ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

УДК 519.8 DOI 10.17223/20710410/71/6

СЛОЖНОСТЬ ЗАДАЧИ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ С КРИТЕРИЕМ ОПТИМИЗАЦИИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА ОТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КВОТ НА ВЫБРОСЫ[1]

А. М. Булавчук

Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, Россия

E-mail: abulavchuk@sfu-kras.ru

Рассматривается модель задачи календарного планирования с оптимизацией экономического эффекта от использования квот на выбросы. При построении модели учитывается актуальная российская практика обращения с углеродными единицами. Модель предполагает поиск оптимального расписания инвестиционного проекта, при реализации которого используются углеродные квоты. Критерием оптимальности выступает разница между доходами и расходами, обусловленными операциями с углеродными единицами. Ограничениями задачи выступают организационные и технологические взаимосвязи между работами, а также предельный срок завершения проекта. Все параметры модели являются детерминированными. Сформулирована и доказана теорема о том, что задача календарного планирования с критерием оптимизации экономического эффекта от использования квот на выбросы является NP-трудной в сильном смысле даже в случае работ единичной длительности. Взаимосвязи между проектными работами могут быть представлены в виде неориентированного графа. Это позволяет в процессе доказательства использовать сведение к данной задаче задачи о клике, NP-трудность которой известна. Рассмотрены также особые случаи соотношений между ценами квот и штрафами. Доказано утверждение о том, что при условии равенства и постоянной величине цен и штрафов в каждый момент времени задача календарного планирования с оптимизацией экономического эффекта от использования квот на выбросы может быть сведена к известному варианту задачи календарного планирования с неограниченными ресурсами и критерием максимизации NPV. Для решения численных примеров использована модификация разработанной ранее программы для IBM ILOG CPLEX.

Ключевые слова: *задача календарного планирования инвестиционных проектов, углеродные квоты, задача о клике, NP-трудность.*

[1]Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (соглашение № 075-02-2025-1790).

COMPLEXITY OF THE SCHEDULING PROBLEM WITH THE CRITERION OF OPTIMISATION OF ECONOMIC EFFECT FROM THE USE OF EMISSION QUOTAS

A. M. Bulavchuk

Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia

We consider a scheduling model that optimizes the economic impact of using emission quotas. When constructing the model, the current Russian practice of handling carbon units is taken into account. The model involves searching for the optimal schedule of an investment project, the implementation of which uses carbon quotas. The optimality criterion is the difference between income and expenses resulting from transactions with carbon units. The problem constraints include the organizational and technological dependencies between activities, as well as the project deadline. All model parameters are deterministic. We prove that the scheduling problem with the objective of optimizing the economic impact of emission quotas is strongly NP-hard, even when all tasks have the same duration. We show that the relationships between project activities can be represented in the form of an undirected graph. This allowed us to use a reduction of the clique problem, whose NP-hardness is known, to this problem during the proof process. Special cases of relationships between quota prices and fines are also considered. It was proved that, assuming constant prices and fines over time, the problem of scheduling to optimize the economic effect of emission quotas can be reduced to the well-known scheduling problem with unlimited resources and the NPV maximization criterion. To solve numerical examples, a modification of the previously developed algorithm for IBM ILOG CPLEX was used.

Keywords: *project scheduling problem, carbon quotas, clique problem, NP-hardness.*

Введение

Сокращение выбросов парниковых газов — важная практическая задача, один из путей решения которой — введение практики оборота углеродных единиц. Правительством Российской Федерации в последние годы предприняты важные шаги в этом направлении, первым из которых стало принятие Федерального закона № 296-ФЗ «Об ограничении выбросов парниковых газов» [1]. Данный документ закрепил ключевые показатели обращения с углеродными единицами и создал основу для моделирования операций с квотами. Начатый в 2022 г. на территории Сахалинской области эксперимент должен стать основой для расширения практики обращения с углеродными единицами [2]. Таким образом, моделирование обращения с углеродными единицами является актуальным направлением в сфере календарного планирования инвестиционных проектов.

