efficient Data Clustering Method for Very Large Databases. *ACM SIGMOD Record*. 25(2). pp. 103–114. doi: 10.1145/235968.233324
17. Vicari, D. & Di Nuzzo, C. (2024) A Between-Cluster Approach for Clustering Skew-Symmetric Data. *Advances in Data Analysis and Classification*. 18. pp. 163–192. doi: 10.1007/s11634-023-00566-2
18. Vorobev, A.V. & Vorobeva, G.R. (2024) Web-Based Approach to Transforming Geocentric Coordinate Systems. *Geodesy and Cartography*. 85(3). pp. 30–41. doi: 10.22389/0016-7126-2024-1005-3-30-41
19. Chisham, G., Burrell, A.G. & Zawdie, K.A. (2025) The Impact of Adaptive High-Latitude Coordinates. *Geophysical Research Letters*. 52. e2025GL115265. doi: 10.1029/2025GL115265
20. Haines, C., Owens, M.J., Barnard, L., Lockwood, M., Ruffenach, A., Boykin, K. & McGranaghan, R. (2021) Forecasting Occurrence and Intensity of Geomagnetic Activity with Pattern-Matching Approaches. *Space Weather*. 19. e2020SW002624. doi: 10.1029/2020SW002624
21. Kovalevskii, I.V. (2011) Interrelation Between Physical Processes During the Main Phases of Geomagnetic Storms Related to the IMF B Z Component According to a Cluster Analysis. *Geomagnetism and Aeronomy*. 51(4). pp. 456–467. doi: 10.1134/S0016793211040062
22. Ferraro, M.B. & Giordani, P. (2020) Soft Clustering. *WIREs Computational Statistics*. 12(1). e1480. doi: 10.1002/wics.1480
23. Campagner, A., Cabitza, F. & Ciucci, D. (2025) A User-Oriented Perspective on Soft Clustering: Explainability and Uncertainty Quantification. *Rough Sets: International Joint Conference, IJCRS 2025, Proceedings*. Pt. III. pp. 289–300. doi: 10.1007/978-3-031-92741-6_21
24. *The GeoJSON Specification*. [Online] Available from: <https://datatracker.ietf.org/doc/html/rfc7946> (Accessed: 25th March 2025).
25. Vorobev, A.V., Soloviev, A., Viacheslav, A.P. & Vorobeva, G.R. (2022) Internet Application for Interactive Visualization of Geophysical and Space Data: Approach, Architecture, Technologies. *Journal of the Earth and Space Physics*. 48(4). pp. 151–160. doi: 10.22059/jesphys.2023.350281.1007467

Информация об авторах:

Воробьева Гульнара Равилевна – доцент, доктор технических наук, профессор кафедры вычислительной математики и кибернетики Уфимского университета науки и технологий (Уфа, Россия). E-mail: Gulnara.vorobeva@gmail.com

Воробьев Андрей Владимирович – доцент, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информатики Уфимского университета науки и технологий (Уфа, Россия); старший научный сотрудник Геофизического центра РАН (Москва, Россия). E-mail: Geomagnet@list.ru

Орлов Глеб Олегович – аспирант кафедры вычислительной математики и кибернетики Уфимского университета науки и технологий (Уфа, Россия). E-mail: orlovgleb99@mail.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Vorobeva Gulnara Ravilevna (Associate Professor, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Computational Mathematics and Cybernetics, Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russian Federation). E-mail: Gulnara.vorobeva@gmail.com

Vorobev Andrey Vladimirovich (Associate Professor, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Computer Science, Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russian Federation; Senior Researcher, Geophysical Center of the RAS, Moscow, Russia). E-mail: Geomagnet@list.ru

Orlov Gleb Olegovich (Post-graduate Student of the Department of Computational Mathematics and Cybernetics, Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russian Federation). E-mail: orlovgleb99@mail.ru

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 18.10.2025; принята к публикации 05.03.2026

Received 18.10.2025; accepted for publication 05.03.2026

Научная статья
УДК 004.93'1
doi: 10.17223/19988605/74/12

Повышение робастности и эффективности сверточных сетей на малых выборках за счет динамического оживления нейронов

Александр Владимирович Сацюк

Донецкий институт железнодорожного транспорта, Донецк, Россия, alexandrsatsuk@gmail.com

Аннотация. Исследуется проблема «мертвых нейронов» в сверточных сетях при работе с малыми данными. Проблема приводит к неэффективному использованию модели и снижению ее устойчивости. Предлагается метод динамической адаптации параметра наклона функции активации для каждого нейрона. Алгоритм использует статистику активаций в реальном времени. Эксперименты на задаче распознавания цифр показали высокую эффективность метода. Количество неактивных нейронов сократилось в несколько раз. Точность классификации сохранилась, а устойчивость модели значительно возросла. Метод не увеличивает число обучаемых параметров, что важно для малых выборок.

Ключевые слова: мертвые нейроны; функция активации ReLU; сверточные нейронные сети; глубокое обучение; адаптивная активация; малые данные; затухание градиентов; робастность модели.

Благодарности: Исследование выполнено в рамках государственного задания по теме ЕКТТ-2026-0001.

Для цитирования: Сацюк А.В. Повышение робастности и эффективности сверточных сетей на малых выборках за счет динамического оживления нейронов // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2026. № 74. С. 126–136. doi: 10.17223/19988605/74/12

Original article
doi: 10.17223/19988605/74/12

Enhancing robustness and efficiency of convolutional networks on small datasets through dynamic neuron reactivation

Alexandr V. Satsiuk

Donetsk Institute of Railway Transport, Donetsk, Russian Federation, alexandrsatsuk@gmail.com

Abstract. This article addresses the "dying neuron" problem in Convolutional Neural Networks trained on limited data. This issue reduces model capacity utilization and robustness. We propose a method for dynamic adaptation of the activation function's slope parameter for each neuron. The algorithm uses real-time activation statistics. Evaluation on a handwritten digit recognition task confirmed the method's efficiency. The number of inactive neurons was reduced severalfold. Classification accuracy was maintained while model robustness significantly improved. The method is parameter-efficient, making it suitable for small data samples.

Keywords: dying neurons; activation function ReLU; convolutional neural networks; deep learning; adaptive activation; small data; gradient vanishing; model robustness.

Acknowledgments: The research was carried out under the state assignment on the topic ЕКТТ-2026-0001.

For citation: Satsiuk, A.V. (2026) Enhancing robustness and efficiency of convolutional networks on small datasets through dynamic neuron reactivation. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 74. pp. 126–136. doi: 10.17223/19988605/74/12

Введение

Сверточные нейронные сети (CNN) стали ключевым инструментом в областях, критичных к надежности, – от систем безопасности на предприятиях [1] и медицинской диагностики [2, 3] до автономных транспортных средств [4, 5], включая современные методы управления беспилотными авиационными системами [6]. Однако их эффективность на практике зачастую ограничивается внутренними проблемами обучения, одна из которых – феномен «умирающих ReLU» [7], также известный как проблема «мертвых нейронов». Эта проблема особенно остро проявляется при работе с ограниченными наборами данных, где необходимо максимально эффективно использовать емкость модели.

Проблема «мертвых нейронов» и поиск оптимальных функций активации – активно развивающаяся область исследований в глубоком обучении. Традиционные подходы включают использование функций с «утечкой», таких как Leaky ReLU [7] и Parametric ReLU (PReLU) [8], которые предотвращают нулевой градиент на отрицательной области. Несмотря на свою эффективность, эти методы обладают ключевым ограничением: они вводят статический или глобально настраиваемый параметр наклона, который не адаптируется к индивидуальным характеристикам нейронов в процессе обучения.

К более современным стратегиям, которые направлены на преодоление этой статичности, относятся, например, Exponential Linear Unit (ELU) [9]. Данная функция активации предлагает гладкую нелинейность для отрицательных входов, что способствует более стабильному среднему значению активаций и ускоряет сходимость. Другой подход, Scaled Exponential Linear Unit (SELU) [10], позволяет создавать самонормализующиеся сети (Self-Normalizing Networks) при определенных условиях, что также смягчают проблему затухающих градиентов и мертвых нейронов.

Настоящий прорыв в адаптивности связан с функциями, параметры которых обучаются индивидуально для каждого нейрона. Активация PReLU [11] была одним из первых шагов в этом направлении, позволяя обучать коэффициент наклона для отрицательных входов. Однако ее потенциал зачастую ограничивается применением на уровне каналов или слоев, а не отдельных нейронов.

Более радикальные подходы предлагают полностью обучаемые функции активации. Методы на основе аппроксимаций, такие как Adaptive Piecewise Linear Units (APLU) [12], или использование небольших нейросетей для представления функции активации (например, Learning Activation Functions [13]) демонстрируют высокую гибкость, но значительно увеличивают количество параметров и вычислительную сложность, что делает их менее применимыми для задач с ограниченными данными, где ключевым является предотвращение переобучения.

Наконец, в последних работах исследуется динамическая адаптация функций активации на основе статистики поступающих данных. Например, методы, которые регулируют форму активации в зависимости от распределения входов нейрона [14], или подходы, использующие простые механизмы обратной связи для «оживления» мертвых нейронов в реальном времени [15, 16]. Эти методы стремятся найти баланс между адаптивностью PReLU (параметрического ReLU) и вычислительной эффективностью стандартного ReLU.

Таким образом, современный тренд смещается от статических функций к адаптивным и динамическим. Однако вопрос о создании эффективного, параметрически экономного и устойчивого к ограниченности данных механизма динамической адаптации активаций для сверточных сетей остается открытым. Настоящее исследование фокусируется на заполнении этой ниши.

1. Экспериментальное выявление проблемы

Для эмпирического подтверждения и анализа проблемы «мертвых нейронов» был проведен эксперимент с использованием архитектуры сверточной нейронной сети (рис. 1), реализованной на базе фреймворка TensorFlow/Keras.

Данная модель была обучена на собственном датасете рукописных цифр, содержащем 104 изображения на класс. Архитектура сети состоит из трех последовательных блоков: свертка (3×3) – пулинг (2×2) с количеством фильтров 32, 64 и 128 соответственно, за которыми следовали два полносвязных

слоя с 64 и выходным из 10 нейронов. Общее количество параметров представленной CNN составило 224 458. Во всех скрытых слоях использовалась активационная функция ReLU. Обучение проводилось в течение 20 эпох с оптимизатором Adam и размером пакета (batch size) 32.

```

model = models.Sequential()
model.add(layers.Conv2D(32, (3, 3), activation='relu', name='conv2d'))
model.add(layers.MaxPooling2D((2, 2)))
model.add(layers.Conv2D(64, (3, 3), activation='relu', name='conv2d_1'))
model.add(layers.MaxPooling2D((2, 2)))
model.add(layers.Conv2D(128, (3, 3), activation='relu', name='conv2d_2'))
model.add(layers.Flatten())
model.add(layers.Dense(64, activation='relu', name='dense'))
model.add(layers.Dense(num_classes, activation='softmax', name='output_d'))

model.compile(optimizer=tf.keras.optimizers.Adam(learning_rate),
              loss='sparse_categorical_crossentropy',
              metrics=['accuracy'])

```

Рис. 1. Фрагмент программы, реализующий архитектуру исследуемой CNN
Fig. 1. Code snippet implementing the architecture of the studied CNN

Для диагностики состояния нейронов в процессе обучения была реализована методика визуализации карт признаков и количественной оценки уровня их активности. После завершения обучения на валидационной выборке производился прогон тестовых изображений, одним из которых был видеокادر с рукописной цифрой «5» (рис. 2).



