

УДК 004.72:004.021:519.17

DOI 10.17223/20710410/71/8

**МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОЦЕНКА РЕСУРСНЫХ ЗАТРАТ
АЛГОРИТМОВ МАРШРУТИЗАЦИИ В СЕТЯХ НА КРИСТАЛЛЕ
С ДВУМЕРНОЙ ЦИРКУЛЯНТНОЙ ТОПОЛОГИЕЙ¹**

Э. А. Монахова*, О. Г. Монахов*, Э. Р. Рзаев**, Е. В. Лежнев**, А. Ю. Романов**

**Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
г. Новосибирск, Россия****Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва,
Россия***E-mail:** emilia@rav.sccc.ru, monakhov@rav.sccc.ru, erzaev@hse.ru, elezhnev@hse.ru,
a.romanov@hse.ru

Исследуется совместное конструирование топологий семейств оптимальных по диаметру циркулянтных сетей $C(N; \pm 1, \pm s_2)$ и реализуемых для них алгоритмов маршрутизации сложности $O(1)$. Предлагаемый алгоритм маршрутизации основан на использовании масштабируемых параметров L -образных шаблонов плотной укладки графов на плоскости для семейств оптимальных сетей. Определены аналитические формулы зависимости этих параметров от диаметра графов для семейств оптимальных сетей $C(N; \pm 1, \pm s_2)$, сокращающие сложность их расчёта до $O(1)$. Проведено сравнение предлагаемого алгоритма с известным алгоритмом маршрутизации, модификацией которого он является, по затратам времени на маршрутизацию в семействах оптимальных графов и показано уменьшение времени его исполнения в среднем в 2 раза. Выполнено моделирование исследуемого алгоритма в качестве основы маршрутизатора сети на кристалле на языке описания аппаратуры Verilog. Получены данные сравнения его с другими алгоритмами маршрутизации по занимаемым логическим ресурсам и ресурсам памяти.

Ключевые слова: неориентированная циркулянтная сеть, алгоритм маршрутизации, семейства оптимальных циркулянтов, сети на кристалле.

**MODELING AND RESOURCE COST ESTIMATION
OF ROUTING ALGORITHMS IN NETWORKS ON A CHIP
WITH A TWO-DIMENSIONAL CIRCULANT TOPOLOGY**

E. A. Monakhova*, O. G. Monakhov*, E. R. Rzaev**, E. V. Lezhnev**, A. Y. Romanov**

**Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk,
Russia****HSE University, Moscow, Russia*

In this paper, we investigate the joint construction of topologies of families of optimal diameter circulant networks $C(N; \pm 1, \pm s_2)$ and the routing algorithms of complexity $O(1)$ implemented for them. The proposed routing algorithm is based on the use of scalable parameters of L -shaped dense graph packing patterns on the plane for families of optimal networks. Analytical formulas for the dependence of these parameters on the graph diameter of families of optimal networks $C(N; \pm 1, \pm s_2)$ are

¹Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 25-11-00248.

determined, reducing the complexity of their calculation to $O(1)$. A comparison of the proposed algorithm with the routing algorithm on which it is based was carried out. In families of optimal graphs, the proposed algorithm showed an average two-fold decrease in execution time. The implementation of the investigated routing algorithm as the basis for a network-on-a-chip router is carried out in the hardware description language Verilog. The data of its comparison with other routing algorithms based on the occupied logical and memory resources have been obtained.

Keywords: *undirected circulant network, routing algorithm, families of optimal circulant networks, network-on-a-chip.*

Введение

Структура циркулянтных сетей степени четыре изучается в различных прикладных областях и в качестве топологии сетей связи кластеров вычислительных систем и сетей на кристалле [1–8]. Работы исследователей посвящены в основном изучению их топологических показателей, открытию семейств оптимальных графов, методов их синтеза, разработке алгоритмов маршрутизации и методов их практического применения.

Циркулянтная сеть степени четыре (двумерная циркулянтная сеть) представляет собой неориентированный граф $C(N; \pm s_1, \pm s_2)$ с $1 \leq s_1 < s_2 < N/2$ и множеством вершин $V = \mathbb{Z}_N = \{0, 1, \dots, N - 1\}$, где каждая вершина i связана с вершинами $i \pm s_1 \bmod N$ и $i \pm s_2 \bmod N$. Числа s_1, s_2 — образующие графа, N — порядок. Граф $C(N; \pm s_1, \pm s_2)$ связан, если $\text{НОД}(N, s_1, s_2) = 1$. На рис. 1 приведено изображение циркулянтной сети $C(21; \pm 1, \pm 6)$. Диаметр графа — длина максимального кратчайшего пути на множестве всевозможных пар вершин, среднее расстояние — математическое ожидание всех длин кратчайших путей между парами вершин. Оптимальным графом называется циркулянтный граф $C(N; \pm s_1, \pm s_2)$ с минимально возможным диаметром для заданного N . Известна точная нижняя граница диаметра оптимального графа с N вершинами: $\text{ulb}(N) = \lceil (-1 + \sqrt{2N - 1})/2 \rceil$ [2]. Решение проблемы минимизации диаметра (среднего расстояния) графов связано с оптимизацией задержек при передаче данных, скорости коммуникаций и, в конечном итоге, производительности системы [1–3, 9, 10]. Другая актуальная проблема при использовании циркулянтов в качестве сетей связи состоит в разработке эффективных алгоритмов маршрутизации для передачи сообщений между парами узлов [11]. Алгоритм маршрутизации называется оптимальным, если передача сообщений происходит вдоль кратчайших путей из источника в приёмник. Известно несколько алгоритмов маршрутизации для циркулянтов степени четыре с разными оценками сложности (см. обзор в [4]).

В данной работе рассматриваются оптимальные алгоритмы, имеющие константную оценку по времени вычисления маршрута из источника в приёмник и не требующие таблиц маршрутизации, что является преимуществом при проектировании масштабных сетей на кристалле. К ним принадлежат алгоритмы аналитического типа [4, 5, 12, 13], разработанные для специальных семейств оптимальных циркулянтов, и алгоритмы с предварительной подготовкой топологических параметров сети для выполнения маршрутизации [13–15]. К числу последних, как наиболее эффективный из них для сетей на кристалле, относится алгоритм из [14], применимый для двумерных циркулянтов общего вида $C(N; \pm s_1, \pm s_2)$. Он основан на использовании параметров L -образных шаблонов [16–18], задающих плотную укладку графов $C(N; \pm s_1, \pm s_2)$ на плоскости \mathbb{Z}^2 (параметры a, b, p, q на рис. 2, а). На рис. 2, б и в показаны L -образ-

ные шаблоны представлений циркулянтных графов $C(10; \pm 1, \pm 4)$ и $C(12; \pm 1, \pm 4)$, на рис. 3 — фрагмент укладки графа $C(10; \pm 1, \pm 4)$ на плоскости. Алгоритм маршрутизации из [14] требует решения \bar{x}, \bar{y} сравнения $s_1x + s_2y \equiv 1 \pmod{N}$ и предварительного определения параметров a, b, p, q для рассматриваемого циркулянта. Для определения значений искомых параметров применяются алгоритмы со сложностью $O(N)$ [18] или $O(\log N)$ [16], что является затратным при расчётах в масштабных сетях с большим количеством узлов.

