МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ НАДЁЖНОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ И УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

УДК 519.718.7 DOI 10.17223/20710410/71/4

КОРОТКИЕ ЕДИНИЧНЫЕ ПРОВЕРЯЮЩИЕ ТЕСТЫ РАЗМЫКАНИЯ ДЛЯ КОНТАКТНЫХ СХЕМ С ДВУМЯ И БОЛЕЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ПОЛЮСАМИ

К. А. Попков

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва, Россия

E-mail: kirill-formulist@mail.ru

Рассматривается задача синтеза многополюсных контактных схем, реализующих заданные булевы функции между полюсами A и B и допускающих короткие единичные проверяющие тесты относительно размыканий контактов. Для каждой булевой функции от n переменных и каждого тестового полюсного множества, содержащего хотя бы две отличных от $\{A, B\}$ и непересекающихся пары полюсов, найдено минимально возможное значение длины такого теста. В частности, доказано, что оно не превосходит 2.

Ключевые слова: *контактная схема, обрыв контакта, дополнительный полюс, единичный проверяющий тест, булева функция.*

SHORT SINGLE FAULT DETECTION TESTS OF CONTACT BREAK FOR CONTACT CIRCUITS WITH TWO OR MORE ADDITIONAL POLES

K. A. Popkov

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia

We consider the problem of synthesizing multi-pole contact circuits that implement given Boolean functions between poles A and B and allow short single fault detection tests related to contact breaks. For each Boolean function on n variables and each test pole set containing at least two disjoint pairs of poles other than $\{A, B\}$, the minimal possible length value of such a test is found. In particular, it is proved that this value does not exceed 2.

Keywords: *contact circuit, contact break, additional pole, single fault detection test, Boolean function.*

Введение

Рассматривается задача синтеза легкотестируемых контактных схем [1], реализующих заданные булевы функции. Логический подход к тестированию контактных схем предложен И. А. Чегис и С. В. Яблонским в [2]. Представим, что имеется двухполюсная контактная схема S, реализующая булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, где $\tilde{x}^n = (x_1, \dots, x_n)$.

Под воздействием некоторого источника неисправностей один или несколько контактов схемы S могут перейти в неисправное состояние. В качестве неисправностей контактов обычно рассматриваются их обрывы (размыкания) и/или замыкания. При обрыве контакта проводимость между его концами становится тождественно нулевой, а при замыкании — тождественно единичной. В результате схема S вместо исходной функции $f(\tilde{x}^n)$ станет реализовывать некоторую булеву функцию $g(\tilde{x}^n)$, вообще говоря, отличную от f. Все такие функции $g(\tilde{x}^n)$, получающиеся при всевозможных допустимых для рассматриваемой задачи неисправностях контактов схемы S, называются *функциями неисправности* данной схемы.

Введём следующие определения [3, 4]. *Проверяющим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что для любой нетривиальной, т. е. отличной от $f(\tilde{x}^n)$, функции неисправности $g(\tilde{x}^n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $f(\tilde{\sigma}) \neq g(\tilde{\sigma})$. *Диагностическим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений булевых переменных $x_1, \ldots, x_n$, что T является проверяющим тестом и, кроме того, для любых двух различных функций неисправности $g_1(\tilde{x}^n)$ и $g_2(\tilde{x}^n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\pi}$, на котором $g_1(\tilde{\pi}) \neq g_2(\tilde{\pi})$. Число наборов в T называется *длиной* теста. В качестве тривиального диагностического (и проверяющего) теста длины 2^n для схемы S всегда можно взять множество, состоящее из всех двоичных наборов длины n. Тест называется *полным*, если в схеме могут быть неисправны сколько угодно контактов, и *единичным*, если в схеме может быть неисправен только один контакт. Единичные тесты обычно рассматривают для *неизбыточных схем* [4, с. 110–111], в которых любая допустимая неисправность любого одного контакта приводит к нетривиальной функции неисправности. Если в схеме допускаются только обрывы контактов (или только их замыкания), то говорят о *тестах размыкания* (соответственно о *тестах замыкания*).

Пусть зафиксирован вид неисправностей контактов и T — единичный проверяющий тест (ЕПТ) для некоторой двухполюсной контактной схемы S. Введём следующие обозначения: $D_{\text{ЕП}}(T)$ — длина теста T; $D_{\text{ЕП}}(S) = \min D_{\text{ЕП}}(T)$, где минимум берётся по всем ЕПТ T для схемы S; $D_{\text{ЕП}}(f) = \min D_{\text{ЕП}}(S)$, где минимум берётся по всем неизбыточным двухполюсным контактным схемам S, реализующим функцию f; $D_{\text{ЕП}}(n) = \max D_{\text{ЕП}}(f)$, где максимум берётся по всем булевым функциям f от n переменных. Функция $D_{\text{ЕП}}(n)$ называется *функцией Шеннона* длины ЕПТ. По аналогии с функциями $D_{\text{ЕП}}$ можно ввести функции $D_{\text{ПП}}$, $D_{\text{ЕД}}$ и $D_{\text{ПД}}$ для соответственно полного проверяющего (ПП), единичного диагностического (ЕД) и полного диагностического (ПД) тестов, зависящие от T, от S, от f и от n (в определениях функций $D_{\text{ПП}}(f)$ и $D_{\text{ПД}}(f)$ не предполагается неизбыточности схем). Так, например, $D_{\text{ПД}}(n)$ — функция Шеннона длины полного диагностического теста.

Будем говорить, что некоторое свойство выполняется *для почти всех булевых функций от n переменных*, если отношение числа булевых функций от n переменных, для которых это свойство не выполняется, к числу всех булевых функций от n переменных (т. е. к 2^{2^n}) стремится к нулю при $n \to \infty$.

Далее в качестве неисправностей контактов будем рассматривать только их обрывы. Перечислим основные результаты, касающиеся тестов размыкания для двухполюсных контактных схем. Н. П. Редькиным в [5] получена оценка $D_{\text{ПП}}(n) \leqslant 2^{\lfloor n/2 \rfloor} + 2^{\lceil n/2 \rceil}$. В [6] найдено точное значение величины $D_{\text{ЕП}}(f)$ для любой булевой функции f от n переменных и установлено, что $D_{\text{ЕП}}(n) = n$, а для почти всех булевых функций f от n переменных $D_{\text{ЕП}}(f) = 2$. В силу [6, утверждение 1] вышеупомянутые результаты для величин $D_{\text{ЕП}}(f)$ и $D_{\text{ЕП}}(n)$ остаются справедливыми для $D_{\text{ПП}}(f)$ и $D_{\text{ПП}}(n)$