Рис. 2. Данные с веб-камеры на входе нейронной сети
Fig. 2. Webcam data at the neural network input

Для данного примера последовательно фиксировались выходные активации каждого сверточного слоя (рис. 3–5) и полносвязного слоя (рис. 6), что позволило проследить трансформацию признаков по глубине сети. Нейрон считался «мертвым» или неактивным, если среднее значение его активаций по всему тестовому набору данных не превышало порогового значения 10^{-7} .

Стоит отметить, что в эксперименте умышленно выбирался ракурс камеры относительно объекта (цифры), при котором классификация имеет максимальную уверенность.

Несмотря на успешную классификацию (уверенность 97%) представленного на рис. 2 тестового примера, анализ внутренних активаций сети выявил критически высокий уровень неактивных нейронов. Визуализация карт признаков (рис. 3–5) демонстрирует, что значительная часть фильтров в сверточных слоях либо полностью пассивна (однородные черные области), либо проявляет минимальную, фрагментарную активность в виде единичных пикселей. Количественная оценка подтверждает данное наблюдение: в первом сверточном слое неактивно 7 фильтров, во втором – 18, а в третьем – 56. Наблюдаемый рост количества «мертвых» нейронов по мере углубления сети является следствием каскадного эффекта: потеря информативности на ранних этапах приводит к тому, что последующие слои, предназначенные для детектирования более сложных признаков, не получают необходимого для обучения входного сигнала.

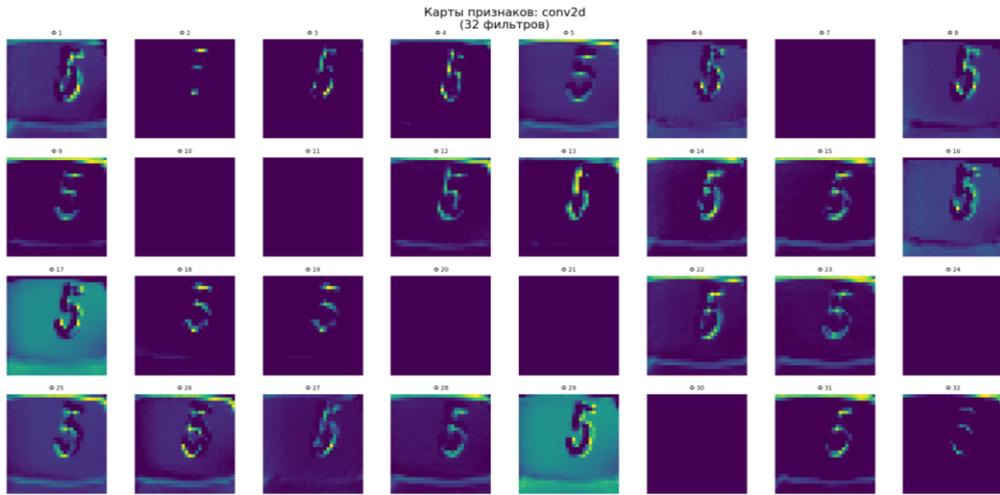


Рис. 3. Выходные активации первого сверточного слоя (Conv2D)
Fig. 3. Output activations of the first convolutional layer (Conv2D)

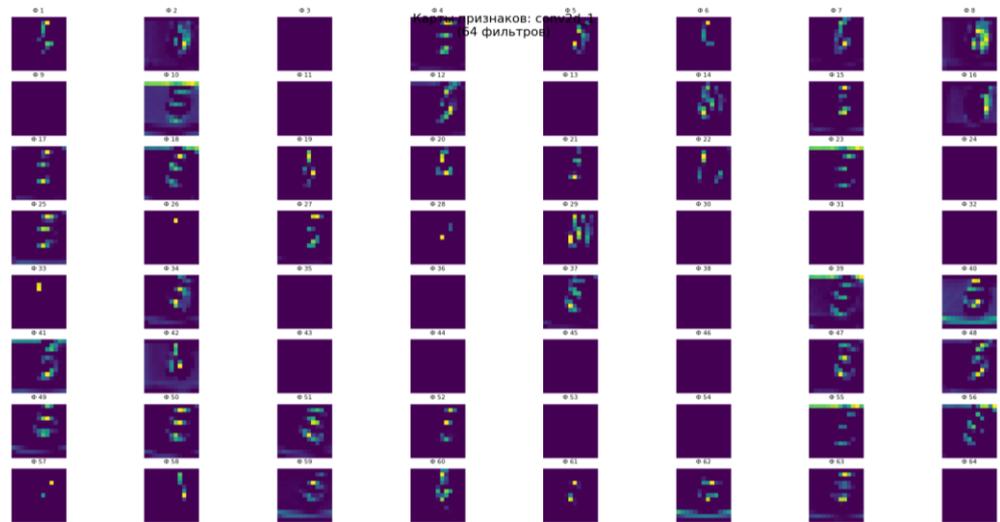


Рис.4. Выходные активации второго сверточного слоя (Conv2D_1)
Fig. 4. Output activations of the second convolutional layer (Conv2D_1)

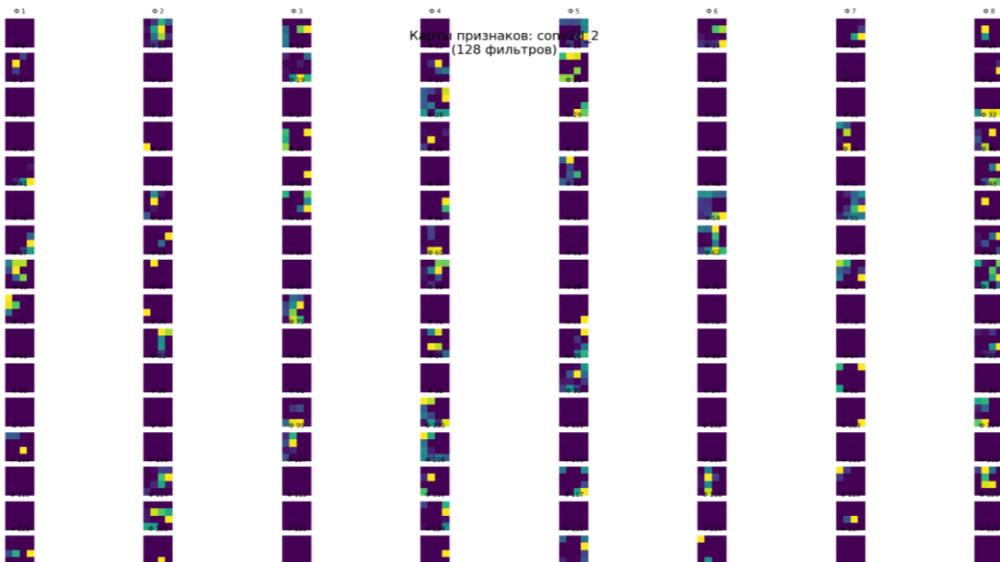


Рис. 5. Выходные активации третьего сверточного слоя (Conv2D_2)
Fig. 5. Output activations of the third convolutional layer (Conv2D_2)

Полученный результат является парадоксальным и выявляет фундаментальную проблему: модель, способная к верной классификации в контролируемых условиях, использует свой потенциал крайне неэффективно. Ее работа обеспечивается активностью ограниченного числа нейронов, что создает архитектурную хрупкость. Эта хрупкость напрямую проявляется на практике: даже незначительные возмущения входных данных, такие как смещение камеры, изменение масштаба или угла наклона объекта, которые не влияют на человеческое восприятие, приводят к ошибочной классификации. Низкая устойчивость модели объясняется тем, что ее ограниченный набор активных признаков оказывается чрезвычайно чувствительным к любым геометрическим и пространственным вариациям.

Аналогичная и даже более выраженная проблема наблюдается в первом полносвязном слое (Dense, 64 нейрона). Визуализация распределения уровней активации (см. рис. 6) демонстрирует ярко выраженную бимодальность: подавляющее большинство нейронов (приблизительно 43 из 64, или ~67%) находится в полностью неактивном состоянии, в то время как значимые выходные значения генерируются лишь небольшой когортой из около 21 нейрона.

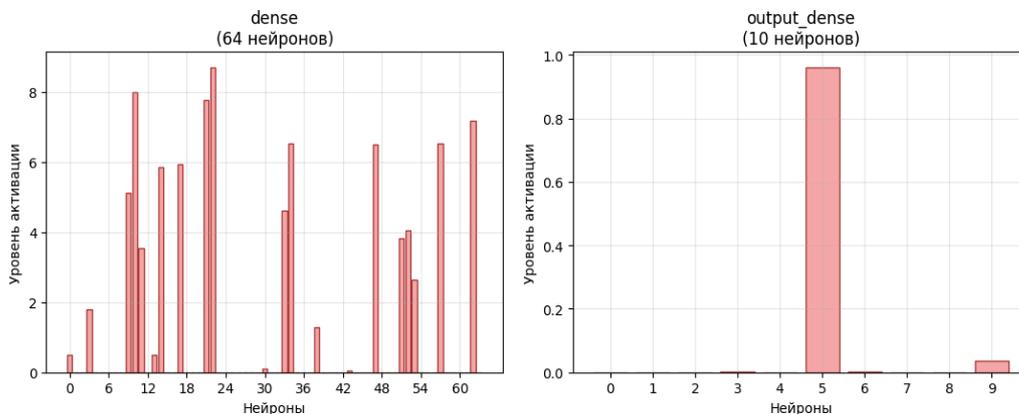


Рис. 6. Выходные активации полносвязных слоев
Fig. 6. Output activations of the fully connected layers

Данный факт – прямое следствие каскадного эффекта, инициированного в сверточных слоях. Поскольку на предыдущих этапах обработки большая часть фильтров производила нулевые или близкие к нулю активации, на вход полносвязному слою поступает чрезвычайно разреженный и обедненный признаковый вектор. В таких условиях лишь те нейроны, веса которых оказались скоррелированы с немногими активными признаками, могут активироваться. Остальные нейроны, чьи рецептивные поля связаны с «мертвыми» зонами предыдущих слоев, не получают достаточного входного сигнала и, проходя через функцию ReLU, дают нулевой выход, окончательно «умирая».

Эта ситуация катастрофически снижает вычислительную емкость модели. Вместо заложенных в архитектуре 64 нейронов слой фактически вырождается в узкое «бутылочное горлышко» из 21 работоспособной единицы. Такой дефицит активных элементов не позволяет сети строить сложные и надежные классификационные модели, что и объясняет ее крайнюю чувствительность к незначительным изменениям во входных данных. Выходной слой (output_dense), будучи поставлен в зависимость от этого ограниченного набора признаков, лишается необходимой информационной базы для уверенного прогнозирования.