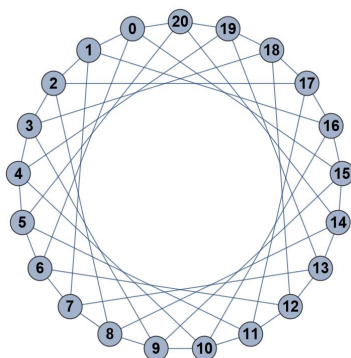


Рис. 1. Циркулянтная сеть $C(21; \pm 1, \pm 6)$

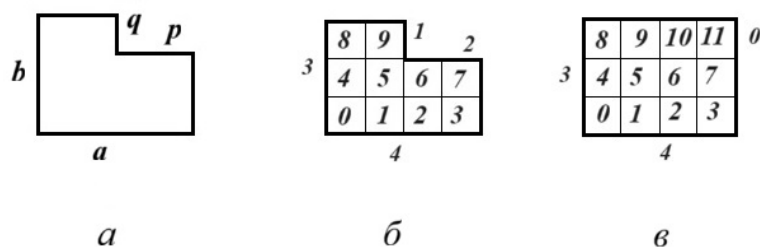


Рис. 2. Параметры L -образных шаблонов для циркулянтов $C(N; \pm 1, \pm s_2)$

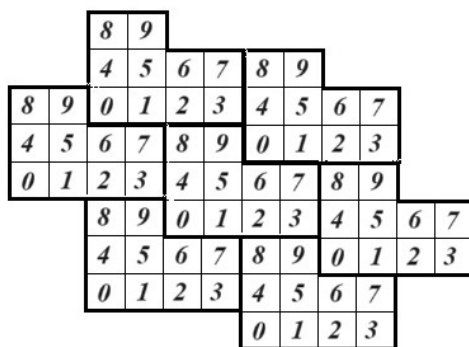


Рис. 3. Плотная укладка на плоскости L -образного шаблона графа $C(10; \pm 1, \pm 4)$

В настоящей работе исследовано совместное конструирование топологий семейств оптимальных по диаметру циркулянтных сетей $C(N; \pm 1, \pm s_2)$ и реализуемых для них оптимальных алгоритмов маршрутизации сложности $O(1)$. С точки зрения выбора эффективного алгоритма маршрутизации для сетей на кристалле рассмотрено множество

семейств оптимальных сетей вида $C(N; \pm 1, \pm s_2)$, задаваемых аналитически и масштабируемых по параметрам L -образных шаблонов. Описан алгоритм сложности $O(1)$ получения аналитических формул для параметров a, b, p, q масштабируемых семейств оптимальных циркулянтов $C(N; \pm 1, \pm s_2)$. На примере ряда таких семейств проведено сравнение предложенного алгоритма сложности $O(1)$ с алгоритмом маршрутизации из [14] по среднему времени поиска кратчайших путей. Приведены результаты моделирования предложенного алгоритма маршрутизации в сети на кристалле и сравнения его по ресурсным затратам с другими известными алгоритмами. Сделаны выводы об эффективности алгоритма и его применимости в сетях на кристалле.

1. Плотная укладка циркулянтов на плоскости в виде L -образных шаблонов

В [16–18] описаны алгоритмы укладки ориентированных циркулянтных графов $C(N; s_1, s_2)$ на плоскости \mathbb{Z}^2 в виде L -образных шаблонов (далее для краткости L -шаблонов). В алгоритме 1 приведён псевдокод построения L -шаблонов и нахождения параметров a, b, p, q для неориентированных циркулянтов вида $C(N; \pm s_1, \pm s_2)$. Алгоритм 1 использовался далее при всех построениях L -шаблонов рассматриваемых графов. Процесс построения L -шаблона графа совпадает с представленным в работе [18], но в отличие от него шаги 1–3 алгоритма 1 описывают явным образом вычисление параметров a, b, p, q . В [16] значения этих параметров определяются по значениям N, s_1, s_2 графа другим алгоритмом — с рекурсивным использованием алгоритма деления Евклида, но в результате не строится сам L -шаблон.

Алгоритм 1. Вычисление параметров a, b, p, q для циркулянтных графов $C(N; \pm s_1, \pm s_2)$

Вход: циркулянтный граф $C(N; \pm s_1, \pm s_2)$.

Выход: значения a, b, p, q L -шаблона графа.

- 1: На плоскости \mathbb{Z}^2 определить нулевую точку решётки $(0, 0)$. Обходить точки первого квадранта с целочисленными координатами (x, y) по диагоналям в следующем порядке: $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (0, 2), (1, 1), (2, 0), (0, 3)$ и т. д. В каждую посещённую точку (x, y) записать номер вершины $k = (xs_1 + ys_2) \bmod N$, если это значение не встречалось ранее. Закончить построение L -шаблона графа, когда все значения $0 \leq k \leq N - 1$ записаны.
 - 2: В полученном массиве точек $\{(x, y, k)\}$ определить две точки: (x_1, y_1, k_1) с $\max_x \max_y \{(x, y, k)\}$ и (x_2, y_2, k_2) с $\min_x \min_y \{(x, y, k)\}$; $a := x_2 + 1, b := y_1 + 1$.
 - 3: **Если** $ab \neq N$, **то**
 - 4: $p := x_2 - x_1, q := y_1 - y_2$, перейти в п. 11,
 - 5: **иначе**
 - 6: в массиве $\{(x, y, k)\}$ определить точку $(x_3, y_3, N - s_2)$.
 - 7: **Если** $x_3 \neq 0$, **то**
 - 8: $p := a - x_3, q := 0$, перейти в п. 11,
 - 9: **иначе**
 - 10: в массиве $\{(x, y, k)\}$ выбрать точку $(x_4, y_4, N - s_1), p := 0, q := b - y_4$.
 - 11: Конец алгоритма.
-

На рис. 2,б показан L -шаблон графа $C(10; \pm 1, \pm 4)$, где $a = 4, b = 3, p = 2, q = 1$; на рис. 2,в — L -шаблон графа $C(12; \pm 1, \pm 4)$, где $a = 4, b = 3, p = 0$ и $q = 1$. В [17]

доказано, что L -шаблон двумерного циркулянтного графа всегда образует плотную укладку на плоскости, и найдена система сравнений для расположения нулевых вершин (вершин с номером 0) на плоскости, справедливая как для ориентированных, так и неориентированных циркулянтов:

$$\begin{aligned} as_1 - qs_2 &\equiv 0 \pmod{N}, \\ -ps_1 + bs_2 &\equiv 0 \pmod{N}. \end{aligned} \quad (1)$$

При этом число вершин графа равно $N = ab - pq$. Согласно [17], если есть несколько L -шаблонов размера N для заданной позиции нулевых вершин на плоскости, то они все соответствуют одним и тем же образующим s_1 и s_2 .