соответственно; в частности, равенство $D_{\text{ЕП}}(n) = n$ из [6] уточняет неравенство $D_{\text{ПП}}(n) \leqslant 2^{\lfloor n/2 \rfloor} + 2^{\lceil n/2 \rceil}$ из [5]. По аналогии с [4, с. 113, теорема 9] можно показать, что $D_{\text{ЕД}}(n) \lesssim 2^n/n$; в [7] при $n \geqslant 2$ получена существенно более точная оценка $D_{\text{ЕД}}(n) \leqslant 2n-2$, а также доказано, что $D_{\text{ЕД}}(f) \leqslant 4$ для почти всех булевых функций f от n переменных. Х. А. Мадатян в [8, теорема 1] фактически установил, что $D_{\text{ПД}}(n) \geqslant 2^{n-1}$ при $n \geqslant 1$; Н. П. Редькин в [9] доказал соотношение $D_{\text{ПД}}(n) \leqslant 2^n - 2$ при $n \geqslant 2$. В [10] для любого $n \geqslant 1$ установлено равенство $D_{\text{ПД}}(n) = 2^{n-1}$ и доказано, что число булевых функций f от n переменных, для которых $D_{\text{ПД}}(f) = 2^{n-1}$, асимптотически не меньше $4n^{-2} \cdot 2^{2^n(\log_2(n^2-n+2)-1)/(n^2-n+2)}$.

В настоящей работе будем исследовать возможности реализации булевых функций контактными схемами, содержащими дополнительные полюсы и допускающими короткие проверяющие тесты размыкания, т. е. многополюсными контактными схемами, в которых между какими-то двумя полюсами A и B реализуется заданная булева функция и при этом для тестирования схем относительно обрывов контактов используются заранее выбранные пары полюсов. Опишем формальную постановку задачи. Рассмотрим произвольное $d \in \mathbb{N}$ и всевозможные $(d+2)$-полюсные контактные схемы с полюсами $A, B, V_1, \ldots, V_d$; при этом из рассмотрения не исключаем и такие схемы, в которых некоторые из полюсов $A, B, V_1, \ldots, V_d$ совпадают. Пусть зафиксировано некоторое непустое множество $\mathcal{P}$ неупорядоченных пар полюсов из множества $\{A, B, V_1, \ldots, V_d\}$, обладающее тем свойством, что никакая пара из $\mathcal{P}$ не может состоять из двух полюсов с одним и тем же обозначением (например, $\{A, A\}$). Назовём $\mathcal{P}$ *тестовым полюсным множеством* и занумеруем произвольным образом его элементы различными натуральными числами от 1 до p, где $p = |\mathcal{P}|$; очевидно, что $1 \leqslant p \leqslant (d+2)(d+1)/2$. Пусть некоторая $(d+2)$-полюсная контактная схема S с полюсами $A, B, V_1, \ldots, V_d$ для каждого $i \in \{1, \ldots, p\}$ реализует между i-й парой своих полюсов булеву функцию $f_i(\tilde{x}^n)$. При наличии в схеме S оборванных контактов она для каждого $i \in \{1, \ldots, p\}$ будет реализовывать между i-й парой своих полюсов некоторую булеву функцию $g_i(\tilde{x}^n)$, вообще говоря, отличную от $f_i(\tilde{x}^n)$. Все такие наборы $(g_1(\tilde{x}^n), \ldots, g_p(\tilde{x}^n))$ назовём *наборами функций неисправности* схемы S. *Проверяющим тестом* для схемы S назовём такое множество T наборов значений булевых переменных $x_1, \ldots, x_n$, что для любого нетривиального, т. е. отличного от $(f_1(\tilde{x}^n), \ldots, f_p(\tilde{x}^n))$ набора функций неисправности $(g_1(\tilde{x}^n), \ldots, g_p(\tilde{x}^n))$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором

$$(f_1(\tilde{\sigma}), \ldots, f_p(\tilde{\sigma})) \neq (g_1(\tilde{\sigma}), \ldots, g_p(\tilde{\sigma})).$$

Диагностическим тестом для схемы S назовём такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что T является проверяющим тестом и, кроме того, для любых двух различных наборов функций неисправности $(g_{11}(\tilde{x}^n), \ldots, g_{1p}(\tilde{x}^n))$ и $(g_{21}(\tilde{x}^n), \ldots, g_{2p}(\tilde{x}^n))$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\pi}$, на котором

$$(g_{11}(\tilde{\pi}), \ldots, g_{1p}(\tilde{\pi})) \neq (g_{21}(\tilde{\pi}), \ldots, g_{2p}(\tilde{\pi})).$$

Определения полного и единичного тестов и длины теста остаются неизменными. Будем рассматривать единичные тесты только для *неизбыточных схем*, в которых обрыв любого одного контакта приводит к нетривиальному набору функций неисправности.

Легко видеть, что определения проверяющего и диагностического тестов не зависят от того, в каком порядке элементы множества $\mathcal{P}$ занумерованы числами от 1 до p.

Пусть T — ЕПТ размыкания для некоторой $(d+2)$-полюсной контактной схемы S с полюсами $A, B, V_1, \ldots, V_d$ и заданным тестовым полюсным множеством $\mathcal{P}$. Введём следующие обозначения: $D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(T)$ — длина теста T; $D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(S) = \min D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(T)$, где минимум берётся по всем ЕПТ T для схемы S; $D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(f) = \min D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(S)$, где минимум берётся по всем неизбыточным $(d+2)$-полюсным контактным схемам S с полюсами $A, B, V_1, \ldots, V_d$, реализующим между полюсами A и B функцию f; $D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(n) = \max D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(f)$, где максимум берётся по всем булевым функциям f от n переменных. Функцию $D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(n)$ назовём *функцией Шеннона* длины ЕПТ. По аналогии с функциями $D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}$ можно ввести функции $D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ПП}}$, $D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ЕД}}$ и $D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ПД}}$ для соответственно полного проверяющего, единичного диагностического и полного диагностического тестов, зависящие от T, от S, от f и от n (в определениях функций $D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ПП}}(f)$ и $D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ПД}}(f)$ не предполагается неизбыточности схем).

Утверждение 1. Для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, любого $d \in \mathbb{N}$ и любого тестового полюсного множества $\mathcal{P}$ значение $D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(f)$ определено.

