

МАТЕМАТИКА КАК МОДЕЛЬ СМЫСЛОВОЙ СТРУКТУРЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ЗНАНИЯ

Проблема смыслообразования в теоретическом знании решается с явления а posteriori потенциальной возможности мироощущения, называемой далее послеопределенностью А. Ее актуализация с помощью предопределенности миропонимания В и всеопределенности мировоззрения Г призвана снять неопределенность мировосприятия Н с помощью потребностей, взаимно однозначно удовлетворяемых возможностями А. Математический алгоритм смыслообразования с помощью биекции Галуа состоит из четырех шагов. Четыре независимых направления представлены вершинами координатного тетраэдра трехмерного проективного пространства.

Ключевые слова: философские и математические основания смысловой структуры знания; проективное пространство.

Исследование смысловой структуры теоретического знания мы начнем с изложения философских и математических оснований авторской концепции смыслообразования в области знания [1]. Её принципы гласят:

1. Мир состоит из множества актуальных и потенциальных возможностей. Реальность складывается из совокупности отношений между элементами множества возможностей. Базовые возможности являются сущностями.

2. Согласно онтологическому принципу конкретности существования всякая сущность обретает бытие только в определенной системе отношений своих потенциальных атрибутивных свойств к актуальным возможностям действительности. Достаточное основание сохранения сущности состоит в актуализации потенциальных возможностей соответствующих атрибутивных свойств.

3. Смысл бытия сущности понимается как взаимно однозначное соответствие между её атрибутивными свойствами и актуальными возможностями их существования. Носители смысла – пары сущностей, первая из которых нуждается в удовлетворении возможностями второй. Смысл – необходимое и достаточное условие явления сущности в бытии.

4. Гносеологическая определенность смысла в знании зависит от отношения четырех параметров: неопределенности (узнавания), предопределенности (гипотезы), послеопределенности (доопределения) и всеопределенности (подтверждения гипотезы), связанных алгоритмом взаимно однозначного соответствия.

5. Математическая модель траектории смысла представляет собой сечение проективного расслоения возможностей. Отношение соответствия возможностей – подмножество множества всех пар возможностей, удовлетворяющее условиям математической структуры декартова произведения.

Согласно первому из них весь мир является миром потенциальных и актуальных возможностей. *Знание – это потенциальная возможность, актуализация которой истинна.* Истину, в свою очередь, можно определить как отношение принадлежности исследуемого объекта к некоторому множеству (см, например: [2]). Знание является первоначальным элементом культурного мира явлений органической и неорганической сфер существующей реальности, пронизанных, по определению П.А. Сорокина [3], нематериальным компонентом смысла. *Знание о совокупности актуализирующих потенциальные возможности отношений на декартовом произведении множеств всех возможностей, как окружающего человека мира, так и его собственных возможностей, является теоретическим.* Теоретическое знание выявляет производную от эле-

ментов культурного мира сущность смыслообразующих возможностей объекта с точностью до определения траектории смысла его бытия. Проблема смысловывления в культурном мире связана, в первую очередь, с выделением *области* мира возможностей как **объекта** изысканий. В пределах этой области выделяются: основное *множество возможностей (ОМ)*, их *основные (ОО)*, *производные (ПО)* и *инвариантные отношения (ИО)*, что и составляет **предмет** исследований, который, в свою очередь, делится на две смысловых области: **культуру предмета** (декартово произведение $ОМ \times ИО$) и **предметную культуру** (декартово произведение $ОО \times ПО$). Инвариантные отношения определяют *отношения классов (ОК)*, т.е. классификацию подмножеств элементов основного множества. Отсюда следует, что **культура объекта** как множество носителей смыслов определяется декартовым произведением языка теории (обозначений (**О**)) на отношения классов, т.е. $О \times ОК$. В математике, например, отношения точек и чисел исторически и логически привели к открытию координатного метода (Декарт и Ферма) описания пространственных отношений, обобщенного в дальнейшем на понятие декартова (прямого) произведения элементов, сначала числовых множеств, а затем и множеств элементов произвольной природы.