2. Масштабируемость параметров L -шаблонов семейств оптимальных циркулянтов $C(N; \pm 1, \pm s_2)$

Рассмотрим в качестве объекта исследования элементы множества аналитически задаваемых семейств оптимальных циркулянтов вида $C(N; \pm 1, \pm s_2)$. По построению каждое такое семейство состоит из оптимальных графов, т. е. графов с минимально возможным диаметром d для заданного порядка графа. Графы каждого семейства описаны полиномами от диаметра d : N — квадратичная функция, s_2 — линейная или квадратичная функция. Члены семейства существуют при диаметрах

$$d = d_m + kP, \quad k \geq 0, \quad (2)$$

где d_m — минимальный диаметр, при котором член семейства является оптимальным графом; $P = \text{const} \in \{1, 2, \dots\}$ — период появления графов семейства. Множество аналитически задаваемых семейств оптимальных циркулянтов вида $C(N; \pm 1, \pm s_2)$ представлено в Интернете в открытом доступе (далее DLN-датасет): <https://github.com/mila0411/Double-loop-networks/tree/main/Dataset>. В DLN-датасете содержится более 2000 семейств оптимальных графов. По этой ссылке в открытом доступе можно найти список параметров $\{N, s_2, d\}$ описаний всех оптимальных по диаметру циркулянтов вида $C(N; \pm 1, \pm s_2)$ для всех $12 \leq N \leq 50000$ и всех их оптимальных значений образующих $s_2 < N/2$. Эту часть базы данных будем называть просто «датасет».

В [19] введено понятие *L-масштабируемости* аналитически задаваемых семейств оптимальных сетей $C(N(d); \pm 1, \pm s_2(d))$, состоящее в том, что при укладке на плоскости \mathbb{Z}^2 члены семейств образуют последовательности L -шаблонов с параметрами a, b, p, q , аналитически задаваемыми в виде линейных полиномов от диаметра d . Рассмотрим кратко основные принципы концепции L -масштабируемости семейств.

Пусть задано семейство L -масштабируемых оптимальных аналитически задаваемых циркулянтов $C(N(d); \pm 1, \pm s_2(d))$, где диаметр $d \geq d_m$, $P \in \{1, 2, \dots\}$ и выполняется (2). Для двух последовательных членов семейства вычислим значения полиномов $N(d)$, $s_2(d)$ при $d_1 = d_m$ и $d_2 = d_1 + P$. Получим графы $C(N(d_1); \pm 1, \pm s_2(d_1))$ и $C(N(d_2); \pm 1, \pm s_2(d_2))$. Применяя алгоритм 1 вычисления параметров a, b, p, q к найденным графам, определим значения $a(d_1), b(d_1), p(d_1), q(d_1)$ и $a(d_2), b(d_2), p(d_2), q(d_2)$. Для L -масштабируемого семейства диаметра d формулы для искомых параметров имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} a(d) &= (\Delta a/P)d + a(d_1) - (\Delta a/P)d_1, \\ b(d) &= (\Delta b/P)d + b(d_1) - (\Delta b/P)d_1, \\ p(d) &= (\Delta p/P)d + p(d_1) - (\Delta p/P)d_1, \\ q(d) &= (\Delta q/P)d + q(d_1) - (\Delta q/P)d_1, \end{aligned} \quad (3)$$

при условии $\Delta a = a(d_2) - a(d_1) \geq 0$, $\Delta b = b(d_2) - b(d_1) \geq 0$, $\Delta p = p(d_2) - p(d_1) \geq 0$, $\Delta q = q(d_2) - q(d_1) \geq 0$. Геометрически это означает, что длины соответствующих сторон L -шаблонов укладки графов семейства на плоскости увеличиваются линейно при росте диаметра графа. Одна из них при этом может сохранять свою длину как, например, параметр $q = 1$ на рис. 4.

Таким образом, вычисление значений параметров a, b, p, q с помощью алгоритма 1 при двух малых значениях диаметра $d_1 = d_m$ и $d_2 = d_1 + P$ даёт формулы (3) для них, справедливые при любых возможных диаметрах (2) графов семейства. По формулам (3) можно определить параметры L -шаблона при больших N , таким образом, сложность решения проблемы определения параметров L -шаблонов $O(\log N)$ [16] сокращается до $O(1)$.

Для всех более чем 2000 аналитически задаваемых семейств оптимальных циркулянтов из DLN-датасета проведена проверка выполнения условия (1) и экспериментально подтверждена L -масштабируемость около 90 % семейств. В табл.1 приведён фрагмент списка L -масштабируемых семейств графов, существующих при каждом диаметре $d \geq d_m$, т. е. при $P = 1$. Фрагмент представленных семейств включает значения минимального диаметра d_m , полиномы для N и s_2 , коэффициенты при степенях d для полиномов параметров a, b, p, q .

Т а б л и ц а 1

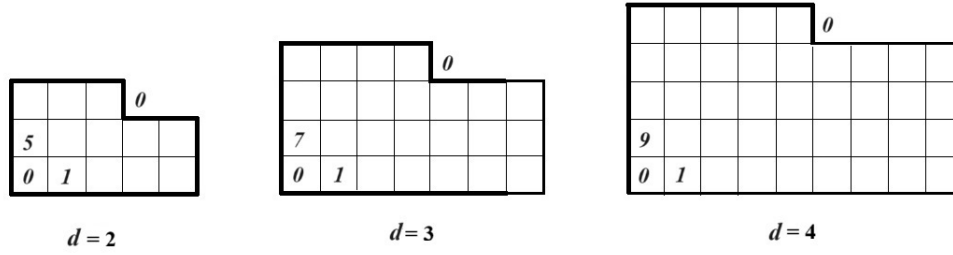
Фрагмент DLN-датасета L -масштабируемых семейств оптимальных графов

d_m	$\{N, s_2\}$	$\{a_1, a_0\}$	$\{b_1, b_0\}$	$\{p_1, p_0\}$	$\{q_1, q_0\}$
3	$\{2 - 2d + 2d^2, -1 + 2d\}$	$\{2, -1\}$	$\{1, 0\}$	$\{1, -2\}$	$\{0, 1\}$
10	$\{-8 - d + 2d^2, 4 + 2d\}$	$\{1, 0\}$	$\{3, -7\}$	$\{1, -4\}$	$\{1, -2\}$
5	$\{-3 - d + 2d^2, 2 + 2d\}$	$\{1, 1\}$	$\{2, -3\}$	$\{0, 0\}$	$\{1, -1\}$
8	$\{-13 + 2d^2, -5 + 2d\}$	$\{2, -5\}$	$\{1, 3\}$	$\{1, -2\}$	$\{0, 1\}$
7	$\{-11 + 2d^2, -5 + 2d\}$	$\{2, -5\}$	$\{1, 3\}$	$\{1, -4\}$	$\{0, 1\}$
4	$\{-4 + 2d^2, -3 + 2d\}$	$\{2, -3\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, -2\}$	$\{0, 1\}$
2	$\{2d^2, -1 + 2d\}$	$\{2, -1\}$	$\{1, 1\}$	$\{1, -1\}$	$\{0, 1\}$
10	$\{-28 + d + 2d^2, 8 + 2d\}$	$\{1, 4\}$	$\{2, -7\}$	$\{0, 0\}$	$\{1, -3\}$
3	$\{-1 + 2d + 2d^2, 3 + 2d\}$	$\{1, 1\}$	$\{3, -1\}$	$\{1, 0\}$	$\{1, 0\}$
1	$\{1 + 2d + 2d^2, 1 + 2d\}$	$\{2, 1\}$	$\{1, 1\}$	$\{1, 0\}$	$\{0, 1\}$

Проведённая экспериментальная проверка ограничена размерами датасета ($N \leq 50000$, $d \leq 158$). Докажем на некоторых примерах, что свойство L -масштабируемости сохраняется для построенных семейств оптимальных циркулянтов из DLN-датасета при любых диаметрах из области их определения (2). Рассмотрим известное в литературе (для ссылок см. [2]) семейство экстремальных циркулянтов — оптимальных двумерных графов с максимально возможным числом вершин при любом диаметре, у которых диаметр равен точной нижней границе $\text{ulb}(N)$.