Доказательство. Как известно (см., например, [6, теорема 1]), значение $D_{\text{ЕП}}(f)$ определено, поэтому существует неизбыточная двухполюсная контактная схема S' с полюсами A и B, реализующая функцию $f(\tilde{x}^n)$. Преобразуем схему S' в $(d+2)$-полюсную контактную схему S с полюсами $A, B, V_1, \ldots, V_d$ путём добавления полюсов $V_1, \ldots, V_d$. Пусть $\{P_1, P_2\}$ — произвольная пара полюсов из множества $\mathcal{P}$. Каждый полюс схемы S, принадлежащий множеству $\{V_1, \ldots, V_d\} \setminus \{P_1, P_2\}$, отождествим с полюсом A. В случае $P_1 = B$ будем считать, что полюс P_2 схемы S совпадает с полюсом A, в случае $P_2 = A$ — что полюс P_1 схемы S совпадает с полюсом B, а в случае $P_1 \neq B$ и $P_2 \neq A$ — что полюсы P_1 и P_2 схемы S совпадают с полюсами A и B соответственно. Тогда пара $\{P_1, P_2\}$ совпадает с парой $\{A, B\}$, а схема S, очевидно, реализует между полюсами A и B функцию $f(\tilde{x}^n)$. Пусть K — произвольный контакт схемы S. Тогда он содержится и в схеме S', и при его обрыве схема S' в силу неизбыточности станет реализовывать некоторую функцию неисправности $g(\tilde{x}^n)$, отличную от $f(\tilde{x}^n)$. Из соотношений $\{A, B\} \in \mathcal{P}$, $f(\tilde{x}^n) \neq g(\tilde{x}^n)$, определения неизбыточной $(d+2)$-полюсной контактной схемы и произвольности контакта K легко получить, что при выборе $\mathcal{P}$ в качестве тестового полюсного множества схема S неизбыточна, откуда следует, что значение $D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(f)$ определено. ■

В работе [11] найдено точное значение величины $D^{1,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(f)$ для каждой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ и каждого тестового полюсного множества $\mathcal{P}$, а также установлено равенство $D^{1,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(n) = \min(3, n)$ при $\mathcal{P} \neq \{\{A, B\}\}$. В настоящей работе для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, любого целого $d \geqslant 2$ и любого тестового полюсного множества $\mathcal{P}$, содержащего хотя бы две отличных от $\{A, B\}$ и непересекающихся пары полюсов, устанавливается точное значение величины $D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(f)$ (теорема 1); в частности, доказывается, что оно равно 0, 1 или 2 в зависимости от функции f. В качестве следствия из теоремы 1 при тех же условиях на d и $\mathcal{P}$ для произвольного целого $n \geqslant 0$ получено равенство $D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(n) = \min(2, n)$ (следствие 1). Сравнивая последний результат с равенством $D_{\text{ЕП}}(n) = n$ из [6], получаем, что добавление в контактные схемы по крайней мере двух дополнительных полюсов позволяет в ряде случаев уменьшить функцию Шеннона длины ЕПТ размыкания с n до 2.

Формулировка и доказательство основного результата

Двоичный n-разрядный набор $\tilde{\sigma}$ будем называть *единичным* (*нулевым*) набором булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, если $f(\tilde{\sigma}) = 1$ (соответственно $f(\tilde{\sigma}) = 0$). Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через K_n множество всех элементарных конъюнкций вида $x_{i_1}^{\sigma_1} \& \ldots \& x_{i_s}^{\sigma_s}$, где $s \in \{1, \ldots, n\}$; $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_s \leqslant n$; $\sigma_1, \ldots, \sigma_s \in \{0, 1\}$.

Всюду далее запись вида «контакт x^σ» означает замыкающий (размыкающий) контакт, отвечающий переменной x, в случае $\sigma = 1$ (соответственно $\sigma = 0$). Под цепью (в контактной схеме) будем понимать несамопересекающуюся цепь. *Длиной цепи* будем называть число содержащихся в этой цепи контактов.

Сформулируем основной результат данной работы.

Теорема 1. Для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, любого целого $d \geqslant 2$ и любого тестового полюсного множества $\mathcal{P}$, содержащего хотя бы две отличных от $\{A, B\}$ и непересекающихся пары полюсов, справедливо следующее равенство:

$$D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \equiv 0 \text{ или } f \equiv 1, \\ 1, & \text{если } n \geqslant 1 \text{ и } f \in \mathsf{K}_n, \\ 2 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Следствие 1. Для любых целых $n \geqslant 0$, $d \geqslant 2$ и любого тестового полюсного множества $\mathcal{P}$, содержащего хотя бы две отличных от $\{A, B\}$ и непересекающихся пары полюсов, справедливо равенство $D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(n) = \min(2, n)$.

Сначала покажем, как следствие 1 выводится из теоремы 1. Имеем

$$D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(n) = \max_{f \in \{0,1\}} D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(f) = \max(0, 0) = 0 = \min(2, n) \text{ при } n = 0,$$

$$D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(n) = \max_{f \in \{0,1,x_1,\overline{x}_1\}} D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(f) = \max(0, 0, 1, 1) = 1 = \min(2, n) \text{ при } n = 1,$$

поскольку $x_1, \overline{x}_1 \in \mathsf{K}_n$;

$$D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(n) = \max_{f(\tilde{x}^n)} D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(f) \leqslant 2 = \min(2, n) \text{ при } n \geqslant 2,$$

$$D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(n) = \max_{f(\tilde{x}^n)} D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(f) \geqslant D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(x_1 \vee \ldots \vee x_n) = 2 = \min(2, n) \text{ при } n \geqslant 2,$$

поскольку $x_1 \vee \ldots \vee x_n \notin \mathsf{K}_n$ при $n \geqslant 2$. Таким образом, $D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(n) = \min(2, n)$.

Доказательство теоремы 1. В случае $f \equiv 0$ или $f \equiv 1$ функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно реализовать между полюсами A и B контактной схемы с полюсами $A, B, V_1, \ldots, V_d$, не содержащей ни одного контакта. У такой схемы нет ни одного набора функций неисправности, поэтому она неизбыточна и допускает ЕПТ $\varnothing$ длины 0, откуда следует равенство $D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(f) = 0$.

Далее будем считать, что $f \not\equiv 0$ и $f \not\equiv 1$; в частности, $n \geqslant 1$. В любой неизбыточной контактной схеме S_f с полюсами $A, B, V_1, \ldots, V_d$, реализующей между полюсами A и B функцию $f(\tilde{x}^n)$, обязан содержаться хотя бы один контакт. При его обрыве схема в силу неизбыточности станет реализовывать между парами полюсов из множества $\mathcal{P}$ нетривиальный набор функций неисправности, который должен быть отличим от исходного набора функций, реализуемых схемой S_f между этими парами полюсов, хотя бы на одном наборе из произвольного ЕПТ T для данной схемы, откуда следуют неравенства $D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(T) \geqslant 1$, $D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(S_f) \geqslant 1$ и $D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(f) \geqslant 1$.