Методология смысла как соответствия редуцируется к философским концептам смысла А.Ф. Лосева [4] и Л. Витгенштейна [5] и отражает процесс образования необходимых и достаточных условий сохранения сущности самих носителей смысла. Отношение соответствия в любой теории выполняется на подмножестве соответствующих *пар (кортежей) элементов* множества всех возможностей объектов этой теории, т.е. на подмножестве декартова произведения. Если это произведение составлено из элементов потенциальных и актуальных возможностей, то взаимная однозначность соответствия этих возможностей свидетельствует о смысле изучаемого объекта в его сущности. Смысл как необходимое и достаточное условие явления сущности в бытии (см. третий принцип концепции смыслообразования) интерпретируется с помощью множества своих носителей в культурном мире (пространстве культуры), содержащем в виде подмногообразия или подпространства и науку, и образование, и философию. Культурный мир, в свою очередь, может быть представлен как *субъект-объектное многообразие носителей смыслов материальной и духовной деятельности человека. Сама смыслообразующая деятельность и осуществляющий её человек являются элементами культурного мира, носителями его культуры и смысла.*

Что сближает философию с математикой в целостном осмыслении мира? Имеет место неоднозначное

отношение к математике со стороны философов. Признавая роль математики в естественно-научном исследовании, Кант, Гегель и Гуссерль категорически отрицали ее философские возможности. Декарт и Лейбниц, напротив, считали математику источником философских методов, признавая за ней эпистемологическую универсальность. Кант понимал математическую деятельность как «познание посредством конструирования понятий» (см. [6]), причем «познание, занимающееся не столько предметами, сколько видами /способами/ нашего познания предметов, поскольку это /способ познания/ должно быть возможным *a priori*» [7. С. 44]. Познание – способ построения культурного мира как с помощью математики, так и с помощью философии. С одной стороны, всеобщий характер философского знания, обусловленный предельной абстрактностью философских понятий, а с другой – предельная общность математических объектов (точки, числа) как первообразных элементов (неопределяемых, т.е. лишенных каких-либо качеств), с помощью которых устанавливаются отношения, истинные во всех возможных мирах (В.В. Целищев [8]). Поэтому и *существует возможность отобразить любые, в том числе и обобщенные философские сущности, на подмножества множеств точек геометрического пространства*. Для этого необходимо решить проблему выбора координатной сети категорий и понятий отдельных областей культурного мира. Современное понимание всеобщих и локальных проявлений материального и духовного единства мира, с учетом его структурной неоднородности, количественной и качественной бесконечности невозможно без установления смысла знания этих явлений. Интерпретация представления об интенции возможности как векторе позволяет с помощью фундаментальных философских понятий охарактеризовать траекторию смысла знания на уровнях как науки, так и образования. Геометрически существование смысла можно представить в виде траектории (подмногообразия, линии, поверхности) на многообразии возможностей как точек некоторого пространства. Эта траектория – график *смысловой функции*. Ее структура – *алгоритм смыслообразования*, полученный с помощью биекции (взаимно однозначного соответствия), носящей имя знаменитого французского математика Эвариста Галуа. Сущность алгоритма *соответствия Галуа* – в пересечении подмножеств основного концептуального множества потенциальных и актуальных возможностей всех сущностей.

Философская всеобщность подхода со стороны соответствия как бинарного отношения на множествах обеспечивается первоначально самих множеств. Поскольку они состоят из элементов *произвольной природы*, то представляют *всё* мыслимое и немислимое, явленное и скрытое, материальное и идеальное, реальное и мистическое, рациональное и трансцендентальное, действительное и возможное (как вероятное), существующее и несуществующее, необходимое и случайное, разумное и неразумное, истинное и ложное, сознательное и бессознательное, благо и зло, бытие и небытие, веру и безверие, волю и безволие, закон и беззаконие, положительное и отрицательное, хаос и порядок, красоту и безобразие и т.д., и т.п. – короче, множество всех событий объективной, субъективной и трансцендентной реальности. *Всё может быть поставлено в соответствие*: одно – другому, другое – третьему и т.д. Здесь нет других правил, кроме пра-

вила составления пары (a, b) элементов a из множества A и элементов b из множества B . *Пара есть всегда*. Даже если не будет двух элементов, может возникнуть пара из дважды взятого одного элемента.

Соответствие в математике – одно из основных понятий. Оно вводится с помощью понятия *бинарного отношения* для двух, в общем случае, различных или однотипных множеств или математических структур A и B . *Бинарное отношение* – подмножество R называемого *декартовым произведением* $A \times B$ множества всех пар (a, b) элементов из A и B . Элементы пары (a, b) , находящиеся в бинарном отношении aRb , называются *соответствующими* друг другу. В общем случае бинарное отношение (соответствие) R является элементом булевой алгебры. Геометрическое построение траектории смысла как подмножества декартова произведения проводится в многомерном точечно-векторном пространстве. Например, в трехмерном случае траектория смысла является пространственной кривой или двумерной поверхностью. В обобщенном виде многообразию носителей смыслов соответствует геометрическая траектория не только точек, но и более сложных элементов многомерного геометрического образа.