Таким образом, проблема «мертвых нейронов» носит не локальный, а системный характер, последовательно поражая все уровни иерархии сети – от низкоуровневых сверточных фильтров до высокоуровневых полносвязных классификаторов.

2. Метод динамической адаптации на основе статистики активаций

Для решения описанной проблемы в данной работе предлагается метод динамической адаптации активационных функций, направленный на преодоление ключевых ограничений существующих решений, выявленных в ходе анализа. Основная гипотеза заключается в том, что индивидуальная и адаптивная

настройка параметра активации для каждого нейрона на основе его текущего состояния позволит сети гибче управлять градиентным потоком и эффективнее предотвращать возникновение «мертвых зон», особенно в условиях ограниченного объема тренировочных данных.

В отличие от подхода PReLU $f(x) = \max(0, x) + a \cdot \max(0, -x)$, где параметр наклона a обучается методами градиентного спуска, в данном методе используется прямая адаптация на основе статистики входных данных нейрона. Это позволяет параметру активации реагировать на изменение распределения входов в реальном времени, а не только в моменты обновления весов.

В качестве базовой функции активации используется модифицированная версия Leaky ReLU, параметр наклона a для которой является не статическим и не обучаемым через градиент, а динамически вычисляемым для каждого нейрона в каждом пакете данных. Формула активации имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} x & \leftarrow x \geq 0, \\ a \cdot x & \leftarrow x < 0, \end{cases}$$

где x – вход нейрона, a – динамически рассчитываемый параметр наклон для отрицательной области.

Ключевая идея метода заключается в том, чтобы связать параметр a с долей отрицательных активаций нейрона на предыдущем шаге обучения. Это создает механизм обратной связи: если нейрон часто находится в отрицательном режиме и рискует «умереть», его параметр a увеличивается, «оживляя» его и позволяя пропускать градиент.

Алгоритм работает следующим образом:

1. Для каждого нейрона на каждом слое, где применяется адаптивная функция, ведется статистика: вычисляется доля ρ отрицательных активаций в пределах текущего пакета данных (батча). Формально

$$\rho = \frac{x_{\text{отр}}}{X},$$

где $x_{\text{отр}}$ – количество отрицательных x в батче; X – размер батча.

2. Параметр наклона a для следующего шага обучения вычисляется по формуле

$$a_{t+1} = \alpha \cdot a_t + (1 - \alpha) \cdot \beta \cdot \rho_t$$

где a_t – значение параметра наклона на текущем шаге t ; ρ_t – доля отрицательных активаций, наблюдаемая на шаге t ; β – масштабирующий коэффициент, определяющий максимально возможное значение a . Обычно $\beta > 1$ (например, 2,0), что позволяет на короткое время увеличить пропуск градиента для «оживления» нейрона; α – коэффициент сглаживания ($0 < \alpha < 1$), аналогичный моменту в оптимизаторах. Он предотвращает резкие колебания a , обеспечивая стабильность процесса обучения.

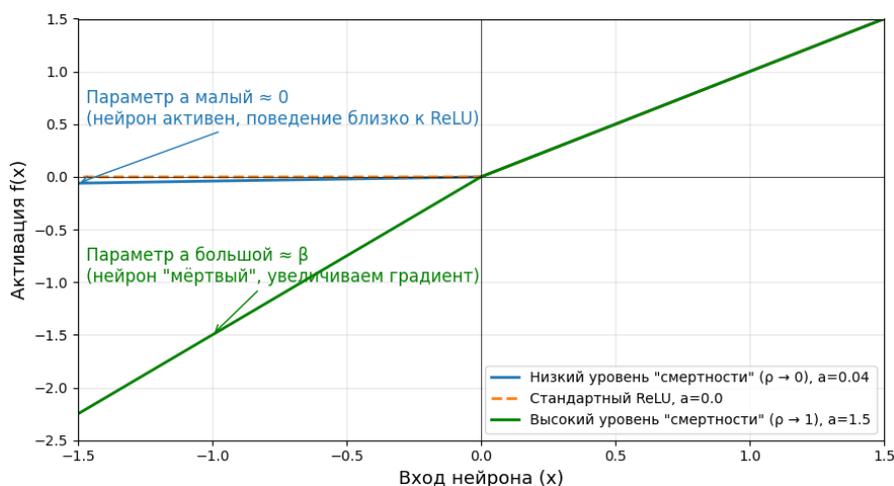


Рис. 7. Динамическая адаптация функции активации Leaky ReLU
Fig. 7. Dynamic adaptation of the Leaky ReLU activation function

Таким образом, предложенный алгоритм реализует простой, но эффективный принцип управления, в котором (рис. 7):

– высокий уровень «смертности» ($\rho \rightarrow 1$): если выход нейрона почти всегда отрицательный, параметр a будет стремиться к значению β , значительно увеличивая градиент, протекающий через этот нейрон при отрицательных входах, и препятствуя его «окончательной смерти»;

– низкий уровень «смертности» ($\rho \rightarrow 0$): если нейрон активен (имеет положительные выходы), параметр a уменьшается, приближая поведение функции к стандартному ReLU, что способствует разреженности и устойчивости модели;

– экспоненциальное скользящее среднее: использование α обеспечивает плавную адаптацию, защищая от шума в оценке ρ на малых батчах.

Данный метод автоматически находит баланс между двумя целями: поддержанием работоспособности нейронов и градиентного потока и сохранением полезных свойств разреженной активации, присущих ReLU.

Предлагаемый метод обладает двумя ключевыми преимуществами, которые делают его особенно подходящим для задач с малыми выборками. Во-первых, метод характеризуется параметрической экономичностью, поскольку не добавляет значительного количества обучаемых параметров в модель. Параметры α и β являются гиперпараметрами, едиными для всего слоя или сети, что критически важно для предотвращения переобучения при малом объеме данных. Во-вторых, метод обеспечивает повышение эффективности использования модели за счет динамического «оживления» нейронов, которые в противном случае вышли бы из строя. Это позволяет более полно использовать заложенную в архитектуру емкость модели, давая каждому нейрону шанс внести вклад в обучение, что особенно ценно в условиях, когда невозможно увеличить размер сети для компенсации потерь.

3. Экспериментальная оценка эффективности метода

Экспериментальное исследование эффективности предложенного метода динамической адаптации активационных функций проводилось на той же архитектуре сверточной нейронной сети (см. рис. 1) и том же датасете рукописных цифр, что и в предыдущем эксперименте по выявлению проблемы мертвых нейронов. Это обеспечило прямую сопоставимость результатов и объективную оценку влияния модифицированных функций активации. Единственным изменением в архитектуре модели стала замена всех стандартных ReLU-активаций на предложенные адаптивные функции с параметрами $\alpha = 0,9$ и $\beta = 2,0$. Значения гиперпараметров $\alpha = 0,9$ и $\beta = 2,0$ были выбраны эмпирически, исходя из компромисса между скоростью адаптации и устойчивостью процесса обучения. Коэффициент $\alpha = 0,9$ обеспечивает плавное обновление параметров, предотвращая резкие колебания, в то время как $\beta = 2,0$ создает достаточный запас по пропускной способности для «оживления» нейронов без риска нестабильности градиентов.

Обучение проводилось в идентичных условиях: 20 эпох с оптимизатором Adam и размером пакета 32.

Результаты эксперимента (рис. 8–11) демонстрируют значительное улучшение по всем ключевым показателям. Анализ карт признаков после применения метода динамической адаптации показал практически полное отсутствие мертвых фильтров в начальных слоях сети. Так, на выходе первого сверточного слоя (см. рис. 8) не зафиксировано ни одного неактивного фильтра, на выходе второго слоя (см. рис. 9) обнаружен только один мертвый фильтр (Ф8), а на выходе третьего слоя количество неактивных фильтров сократилось до шести (см. рис. 10). Это свидетельствует об эффективном предотвращении каскадного эффекта распространения мертвых зон по глубине сети.

Качественное улучшение наблюдается и в работе полносвязных слоев. В первом полносвязном слое активно функционирует 48 нейронов из 64, что составляет 75% от общего количества, в отличие от предыдущих 33%. При этом визуализация распределения активаций демонстрирует устойчивую работу без выраженной бимодальности, характерной для исходной модели (см. рис. 11). Особого внимания заслуживает повышение робастности модели к изменениям входных данных. Система демонстрирует устойчивое удержание распознавания при пространственных преобразованиях объекта в видеопотоке, включая смещение и масштабирование цифры в кадре, тогда как исходная модель теряла работоспособность при незначительных отклонениях от обученных примеров.

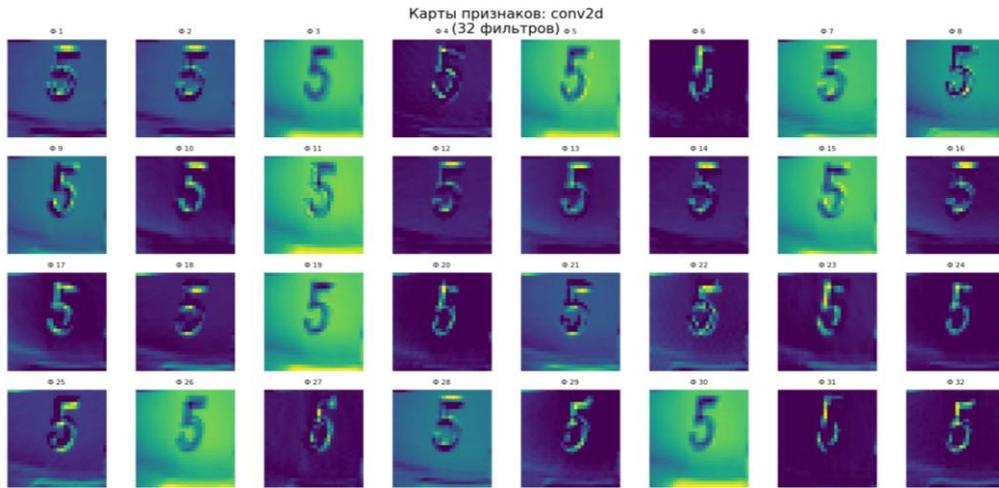


Рис. 8. Выходные активации первого сверточного слоя
Fig. 8. Output activations of the first convolutional layer

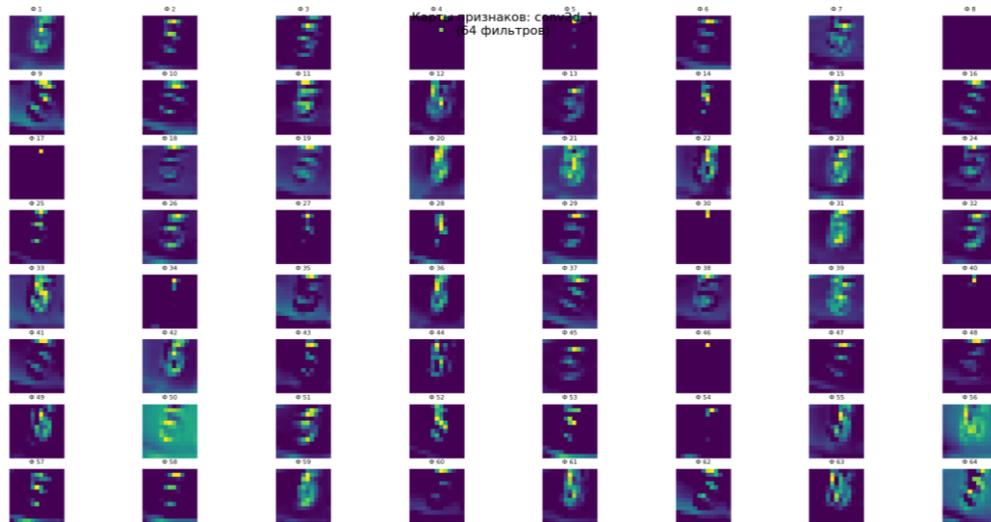


Рис. 9. Выходные активации второго сверточного слоя
Fig. 9. Output activations of the second convolutional layer