Пусть $f \in \mathsf{K}_n$. Тогда $f(\tilde{x}^n) = x_{i_1}^{\sigma_1} \& \ldots \& x_{i_s}^{\sigma_s}$, где $s \in \{1, \ldots, n\}$; $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_s \leqslant n$; $\sigma_1, \ldots, \sigma_s \in \{0, 1\}$. Реализуем функцию $f(\tilde{x}^n)$ между полюсами A и B контактной схемой S с полюсами $A, B, V_1, \ldots, V_d$, представляющей собой цепь из s контактов $x_{i_1}^{\sigma_1}, \ldots, x_{i_s}^{\sigma_s}$, концами которой являются вершины A и B. Пусть $\{P_1, P_2\}$ — произвольная пара полюсов из множества $\mathcal{P}$. С использованием метода, изложенного в доказательстве утверждения 1, можно добиться того, чтобы пара $\{P_1, P_2\}$ совпала с парой $\{A, B\}$.

Тогда в случае возникновения в схеме S обрыва какого-то контакта проводимость между полюсами P_1 и P_2 схемы на любом единичном наборе $\tilde{\sigma}$ функции $f(\tilde{x}^n)$ изменится с 1 на 0 и неисправность будет обнаружена. Тем самым показано, что схема S неизбыточна и допускает ЕПТ $\{\tilde{\sigma}\}$ длины 1, откуда следует неравенство $D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(f) \leqslant 1$. Равенство $D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(f) = 1$ доказано.

Далее рассмотрим случай $f \notin \mathsf{K}_n$. Тогда, в частности, $n \geqslant 2$, поскольку $x_1, \overline{x}_1 \in \mathsf{K}_n$. Сначала установим справедливость неравенства $D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(f) \geqslant 2$. Воспользуемся идеями, изложенными в доказательстве теоремы 2 работы [11] при получении оценки $D^{\mathcal{P}_2}_{\text{ЕП}}(f) \geqslant 2$ [11, с. 132–133]. Предположим, что $D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(f) \leqslant 1$. Тогда $D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(f) = 1$. Это означает, что при выборе в качестве тестового полюсного множества $\mathcal{P}$ существует неизбыточная контактная схема S с полюсами $A, B, V_1, \ldots, V_d$, реализующая между полюсами A и B функцию $f(\tilde{x}^n)$ и допускающая ЕПТ, который состоит из какого-то одного набора $\tilde{\sigma}$. Полюсы A и B различны, так как $f \not\equiv 1$. Если при отсутствии неисправностей в схеме S хотя бы один содержащийся в ней контакт K_0 не проводит на наборе $\tilde{\sigma}$, то обрыв контакта K_0 никак не отразится на значениях, возникающих между полюсами схемы на указанном наборе; следовательно, данный обрыв нельзя обнаружить на наборе $\tilde{\sigma}$. Однако это противоречит тому, что $\{\tilde{\sigma}\}$ — ЕПТ для неизбыточной схемы S. Таким образом, при отсутствии неисправностей в схеме каждый её контакт обязан проводить на наборе $\tilde{\sigma}$.

Если между полюсами A и B схемы S нет ни одной цепи (есть ровно одна цепь), то $f \equiv 0$ (соответственно $f \in \mathsf{K}_n \cup \{0\}$), что невозможно. Значит, между полюсами A и B схемы S есть по крайней мере две различных цепи C и C'. Очевидно, что в цепи C' содержится хотя бы один контакт K, не содержащийся в цепи C. Обозначим тот конец контакта K, который расположен при движении по цепи C' от вершины A к вершине B ближе к вершине A (вершине B), через a (соответственно b). Подцепь произвольной цепи $\hat{C}$ в схеме S, ограниченную какими-то вершинами v и v', для краткости будем обозначать через $\hat{C}_{v,v'}$.

В рамках этого абзаца считаем, что вместо набора $(x_1, \ldots, x_n)$ переменных схемы S подан набор $\tilde{\sigma}$. При обрыве контакта K в схеме S есть проводимость между вершинами a и A (по цепи $C'_{a,A}$), A и B (по цепи C), а также B и b (по цепи $C'_{B,b}$); следовательно, при указанном обрыве в ней есть проводимость и между вершинами a и b. Обрыв контакта K должен обнаруживаться между какой-то парой полюсов $\{P_1, P_2\} \in \mathcal{P}$, поскольку $\{\tilde{\sigma}\}$ — ЕПТ для неизбыточной схемы S. При рассматриваемой неисправности проводимость между полюсами P_1 и P_2 схемы не может увеличиться, поэтому она обязана измениться с 1 на 0. Отсюда, в частности, следует, что в схеме S при отсутствии в ней неисправностей существует проводящая цепь C'' между вершинами P_1 и P_2. Если контакт K не содержится в цепи C'', то при его обрыве проводимость между полюсами P_1 и P_2 схемы остаётся равной 1, что невозможно. Значит, данная цепь проходит через контакт K и, как следствие, через его концы a и b. Найдётся такое $i \in \{1, 2\}$, что вершина a расположена в цепи C'' между вершинами P_i и b (возможно, при этом вершины a и P_i совпадают). Тогда при обрыве контакта K в схеме S есть проводимость между вершинами P_i и a (по цепи $C''_{P_i,a}$), a и b (см. выше), а также b и P_{3-i} (по цепи $C''_{b,P_{3-i}}$). Следовательно, при указанном обрыве проводимость между полюсами P_1 и P_2 схемы остаётся равной 1; противоречие. Тем самым установлено, что исходное предположение было неверно и $D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(f) \geqslant 2$.

Наконец, докажем неравенство $D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(f) \leqslant 2$. Для этого построим неизбыточную контактную схему S с полюсами $A, B, V_1, \ldots, V_d$, реализующую между полюсами A и B функцию $f(\tilde{x}^n)$ и допускающую ЕПТ из двух наборов при выборе $\mathcal{P}$ в качестве тестового полюсного множества. По условию теоремы 1 в множестве $\mathcal{P}$ содержатся две отличных от $\{A, B\}$ и непересекающихся пары полюсов; обозначим эти пары через U_1 и U_2. При построении схемы S переименуем и/или отождествим некоторые её полюсы в зависимости от того, какой из следующих случаев имеет место:

Случай 1: полюс A принадлежит паре U_i для некоторого $i \in \{1, 2\}$. Второй полюс из этой пары обозначим через A'. Отметим, что $B \notin U_i$, так как $U_i \neq \{A, B\}$, и $A \notin U_{3-i}$, поскольку пары U_1 и U_2 не пересекаются. Рассмотрим два подслучая:

Подслучай 1.1: полюс B принадлежит паре U_{3-i}. Второй полюс из этой пары обозначим через B'.

Подслучай 1.2: полюс B не принадлежит паре U_{3-i}. Отождествим произвольный полюс из этой пары с полюсом B, а второй полюс из неё обозначим через B'.