В работе [3] сформулирована модель задачи календарного планирования инвестиционных проектов с критерием оптимизации экономического эффекта от использования квот на выбросы. Данная задача является новой в ряду задач календарного планирования с экономическими критериями оптимальности. Предшествующие исследования акцентировали внимание на оптимизации сроков реализации проектов и чистой приведённой стоимости. Например, в [4] рассматривается задача календарного планирования со складируемыми ресурсами и директивными сроками. Авторы приходят к выводу о существовании варианта этой задачи, который разрешим за полиномиальное время.

В работе [5] также рассматривается задача со складируемыми ресурсами, но с критерием чистой приведённой стоимости. Авторы доказывают, что такая задача является NP-трудной в сильном смысле даже при работах единичной длительности. Другой вариант схожей задачи, предполагающий использование кредитов, рассмотрен в [6]. Показана NP-трудность задачи максимизации прибыли для случая, когда размер используемого кредита не ограничен. Эффективно разрешимые случаи задачи календарного планирования с переменной интенсивностью потребления и поступления ресурсов нескладируемого типа рассматриваются в работе [7], где доказано, что если ширина заданного на множестве работ частичного порядка ограничена константой, то задача псевдополиномиально разрешима, являясь при этом NP-трудной.

Таким образом, изучение вычислительной сложности подобных задач является важным направлением исследований. В данной работе доказано, что задача календарного планирования инвестиционного проекта с квотами на объёмы выбросов углекислого газа также является NP-трудной в сильном смысле. Кроме того, показано, что при некоторых условиях на значения параметров задача может быть сведена к задаче календарного планирования инвестиционных проектов с критерием максимизации чистой приведённой стоимости (NPV).

1. Постановка задачи

Рассмотрим инвестиционный проект, в ходе которого требуется выполнить N работ. Каждая работа характеризуется длительностью в целых периодах d_j, $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Технологические и организационные взаимосвязи между работами можно задать в виде условий частичного порядка E. Будем называть расписанием проекта вектор $S = (s_1, s_2, \ldots, s_N)$, компоненты которого s_j определяют моменты начала работы $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Для каждой пары работ $(i, j) \in E$ должно выполняться условие $s_i + d_i \leqslant s_j$. Если срок реализации проекта составляет T периодов, то $0 \leqslant s_j \leqslant T - d_j$.

Пусть при выполнении работы j в период её реализации $\tau \in \{1, \ldots, d_j\}$ выбрасываются парниковые газы в объёме $g_j(\tau)$. Будем считать эти параметры детерминированными, хотя модель может быть модифицирована для стохастического и нечёткого случаев [3].

Ресурсами проекта выступают квоты на выбросы $q(t)$, выделяемые в период $t \in \in \{1, 2, \ldots, T\}$. Единицей выполнения квоты $e(t)$ будем называть разницу между квотой и суммарными выбросами от всех работ, реализуемых в период t. Формула расчёта единицы выполнения квоты имеет вид

$$e(t) = q(t) - \sum_{j \in V(t)} g_j(t - s_j),$$

где $V(t)$ — множество работ, выполняемых в интервале $[t-1, t)$. Если в какой-либо момент времени $e(t) < 0$, то в конце периода t вносится плата за превышение квоты $h(t)$. Положительное значение $e(t)$ соответствует неизрасходованной части квоты. Неизрасходованные единицы выполнения квоты могут быть реализованы по цене $p(t)$.

Таким образом, задача календарного планирования инвестиционного проекта с использованием квот на выбросы заключается в нахождении расписания S, максимизирующего экономический эффект $R(S)$ от операций с единицами выполнения квоты. Ограничениями задачи выступают условия частичного порядка на множестве работ и предельный срок реализации проекта. Математическая модель задачи имеет вид

$$R(S) = \sum_{t \in t^+} \frac{e(t)p(t)}{(1 + r_0)^t} + \sum_{t \in t^-} \frac{e(t)h(t)}{(1 + r_0)^t} \to \max_S; \qquad (1)$$

$$s_i + d_i \leqslant s_j, \quad (i,j) \in E; \tag{2}$$
$$0 \leqslant s_j \leqslant T - d_j, \quad j \in \{1, 2, \ldots, N\}, \tag{3}$$

где r_0 — ставка дисконтирования для одного периода; t^+ — множество моментов времени, в которые $e(t) \geqslant 0$; t^- — множество моментов времени, в которые $e(t) < 0$.