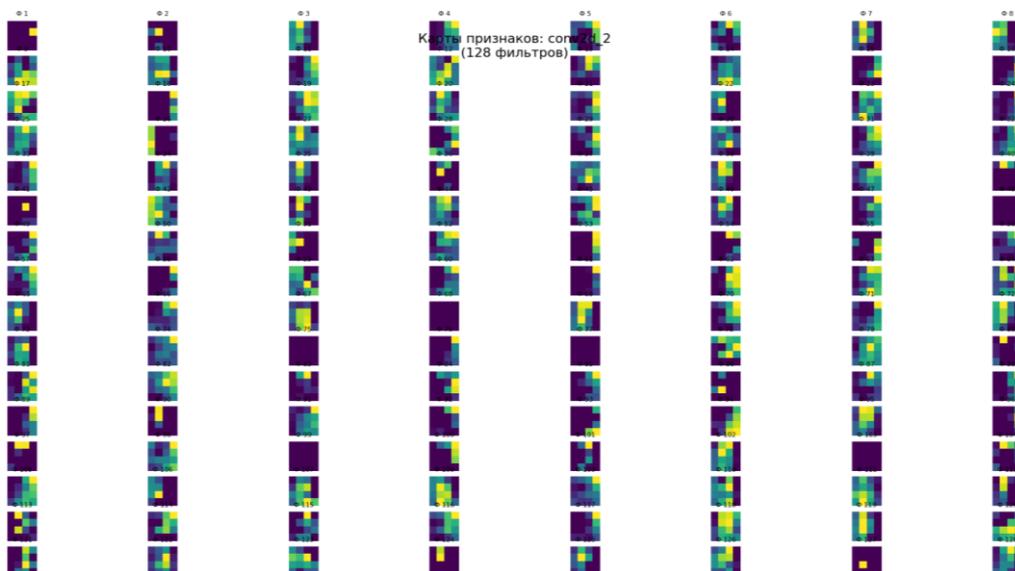


Рис. 10. Выходные активации третьего сверточного слоя
Fig. 10. Output activations of the third convolutional layer

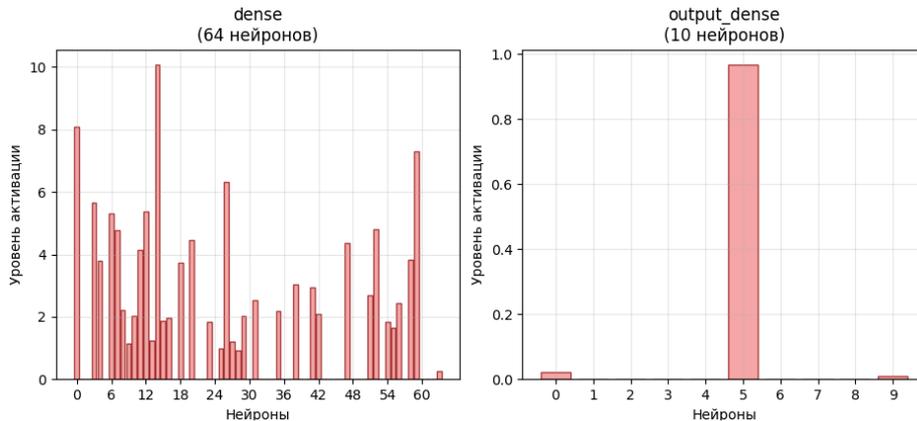


Рис. 11. Выходные активации полносвязных слоев
 Fig. 11. Output activations of the fully connected layers

Важным результатом является сохранение высокой точности классификации на уровне 97–98% при существенном улучшении внутренней динамики сети. Механизм динамической адаптации обеспечил непрерывный поток градиентов через все слои сети, предотвратив блокировку обучения отдельных нейронов. Полученные результаты подтверждают, что предложенный метод успешно решает проблему мертвых нейронов, обеспечивая более стабильный процесс обучения и повышая эффективность использования параметров модели, что особенно критично в условиях ограниченного объема тренировочных данных.

Заключение

Проведенное исследование подтвердило актуальность и значимость проблемы «мертвых нейронов» в глубоких сверточных сетях, особенно при работе с ограниченными объемами тренировочных данных. В качестве решения предложен метод динамической адаптации активационных функций, научная новизна которого заключается в следующем:

1. В отличие от существующих аналогов, параметр наклона адаптируется на основе прямого подсчета статистики активаций в реальном времени, а не методами градиентного спуска, что обеспечивает оперативное «оживление» нейронов.

2. Метод характеризуется параметрической экономичностью, поскольку не вводит дополнительных обучаемых параметров на каждый нейрон, а использует единые для слоя гиперпараметры, что снижает риск переобучения на малых выборках.

Экспериментально установлено, что использование стандартной функции активации ReLU приводит к катастрофическому снижению эффективности модели: уже после первого сверточного слоя наблюдается до 7 неактивных фильтров, а к третьему слою их количество возрастает до 56, что провоцирует каскадное вырождение градиентов и формирование «бутылочного горлышка» в полносвязных слоях. Несмотря на сохранение высокой точности классификации в контролируемых условиях, такая модель демонстрирует крайне низкую робастность к незначительным изменениям входных данных.

В качестве решения предложен метод динамической адаптации активационных функций, основанный на автоматической регулировке параметра наклона для отрицательной области индивидуально для каждого нейрона. Ключевым преимуществом метода является его параметрическая экономичность, что критически важно для предотвращения переобучения на малых выборках. Алгоритм, использующий скользящее среднее для обновления коэффициента наклона на основе статистики активаций, позволяет поддерживать непрерывный градиентный поток и предотвращает необратимое «затухание» нейронов.

Экспериментальная апробация метода на задаче распознавания рукописных цифр показала его высокую эффективность. Количество неактивных фильтров в третьем сверточном слое сократилось с 56 до 6, а в первом полносвязном слое доля активных нейронов возросла с 33 до 75%. При этом

сохранена точность классификации на уровне 97–98%, а также достигнута высокая устойчивость работы модели при пространственных преобразованиях объекта в видеопотоке.

Таким образом, предложенный метод позволяет существенно повысить эффективность использования вычислительной емкости сети без увеличения количества обучаемых параметров, что открывает перспективы его применения в задачах с ограниченными данными, таких как медицинская диагностика, промышленный мониторинг, автономная навигация беспилотных транспортных средств и другие области, где сбор размеченных выборок затруднен. Дальнейшие исследования могут быть направлены на адаптацию метода для других архитектур нейронных сетей, а также на оптимизацию гиперпараметров алгоритма для различных классов задач.

Список источников

1. Сацюк А.В. Мониторинг инфраструктуры на основе искусственного интеллекта // Автоматика, связь, информатика. 2025. № 9. С. 32–34. doi: 10.62994/AT.2025.9.9.005
2. Зеленина Л.И., Хаймина Л.Э., Деменкова Е.А. и др. Сверточные нейронные сети в задаче классификации медицинских изображений // Современные наукоемкие технологии. 2021. № 9. С. 68–73. doi: 10.17513/snt.38818
3. Asif R., Usman A., Muhammad A.Z. Hira F. Deep Learning Approach for the Classification and Detection of Dental and Craniofacial Conditions // Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. 2025. V. 18 (2). P. 79–91. doi: 10.14529/mmp250207
4. Сацюк А.В., Швалов Д.В. Автономное наведение БПЛА с использованием компьютерного зрения: проблема точного управления рулями // Автоматика на транспорте. 2024. Т. 10, № 4. С. 372–381. doi: 10.20295/2412-9186-2024-10-04-372-381
5. Сацюк А.В., Володарец Н.В. Гибридные алгоритмы компьютерного зрения для прецизионного автономного управления БПЛА. М.: ИНФРА-М, 2026. 178 с. doi: 10.12737/2227081
6. Сацюк А.В., Володарец Н.В. Модификация модели YOLO для гибридной системы детекции и трекинга в БПЛА с автоматическим наведением // Информационно-управляющие системы. 2025. № 4 (137). С. 36–44. doi: 10.31799/1684-8853-2025-4-36-44
7. Ultralytics: Leaky ReLU // Ultralytics. URL: <https://www.ultralytics.com/ru/glossary/leaky-relu> (дата обращения: 12.11.2025).
8. Ismail A.H., Soliman T.A., Rihan M., Dessouky M.I. Deep Learning-Based Beamforming for Millimeter-Wave Systems Using Parametric ReLU Activation Function // Wireless Personal Communications. 2023. V. 129 (2). P. 825–836. doi: 10.1007/s11277-022-10157-7
9. Clevert D., Unterthiner T., Hochreiter S. Fast and Accurate Deep Network Learning by Exponential Linear Units (ELUs) // arXiv. 2016. URL: <https://arxiv.org/abs/1511.07289> (accessed: 08.11.2024).
10. Klambauer G., Unterthiner T., Mayr A., Hochreiter S. Self-Normalizing Neural Networks // Advances in Neural Information Processing Systems. 2017. V. 30. URL: <https://proceedings.neurips.cc/paper/2017/hash/5d44ee6f2c3f71b73125876103c8f6c4-Abstract.html> (accessed: 08.11.2024).
11. He K., Zhang X., Ren S., Sun J. Delving Deep into Rectifiers: Surpassing Human-Level Performance on ImageNet Classification [Электронный ресурс] // Proc. of the IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV). 2015. P. 1026–1034. URL: <https://arxiv.org/abs/1502.01852> (accessed: 08.11.2024).
12. Agostinelli F., Hoffman M., Sadowski P., Baldi P. Learning Activation Functions to Improve Deep Neural Networks // arXiv. 2015. URL: <https://arxiv.org/abs/1412.6830> (accessed: 08.11.2024).
13. Ramachandran P., Zoph B., Le Q.V. Searching for Activation Functions // arXiv. 2017. URL: <https://arxiv.org/abs/1710.05941> (accessed: 08.11.2024).
14. Чепцов М.Н., Сониная С.Д. Метод моделирования цифровых устройств на основе нейронных сетей // Сборник научных трудов Донецкого института железнодорожного транспорта. 2023. № 69. С. 18–29.
15. Smith L.N., Topin N. Super-Convergence: Very Fast Training of Neural Networks Using Large Learning Rates // arXiv. 2018. URL: <https://arxiv.org/abs/1708.07120> (accessed: 12.11.2024).
16. Li Y., Yuan Y. Convergence Analysis of Two-layer Neural Networks with ReLU Activation // Advances in Neural Information Processing Systems. 2017. P. 597–607. URL: <https://proceedings.neurips.cc/paper/2017/hash/0f3d014eead934bbdbacb62a01dc4831-Abstract.html> (accessed: 08.11.2024).