Случай 2: полюс A не принадлежит ни одной из пар U_1, U_2. Рассмотрим два подслучая:

Подслучай 2.1: полюс B принадлежит паре U_i для некоторого $i \in \{1, 2\}$. Второй полюс из этой пары обозначим через B'. Отметим, что $A \notin U_i$ и $A \notin U_{3-i}$ по предположению случая 2; кроме того, $B \notin U_{3-i}$, поскольку пары U_1 и U_2 не пересекаются. Отождествим произвольный полюс из пары U_{3-i} с полюсом A, а второй полюс из этой пары обозначим через A'.

Подслучай 2.2: полюс B не принадлежит ни одной из пар U_1, U_2. Отождествим произвольный полюс из пары U_1 с полюсом A, а второй полюс из этой пары обозначим через A'. Также отождествим произвольный полюс из пары U_2 с полюсом B, а второй полюс из неё обозначим через B'.

В результате указанных переименований и/или отождествлений получаем, что одна из пар U_1, U_2 теперь является парой $\{A, A'\}$, а другая — парой $\{B, B'\}$, где полюсы A, A', B, B' попарно различны и $A', B' \in \{V_1, \ldots, V_d\}$.

Пусть $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ — произвольные булевы константы. Положим $\tilde{\sigma}^{(1)} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ и $\tilde{\sigma}^{(2)} = (\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \ldots, \overline{\sigma}_n)$.

Дальнейшее построение схемы S будем проводить по аналогии с тем, как это делается в доказательстве [11, теорема 2, с. 125–130]. Возьмём контактное дерево $\hat{D}$, реализующее систему всех 2^n элементарных конъюнкций вида $x_1^{\beta_1} \& \ldots \& x_n^{\beta_n}$, где $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \in \{0, 1\}$, и содержащее $2 \cdot 2^n - 2$ контактов [1, с. 39], в котором корню a_0 инцидентны контакты x_1 и $\overline{x}_1$, далее идут контакты переменной x_2 и т. д. Для каждого нулевого набора $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ функции $f(\tilde{x}^n)$ удалим из дерева $\hat{D}$ концевую вершину вместе с инцидентным ей ребром, в которой реализуется элементарная конъюнкция $x_1^{\tau_1} \& \ldots \& x_n^{\tau_n}$. Если после всех этих операций в дереве возникли новые концевые вершины, удалим и их вместе с инцидентными им рёбрами, и т. д. Легко проверить, что полученное дерево D обладает следующими свойствами:

(i) любая вершина дерева инцидентна не более чем трём контактам, и если трём, то два из них противоположны (а именно: x_t и $\overline{x}_t$ для некоторого $t \in \{2, \ldots, n\}$);

(ii) корень дерева инцидентен не более чем двум контактам, и если двум, то это противоположные контакты (а именно: x_1 и $\overline{x}_1$).

(iii) в каждой концевой вершине дерева реализуется элементарная конъюнкция вида $x_1^{\beta_1} \& \ldots \& x_n^{\beta_n}$, причём единственный двоичный n-разрядный набор, на котором эта конъюнкция обращается в единицу, является единичным для функции $f(\tilde{x}^n)$;

(iv) для каждого единичного набора $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ функции $f(\tilde{x}^n)$ в дереве найдётся такая концевая вершина, что единственная цепь, связывающая корень дерева с этой вершиной, содержит n контактов: $x_1^{\beta_1}, \ldots, x_n^{\beta_n}$;

(v) в дереве нет ни одной цепи, соединяющей какие-либо две различные концевые вершины и проводящей хотя бы на одном двоичном n-разрядном наборе.

Например, для функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, принимающей значение 1 только на наборах $(0,1,0,0), (0,1,1,1), (1,0,0,1), (1,1,1,0), (1,1,1,1)$, дерево D имеет вид, показанный на рис. 1.

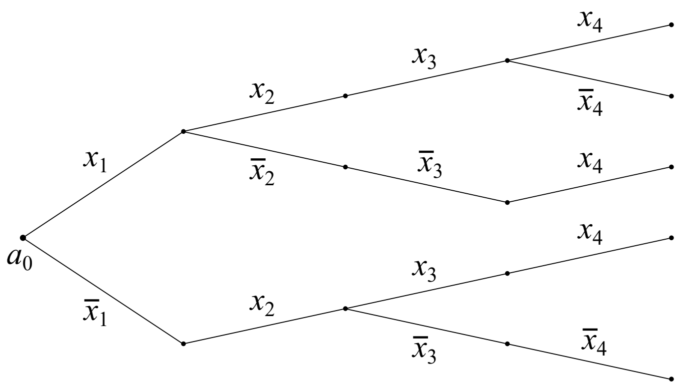

Рис. 1. Дерево D

Для $i = 1, 2$ обозначим через $D_{\tilde{\sigma}^{(i)}}$ граф, состоящий из всех вершин и всех проводящих на наборе $\tilde{\sigma}^{(i)}$ контактов дерева D.

Лемма 1. Для любого $i \in \{1, 2\}$ каждая компонента связности графа $D_{\tilde{\sigma}^{(i)}}$ представляет собой цепь (возможно, нулевой длины), в которой ни одна внутренняя вершина не совпадает с вершиной a_0 и хотя бы одна концевая вершина отлична от всех концевых вершин дерева D.

Доказательство почти дословно повторяет доказательство [11, лемма 1]. Дерево D, а вместе с ним и граф $D_{\tilde{\sigma}^{(i)}}$ не содержат циклов. Из свойств (i), (ii) и того, что противоположные контакты не могут оба проводить на наборе $\tilde{\sigma}^{(i)}$, следует, что в графе $D_{\tilde{\sigma}^{(i)}}$ любая вершина инцидентна не более чем двум контактам, а вершина a_0 — не более чем одному контакту. Отсюда и из свойства (v), применяемого для набора $\tilde{\sigma}^{(i)}$, вытекает утверждение леммы 1. ■

Возьмём две копии дерева D и соединим каждую концевую вершину одной из них с той же концевой вершиной другой. Корни этих копий будем считать полюсами A и B полученной «симметричной» двухполюсной контактной схемы, которую обозначим через S'. Из свойств (iii), (iv) нетрудно получить, что схема S' реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$ (каждая цепь между полюсами схемы S', проводящая хотя бы на одном наборе, представляет собой «удвоенную» цепь из дерева D, соединяющую его корень с какой-то концевой вершиной), а из леммы 1 — что для любого $i \in \{1, 2\}$ в подсхеме $S'_{\tilde{\sigma}^{(i)}}$, состоящей из всех вершин и всех проводящих на наборе $\tilde{\sigma}^{(i)}$ контактов схемы S', каждая компонента связности представляет собой цепь, в которой ни одна внутренняя вершина не совпадает ни с одним из полюсов схемы S'.

Схема S' и её подсхемы $S'_{\tilde{\sigma}^{(1)}}, S'_{\tilde{\sigma}^{(2)}}$ для функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, заданной выше, и наборов $\tilde{\sigma}^{(1)} = (1,1,1,1)$, $\tilde{\sigma}^{(2)} = (0,0,0,0)$ приведены на рис. 2.