Утверждение 1 [19]. Параметры L -шаблонов для семейства оптимальных циркулянтов $C(2d^2 + 2d + 1; \pm 1, \pm(2d + 1))$ равны $a(d) = 2d + 1$, $b(d) = d + 1$, $p(d) = d$, $q(d) = 1$ при любом диаметре $d \geq 1$.

На рис. 4 изображены L -шаблоны укладки на плоскости трёх графов семейства из утверждения 1: $C(13; \pm 1, \pm 5)$, $C(25; \pm 1, \pm 7)$, $C(41; \pm 1, \pm 9)$ с диаметрами $d = 2, 3, 4$ соответственно.

Рис. 4. Масштабируемость параметров L -шаблонов для графов семейства из утверждения 1

Утверждение 2. Параметры L -шаблонов для семейства оптимальных циркулянтов $C(2d^2; \pm 1, \pm(2d - 1))$ равны $a(d) = 2d - 1$, $b(d) = d + 1$, $p(d) = d - 1$, $q(d) = 1$ при любом диаметре $d > 1$.

Доказательство. Пусть $d_1 = 2$, $d_2 = 3$. Применив алгоритм 1, получим $\Delta a = 9 - 7 = 2$, $\Delta b = 17 - 11 = 6$, $\Delta p = 8 - 6 = 2$, $\Delta q = 6 - 4 = 2$. В силу (3) $a(d) = 2d - 1$, $b(d) = d + 1$, $p(d) = d - 1$, $q(d) = 1$. Проверка выполнения (1) даёт при любом $d > 1$

$$\begin{aligned} 2d - 1 - (2d - 1) &= 0, \\ -(d - 1) + (d + 1)(2d - 1) &= 2d^2 = N. \end{aligned}$$

Утверждение 2 доказано. ■

Утверждение 3. Параметры L -шаблонов для семейства оптимальных циркулянтов $C(2d^2 + d - 1; \pm 1, \pm(2d + 2))$ равны $a(d) = d + 1$, $b(d) = 2d - 1$, $p(d) = 0$, $q(d) = d$ при любом диаметре $d > 2$.

Доказательство. Пусть $d_1 = 3$, $d_2 = 4$. Применив алгоритм 1, получим $\Delta a = 8 - 6 = 2$, $\Delta b = 12 - 8 = 4$, $\Delta p = 0$, $\Delta q = 5 - 3 = 2$. В силу (3) $a(d) = d + 1$, $b(d) = 2d - 1$, $p(d) = 0$, $q(d) = d$. Проверка выполнения (1) даёт при любом $d > 2$

$$\begin{aligned} (d + 1) - d(2d + 2) &= -2d^2 - d + 1 = -N, \\ -0 + (2d - 1)(2d + 2) &= 4d^2 + 2d - 2 = 2N. \end{aligned}$$

Утверждение 3 доказано. ■

Утверждение 4. Параметры L -шаблонов для семейства оптимальных циркулянтов $C(2d^2 + d - 28; \pm 1, \pm(2d + 8))$ равны $a(d) = d + 4$, $b(d) = 2d - 7$, $p(d) = 0$, $q(d) = d - 3$ при любом диаметре $d \geq 10$.

Доказательство. Пусть $d_1 = 10$, $d_2 = 11$. Применив алгоритм 1, получим $\Delta a = 15 - 14 = 1$, $\Delta b = 15 - 13 = 2$, $\Delta p = 0$, $\Delta q = 8 - 7 = 1$. В силу (3) $a(d) = d + 4$, $b(d) = 2d - 7$, $p(d) = 0$, $q(d) = d - 3$. Проверка выполнения (1) даёт при любом $d \geq 10$

$$\begin{aligned} (d + 4) - (d - 3)(2d + 8) &= -2d^2 - d + 28 = -N, \\ -0 + (2d - 7)(2d + 8) &= 4d^2 + 2d - 56 = 2N. \end{aligned}$$

Утверждение 4 доказано. ■

Равенство $p(d) = 0$ в утверждениях 3 и 4 соответствует семействам с прямоугольным типом L -шаблона. Как показано в [16], прямоугольный тип L -шаблонов имеет место, если $bs_2 \equiv 0 \pmod{N}$. В наших случаях $N = (d + 1)(2d - 1)$ и $N = (d + 4)(2d - 7)$ соответственно. Оптимальные графы, которым соответствуют L -шаблоны прямоугольного вида (решётчатые структуры), хорошо подходят для практической реализации

в качестве топологий сетей на кристалле благодаря минимальному числу пересекающихся линий связи и независимости длины максимальной линии связи от числа узлов [20, 21], что является преимуществом при проектировании масштабных сетей на кристалле. Поиск семейств оптимальных кольцевых циркулянтов с прямоугольным типом L -шаблонов, которые к тому же существенно меньше по диаметру двумерных тороидальных структур того же размера, является актуальной задачей при проектировании топологий сетей на кристалле.

3. Алгоритм маршрутизации для семейств оптимальных циркулянтов

В силу симметрии циркулянтов при поиске кратчайших путей между двумя вершинами достаточно решить задачу поиска кратчайших путей из 0 во все вершины циркулянта. Известные алгоритмы маршрутизации [9, 12–15] решают проблему поиска кратчайших путей для двумерного циркулянтного графа, используя координаты девяти, семи или пяти соседних нулей в плотной укладке графа на плоскости и определяя кратчайший путь к вершине как минимум расстояний от неё до этих нулей.

В работе [19] для оптимальных сетей вида $C(N; \pm 1, \pm s_2)$ предложена модификация алгоритма маршрутизации из [14], использующего координаты пяти соседних нулей. Обозначим эти нули как $(0, 0)$, (u, v) , $(-a_0, b_0)$, $(-u, -v)$ и $(a_0, -b_0)$. Далее приведён текст предложенного алгоритма маршрутизации (алгоритм 2). Запись типа $a_1 + b_1[s_2]$ означает, что путь из 0 в вершину i содержит a_1 шагов по образующей $s_1 = 1$ плюс b_1 шагов по образующей s_2 . Знаки a_1 и b_1 определяют направление движения по образующей (+) или против (-). Запись $\text{round}(x)$ означает операцию округления: $\text{round}(x) = \lfloor x + 0,5 \rfloor$.

Предварительный этап настройки алгоритма 2 для графов оптимального семейства $C(N(d); \pm 1, \pm s_2(d))$, где d удовлетворяет (2), состоит в следующем: по формулам (3) определяются параметры $a(d)$, $b(d)$, $p(d)$, $q(d)$ для L -шаблона графов семейства. Решением (\bar{x}, \bar{y}) сравнения $x + s_2(d)y \equiv 1 \pmod{N}$ в данном случае является $\bar{x} = 1$, $\bar{y} = 0$. Этот предварительный этап делается один раз при формировании топологии системы в виде графа $C(N; \pm 1, \pm s_2)$.