References

1. Satsyuk, A.V. (2025) Monitoring infrastruktury na osnove iskusstvennogo intellekta [AI-Based Infrastructure Monitoring]. *Avtomatika, svyaz', informatika*. 9. pp. 32–34. doi: 10.62994/AT.2025.9.9.005
2. Zelenina, L.I., Khaymina, L.E., Demenkova, E.A. et al. (2021) Svertochnye neyronnye seti v zadache klassifikatsii meditsinskih izobrazheniy [Convolutional Neural Networks in the Problem of Medical Image Classification]. *Sovremennye naukoemkie tekhnologii*. 9. pp. 68–73. doi: 10.17513/snt.38818

3. Asif, R., Usman, A., Muhammad, A.Z. & Hira, F. (2025) Deep Learning Approach for the Classification and Detection of Dental and Craniofacial Conditions. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*. 18(2). pp. 79–91. doi: 10.14529/mmp250207
4. Satsyuk, A.V. & Shvalov, D.V. (2024) Avtonomnoe navedenie BPLA s ispol'zovaniem komp'yuternogo zreniya: problema tochnogo upravleniya rulyami [Autonomous Guidance of UAVs Using Computer Vision: The Problem of Precise Rudder Control]. *Avtomatika na transporte*. 10(4). pp. 372–381. doi: 10.20295/2412-9186-2024-10-04-372-381
5. Satsyuk, A.V. & Volodarets, N.V. (2026) *Gibridnye algoritmy komp'yuternogo zreniya dlya pretsizionnogo avtonomnogo upravleniya BPLA* [Hybrid Computer Vision Algorithms for Precision Autonomous UAV Control]. Moscow: INFRA-M. doi: 10.12737/2227081
6. Satsyuk, A.V. & Volodarets, N.V. (2025) Modifikatsiya modeli YOLO dlya gibridnoy sistemy detektsii i trekinga v BPLA s avtomaticheskim navedeniem [Modification of the YOLO Model for a Hybrid Detection and Tracking System in UAVs with Automatic Guidance]. *Informatsionno-upravlyayushchie sistemy*. 137. pp. 36–44. doi: 10.31799/1684-8853-2025-4-36-44
7. *Ultralytics: Leaky ReLU*. [Online] Available from: <https://www.ultralytics.com/ru/glossary/leaky-relu> (Accessed: 12th November 2025).
8. Ismail, A.H., Soliman, T.A., Rihan, M. & Dessouky, M.I. (2023) Deep Learning-Based Beamforming for Millimeter-Wave Systems Using Parametric ReLU Activation Function. *Wireless Personal Communications*. 129(2). pp. 825–836. doi: 10.1007/s11277-022-10157-7
9. Clevert, D., Unterthiner, T. & Hochreiter, S. (2016) Fast and Accurate Deep Network Learning by Exponential Linear Units (ELUs). *arXiv*. [Online] Available from: <https://arxiv.org/abs/1511.07289> (Accessed: 8th November 2024).
10. Klambauer, G., Unterthiner, T., Mayr, A. & Hochreiter, S. (2017) Self-Normalizing Neural Networks. *Advances in Neural Information Processing Systems*. 30. [Online] Available from: <https://proceedings.neurips.cc/paper/2017/hash/5d44ee6f2c3f71b73125876103c8f6c4-Abstract.html> (Accessed: 8th November 2024).
11. He, K., Zhang, X., Ren, S. & Sun, J. (2015) Delving Deep into Rectifiers: Surpassing Human-Level Performance on ImageNet Classification. *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*. pp. 1026–1034. [Online] Available from: <https://arxiv.org/abs/1502.01852> (Accessed: 8th November 2024).
12. Agostinelli, F., Hoffman, M., Sadowski, P. & Baldi, P. (2015) Learning Activation Functions to Improve Deep Neural Networks. *arXiv*. [Online] Available from: <https://arxiv.org/abs/1412.6830> (Accessed: 8th November 2024).
13. Ramachandran, P., Zoph, B. & Le, Q.V. (2017) Searching for Activation Functions. *arXiv*. [Online] Available from: <https://arxiv.org/abs/1710.05941> (Accessed: 8th November 2024).
14. Cheptsov, M.N. & Sonina, S.D. (2023) Metod modelirovaniya tsifrovyykh ustroystv na osnove neyronnykh setey [Method for Modeling Digital Devices Based on Neural Networks]. *Sbornik nauchnykh trudov Donetskogo instituta zheleznodorozhnogo transporta*. 69. pp. 18–29.
15. Smith, L.N. & Topin, N. (2018) Super-Convergence: Very Fast Training of Neural Networks Using Large Learning Rates. *arXiv*. [Online] Available from: <https://arxiv.org/abs/1708.07120> (Accessed: 12th November 2024).
16. Li, Y. & Yuan, Y. (2017) Convergence Analysis of Two-layer Neural Networks with ReLU Activation. *Advances in Neural Information Processing Systems*. pp. 597–607. [Online] Available from: <https://proceedings.neurips.cc/paper/2017/hash/0f3d014eead934bbdbacb62a01dc4831-Abstract.html> (Accessed: 8th November 2024).

Информация об авторе:

Сацюк Александр Владимирович – кандидат технических наук, заведующий научно-исследовательской лабораторией искусственного интеллекта Донецкого института железнодорожного транспорта (Донецк, Россия). E-mail: alexandersatsuk@gmail.com

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Information about the author:

Satsiuk Alexandr V. (Candidate of Technical Sciences, Head of the Artificial Intelligence Research Laboratory, Donetsk Institute of Railway Transport (Donetsk, Russian Federation). E-mail: alexandersatsuk@gmail.com

The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 30.11.2025; принята к публикации 05.03.2026

Received 30.11.2025; accepted for publication 05.03.2026

**ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ДИАГНОСТИКА
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ****DESIGNING AND DIAGNOSTICS OF COMPUTER SYSTEMS**

Научная статья

УДК 519.7

doi: 10.17223/19988605/74/13

**Вычисление множества всех достижимых реакций синхронных автоматов
на последовательностях заданной длины****Анжела Юрьевна Матросова¹, Марина Максимовна Савенкова²,
Виктор Алексеевич Провкин³**^{1, 2, 3} *Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия*¹ *mau11@yandex.ru*² *marina1412_11@mail.ru*³ *prowkan@mail.ru*

Аннотация. Предлагаются подход к вычислению всех реакций синхронного автомата и компактное представление этих реакций на последовательностях заданной длины. Поведение автомата представляется последовательностной схемой. Ей сопоставляется комбинационный эквивалент, состоящий из s одинаковых по структуре комбинационных подсхем, где s – длина последовательностей. Комбинационный эквивалент рассматривается как цепь из s элементов (подсхем), в которой выходы предыдущего элемента, сопоставляемые линиям обратных связей последовательностной схемы, являются входами последующего элемента цепи. Каждый элемент имеет собственные входы, соответствующие входам последовательностной схемы. Вычисление реакций основано на применении операций над однокоренными ROBDD-графами, представляющими поведение многовыходной комбинационной подсхемы, реализующей функции переходов синхронного автомата. Обсуждаются возможности применения подхода к тестированию синхронных последовательностных схем без использования технологий сканирования.

Ключевые слова: последовательностные схемы; синхронные автоматы; ROBDD-графы.

Для цитирования: Матросова А.Ю., Савенкова М.М., Провкин В.А. Вычисление множества всех достижимых реакций синхронных автоматов на последовательностях заданной длины // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2026. № 74. С. 137–147. doi: 10.17223/19988605/74/13

Original article

doi: 10.17223/19988605/74/13

**Computation of the set of all reachable reactions of synchronous automaton
on sequences of a given length****Anzhela Yu. Matrosova¹, Marina M. Savenkova², Viktor A. Provkina³**^{1, 2, 3} *National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*¹ *mau11@yandex.ru*

² marina1412_11@mail.ru³ prowkan@mail.ru

Abstract. This paper proposes an approach for computing all reactions of a synchronous automaton on sequences of a given length and a compact reactions representation. The automaton's behavior is represented as a sequential circuit. The behavior of this automaton on sequences of a given length may be also represented by the combinational equivalent, consisting of s identical combinational sub-circuits, where s is the length of the sequences. The combinational equivalent is viewed as a chain of s elements (sub-circuits), in which the outputs corresponded to transitions functions of the previous element serve as inputs to the next element in the chain. Each element has also own inputs corresponding to inputs of the sequential circuit. A calculation of reactions is based on applying multiplication of two specific one root ROBDDs of neighbor elements of the chain. These ROBDDs represent the behavior of multioutput combination sub-circuits that realize transition functions of the synchronous automaton. The approach's application to testing of synchronous sequential circuits (synchronous automaton) without using scanning technologies is discussed.

Keywords: sequential circuits; synchronous automaton; ROBDDs.

For citation: Matrosova, A.Yu., Savenkova, M.M., Provkin, V.A. (2026) Computation of the set of all reachable reactions of synchronous automaton on sequences of a given length. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 74. pp. 137–147. doi: 10.17223/19988605/74/13

Введение

Рассматриваются подход к вычислению всех реакций синхронной последовательностной схемы (синхронного автомата) и компактное представление этих реакций на последовательностях заданной длины. Поведение автомата представляется последовательностной схемой. Ей, как известно, можно сопоставить комбинационный эквивалент, состоящий из s одинаковых по структуре комбинационных подсхем, где s – длина последовательностей. Комбинационный эквивалент рассматривается как цепь из s элементов (подсхем), в которой выходы предыдущего элемента, сопоставляемые функциям переходов последовательностной схемы, являются входами последующего элемента цепи. Каждый элемент имеет собственные входы, соответствующие входам последовательностной схемы. Вычисление реакций основано на применении операций над однокоренными ROBDD-графами, представляющими поведение многовыходных комбинационных подсхем цепи [1]. В работе [2] предложено получать информацию о достижимых реакциях последующей подсхемы цепи из различных комбинационных многовыходных подсхем умножением однокоренного графа последующей подсхемы, зависящего от ее выходных и входных переменных на граф достижимых реакций предыдущей подсхемы, зависящий только от ее выходных переменных. Полученный граф зависит от m выходных переменных последующей подсхемы и n ее входных переменных.

В данной работе предложена адаптация подхода [2] к вычислению реакций синхронного автомата, представленного соответствующим комбинационным эквивалентом. Требуется выполнить $(s - 1)$ перемножений пар графов, описывающих поведение соседних элементов цепи в условиях ограничений на области определения поведения подсхем, порождающих различные пары графов, реализующих функции переходов комбинационной составляющей последовательностной схемы. Использование этих графов позволяет при решении поставленной выше задачи заменить двоичное моделирование комбинационного эквивалента на множестве $(sn + p)$ переменных (sn , если известно начальное состояние) или отыскание корней 2^p систем уравнений из функций на множестве тех же переменных. Здесь n – число входных переменных последовательностной схемы, а p – число ее переменных состояний (число триггеров в линиях обратных связей). Перемножение ROBDD-графов характеризуется полиномиальной сложностью. Обсуждаются возможности применения предлагаемого подхода к вычислению множества всех достижимых состояний на последовательностях, длина которых не превосходит заданного значения, для задач тестирования неисправностей последовательностной схемы. Рассматриваются последовательности длины 1, 2 и т.д., вплоть до s . Это открывает дополнительные возможности для тестирования синхронных автоматов с перспективой отказаться от методов сканирования. Данный подход позволяет также сократить вычисления при обнаружении ложных путей в синхронных схемах с памятью.