2. Сложность задачи

Рассмотрим проект, состоящий из работ единичной длительности, связанных условиями частичного порядка E. Пусть цена продажи единицы квоты в каждый момент времени равна p, а штраф за превышение квоты в каждый момент времени равен

$$h > p(1 + r_0)^2. \tag{4}$$

Величину выбросов для каждой работы примем равной 1. Для известных квот $q(t)$ требуется определить, существует ли расписание со значением экономического эффекта не менее некоторой величины R^*.

Воспользуемся приведенной в [8] идеей сведения к данной задаче задачи о клике.

Задача о клике

Условие:	имеется неориентированный граф (W, U) и дано натуральное число k.
Вопрос:	существует ли в нём полный подграф с числом вершин не меньше k?

Задача о клике является NP-трудной в сильном смысле [9].

На основе графа (W, U) построим проект, состоящий из $|U| + |W|$ работ. Работы u_{ij}, соответствующие рёбрам $(i,j) \in U$, будем называть рёберными, а работы w_j, соответствующие вершинам $j \in W$, — вершинными. Рёберную работу u_{ij} будем считать предшествующей работам w_i и w_j. Все работы имеют единичную длительность и характеризуются единичными выбросами. Пусть общий срок реализации проекта составляет 3 года, а квоты на выбросы распределены по годам следующим образом:

$$q(1) = |U| - k(k-1)/2; \tag{5}$$
$$q(2) = |W| - k + k(k-1)/2; \tag{6}$$
$$q(3) = k. \tag{7}$$

Суммарная квота равна $|U| + |W|$ и совпадает с совокупной потребностью всех работ проекта. Отсюда следует, что максимальный размер экономического эффекта в данной постановке не может превышать нуля. Из условия (4) следует, что продажа неизрасходованных квот невыгодна, поскольку, с учётом реинвестирования, каждая проданная квота может через два года принести $p(1 + r_0)^2$, а убыток h из-за нехватки квот эту величину превышает. Таким образом, для достижения максимума экономического эффекта необходимо полностью расходовать квоты в каждом году.

Лемма 1. Пусть проект из $|U| + |W|$ работ построен на основе графа (W, U) и удовлетворяет условиям (5)–(7). В графе (W, U) существует клика размера k тогда и только тогда, когда для задачи (1)–(3) существует расписание работ проекта, для которого размер экономического эффекта равен $R^* = 0$.

Доказательство. Пусть известно, что какие-то k вершинных работ образуют клику. Этой клике соответствуют $k(k-1)/2$ рёберных работ. В первый год квота позволяет выполнить $|U| - k(k-1)/2$ рёберных работ. Во второй год можно выполнить оставшиеся рёберные работы и все вершинные, которые не входят в клику. Связывающие их ребёрные работы были выполнены в первый год. Поскольку после второго года остаются невыполненными только вершинные работы, входящие в клику, ресурсов квоты в размере k в третьем году будет достаточно для завершения проекта. Таким образом, наличие клики позволяет в каждом году израсходовать квоты и получить $R^* = 0$.