Алгоритм 2. Вычисление кратчайшего пути из 0 в любую вершину графа $C(N; \pm 1, \pm s_2)$

Вход: параметры N, s_2, a, b, p, q , $u = a - p$, $v = b - q$, номер вершины приёмника $i \in \{1, \dots, N - 1\}$.

Выход: кратчайший путь из 0 в вершину i графа.

1: **Если** $u \geq v$, **то**

$a_0 := p$; $b_0 := b$;

2: **иначе**

3: $a_0 := a$; $b_0 := q$.

4: $(a_1, b_1) := (i, 0) - (\text{round}(ib_0/N), \text{round}(-iv/N)) \begin{pmatrix} u & v \\ -a_0 & b_0 \end{pmatrix}$.

5: $P_1 := a_1 + b_1[s_2]$, $P_2 := a_1 - u + (b_1 - v)[s_2]$, $P_3 := a_1 + a_0 + (b_1 - b_0)[s_2]$,
 $P_4 := a_1 + u + (b_1 + v)[s_2]$, $P_5 := a_1 - a_0 + (b_1 + b_0)[s_2]$.

6: Из путей P_1 – P_5 выбрать минимальный по сумме шагов по двум образующим кратчайший путь P' из 0 в вершину i .

В силу симметрии циркулянтов кратчайший путь из вершины i в вершину j равен кратчайшему пути из 0 в вершину $(j - i) \bmod N$, поэтому при вычислении оптимально-

го маршрута из любого источника в приёмник делается указанная поправка с помощью циклического сдвига номеров вершин.

Алгоритм 2 реализован на PC с AMD Ryzen 5 5500U в системе высокоуровневого моделирования Wolfram Mathematica (WM) и экспериментально проверен на множестве оптимальных циркулянтов вида $C(N; \pm 1, \pm s_2)$ из датасета путём сравнения с работой алгоритма Дейкстры, взятом из библиотеки подпрограмм WM. В силу симметрии циркулянтов в качестве источников сообщений рассматривались нулевые вершины графов, в качестве приёмников — каждая вершина $i = 1, 2, \dots, N - 1$. Для всех порядков графов $12 \leq N \leq 2048$ и всех их оптимальных образующих s_2 из датасета оптимальных циркулянтов алгоритм 2 показал 100 %-е совпадение по вычисляемой длине кратчайшего пути. Также выборочно проверялись отдельные структуры с числом вершин до $N = 25000$.

Отметим, что алгоритм 2 является модификацией алгоритма маршрутизации [14], предназначенной для работы с оптимальными графами датасета, а не его частным случаем при $t = \lfloor p/u \rfloor = 0$ (или $t = \lfloor q/v \rfloor = 0$), поскольку шаг 1 алгоритма 2 правильно задаёт координаты соседнего нуля $(-a_0, b_0)$ и при $t = 1$.

4. Результаты реализации алгоритма поиска кратчайшего пути

Проведено сравнение по времени работы алгоритма 2 с алгоритмом из [14]. В качестве тестовых заданий взяты графы семейств из утверждений 1–3. На рис. 5–7 приведены средние оценки времени T (в секундах) работы алгоритма 2 и алгоритма из [14], полученные для трёх семейств оптимальных графов из утверждений 1–3 соответственно. Здесь d — диаметр графов; источник сообщений — нулевая вершина; приёмники — все вершины графа. Точками на графиках обозначены результаты работы алгоритма 2, квадратами — алгоритма из [14]. Тестирование проводилось на PC с параметрами AMD Ryzen 5 5500U, 16 Гбайт, Windows 11.

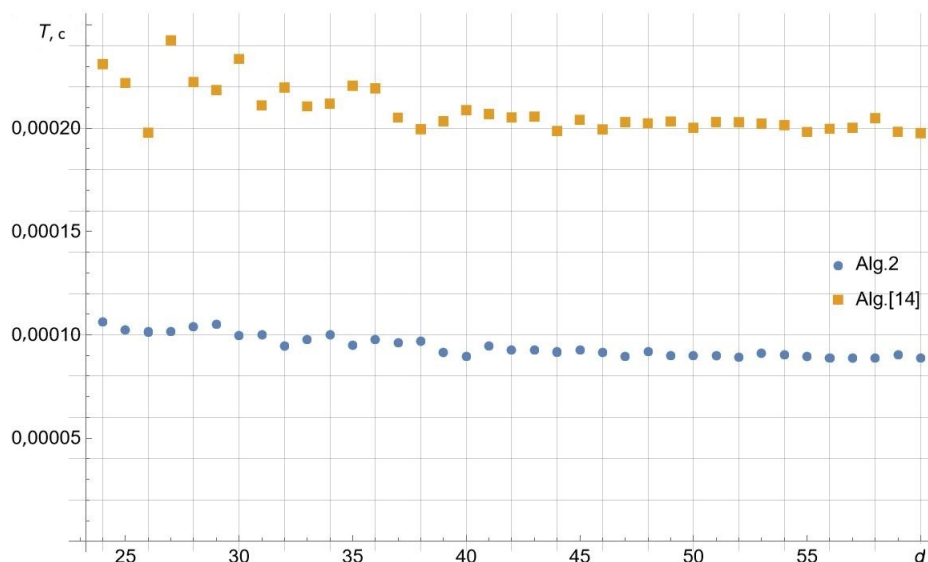


Рис. 5. Среднее время работы алгоритмов маршрутизации на графах семейства из утверждения 1

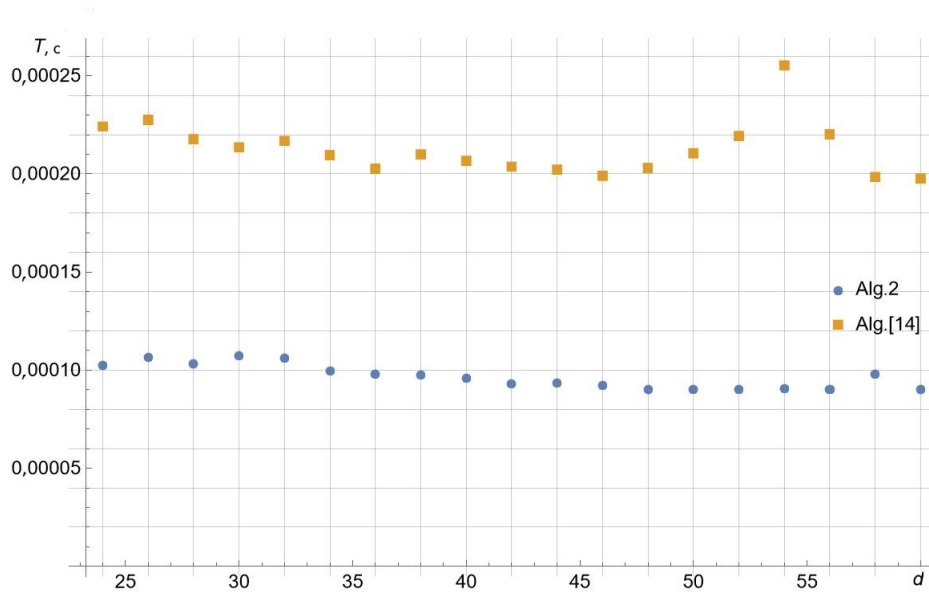


Рис. 6. Среднее время работы алгоритмов маршрутизации на графах семейства из утверждения 2