1. Вычисление реакций цепи из s элементов и их обеспечение

1.1. Вычисление реакций для пары соседних элементов цепи

Выделим в цепи из s элементов (комбинационных подсхем) произвольную пару соседних элементов (соседних подсхем), в ней каждый выход предшествующего элемента, сопоставляемый функциям переходов синхронного автомата, является входом последующего элемента. Каждый элемент цепи имеет собственное множество входных переменных, порожденное числом входов синхронного автомата и номером элемента последовательности. Найдем достижимые реакции последующей подсхемы этой пары, используя следующую теорему.

Теорема 1. Достижимые реакции последующей подсхемы и условия их обеспечения представляются однокоренным графом, полученным от перемножения однокоренного графа многовыходной последующей подсхемы, представляющей функции переходов синхронного автомата, и однокоренного графа достижимых реакций многовыходной предшествующей подсхемы.

Доказательство. Сопоставим однокоренному графу последующей подсхемы соответствующую ортогональную ДНФ, задаваемую путями из корня графа в его 1-концевую вершину. Таким же образом строим ортогональную ДНФ по однокоренному графу достижимых реакций предшествующей подсхемы. Каждая конъюнкция первого графа умножается на каждую конъюнкцию второго графа. Пустые пересечения возможны только за счет общих переменных, т.е. по выходным переменным предшествующей подсхемы, являющимся входными переменными последующей подсхемы. Наличие пустых пересечений приводит к сокращению области обеспечения реакций последующей подсхемы. Если область обеспечения некоторой реакции последующей подсхемы оказывается пустой, то реакция последующей подсхемы становится недостижимой. Перемножение графов эквивалентно перемножению порожденных ими ортогональных ДНФ. Теорема доказана.

1.2. Поиск всех реакций синхронного автомата на последовательностях заданной длины и нахождение входной последовательности, обеспечивающей одну (любую) из выбранных реакций

Комбинационный эквивалент длины s синхронной схемы с памятью (последовательностной схемы) представляется схемой, представленной на рис. 1, в которой все комбинационные подсхемы (элементы цепи) одинаковы по структуре.

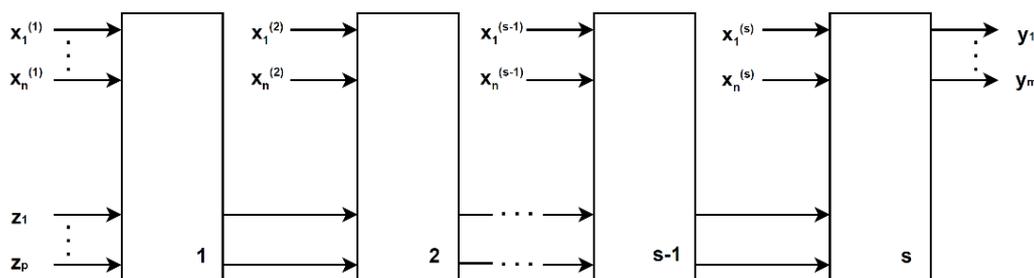


Рис. 1. Комбинационный эквивалент длины s
 Fig. 1. Combinational equivalent of the length s

Элементы цепи являются комбинационными составляющими синхронной последовательностной схемы и отличаются только по входным переменным. Они образуют цепь, в которой выходы предшествующего элемента, реализующего функции переходов последовательностной схемы, являются входами последующего элемента. В каждом элементе присутствуют собственные входные переменные, сопоставляемые входам последовательностной схемы, поступающие на нее в процессе подачи последовательностей длины s . Число входных переменных у каждого элемента цепи одинаково, дополнительный верхний индекс входной переменной схемы указывает на принадлежность комбинационной составляющей номеру элемента (подсхемы) цепи и, соответственно, номеру входного набора

последовательности, поступающей на синхронный автомат. Значения входных переменных с различными индексами не зависят друг от друга; без учета индексов имеем $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_p\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$. Выходные переменные, сопоставляемые функциям выходов последовательностной схемы, кроме последней s -й подсхемы, для простоты не указаны, поскольку они не влияют на достижения реакций цепи выбранной длины. Их число также одинаково для каждой подсхемы цепи.

Отметим, что входной вектор $\alpha_{x^{(s)}} \alpha_{z^{(s-1)}}$ последней подсхемы цепи состоит из двух составляющих. Здесь $\alpha_{x^{(s)}}$ – составляющая по входным переменным, относящаяся к s -й подсхеме, $\alpha_{z^{(s-1)}}$ – составляющая по внутренним переменным, представляющая реакцию $(s - 1)$ -й подсхемы. Будем иметь в виду, что при построении однокоренного графа подсхемы цепи [1] сначала выполняется разложение по выходным переменным подсхемы комбинационной составляющей, сопоставляемым функциям переходов последовательностной схемы (функции выходов, кроме s -го элемента, нас не интересуют), потом по внутренним переменным, сопоставляемым функциям переходов, а затем по ее входным переменным.

Итак, имеем цепь из s подсхем (см. рис. 1). Достижимые реакции каждой из последующих подсхем находим путем перемножения однокоренного графа последующей подсхемы и графа достижимых реакций функций переходов предшествующей подсхемы. Будем сохранять полученные в результате перемножения однокоренные графы последующего элемента пары. Эти графы будут использованы в дальнейшем для нахождения входного набора цепи, обеспечивающего выбранную реакцию (выходной набор) цепи. Выполнив такие перемножения $s - 1$ раз, получим граф достижимых внутренних состояний для s -й подсхемы.

Приведем шаги алгоритма вычисления входной последовательности длины s , обеспечивающей выбранную реакцию цепи:

1. Строим однокоренный граф подсхемы, реализующий функции выходов синхронного автомата (последовательностной схемы) для s -го элемента цепи.

2. Выделяем нужную нам реакцию $\alpha_{y^{(s)}}$ (булев вектор) и произвольный входной набор $\alpha_{x^{(s)}} \alpha_{z^{(s-1)}}$ (булев вектор), ее обеспечивающий. Набор $\alpha_{x^{(s)}} \alpha_{z^{(s-1)}}$ обращает в единицу в общем случае троичный вектор, порожденный построенным графом. Он состоит из входной составляющей $\alpha_{x^{(s)}}$ и составляющей состояния $\alpha_{z^{(s-1)}}$, вычисленного на выходе предыдущего элемента (подсхемы) цепи.

3. Из однокоренного графа R_{s-1} предпоследней подсхемы цепи (граф был сохранен при вычислении реакций этого элемента цепи), т.е. графа, построенного для подсхемы функций переходов элемента $(s - 1)$ цепи, выделяем обычный ROBDD-граф R_{s-1}^* , обеспечивающий достижение реакции $\alpha_{z^{(s-1)}}$ предпоследней подсхемы цепи.

4. Выбираем в нем произвольный в общем случае троичный вектор, представляемый путем из корня графа R_{s-1}^* в его 1-концевую вершину, доопределяем его произвольным образом до булева вектора $\alpha_{x^{(s-1)}} \alpha_{z^{(s-2)}}$.

5. В однокоренном графе подсхемы $(s - 2)$, который был сохранен при вычислении реакции на выходах рассматриваемой цепи, выделяем обычный ROBDD-граф R_{s-2}^* , обеспечивающий достижение вектора $\alpha_{z^{(s-2)}}$, и произвольный булев вектор, обращающий этот граф в единицу, и т.д.

6. Просматривая таким образом аналогичные графы подсхем цепи, выполняем пункты 3–5 алгоритма и приходим к первой подсхеме цепи.

7. В однокоренном графе R_1 первой подсхемы выделяем обычный ROBDD-граф R_1^* , обеспечивающий достижение вектора $\alpha_{z^{(1)}}$, который является одной из реакций первой подсхемы рассматриваемой цепи.

Произвольный вектор $\alpha_{x^{(1)}}$, представляемый путем из корня графа R_1^* первой подсхемы в его 1-концевую вершину, доопределен до булева вектора. Этот вектор вместе с выбранными ранее векторами $\alpha_{x^{(2)}}, \dots, \alpha_{x^{(s)}}$ обеспечивает достижение вектора s -й подсхемы.

Замечание. Предполагается, что начальное состояние последовательностной схемы (синхронного автомата) известно.

Алгоритм позволяет найти одну из последовательностей, обеспечивающих достижение реакции $\alpha_{y^{(s)}}$ на выходе рассматриваемой цепи. Аналогичным образом могут быть найдены последовательности, обеспечивающие любую из достижимых реакций на выходе синхронного автомата за счет поступления на его входы последовательности длины s .

Рассмотрим иллюстрирующий пример.

Задан синхронный автомат диаграммой переходов, выходов (рис. 2, *a*). В скобках отмечается значение выходной переменной. Для автомата по системе канонических уравнений построена комбинационная составляющая последовательностной схемы (рис. 2, *b*). Начальное состояние последовательностной схемы 00.

По диаграмме переходов получена система ДНФ:

$$\begin{aligned} z_1' &= \bar{x}z_1z_2 \vee xz_1\bar{z}_2; \\ z_2' &= x \vee \bar{z}_1z_2; \\ y &= xz_2 \vee \bar{x}\bar{z}_2. \end{aligned}$$

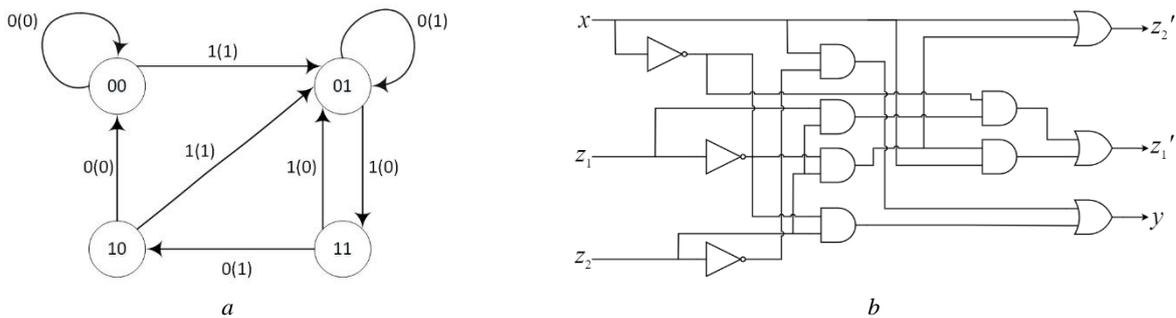


Рис. 2. Диаграмма переходов, выходов (*a*); комбинационная составляющая последовательностной схемы (*b*)
 Fig. 2. The state transition diagram (*a*); the combinational part of the sequential circuit (*b*)

Комбинационная часть (комбинационная составляющая) последовательностной схемы является реализацией этой системы. Найдем последовательность (одну, любую) длины 4, обеспечивающую на выходе последовательностной схемы значение 1. Строим однокоренной граф функции выходов комбинационной части последовательностной схемы (рис. 3). Индекс входной переменной отмечает номер элемента строящейся последовательности.