Пусть известно, что $R^* = 0$. Отсюда следует, что квоты каждого года израсходованы полностью. После первого года остались невыполненными $k(k-1)/2$ рёберных работ. Предположим, что максимальная клика в графе имеет размерность $m < k$. Для того чтобы минимизировать число вершинных работ, для которых не выполнены соответствующие рёберные, нужно оставить невыполненными рёберные работы, связывающие вершины клики. Оставшиеся $k(k-1)/2 - m(m-1)/2$ работ, выполнение которых откладывается до второго года, будем выбирать таким образом, чтобы они связывали какие-то $k - m$ вершин друг с другом и с вершинами клики. Из предположения о размере максимальной клики $m < k$ следует, что хотя бы одна рёберная работа будет выбрана не по этому правилу. В противном случае это означало бы наличие клики размера k. Тогда после первого года не будут выполнены рёберные работы, соответствующие, по меньшей мере, $k + 1$ вершинной. Дополнительная работа, для которой не выполнена рёберная, не может быть выполнена во втором году, что приведёт к неполному использованию квоты. Однако при неполном использовании квоты $R^* < 0$. Возникшее противоречие разрешается при $m = k$. ■

Теорема 1. Задача календарного планирования (1)–(3) с критерием оптимизации экономического эффекта от использования квот на выбросы является NP-трудной в сильном смысле даже в случае работ единичной длительности.

Доказательство. Сведение задачи о клике к задаче (1)–(3) является полиномиальным, так как для его выполнения требуется не более $\mathcal{O}\left((|U| + |W|)^2\right)$ операций. Из леммы 1 следует, что нахождение оптимального расписания означает решение задачи о клике. Однако задача о клике является NP-трудной в сильном смысле. Отсюда следует, что задача (1)–(3) тоже является NP-трудной в сильном смысле. ■

Пример 1. Проиллюстрируем приведённые в доказательстве рассуждения на примере условного проекта. На рис. 1 приведены граф и сетевой график проекта из восьми работ, $|U| = 4$, $|W| = 4$. Рассмотрим случай $k = 2$. В табл. 1 приведено распределение квот, а также оптимальное расписание проекта. Экономический эффект для этого расписания $R^* = 0$.

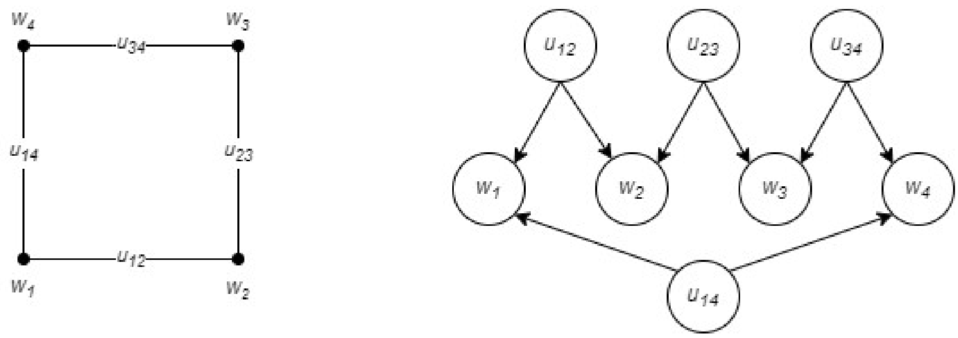

Рис. 1. Граф и сетевой график проекта, $N = 8$

Оптимальное расписание для случая $k = 3$ представлено в табл. 2. Поскольку в графе отсутствует клика размера 3, оптимальный экономический эффект отрицателен. Это означает, что при заданных условиях обращение с квотами будет убыточным, что, однако, не препятствует реализации проекта.

Таблица 1

Оптимальное расписание проекта

$(N = 8,\ k = 2)$

t	1	2	3
Работы	u_{12}, u_{23}, u_{34}	u_{14}, w_2, w_3	w_1, w_4
$q(t)$	3	3	2
$e(t)$	0	0	0

Если $p = 1$, $h = 2$, $r_0 = 0{,}1$, то $R^* = \dfrac{1}{(1+0{,}1)^2} - \dfrac{2}{(1+0{,}1)^3} = -0{,}676.$

Таблица 2

Оптимальное расписание проекта

$(N = 8,\ k = 3)$

t	1	2	3
Работы	u_{12}	u_{23}, u_{34}, u_{14}	w_1, w_2, w_3, w_4
$q(t)$	1	4	3
$e(t)$	0	1	-1

Добавим в граф ребро u_{13} (рис. 2). Для данного проекта $|U| = 5$, $|W| = 4$. Поскольку в получившемся графе имеется клика размера 3, то есть и расписание, для которого $R^* = 0$ (табл. 3).