Преобразуем схему S' в $(d+2)$-полюсную контактную схему S с полюсами A, B, $V_1, \ldots, V_d$. Рассмотрим произвольное $i \in \{1, 2\}$. Пусть в подсхеме $S'_{\tilde{\sigma}^{(i)}}$ имеется ровно k_i таких компонент связности, каждая из которых, за исключением, быть может, компоненты связности, содержащей полюс A схемы S', содержит хотя бы один контакт

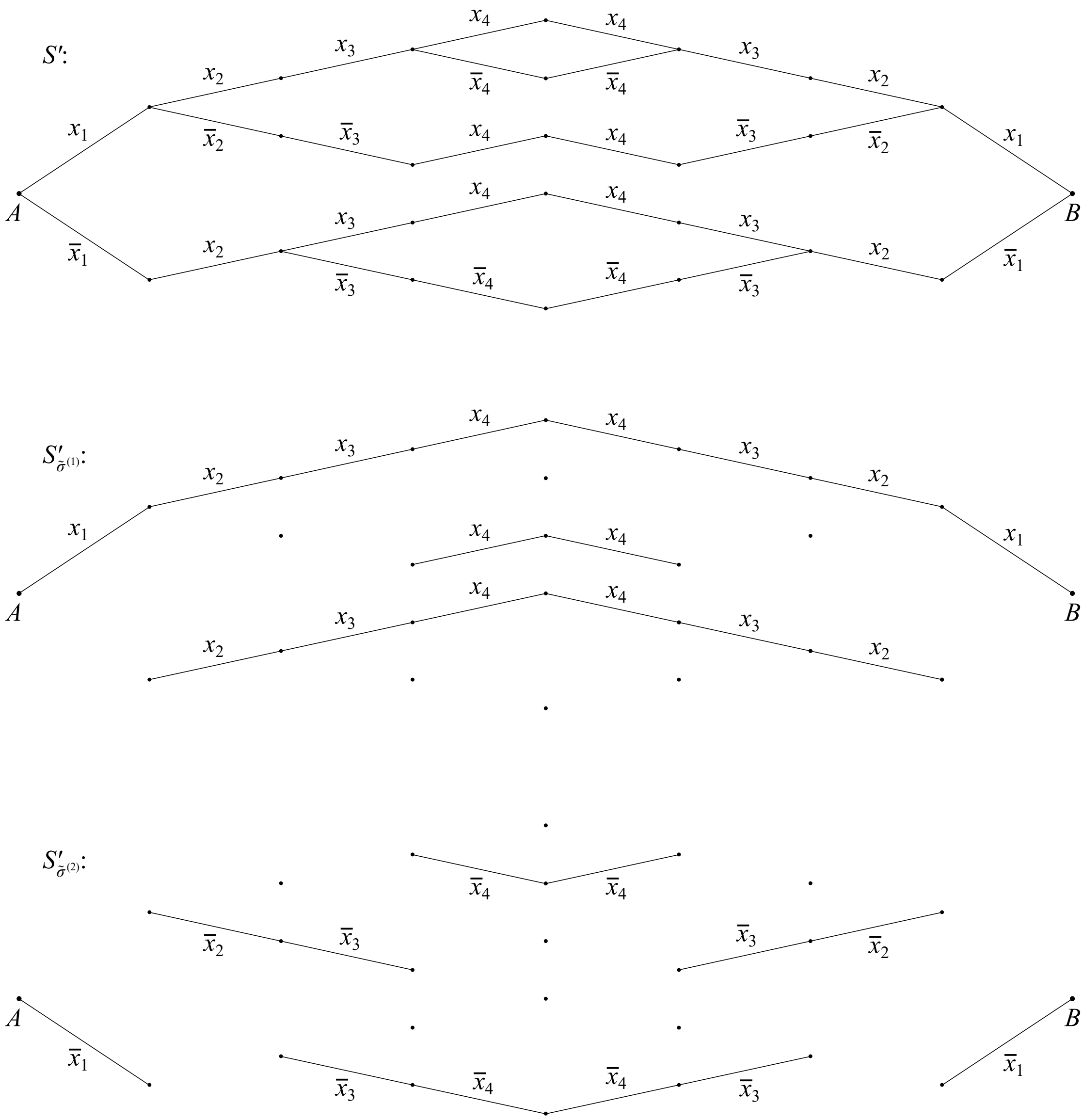

Рис. 2. Схема S' и подсхемы $S'_{\tilde\sigma^{(1)}}, S'_{\tilde\sigma^{(2)}}$

и не содержит вершины B. Обозначим эти k_i компонент связности через $C_1^i, \ldots, C_{k_i}^i$, где C_1^i — та из них, в которую входит вершина A. Тогда C_1^i — цепь, и A обязана быть одной из концевых вершин данной цепи. Вторую её концевую вершину обозначим через b_1^i (вершина b_1^i может совпадать с одним из полюсов A, B схемы S'). В случае $k_i \geqslant 2$ обозначим концевые вершины цепей $C_2^i, \ldots, C_{k_i}^i$ через a_2^i и b_2^i, …, $a_{k_i}^i$ и $b_{k_i}^i$ соответственно. Компоненту связности подсхемы $S'_{\tilde\sigma^{(i)}}$, содержащую полюс B схемы S', обозначим через C_B^i. Тогда C_B^i — цепь, и B обязана быть одной из концевых вершин данной цепи; вторую её концевую вершину обозначим через w_i (вершина w_i может совпадать с одним из полюсов A, B схемы S').

Пусть $C_{\tilde\sigma^{(1)}}$ — цепь длины n, состоящая из контактов $x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_n^{\sigma_n}$, а $C_{\tilde\sigma^{(2)}}$ — цепь длины n, состоящая из контактов $x_1^{\overline{\sigma}_1}, \ldots, x_n^{\overline{\sigma}_n}$. Очевидно, что для любого $i \in \{1, 2\}$ цепь $C_{\tilde\sigma^{(i)}}$ проводит на наборе $\tilde\sigma^{(i)}$ и не проводит ни на каком другом двоичном n-разрядном наборе. Добавим в схему S' новую вершину A', для которой введём альтернативные обозначения $a_{k_1+1}^1$ и $a_{k_2+1}^2$, а также новую вершину B'. Для $i = 1, 2$ и $j = 1, \ldots, k_i$ возьмём экземпляр цепи $C_{\tilde\sigma^{(i)}}$ и подсоединим один его конец к вершине b_j^i, а другой — к вершине a^i_{j+1} полученной схемы. Цепи

$$A - C^1_1 - b^1_1 - C_{\tilde\sigma^{(1)}} - a^1_2 - \ldots - a^1_{k_1} - C^1_{k_1} - b^1_{k_1} - C_{\tilde\sigma^{(1)}} - a^1_{k_1+1},$$
$$A - C^2_1 - b^2_1 - C_{\tilde\sigma^{(2)}} - a^2_2 - \ldots - a^2_{k_2} - C^2_{k_2} - b^2_{k_2} - C_{\tilde\sigma^{(2)}} - a^2_{k_2+1},$$