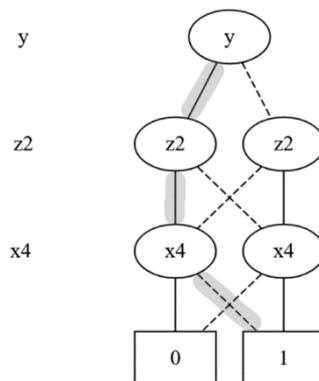


Рис. 3. Однокоренной граф выходной функции
 Fig. 3. Single-root graph of the output function

Из обычного ROBDD-графа, корнем которого является левая вершина, отмеченная переменной z_2 , выбираем набор $z_1 = 1, z_2 = 1, x^{(4)} = 0$, представляемый путем из корня графа в его 1-концевую вершину. Этот набор состоит из входной составляющей и составляющей состояний, полученных на выходе предыдущего (третьего) элемента цепи.

В однокоренном графе, вычисленном для третьего элемента цепи, достижимые внутренние состояния представлены значениями переменных z'_1, z'_2 , а предшествующие состояния представлены значениями переменных z_1 и z_2 . Из этого графа (рис. 4), выделяем обычный ROBDD-граф, корнем которого является левая вершина, отмеченная переменной z_1 . Этот граф представляет условия обеспечения состояния $z_1 = 1, z_2 = 1$, в котором доопределено значение переменной z_1 . Выбираем в ROBDD-графе набор, представляемый путем из корня в его 1-концевую вершину. Это единственный набор: $z_1 = 0, z_2 = 1, x^{(3)} = 1$.

Выделяем в однокоренном графе для второго элемента цепи (рис. 5) обычный ROBDD-граф, обеспечивающий достижение состояния $z_1 = 0, z_2 = 1$.

Корнем этого графа является правая вершина, помеченная переменной z_1 . Выбираем набор $z_1 = 0, z_2 = 0, x^{(2)} = 1$ этого графа, представляемый путем из корня в его 1-концевую вершину.

На последнем шаге рассматриваем однокоренный граф для первого элемента цепи, построенный с учетом начального состояния $z_1 = 0, z_2 = 0$ (рис. 6). В однокоренном графе для первого элемента цепи рассматриваем обычный ROBDD-граф, обеспечивающий условия достижения состояния $z_1 = 0, z_1 = 0$, полученного на предыдущем шаге.

Корнем графа является левая вершина, помеченная символом x_1 . Выбираем вектор, соответствующий пути, ведущему в 1-концевую вершину. В нашем случае это единственный вектор, соответствующий значению $x^{(1)} = 0$.

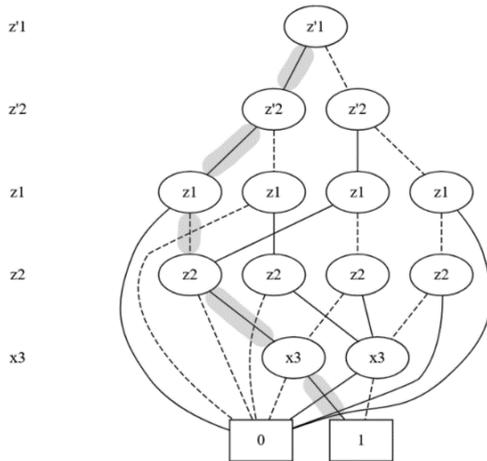


Рис. 4. Однокоренный граф третьего элемента цепи
Fig. 4. Single-root graph of the third element of the chain

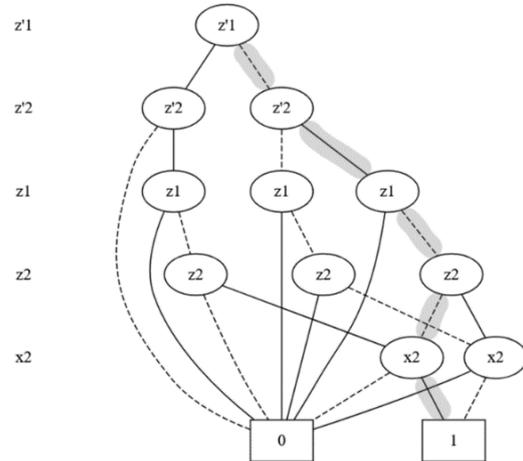


Рис. 5. Однокоренный граф второго элемента цепи
Fig. 5. Single-root graph of the second element of the chain

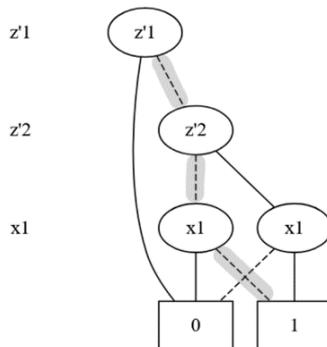


Рис. 6. Однокоренный граф первого элемента цепи
Fig. 6. Single-root graph of the first element of the chain

В результате находим входную последовательность длины $s = 4$, обеспечивающую реакцию цепи $y = 1$: $\{0110\}$ (реакцию синхронного автомата), поступающую на единственный вход последовательностной схемы $x^{(1)} = 0, x^{(2)} = 1, x^{(3)} = 1, x^{(4)} = 0$. Полученный результат подтверждается диаграммой переходов, выходов (см. рис. 2, а).

Будем иметь в виду, что использование однокоренных ROBDD-графов для многовыходных схем приводит к тому, что число концевых вершин подграфа этого графа, состоящего исключительно из вершин, помеченных выходными переменными схемы, может приближаться к величине 2^p , где p – число выходов порождающей граф схемы. При большом числе выходов граф становится чрезвычайно громоздким и требует больших ресурсов памяти. Далее предлагается выход в подобных ситуациях.

3. Вычисление достижимых реакций и обеспечивающих их достижение последовательностей в условиях разбиения схемы функций переходов на две подсхемы

Разобьем комбинационную составляющую, реализующую функции переходов последовательностной схемы, на две подсхемы, каждая из которых имеет не более 5 или 6 выходов. В этом случае имеется возможность рассматривать синхронные автоматы, число состояний которых достигает нескольких тысяч. Скорректируем изложенные выше алгоритмы в этих условиях.

3.1. Построение множества достижимых реакций на последовательностях заданной длины

Рассмотрим фрагмент цепи (фрагмент комбинационного эквивалента последовательностной схемы), состоящий из двух соседних элементов (соседних подсхем цепи, реализующих функции переходов), т.е. подсхем $i, i + 1$; каждую из них разобьем на две подсхемы с непересекающимися множествами выходов ограниченной размерности. Эти подсхемы могут иметь общие входы. В дальнейшем в этом разделе подсхемы элементов комбинационного эквивалента, сопоставляемого функциям переходов, будем всюду называть элементами цепи. Разбитые на части элементы будем называть подсхемами.

1. Построим однокоренные графы для каждой из подсхем предшествующего элемента.

2. Выделим из них подграфы реакций.

3. Рассмотрим все возможные пары реакций, по одной из каждой подсхемы. Для каждой пары определим ее достижимость. Если пересечение двух обычных ROBDD-графов, извлекаемых из этих однокоренных графов и обеспечивающих реакции каждого элемента пары, не пусто, то конкатенация этих реакций представляет достижимое состояние (реакцию i -го элемента цепи). Граф, полученный в результате пересечений, представляет условия достижимости этого состояния в пространстве всех переменных состояний и входных переменных последовательностной схемы.

4. Представляем множество всех достижимых состояний компактно в виде обычного ROBDD-графа R_i .

5. Умножаем оба однокоренных графа подсхем последующего $(i + 1)$ -го элемента цепи на граф реакций R_i предшествующего i -го элемента и запоминаем полученные однокоренные графы подсхем $(i + 1)$ -го элемента.

Переходим к следующей паре, в которой последующий элемент становится предшествующим, а следующий за ним элемент – последующим.

6. Выполняем пункты 1–5, начиная с первой пары элементов цепи, пока не дойдем до последней пары из $(s - 1), s$ элементов. В ней строим граф реакций $(s - 1)$ -го элемента и умножаем на однокоренные графы подсхем, построенных для ее функций выходов в случае разбиения подсхемы, реализующей функции выходов, на две части.

7. Выполняем пункты 3, 4 алгоритма и находим все достижимые реакции в пространстве выходных переменных схемы на последовательностях длины s , представив их графом R_s .

3.2. Построение последовательности, обеспечивающей достижимую реакцию

1. Из однокоренного графа R_x цепи выбираем одну из реакций в виде булева вектора $y^{(1)}y^{(2)}$ и выделяем в нем вектор, обеспечивающий эту реакцию и имеющий три составляющих $\alpha_z^{(1)}\alpha_z^{(2)}, \alpha_x^{(s)}$, запомнив составляющую по входным переменным $\alpha_x^{(s)}$.

2. Используя два однокоренных графа, вычисленные для $(s - 1)$ -го элемента цепи, находим в них обычные два ROBDD-графа, обеспечивающие составляющие $\alpha_z^{(1)}\alpha_z^{(2)}$, и выполняем пересечение этих графов (непустое пересечение гарантировано реализацией процедуры поиска реакции последовательности длины s). Выбираем любой путь из корня графа (результата пересечений) до его 1-концевой вершины. В результате получаем векторы (в общем случае троичные), которые имеют три составляющих $\alpha_x^*\alpha_z^{*(1)}\alpha_z^{*(2)}$. Доопределяем произвольным образом троичные компоненты и получаем булев вектор $\alpha_x^{(s-1)}$, представляющий входной вектор $(s - 1)$ -го элемента последовательности и состояние $\alpha_z^{(1)}\alpha_z^{(2)}$. Возвращаемся к шагам 1, 2 для состояния $\alpha_z^{(1)}\alpha_z^{(2)}$ и т.д., пока не дойдем до 1-го и 2-го элементов цепи и начального состояния последовательностной схемы (синхронного автомата). Из однокоренных графов $R_2^{(1)}, R_2^{(2)}$ и состояния $\alpha_z^{(1)}\alpha_z^{(2)}$ находим обычные ROBDD-графы, их обеспечивающие. Пересекаем их. Доопределяем соответствующий пути в графе троичный вектор до булева вектора, получаем первый вектор $\alpha_x^{(1)}$ искомой последовательности длины s , обеспечивающий реакцию $y^{(1)}y^{(2)}$. Будем иметь в виду, что известное начальное состояние в наших обозначениях есть состояние $\alpha_z^{(1)}\alpha_z^{(2)}$.

Предложенный алгоритм требует существенно больших затрат времени, чем предыдущий, это связано с перемножением обычных ROBDD-графов для пар составляющих состояний. Число составляющих состояний можно расширить с целью использования алгоритма для большего числа состояний синхронного автомата, если это необходимо. Однако выяснение таких возможностей требует дальнейших исследований.