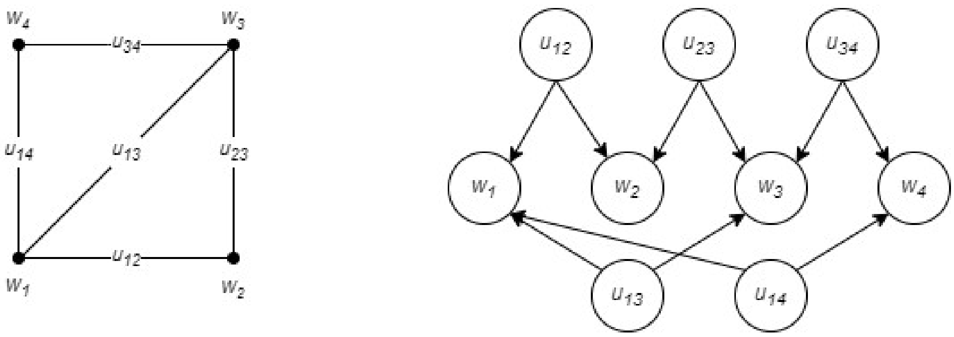

Рис. 2. Граф и сетевой график проекта, $N = 9$

Таблица 3

Оптимальное расписание проекта

$(N = 9,\ k = 3)$

t	1	2	3
Работы	u_{12}, u_{23}	u_{13}, u_{34}, u_{14}, w_2	w_1, w_3, w_4
$q(t)$	2	4	3
$e(t)$	0	0	0

3. Особые случаи

При доказательстве NP-трудности рассматриваемой задачи мы исходили из предположения, что штраф за превышение квоты существенно превышает цену её продажи. Рассмотрим случаи, когда это предположение нарушается.

Пусть в каждый момент времени выполняется равенство $p(t) = h(t)$. Тогда целевая функция задачи примет вид

$$R(S) = \sum_{t=1}^{T} \frac{e(t)p(t)}{(1 + r_0)^t}.$$

С практической точки зрения данный вариант описывает ситуацию, когда при недостатке квот они могут быть приобретены на рынке, а цены покупки и продажи совпадают. Сравним этот случай с задачей календарного планирования инвестиционных проектов с критерием максимизации NPV [10]. Введём фиктивную работу, длительность которой совпадает с предельным сроком реализации проекта T, а доход от её реализации в каждый момент времени равен $p(t)q(t)$. Данная работа позволит учитывать доходы от реализации квот, если в какой-либо момент времени работы по проекту не осуществляются. Выбросы парниковых газов можно рассматривать как упущенную выгоду от реализации квот.

3.1. Случай $p(t) = h(t) = \text{const}$

Если $p(t) = p = \text{const}$, то каждая из работ характеризуется потоком платежей с компонентами $p \cdot g_j(\tau)$. Величина $p\big(q(t) - \sum_{j \in V(t)} g_j(t - s_j)\big)$ в каждый момент времени может рассматриваться как сумма компонентов потоков платежей $\sum_{j \in V(t)} c_j(t - s_j)$. Тогда для случая $p(t) = h(t) = p$ целевые функции сраниваемых задач идентичны. Совпадают также ограничения на порядок работ и предельный срок завершения проекта. Однако в задаче (1)–(3) отсутствуют бюджетные ограничения. Такой вариант носит название задачи календарного планирования с неограниченными ресурсами и критерием максимизации NPV. Для этой задачи предложены рекурсивные алгоритмы нахождения оптимального решения [11, 12], при этом вопрос о её полиномиальной разрешимости остаётся открытым. Сложность этого варианта требует дополнительных исследований. Рекурсивные алгоритмы могут быть как полиномиальными, так и экспоненциальными [13]. Таким образом, верно следующее

Утверждение 1. При условии равенства и постоянной величине цен и штрафов в каждый момент времени задача календарного планирования с оптимизацией экономического эффекта от использования квот на выбросы может быть сведена к известному варианту задачи календарного планирования с неограниченными ресурсами и критерием максимизации NPV.