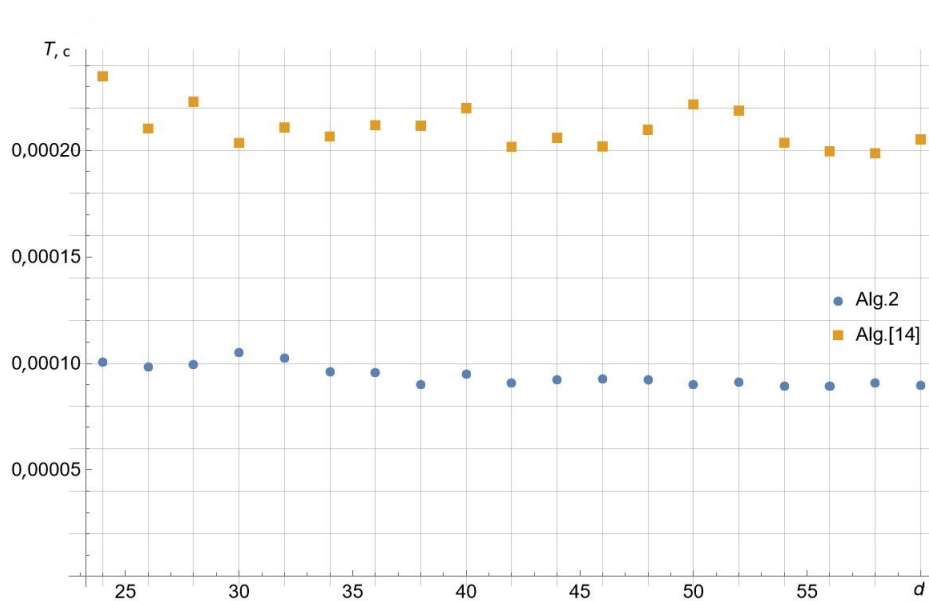


Рис. 7. Среднее время работы алгоритмов маршрутизации на графах семейства из утверждения 3

Новый алгоритм показал затраты времени для расчёта кратчайших путей в среднем в 2 раза меньше, чем алгоритм из [14]. Кроме того, он может работать на семействах оптимальных двумерных циркулянтов вида $C(N; \pm 1, \pm s_2)$, в отличие от алгоритмов из [9, 12, 13], применимых для специальных семейств оптимальных графов. Полученные результаты демонстрируют, что среднее время вычисления оптимального маршрута между двумя узлами не зависит от числа узлов в сети.

Отметим, что для графов с прямоугольным L -контуром укладки на плоскости (таких, как графы из утверждений 3 и 4) время исполнения алгоритмов маршрутизации может быть существенно уменьшено за счёт сокращения до трёх или четырёх количества необходимых для маршрутизации соседних нулей.

5. Результаты моделирования алгоритма маршрутизации в сети на кристалле: оценки ресурсных затрат

Для сетей на кристалле основными критическими показателями, ограничивающими возможности кристалла, являются затраты памяти и логических блоков, в том числе при сравнении различных видов алгоритмов маршрутизации.

Выполнено моделирование алгоритма 2 (обозначим его LR) в качестве основы маршрутизатора сети на кристалле и проверена корректность его работы в программе низкоуровневого моделирования HDLNoCGen [22]. Для реализации алгоритма LR в сети на кристалле на языке описания аппаратуры Verilog шаг 2 алгоритма был частично изменён. Это связано с тем, что для его работы необходимо производить деление и реализовать математику работы с вещественными числами, что является ресурсозатратной задачей для ПЛИС. Поэтому вычисление (a_1, b_1) разбивается на два этапа.

На первом этапе происходит вычисление округлённых значений x_1, x_2 :

- $x_1 := ib_0 \operatorname{div} N$; если $ib_0 x_1 \geq N/2$, то $x_1 := x_1 + 1$;
- $x_2 := -iv \operatorname{div} N$; если $-iv x_2 \geq N/2$, то $x_2 := x_2 - 1$.

На втором этапе происходит дальнейшее преобразование шага 2:

- $(a_1, b_1) := (i - x_1 u + x_2 a_0, -x_1 v - x_2 b_0)$.

Шаги 3 и 4 алгоритма LR логически остаются без изменений, отличие — в последовательной организации вычислений P_1, \dots, P_5 с целью уменьшения количества регистров, необходимого для хранения результатов.

Формула для теоретического расчёта ресурсов памяти в битах для общего вида алгоритма LR: $2\lceil \log_2 N \rceil + 10\lceil \log_2 2d \rceil$, где N — количество узлов в сети; d — диаметр графа; $\lceil \log_2 N \rceil$ — необходимое количество битов для хранения порядкового номера маршрутизатора в сети и общего количества маршрутизаторов; $\lceil \log_2 2d \rceil$ — необходимое количество битов для хранения одной переменной для промежуточных вычислений. Поскольку вычисление коэффициентов a, b, p, q происходит через диаметр циркулянта d , хранить их не требуется.

Тестирование алгоритма проводилось для семейств оптимальных циркулянтов из утверждений 1–4. Так как аппаратные затраты практически не зависят от вида семейств, приведены результаты тестирования на примере семейства оптимальных циркулянтов из утверждения 1 (табл. 2 и 3), из которых следует, что рост потребления ресурсов чипа при росте числа узлов может быть описан квадратичной зависимостью. При этом не наблюдается резких выбросов на данных, то есть зависимость можно описать гладкой функцией с достаточной точностью. Используя стандартный аппарат математической библиотеки Python, на основе полученных практических данных найдены следующие аппроксимационные формулы для расчёта ресурсов памяти и логических ресурсов:

$$\begin{aligned} U_{\text{рег}} &= 0,0484N^2 + 34,71N + 114,27, \\ U_{\text{алм}} &= 0,4566N^2 + 221,28N - 1141,2. \end{aligned}$$

Проведено сравнение алгоритма LR и алгоритма из [14], применимого для циркулянтов $C(N; \pm s_1, \pm s_2)$. Они показали соизмеримые характеристики по занимаемым логическим ресурсам и ресурсам памяти. Но алгоритм LR лучше алгоритма из [14], как было показано в п. 4, почти в 2 раза по времени расчёта кратчайших путей в графе.