4. Использование предложенных алгоритмов для тестирования схем с памятью

При тестировании схем с памятью для обнаружения в них неисправностей логических элементов возникает проблема достижения подмножества состояний последовательностной схемы на различных последовательностях, длина которых изменяется от 1 до s . В этом случае на каждом шаге вычислений последовательностей конкретной длины для пары элементов цепи достаточно учитывать только вновь появившиеся состояния, сохраняя информацию о состояниях, достигнутых ранее, и соответствующие им длины последовательностей. В частности, такой подход можно сочетать с поиском тестовых наборов для комбинационной составляющей схемы с памятью. Каждый тестовый набор имеет входную составляющую и составляющую переменных состояний. Далее можно использовать кратчайшие последовательности, достигающие из начального состояния нужную составляющую по переменным состояний для очередного тестового набора.

Отметим, что вычисление множества достижимых состояний последовательностной схемы из заданного ее начального состояния на последовательностях заданной длины необходимо также выполнять при тестировании робастно тестируемых неисправностей задержек путей в комбинационной составляющей этой схемы [3]. Тогда имеется возможность избежать использования метода сканирования и связанных с ним аппаратурных и временных затрат.

В работах [4–6] традиционная подстановка соответствующей функции переходов предшествующего элемента цепи вместо переменной состояния последующего элемента этой цепи выполняется с использованием обычных ROBDD-графов, что эффективнее подстановки функций переходов в виде ДНФ.

Однако ортогональная ДНФ функции последующего элемента цепи, представленная соответствующим обычным ROBDD-графом от входных переменных и переменных состояний этого элемента, может оказаться достаточно сложной как по рангам составляющих ее конъюнкций (учитываются только переменные состояний), так и по числу конъюнкций ортогональной ДНФ. Кроме того, число переменных состояний может оказаться значительным. Совместно эти показатели приводят к сложным вычислениям. В предлагаемом нами подходе подстановки вместо всех переменных состояний и всех конъюнкций соответствующих ортогональных ДНФ последующего элемента заменяются выполнением одного перемножения однокоренного графа последующего элемента и однокоренного графа реакций, извлеченного из однокоренного графа предшествующего элемента.

К алгоритмам, изложенным в разд. 2, 3, сводится также задача выявления ложных путей в схемах с памятью в условиях ограничения на длины последовательностей, в рамках которых рассматривается поведение схемы [5, 6]. В этом случае требуется установить достижимость хотя бы одного состояния из заданного множества.

Кроме того, перемножения однокоренного графа последующего элемента цепи и однокоренного графа реакций предшествующего элемента оказываются полезными при решении задачи проверки эквивалентности частично построенной комбинационной схемы, отдельные фрагменты которой отданы сторонним разработчикам [2], с последующим включением фрагментов в основную схему. Это позволяет одновременно создавать фрагменты и основную схему. Спецификация и основная схема (частично построенная схема) могут быть представлены в различных элементных базисах. Возникает необходимость проверки частично построенной схемы (the Partial Equivalence Checking Problem, PEC) в условиях, когда отдельные фрагменты схемы еще не созданы, известны лишь их спецификации. Спецификация комбинационной схемы в целом также известна. Предлагаемый в работе [2] подход позволяет при решении этой задачи отказаться от использования QBF-решателей или их модификаций [7–10], применяемых в зарубежных публикациях. Использование QBF-решателей требует, как правило, более сложных вычислений, чем операции над ROBDD-графами, характеризующиеся полиномиальной сложностью.

Заключение

В работе предлагается новый подход к вычислению всех реакций последовательностной схемы (синхронного автомата) на последовательностях заданной длины. Он основан на перемножении двух однокоренных ROBDD-графов, представляющих поведение многовыходных комбинационных схем, являющихся соседними копиями комбинационного эквивалента последовательностной схемы. Предлагается модификация подхода, ориентированная на расширение класса автоматов, к которым он может быть применен. Обсуждается возможность построения тестовых последовательностей для обнаружения неисправностей в последовательностных схемах за счет нахождения состояний на последовательностях, длина которых не превосходит заданного значения (последовательности длины 1, 2, ..., s). Это открывает новые перспективы для тестирования схем с памятью в смысле возможности отказаться от методов сканирования. Данный подход позволяет также сократить вычисления при обнаружении ложных путей в схемах с памятью.

Список источников

1. Матросова А.Ю., Савенкова М.М. Проверка эквивалентности частично построенных комбинационных схем // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2025. № 71. С. 130–139. doi: 10.17223/19988605/71/13
2. Провкин В.А., Матросова А.Ю. Графовые представления множеств всех достижимых реакций комбинационной схемы // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 61. С. 128–138. doi: 10.17223/19988605/61/13
3. Матросова А.Ю., Чернышов С.В., Ким О.Х., Николаева Е.А. Построение последовательности, обнаруживающей робастно тестируемые неисправности задержек путей в схемах с памятью // Автоматика и телемеханика. 2021. № 11. С. 148–168. doi: 10.31857/S0005231021110106

4. Чернышов С.В., Андреева В.В. Построение кратчайшей установочной последовательности последовательностной схемы с использованием ROBDD // Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем: материалы V Междунар. молодежной науч. конф. Томск, 19–20 мая 2017. Томск: Изд. Дом ТГУ, 2017. С. 3–7. (Труды Томского государственного университета. Сер. физико-математическая; т. 301).
5. Matrosova A.Y., Andreeva V.V., Chernyshov S.V., Rozhkova S.V., Kudin D.V. Finding false paths in sequential circuits // Russian Physics Journal. 2018. V. 60 (10). P. 1837–1844.
6. Matrosova A., Ostanin S., Chernyshov S. Finding False Paths for Sequential Circuits Using Operations on ROBDDs // 2018 IEEE 24th International Symposium on On-Line Testing and Robust System Design (IOLTS 2018). Platja d'Aro, Spain, July, 2–4, 2018. P. 240–242.
7. Scholl C., Becker B. Checking equivalence for circuits containing incompletely specified boxes // Int'l Conf. on Computer Design (ICCD). IEEE, 2002. P. 56–63.
8. Herbstritt M., Becker B., Scholl C. Advanced SAT-techniques for bounded model checking of blackbox designs // Int'l Workshop on Microprocessor Test and Verification (MTV). IEEE, 2006. P. 37–44.
9. Tan T., Fung L.-H. On the complexity of k-DQBF // In 26th International Conference on Theory and Applications of Satisfiability Testing (SAT 2023). Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs). 2023. V. 271. P. 10:1–10:15.
10. Fung L.H., Cheng C., Fan Y.W., Tan T., Jiang J.H.R. 2-DQBF Solving and Certification via Property-Directed Reachability Analysis // Formal Methods in Computer Aided Design Fmcad. 2024. P. 197–207.

References

1. Matrosova, A.Yu. & Savenkova, M.M. (2025) Partial equivalence checking for combinational circuits. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 71. pp. 130–139. (In Russian). doi: 10.17223/19988605/71/13
2. Provkin, V.A. & Matrosova, A.Yu. (2022) Graph Representations of Sets of All Reachable Reactions of a Combinational Circuit. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 61. pp. 128–138. (In Russian). doi: 10.17223/19988605/61/13
3. Matrosova, A.Yu., Chernyshov, S.V., Kim, O.Kh. & Nikolaeva, E.A. (2021) Postroenie posledovatel'nosti, obnaruzhivayushchey robastno testiruemye neispravnosti zaderzhek putey v skhemakh s pamyat'yu [Construction of a Sequence Detecting Robustly Testable Path Delay Faults in Sequential Circuits]. *Avtomatika i Telemekhanika*. 11. pp. 148–168. doi: 10.31857/S0005231021110106
4. Chernyshov, S.V. & Andreeva, V.V. (2017) Postroenie kratchayshey ustanovochnoy posledovatel'nosti posledovatel'nostnoy skhemy s ispol'zovaniem ROBDD [Construction of the Shortest Homing Sequence for a Sequential Circuit Using ROBDD]. *Matematicheskoe i programnoe obespechenie informatsionnykh, tekhnicheskikh i ekonomicheskikh sistem* [Mathematical and Software Support for Information, Technical and Economic Systems]. Proc. of the 5th International Youth Conference. Tomsk: Tomsk State University. pp. 3–7.
5. Matrosova, A.Y., Andreeva, V.V., Chernyshov, S.V., Rozhkova, S.V. & Kudin, D.V. (2018) Finding False Paths in Sequential Circuits. *Russian Physics Journal*. 60(10). pp. 1837–1844.
6. Matrosova, A., Ostanin, S. & Chernyshov, S. (2018) Finding False Paths for Sequential Circuits Using Operations on ROBDDs. *2018 IEEE 24th International Symposium on On-Line Testing and Robust System Design (IOLTS 2018)*. Platja d'Aro, Spain, July 2–4, 2018. pp. 240–242.
7. Scholl, C. & Becker, B. (2002) Checking Equivalence for Circuits Containing Incompletely Specified Boxes. *International Conference on Computer Design (ICCD)*. IEEE. pp. 56–63.
8. Herbstritt, M., Becker, B. & Scholl, C. (2006) Advanced SAT-Techniques for Bounded Model Checking of Blackbox Designs. *International Workshop on Microprocessor Test and Verification (MTV)*. IEEE. pp. 37–44.
9. Tan, T. & Fung, L.-H. (2023) On the Complexity of k-DQBF. *26th International Conference on Theory and Applications of Satisfiability Testing (SAT 2023)*. Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs). 271. pp. 10:1–10:15.
10. Fung, L.H., Cheng, C., Fan, Y.W., Tan, T. & Jiang, J.H.R. (2024) 2-DQBF Solving and Certification via Property-Directed Reachability Analysis. *Formal Methods in Computer Aided Design (FMCAD)*. pp. 197–207.

Информация об авторах:

Матросова Анжела Юрьевна – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры компьютерной безопасности Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: mau11@yandex.ru

Савенкова Марина Максимовна – аспирант кафедры компьютерной безопасности Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: marina1412_11@mail.ru

Провкин Виктор Алексеевич – старший преподаватель кафедры компьютерной безопасности Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: prowkan@mail.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Matrosova Anzhela Y. (Doctor of Technical Sciences, Professor, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: mau11@yandex.ru

Savenkova Marina M. (Post-graduate Student, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: marina1412_11@mail.ru

Provkin Viktor A. (Senior Lecturer, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: prowkan@mail.ru

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 14.10.2025; принята к публикации 05.03.2026

Received 14.10.2025; accepted for publication 05.03.2026

Научный журнал

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

**УПРАВЛЕНИЕ,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И ИНФОРМАТИКА**

**TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE**

2026. № 74

Редактор Е.Г. Шумская
Оригинал-макет Е.Г. Шумской
Редакторы-переводчики: Г.М. Кошкин; В.Н. Горенинцева
Дизайн обложки Л.Д. Кривцовой

Подписано к печати 25.03.2026 г. Формат 60x84¹/₈.
Гарнитура Times. Усл. печ. л. 17,2.
Тираж 250 экз. Заказ № 6713. Цена свободная.

Дата выхода в свет 14.04.2026 г.

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании
Издательства Томского государственного университета
634050, г. Томск, Ленина, 36
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: rio.tsu@mail.ru