Поскольку данная постановка задачи сводится к задаче календарного планирования, для решения численных примеров воспользуемся разработанной ранее программой для решателя IBM ILOG CPLEX [10]. Модель задачи, для решения которой применяется программа, имеет вид

$$R(X) = \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{N} z_{tj} \cdot x_{tj} \to \max_X,$$

$$\sum_{t=1}^{T} x_{tj} \cdot t \leqslant T - d_j, \qquad j = 1, \dots, N,$$

$$\sum_{t=1}^{T} (x_{ti} - x_{tj})\, t \leqslant -d_i, \quad (i, j) \in E,$$

где X — матрица, элементы которой $x_{tj} = 1$, если $s_j = t$, и $x_{tj} = 0$ в противном случае, $j \in \{1, \dots, N\}$, $t \in \{1, \dots, T\}$. Коэффициенты целевой функции рассчитываются по формуле

$$z_{tj} = \sum_{\tau=0}^{d_j-1} \frac{c_j(\tau)}{(1+r_0)^{\tau+t}},$$

где $t \in \{1, \ldots, T\}$ — момент начала работы j; $c_j(\tau) = p(\tau+1)\, q(\tau+1)$ — для фиктивной работы и $c_j(\tau) = -p(t+\tau)\, g_j(\tau+1)$ — для остальных.

Пример 2. Рассмотрим пример проекта, сетевой график которого приведён на рис. 2. Пусть $p(t) = h(t) = 1$. Введём фиктивную работу f, доход от которой в каждый момент времени равен стоимости продажи имеющихся квот. Эта работа выполняется в течение всего срока реализации проекта и не связана условиями частичного порядка с другими работами.

Результаты расчётов приведены в табл. 4. Оптимальный экономический эффект от использования квот составляет $R^* = 0{,}24$. Решение, приведённое в табл. 3, также является допустимым, но в новых условиях нулевой баланс квот не обеспечивает оптимального экономического эффекта. Доходы от продажи квот в первом периоде компенсируют штрафы в последующих.

Таблица 4

Оптимальное расписание проекта
($N = 9$, $p(t) = h(t) = 1$)

t	1	2	3
Работы	f	u_{12}, u_{13} u_{14}, u_{23}, u_{24}	w_1, w_2, w_3, w_4
$q(t)$	2	4	3
$e(t)$	2	−1	−1

3.2. Случай $p(t) = h(t) \neq \mathrm{const}$

Если в любой момент времени $p(t) = h(t) \neq \mathrm{const}$, то задача не сводится к задаче календарного планирования с критерием максимизации NPV. При переходе к денежным оценкам от натуральных мы будем получать разные потоки платежей для различных моментов начала работы. Однако имеющийся алгоритм легко адаптируется для этого случая. Модификации подвергаются только коэффициенты целевой функции.

Пример 3. Рассмотрим случай растущих цен. Пусть $p(1) = 1$, $p(2) = 1{,}2$ и $p(3) = 1{,}5$. В табл. 5 приведено оптимальное расписание проекта. Экономический эффект для этого расписания составляет $R^* = 0{,}654$. Растущие цены, а значит, и штрафы вынуждают производителя начинать проект как можно раньше и продавать подорожавшие квоты в последний год. Если цены каждый год снижаются, то оптимальное расписание будет совпадать с приведённым в табл. 4.