Проведено также сравнение алгоритма LR с четырьмя ранее моделированными в сети на кристалле алгоритмами маршрутизации: AA [23] — адаптивным алгоритмом

Таблица 2

Ресурсы памяти в регистрах REG

Циркулянт	N	Диаметр	Один маршрутизатор, REG	Вся сеть, REG
$C(25; 1, 7)$	25	3	23	745
$C(41; 1, 9)$	41	4	27	1410
$C(61; 1, 11)$	61	5	27	2089
$C(85; 1, 13)$	85	6	31	3367
$C(113; 1, 15)$	113	7	31	4468
$C(145; 1, 17)$	145	8	35	6431
$C(181; 1, 19)$	181	9	35	8069
$C(221; 1, 21)$	221	10	35	9816

Таблица 3

Логические ресурсы в ALM-блоках

Циркулянт	N	Диаметр	Один маршрутизатор, ALM	Вся сеть, ALM
$C(25; 1, 7)$	25	3	139	3415
$C(41; 1, 9)$	41	4	184	7682
$C(61; 1, 11)$	61	5	184	11537
$C(85; 1, 13)$	85	6	237	20679
$C(113; 1, 15)$	113	7	237	27496
$C(145; 1, 17)$	145	8	301	44561
$C(181; 1, 19)$	181	9	301	55683
$C(221; 1, 21)$	221	10	301	67956

для циркулянтов $C(N; \pm 1, \pm s_2)$; AC [23], PEA [4], GRBT [9] — алгоритмами, применимыми для семейства циркулянтов вида $C(N; \pm d, \pm(d + 1))$ при $d > 1$ и использующими разные принципы вычисления кратчайшего пути в графах. На основе данных о занимаемых ресурсах памяти (REG) и логических ресурсах (ALM), приведённых в [4, 9, 23], созданы аппроксимационные формулы для вычисления значений ресурсов для циркулянтов с количеством узлов, определяемым согласно утверждению 1. Результаты сравнения приведены в табл. 4 и 5, где алгоритмы расположены в порядке возрастания требуемых ресурсов.

Таблица 4

Ресурсы памяти REG для разных алгоритмов маршрутизации

N	AA	LR	PEA	AC	GRBT
25	305	745	1286	1319	2550
41	554	1410	2293	2536	5007
61	913	2089	3569	4273	8232
85	1415	3367	5125	6674	12326
113	2100	4468	6975	9913	17413
145	3011	6431	9135	14190	23635
181	4202	8069	11624	19736	31155
221	5729	9816	14461	26811	40158

Получены следующие результаты: по занимаемым ресурсам памяти алгоритм LR лучше всех рассмотренных в табл. 4, кроме алгоритма AA. Алгоритм AA — лучше по ресурсам памяти, но проигрывает LR в быстродействии из-за большого количества

Таблица 5
**Логические ресурсы ALM для разных
 алгоритмов маршрутизации**

N	PEA	LR	GRBT	AC	AA
25	3560	3415	4755	6350	12524
41	7004	7682	9198	13666	25829
61	11352	11537	14435	26066	44121
85	16632	20679	20255	45721	68508
113	22879	27496	26405	75235	100319
145	30132	44561	32589	117648	141106
181	38438	55683	38470	176433	192639
221	47848	67956	43667	255495	256914

операций деления и присваивания [23]. По логическим ресурсам LR лучше алгоритмов AA и AC. По сравнению с алгоритмом GRBT он показал себя лучше по ALM для сети с размером до 61 узла, но алгоритм GRBT в 4 раза хуже по требуемым затратам памяти.

По сравнению с алгоритмом аналитического типа PEA он оказывается лучше почти в 1,5 раза по ресурсам памяти, но проигрывает до 30 % по логическим ресурсам. Так как ALM обычно менее ценный ресурс, чем память, которая определяет предельно возможное количество маршрутизаторов в сети на кристалле, то предложенный алгоритм для реализации предпочтительнее, чем алгоритмы PEA и GRBT. В отличие от алгоритмов PEA и GRBT, применимых для оптимальных циркулянтов вида $C(N; \pm d, \pm(d+1))$, алгоритм LR ориентирован на использование в сети на кристалле топологии кольцевых циркулянтов $C(N; \pm 1, \pm s_2)$. Отметим, что единичная образующая $s_1 = 1$ является удобной для реализации простых локальных алгоритмов маршрутизации и сложных адаптивных и отказоустойчивых вычислений, и для такой топологии сети на кристалле можно применять готовые 4-портовые маршрутизаторы, используемые для тороидальных топологий.

Заключение

В работе на уровнях высокоуровневого моделирования в системе Wolfram Mathematica и низкоуровневого моделирования сети на кристалле HDLNoCGen исследован комплексный подход к кодизайну топологий и алгоритмов маршрутизации для семейств оптимальных по диаметру кольцевых двумерных циркулянтных сетей. Проведено моделирование в сети на кристалле топологий семейств оптимальных кольцевых циркулянтов. На таких топологиях реализован и исследован новый алгоритм вычисления кратчайших путей по оценкам временных и ресурсных затрат. Реализация предложенного алгоритма маршрутизации в качестве основы маршрутизатора в сети на кристалле и проведённое сравнение с другими алгоритмами поиска кратчайших путей показали приемлемые значения его ресурсных затрат по памяти и логическим ресурсам и эффективность по затратам времени при расчёте кратчайших путей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hwang F. K.* A survey on multi-loop networks // Theoret. Comput. Sci. 2003. No.299. P. 107–121.
2. *Монахова Э. А.* Структурные и коммуникативные свойства циркулянтных сетей // Прикладная дискретная математика. 2011. № 3 (13). С. 92–115.

3. *Huang X., Ramos A. F., and Deng Y.* Optimal circulant graphs as low-latency network topologies // *J. Supercomput.* 2022. V. 78. No. 11. P. 13491–13510.
4. *Monakhova E. A., Romanov A. Y., and Lezhnev E. V.* Shortest path search algorithm in optimal two-dimensional circulant networks: Implementation for Networks-on-Chip // *IEEE Access.* 2020. V. 8. P. 215010–215019.
5. *Liu H., Li X., and Wang S.* Construction of dual optimal bidirectional double-loop networks for optimal routing // *Mathematics.* 2022. V. 10. No. 21. Paper 4016.
6. *Hoffmann R., Désérable D., and Sereďyński F.* Cellular automata rules solving the wireless sensor network coverage problem // *Nat. Comput.* 2022. V. 21. P. 417–447.
7. *Erickson A., Stewart I. A., Navaridas J., and Kiasari A. E.* The stellar transformation // *Comput. Netw.* 2017. V. 113. P. 29–45.
8. *Fei J. and Lu C.* Adaptive sliding mode control of dynamic systems using double loop recurrent neural network structure // *IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst.* 2018. V. 29. P. 1275–1286.
9. *Monakhova E. A., Monakhov O. G., and Romanov A. Yu.* Routing algorithms in optimal degree four circulant networks based on relative addressing: Comparative analysis for networks-on-chip // *IEEE Trans. Network Sci. Eng.* 2023. V. 10. No. 1. P. 413–425.
10. *Deng Y., Guo M., Ramos A. F., et al.* Optimal low-latency network topologies for cluster performance enhancement // *J. Supercomput.* 2020. V. 76. No. 12. P. 9558–9584.
11. *Muhsen Y. R., Husin N. A., Zolkepli M. B., et al.* 181Routing techniques in network-on-chip based multiprocessor-system-on-chip for IOT: A systematic review // *Iraqi J. Comput. Sci. Math.* 2024. V. 5. Iss. 1. Article 16.
12. *Beivide R., Herrada E., Balcazar J. L., and Arruabarrena A.* Optimal distance networks of low degree for parallel computers // *IEEE Trans. Comput.* 1991. V. 40. No. 10. P. 1109–1124.
13. *Jha P. K.* Dimension-order routing algorithms for a family of minimal-diameter circulants // *J. Inter. Networks.* 2013. V. 14. No. 1. P. 1350002.
14. *Chen B.-X., Meng J.-X., and Xiao W.-J.* A constant time optimal routing algorithm for undirected double-loop networks // *LNCS.* 2005. V. 3794. P. 308–316.
15. *Camarero C., Martinez C., and Beivide R.* L-networks: a topological model for regular two-dimensional interconnection networks // *IEEE Trans. Comput.* 2013. V. 62. No. 7. P. 1362–1375.
16. *Hwang F. K.* A complementary survey on double-loop networks // *Theoret. Comput. Sci.* 2001. No. 263. P. 211–229.
17. *Fiol M. A., Yebra J. L. A., Alegre I., and Valero M.* A discrete optimization problem in local networks and data alignment // *IEEE Trans. Comput.* 1987. V. 36. No. 6. P. 702–713.
18. *Wong C. K. and Coppersmith D.* A combinatorial problem related to multimodule memory organizations // *J. Assoc. Comput. Mach.* 1974. V. 21. No. 3. P. 392–402.
19. *Монахов О. Г., Монахова Э. А.* Масштабируемый подход к кодизайну топологий и алгоритмов маршрутизации для семейств оптимальных циркулянтных сетей степени четыре // *Дискретн. анализ и исслед. опер.* 2025. Т. 32. № 2. С. 88–106.
20. *Beivide R., Herrada E., Balcazar J. L., and Labarta J.* Optimized mesh-connected networks for SIMD and MIMD architectures // *Proc. ISCA'87. Pittsburgh, Pennsylvania, USA, 1987.* P. 163–170.
21. *Lau F. C. M. and Chen G.* Optimal layouts of midimew networks // *IEEE Trans. Parallel Distrib. Syst.* 1996. V. 7. No. 9. P. 954–961.
22. *Lezhnev E., Zunin V., Amerikanov A., and Romanov A.* Electronic computer-aided design for low-level modeling of networks-on-chip // *IEEE Access.* 2024. V. 12. P. 48750–48763.