которые при этом получаются, обозначим для краткости через $C^1_{A,A'}$ и $C^2_{A,A'}$ соответственно; концами каждой из них являются вершины A и A'. Для каждого такого $i \in \{1,2\}$, что вершина w_i отлична от вершин A, B (назовём выполнение этого условия *случаем* $<i>$), возьмём ещё один экземпляр цепи $C_{\tilde\sigma^{(i)}}$ и подсоединим один его конец к вершине w_i, а другой — к вершине B' полученной схемы. Считаем, что все внутренние вершины всех экземпляров цепей $C_{\tilde\sigma^{(1)}}$ и $C_{\tilde\sigma^{(2)}}$, добавленных в схему S', отличны друг от друга, от вершин схемы S' и от каждой из вершин A', B'.

Напомним, что $A', B' \in \{V_1, \ldots, V_d\}$. Будем считать, что каждая вершина из множества $\{V_1, \ldots, V_d\} \setminus \{A', B'\}$ совпадает с вершиной A. Итоговую контактную схему с полюсами $A, B, V_1, \ldots, V_d$ обозначим через S.

Докажем, что между полюсами A и B схемы S при отсутствии в ней неисправностей реализуется функция $f(\tilde x^n)$. На любом двоичном наборе $\tilde\pi$ длины n, отличном от наборов $\tilde\sigma^{(1)}$ и $\tilde\sigma^{(2)}$, ни одна из цепей $C_{\tilde\sigma^{(1)}}$, $C_{\tilde\sigma^{(2)}}$, подсоединённых к схеме S' для получения схемы S, не проводит, поэтому схема S функционирует на наборе $\tilde\pi$ между полюсами A и B в точности, как схема S' на этом же наборе и выдаёт на нём значение $f(\tilde\pi)$. Рассмотрим произвольное $i \in \{1,2\}$. Если $f(\tilde\sigma^{(i)}) = 1$, то на наборе $\tilde\sigma^{(i)}$ схема S' выдаёт значение 1, а значит, схема S, полученная из S' добавлением некоторых вершин и контактов, выдаёт на нём между полюсами A и B значение 1, равное $f(\tilde\sigma^{(i)})$.

Пусть $f(\tilde\sigma^{(i)}) = 0$. На наборе $\tilde\sigma^{(i)}$ ни один из экземпляров цепи $C_{\tilde\sigma^{(3-i)}}$ не проводит, поэтому на данном наборе схема S функционирует между полюсами A и B в точности, как схема S_i, полученная из схемы S удалением всех экземпляров цепи $C_{\tilde\sigma^{(3-i)}}$, добавленных в ходе преобразования схемы S' в схему S. Будем считать, что S_i — двухполюсная контактная схема с полюсами A и B. Легко видеть, что схема S_i получается из схемы S' добавлением вершин A' и B', а затем добавлением для каждого $j = 1, \ldots, k_i$ экземпляра цепи $C_{\tilde\sigma^{(i)}}$, концы которого отождествляются с вершинами b^2_j и a^2_{j+1}, а также — в случае $<i>$ — добавлением ещё одного экземпляра цепи $C_{\tilde\sigma^{(i)}}$, концы которого отождествляются с вершинами w_i и B'. В силу введённых обозначений каждый контакт подсхемы $S'_{\tilde\sigma^{(i)}}$, состоящей из всех вершин и всех проводящих на наборе $\tilde\sigma^{(i)}$ контактов схемы S', содержится в одной из её компонент связности $C^i_1, \ldots, C^i_{k_i}, C^i_B$, каждая из которых представляет собой цепь, причём компоненты связности $C^i_1, \ldots, C^i_{k_i}$ попарно различны, а в случае $k_i \geqslant 2$ компонента связности C^i_B отлична от $C^i_2, \ldots, C^i_{k_i}$. Из равенства $f(\tilde\sigma^{(i)}) = 0$ вытекает, что на наборе $\tilde\sigma^{(i)}$ в схеме S' нет проводимости между полюсами, поэтому вершины A и B содержатся в разных компонентах связности подсхемы $S'_{\tilde\sigma^{(i)}}$ и компонента связности C^i_B отлична также от C^i_1. Таким образом, компоненты связности $C^i_1, \ldots, C^i_{k_i}, C^i_B$ подсхемы $S'_{\tilde\sigma^{(i)}}$ попарно различны. При переходе от схемы S' к схеме S_i сначала к ним добавляются ещё две компоненты связности $C_{A'}$ и $C_{B'}$, каждая из которых состоит из единственной вершины — соответственно A' и B', а затем компоненты связности $C^i_1, \ldots, C^i_{k_i}, C_{A'}$ объединяются в одну цепь $C^i_{A,A'}$, а компоненты связности C^i_B и $C_{B'}$ в случае $<i>$ объединяются в одну цепь $B - C^i_B - w_i - C_{\tilde\sigma^{(i)}} - B'$, которую мы обозначим через $C^i_{B,B'}$, но полюсы A и B всё равно остаются в разных компонентах связности подсхемы, состоящей из всех вершин и всех проводящих на наборе $\tilde\sigma^{(i)}$ контактов схемы S_i. Отсюда следует, что на наборе $\tilde\sigma^{(i)}$ нет проводимости между вершинами A и B в схеме S_i, а значит, и в схеме S. Тем самым установлено, что схема S на указанном наборе выдаёт между полюсами A и B значение 0, равное $f(\tilde\sigma^{(i)})$.