Таблица 5

Оптимальное расписание проекта
($N = 9$, $p(t) = h(t) \neq \mathrm{const}$)

t	1	2	3
Работы	f, u_{12}, u_{13} u_{14}, u_{23}, u_{24}	w_1, w_2, w_3, w_4	–
$q(t)$	2	4	3
$e(t)$	−3	0	3

3.3. Случай $p(t) > h(t)$

Пусть в каждый момент времени выполняется неравенство $p(t) > h(t)$. Очевидно, что в этом случае целосообразной будет продажа всех имеющихся квот. Представим экономический эффект в виде разницы $R(S) = R_q - R_g(S)$, где R_q — доход от продажи квот; $R_g(S)$ — дисконтированная сумма штрафов за выбросы:

$$R(S) = \sum_{t=1}^{T} \frac{q(t)p(t)}{(1+r_0)^t} - \sum_{t=1}^{T} \frac{h(t) \sum\limits_{j \in V(t)} g_j(t - s_j)}{(1+r_0)^t}.$$

Поскольку первое слагаемое не зависит от выбранного расписания, решение задачи сводится к нахождению расписания, минимизирующего штрафы. При $h(t) = h = \text{const}$ снова получаем задачу календарного планирования с неограниченными ресурсами и критерием максимизации NPV.

Заключение

Таким образом, показано, что задача календарного планирования инвестиционных проектов с критерием оптимизации экономического эффекта от использования квот на выбросы является NP-трудной в сильном смысле. Это, в частности, означает, что для её решения необходимо использовать эвристические алгоритмы. Например, под условия задачи могут быть адаптированы генетический алгоритм и алгоритм имитации отжига, разработанные для схожей задачи [10]. Для нескольких примеров показано, что точные решения рассматриваемой задачи могут быть найдены с помощью IBM ILOG CPLEX.

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания и рекомендации, позволившие улучшить содержание работы, а также благодарит Дарью Владиславовну Семенову за помощь и критику.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федеральный закон №296-ФЗ «Об ограничении выбросов парниковых газов», 02.07.2021.
2. Федеральный закон №34-ФЗ «О проведении эксперимента по ограничению выбросов парниковых газов в отдельных субъектах Российской Федерации», 06.03.2022.
3. *Булавчук А. М., Семенова Д. В.* О задаче календарного планирования с критерием оптимизации экономического эффекта от использования квот на выбросы // УБС. 2025. Вып. 113. С. 215–231.
4. *Гимади Э. Х., Залюбовский В. В., Севастьянов С. В.* Полиномиальная разрешимость задач календарного планирования со складируемыми ресурсами и директивными сроками // Дискретн. анализ и исслед. опер. Сер. 2. 2000. Т. 7. №1. С. 9–34.
5. *Сервах В. В., Щербинина Т. А.* О сложности одной задачи календарного планирования со складируемыми ресурсами // Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ. 2008. Т. 8. Вып. 3. С. 105–112.
6. *Казаковцева Е. А., Сервах В. В.* Сложность задачи календарного планирования с кредитованием // Дискретн. анализ и исслед. опер. 2015. Т. 22. Вып. 4. С. 35–49.
7. *Еремеев А. В., Коваленко Ю. В.* Эффективно разрешимые случаи задачи календарного планирования с переменной интенсивностью потребления и поступления ресурсов нескладируемого типа // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2014. Вып. 9. С. 26–38.
8. *Lenstra J. K., Rinnooy Kan A. H. G., and Brucker P.* Complexity of machine scheduling problems // Ann. Discrete Math. 1977. V. 1. P. 343–362.

9. *Karp R. M.* Reducibility among combinatorial problems // R. E. Miller and J. W. Thatcher (eds.). Complexity of Computer Computations. N.Y.: Plenum Press, 1972. P. 85–103.
10. *Bulavchuk A. M. and Semenova D. V.* Two heuristic algorithms for RCPSP with NPV criterion // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2023. Т. 16. № 5. С. 639–650.
11. *Demeulemeester E., Herroelen W., and Van Dommelen P.* An Optimal Recursive Search Procedure for the Deterministic Unconstrained Max-NPV Project Scheduling Problem. Res. Report 9603. Department of Applied Economics, Katholieke Universiteit Leuven, 1996.
12. *De Reyck B. and Herroelen W.* An Optimal Procedure for the Unconstrained Max-NPV Project Scheduling Problem with Generalized Precedence Relations. Res. Report 9642. Department of Applied Economics, Katholieke Universiteit Leuven, 1996.
13. *Быкова В. В.* Математические методы анализа рекурсивных алгоритмов // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2008. Т. 1. № 3. С. 236–246.