23. Romanov A. Y. Development of routing algorithms in networks-on-chip based on ring circulant topologies // Heliyon. 2019. V. 5. No. 4. Paper e01516.

REFERENCES

1. Hwang F. K. A survey on multi-loop networks. Theoret. Comput. Sci., 2003, no. 299, pp. 107–121.
2. Monakhova E. A. Strukturnye i kommunikativnye svoystva tsirkulyantnykh setey [Structural and communicative properties of circulant networks]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2011, no. 3 (13), pp. 92–115. (in Russian)
3. Huang X., Ramos A. F., and Deng Y. Optimal circulant graphs as low-latency network topologies. J. Supercomput. 2022, vol. 78, no. 11, pp. 13491–13510.
4. Monakhova E. A., Romanov A. Y., and Lezhnev E. V. Shortest path search algorithm in optimal two-dimensional circulant networks: Implementation for Networks-on-Chip. IEEE Access. 2020, vol. 8. P. 215010–215019.
5. Liu H., Li X., and Wang S. Construction of dual optimal bidirectional double-loop networks for optimal routing. Mathematics, 2022, vol. 10, no. 21, paper 4016.
6. Hoffmann R., Désérable D., and Sedyński F. Cellular automata rules solving the wireless sensor network coverage problem. Nat. Comput., 2022, vol. 21, pp. 417–447.
7. Erickson A., Stewart I. A., Navaridas J., and Kiasari A. E. The stellar transformation. Comput. Netw., 2017, vol. 113, pp. 29–45.
8. Fei J. and Lu C. Adaptive sliding mode control of dynamic systems using double loop recurrent neural network structure. IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst., 2018, vol. 29, pp. 1275–1286.
9. Monakhova E. A., Monakhov O. G., and Romanov A. Yu. Routing algorithms in optimal degree four circulant networks based on relative addressing: Comparative analysis for networks-on-chip. IEEE Trans. Network Sci. Eng., 2023, vol. 10, no. 1, pp. 413–425.
10. Deng Y., Guo M., Ramos A. F., et al. Optimal low-latency network topologies for cluster performance enhancement. J. Supercomput., 2020, vol. 76, no. 12, pp. 9558–9584.
11. Muhsen Y. R., Husin N. A., Zolkepli M. B., et al. 181Routing techniques in network-on-chip based multiprocessor-system-on-chip for IOT: A systematic review. Iraqi J. Comput. Sci. Math., 2024, vol. 5, iss. 1, article 16.
12. Beivide R., Herrada E., Balcazar J. L., and Arruabarrena A. Optimal distance networks of low degree for parallel computers. IEEE Trans. Comput., 1991, vol. 40, no. 10, pp. 1109–1124.
13. Jha P. K. Dimension-order routing algorithms for a family of minimal-diameter circulants. J. Inter. Networks, 2013, vol. 14, no. 1, pp. 1350002.
14. Chen B.-X., Meng J.-X., and Xiao W.-J. A constant time optimal routing algorithm for undirected double-loop networks. LNCS, 2005, vol. 3794, pp. 308–316.
15. Camarero C., Martinez C., and Beivide R. L-networks: a topological model for regular two-dimensional interconnection networks. IEEE Trans. Comput., 2013, vol. 62, no. 7, pp. 1362–1375.
16. Hwang F. K. A complementary survey on double-loop networks. Theoret. Comput. Sci., 2001, no. 263, pp. 211–229.
17. Fiol M. A., Yebra J. L. A., Alegre I., and Valero M. A discrete optimization problem in local networks and data alignment. IEEE Trans. Comput., 1987, vol. 36, no. 6, pp. 702–713.
18. Wong C. K. and Coppersmith D. A combinatorial problem related to multimodule memory organizations. J. Assoc. Comput. Mach., 1974, vol. 21, no. 3, pp. 392–402.
19. Monakhov O. G. and Monakhova E. A. Masshtabiruemyy podkhod k kodizaynu topologiy i algoritmov marshrutizatsii dlya semeystv optimal'nykh tsirkulyantnykh setey stepeni chetyre

- [A scalable approach to co-design of topologies and routing algorithms for families of optimal degree-four circulant networks]. *Diskretnyi Analiz i Issledovanie Operatsii*, 2025, vol. 32, no. 2, pp. 88–106. (in Russian)
20. *Beivide R., Herrada E., Balcazar J. L., and Labarta J.* Optimized mesh-connected networks for SIMD and MIMD architectures. *Proc. ISCA'87*, Pittsburgh, Pennsylvania, USA, 1987, pp. 163–170.
 21. *Lau F. C. M. and Chen G.* Optimal layouts of midimew networks. *IEEE Trans. Parallel Distrib. Syst.*, 1996, vol. 7, no. 9, pp. 954–961.
 22. *Lezhnev E., Zunin V., Amerikanov A., and Romanov A.* Electronic computer-aided design for low-level modeling of networks-on-chip. *IEEE Access*, 2024, vol. 12, pp. 48750–48763.
 23. *Romanov A. Y.* Development of routing algorithms in networks-on-chip based on ring circulant topologies. *Heliyon*, 2019, vol. 5, no. 4, paper e01516.