В итоге получаем, что схема S реализует между полюсами A и B функцию $f(\tilde{x}^n)$. Докажем, что при выборе в качестве тестового полюсного множества $\mathcal{P}$ данная схема неизбыточна и допускает ЕПТ $\{\tilde{\sigma}^{(1)}, \tilde{\sigma}^{(2)}\}$; отсюда будет следовать неравенство $D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(f) \leqslant 2$. Рассмотрим произвольное $i \in \{1,2\}$. Из построения схемы S нетрудно получить, что объединение всех её контактов, проводящих на наборе $\tilde{\sigma}^{(i)}$, т. е. всех контактов $x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_n^{\sigma_n}$ при $i = 1$ и всех контактов $x_1^{\overline{\sigma}_1}, \ldots, x_n^{\overline{\sigma}_n}$ при $i = 2$, представляет собой цепь $C^i_{A,A'}$ между полюсами A и A' схемы, объединённую — в случае <i> — с цепью $C^i_{B,B'}$ между полюсами B и B' схемы, причём указанные две цепи не имеют общих вершин. Отсюда вытекает, что при обрыве произвольного контакта, содержащегося в цепи $C^i_{A,A'}$, проводимость между полюсами A и A' схемы S на наборе $\tilde{\sigma}^{(i)}$ меняется с 1 на 0, а в случае <i> верен аналогичный факт с заменой всюду A на B и A' на B'. Из приведённых рассуждений следует, что неисправность любого контакта схемы S обнаруживается на одном из наборов $\tilde{\sigma}^{(1)}, \tilde{\sigma}^{(2)}$ хотя бы между одной из двух пар полюсов $\{A, A'\}$, $\{B, B'\}$, каждая из которых по построению принадлежит множеству $\mathcal{P}$. Тем самым установлено, что схема S неизбыточна и допускает ЕПТ $\{\tilde{\sigma}^{(1)}, \tilde{\sigma}^{(2)}\}$. Неравенство $D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(f) \leqslant 2$, а вместе с ним теорема 1 доказаны. ■

Заключение

Для любого целого $d \geqslant 2$ описан достаточно обширный класс тестовых полюсных множеств $\mathcal{P}$, для каждого из которых найдено точное значение величины $D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(f)$ для произвольной булевой функции $f(\tilde{x}^n)$. Ранее в работе [11] получен аналогичный результат для $d = 1$ и произвольного тестового полюсного множества $\mathcal{P}$. Не охваченным пока остаётся случай, когда $d \geqslant 2$ и любые две пары полюсов из множества $\mathcal{P}\backslash\{\{A, B\}\}$ пересекаются, т. е. содержат общий полюс; однако и для этого случая у нас есть наработки. Сравнение равенства $D^{d,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(n) = \min(2, n)$, установленного в следствии 1, с равенствами $D_{\text{ЕП}}(n) = n$ из [6] и $D^{1,\mathcal{P}}_{\text{ЕП}}(n) = \min(3, n)$ из [11] демонстрирует, что путём добавления в двухполюсные контактные схемы ещё по крайней мере двух полюсов можно в ряде случаев уменьшить функцию Шеннона длины ЕПТ размыкания с n до 2 и даже уменьшить её с 3 до 2 по сравнению с трёхполюсными контактными схемами. Тем самым установлена практическая целесообразность реализации булевых функций контактными схемами с двумя и более дополнительными полюсами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лупанов О. Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. 138 с.
2. *Чегис И. А., Яблонский С. В.* Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИАН. 1958. Т. 51. С. 270–360.
3. *Яблонский С. В.* Некоторые вопросы надёжности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. М.: Наука, 1988. С. 5–25.
4. *Редькин Н. П.* Надёжность и диагностика схем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1992. 192 с.
5. *Редькин Н. П.* О проверяющих тестах замыкания и размыкания // Методы дискретного анализа в оптимизации управляющих систем. Вып. 40. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1983. С. 87–99.
6. *Попков К. А.* О проверяющих тестах размыкания для контактных схем // Дискретная математика. 2017. Т. 29. Вып. 4. С. 66–86.
7. *Попков К. А.* О диагностических тестах размыкания для контактных схем // Дискретная математика. 2019. Т. 31. Вып. 2. С. 124–143.

8. *Мадатян Х. А.* Полный тест для бесповторных контактных схем // Проблемы кибернетики. Вып. 23. М.: Наука, 1970. С. 103–118.
9. *Редькин Н. П.* О диагностических тестах для контактных схем // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2019. № 2. С. 35–37.
10. *Попков К. А.* О полных диагностических тестах для контактных схем при обрывах и/или замыканиях контактов // Изв. вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2019. № 3 (51). С. 3–24.
11. *Попков К. А.* Короткие проверяющие тесты размыкания для контактных схем с дополнительным полюсом // Дискретная математика. 2024. Т. 36. Вып. 4. С. 117–137.

REFERENCES

1. *Lupanov O. B.* Asimptoticheskie otsenki slozhnosti upravlyayushchikh sistem [Asymptotic Bounds of the Complexity of Control Systems]. Moscow, MSU Publ., 1984. 138 p. (In Russian)
2. *Chegis I. A. and Yablonskiy S. V.* Logicheskie sposoby kontrolya raboty elektricheskikh skhem [Logical ways of monitoring the operation of electrical circuits]. Trudy MIAN, 1958, vol. 51, pp. 270–360. (in Russian)
3. *Yablonskiy S. V.* Nekotorye voprosy nadezhnosti i kontrolya upravlyayushchikh sistem [Some questions of reliability and verification of control systems]. Matematicheskie Voprosy Kibernetiki, iss. 1, Moscow, Nauka Publ., 1988, pp. 5–25. (in Russian)
4. *Red'kin N. P.* Nadezhnost' i diagnostika skhem [Circuits Reliability and Diagnostics]. Moscow, MSU Publ., 1992. 192 p. (in Russian)
5. *Red'kin N. P.* O proveryayushchikh testakh zamykaniya i razmykaniya [On fault detection tests of closure and opening]. Metody Diskretnogo Analiza v Optimizatsii Upravlyayushchikh Sistem, iss. 40, Novosibirsk, Math. Inst. Sib. Br. USSR Acad. Sci., 1983, pp. 87–99. (in Russian)
6. *Popkov K. A.* On fault detection tests of contact break for contact circuits. Discrete Math. Appl., 2018, vol. 28, no. 6, pp. 369–383.
7. *Popkov K. A.* On diagnostic tests of contact break for contact circuits. Discrete Math. Appl., 2020, vol. 30, no. 2, pp. 103–116.
8. *Madatyan Kh. A.* Polnyy test dlya bespovtornykh kontaktnykh skhem [Complete test for non-repetitive contact circuits]. Problemy Kibernetiki, iss. 23, Moscow, Nauka Publ., 1970, pp. 103–118. (in Russian)
9. *Red'kin N. P.* Diagnostic tests for contact circuits. Moscow Univ. Math. Bull., 2019, vol. 74, no. 2, pp. 62–64.
10. *Popkov K. A.* O polnykh diagnosticheskikh testakh dlya kontaktnykh skhem pri obryvakh i/ili zamykaniyakh kontaktov [On complete diagnostic tests for contact circuits under breaks and/or closures of contacts]. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Povolzhskiy Region. Fiziko-matematicheskiye nauki, 2019, no. 3 (51), pp. 3–24. (in Russian)
11. *Popkov K. A.* Korotkie proveryayushchie testy razmykaniya dlya kontaktnykh skhem s dopolnitel'nym polyusom [Short fault detection tests of contact break for contact circuits with an additional pole]. Diskretnaya Matematika, 2024, vol. 36, no. 4, pp. 117–137. (in Russian)