REFERENCES

1. Federal'nyy zakon No. 296-FZ "Ob ogranichenii vybrosov parnikovykh gazov" [Federal Law No. 296-FZ "On Limiting Greenhouse Gas Emissions".] 02.07.2021. (in Russian)
2. Federal'nyy zakon No. 34-FZ "O provedenii eksperimenta po ogranicheniyu vybrosov parnikovykh gazov v otdel'nykh sub"ektakh Rossiyskoy Federatsii" [Federal Law No. 34-FZ "On conducting an experiment to limit greenhouse gas emissions in certain constituent entities of the Russian Federation".] 06.03.2022. (in Russian)
3. *Bulavchuk A. M. and Semenova D. V.* O zadache kalendarnogo planirovaniya s kriteriem optimizatsii ekonomicheskogo effekta ot ispol'zovaniya kvot na vybrosy [On the project scheduling problem with the criterion for optimizing the economic effect from the use of emission quotas]. UBS, 2025, vol. 113, pp. 215–231. (in Russian)
4. *Gimadi E. Kh., Zalyubovskiy V. V., and Sevast'yanov S. V.* Polinomial'naya razreshimost' zadach kalendarnogo planirovaniya so skladiruemymi resursami i direktivnymi srokami [Polynomial solvability of scheduling problems with storable resources and directive deadlines]. Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 2, 2000, vol. 7, no. 1, pp. 9–34. (in Russian)
5. *Servakh V. V. and Shcherbinina T. A.* O slozhnosti odnoy zadachi kalendarnogo planirovaniya so skladiruemymi resursami [Complexity of some project scheduling problem with nonrenewable resources]. Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh. Inform., 2008, vol. 8, no. 3, pp. 105–112. (in Russian)
6. *Kazakovtseva E. A. and Servakh V. V.* The complexity of the project scheduling problem with credits. J. Appl. Industr. Math., 2015, vol. 9, no. 4, pp. 489–496.
7. *Eremeev A. V. and Kovalenko Yu. V.* Effektivno razreshimye sluchai zadachi kalendarnogo planirovaniya s peremennoy intensivnost'yu potrebleniya i postupleniya resursov neskladiruemogo tipa [Polynomially solvable cases of the project scheduling problem with changing consumption and supply rates of nonaccumulative resources]. Bulletin of Irkutsk State University. Ser. Math., 2014, vol. 9, pp. 26–38. (in Russian)
8. *Lenstra J. K., Rinnooy Kan A. H. G., and Brucker P.* Complexity of machine scheduling problems. Ann. Discrete Math., 1977, vol. 1, pp. 343–362.
9. *Karp R. M.* Reducibility among combinatorial problems. R. E. Miller and J. W. Thatcher (eds.), Complexity of Computer Computations, N.Y., Plenum Press, 1972, pp. 85–103.
10. *Bulavchuk A. M. and Semenova D. V.* Two heuristic algorithms for RCPSP with NPV criterion // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., 2023, vol. 16, no. 5, pp. 639–650.
11. *Demeulemeester E., Herroelen W., and Van Dommelen P.* An Optimal Recursive Search Procedure for the Deterministic Unconstrained Max-NPV Project Scheduling Problem. Res. Report 9603, Department of Applied Economics, Katholieke Universiteit Leuven, 1996.

12. *De Reyck B. and Herroelen W.* An Optimal Procedure for the Unconstrained Max-NPV Project Scheduling Problem with Generalized Precedence Relations. Res. Report 9642, Department of Applied Economics, Katholieke Universiteit Leuven, 1996.
13. *Bykova V. V.* Matematicheskie metody analiza rekursivnyh algoritmov [Mathematical methods for the analysis of recursive algorithms]. J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., 2008, vol. 1, no. 3, pp. 236–246. (in Russian)