Алгоритм отыскания смысла, определяющий структуру смысловой функции в окружающем человека сложном мире, выстраивается с помощью умножения отношений, т.е. является *сложной смысловой функцией, зависящей от многих аргументов*. Проблема смыслообразования начинается с явления *a posteriori* потенциальной возможности доопределения *послеопределенности* A , интерпретируемой в философии как *мироосвоение*. Ее актуализация с помощью гипотезы *предопределенности* B (*миропонимания*) и подтверждения гипотезы во *всеопределенности* G (*мировоззрении*) призвана снять *неопределенность* N (*мировосприятия*) потенциальных возможностей узнавания, т.е. обеспечить A актуальными возможностями G . Алгоритмические параметры A, B, G, N являются *параметрами смысла*, а их независимая совокупность – *параметрической базой смысла*. Проблемы, рожденные послеопределенностью A научного поиска, образуют класс неопределенности (узнаваемости) N , представляющий множество вероятных и невероятных *целей*. Для снятия неопределенности необходимо установить два соответствия Галуа: 1) между A и N , что придает смысл постановке задачи сохранения сущности A , ее интенции (цели) N и будет смыслом *постановки проблемы*; 2) между B и G , что откроет смысл *решения проблемы* как смысл алгоритма, организующего средства достижения поставленной выше цели. В соответствии Галуа Γ параметры A и N входят во множество X потенциальных возможностей, а параметры B и G – во множество Y актуальных возможностей и связаны между собой с помощью следующего алгоритма решения проблемы смыслообразования: 1) ЦЕЛЬ: Постановка проблемы. Здесь соответствия $\Gamma(A)$ и $\Gamma^{-1}(G)$ открывают такие смыслообразующие возможности цели N , без которых смысла нет (*необходимость* параметра N); 2) ВОЗМОЖНОСТИ-ГИПОТЕЗА: гипотеза решения. С помощью $\Gamma^{-1}(G)$ определяются классы условий A , которые отображением $\Gamma(A)$ переводятся во множество теорий B в виде гипотезы алгоритма решения проблемы, удовлетворяющей A ; 3) ГИПОТЕЗА-АЛГОРИТМ: алгоритм решения проблемы. Исходя из предписаний алгоритма B , с помощью $\Gamma^{-1}(B)$ и $\Gamma(N)$ опре-

деляется множество средств G («выход» из алгоритма). 4) АЛГОРИТМ-РЕШЕНИЕ: актуализация потенциальных возможностей. Определенные на предыдущем шаге значения цели из N с помощью $\Gamma(N)$ и $\Gamma^{-1}(B)$ выявляют достаточные для ее удовлетворения актуальные возможности послеопределенности A (достаточность параметра A). Параметрическая база смысла положена в основу геометрической интерпретации траектории смысла и процесса смыслообразования.

Мировоззренческая интерпретация математических оснований моделирования знания о культурном мире соответствует принципам системного построения сети философских категорий (В.Н. Сагатовский [9], М.Р. Радовель [10]). С помощью философской интерпретации декартовой системы координат закладываются основы координации смыслообразующих возможностей знания. Изучение процесса познания дает возможность определить, какие стороны смыслообразования в научном знании составляют его базовую сущность. Соответствующие категории интерпретируются как базисные элементы геометрической системы координат. Поскольку категории являются элементами системы философских возможностей, то в абстрактном геометрическом пространстве они поставлены в соответствие точкам плоскости, изображающей эту систему. Смысл, определенный на множестве отношений актуальных и потенциальных возможностей двух сущностей, обозначен точкой соответствующего подмножества декартова произведения. Он определяется в соответствии с теми теориями (научными, теологическими и философскими), принципы которых лежат в основе построения картины мира. В целом каждую картину мира можно интерпретировать как расслоенное пространство над общей базой смыслового многообразия. Методология такой интерпретации должна соответствовать методологии построения этой картины, т.е. быть философски общезначимой. В геометрии наиболее общими свойствами обладают проективные многообразия точек. Поэтому модель культурного мира рассматривается именно как проективное расслоение носителей смысла.

Таким образом, проблемы мировосприятия, миропонимания, мировоззрения и мироосвоения культурного мира соответствуют отношениям четырех линейно независимых (базисных) векторов четырехмерного векторного пространства. Этим векторы определяют четыре базисных точки в трехмерном проективном пространстве – вершины системы координат (базиса, или координатного тетраэдра) этого пространства. В эпистемологической интерпретации базисные векторы охарактеризованы как направления: A – неопределенности (узнаваемости) мировосприятия, B – предопределенности (гипотезы) миропонимания, G – всеопределенности (подтверждения гипотезы) мировоззрения и A – послеопределенности (доопределения) мироосвоения. Соответственно, буквами A, B, G, N обозначены базисные точки проективной системы координат. Их взаимосвязь, полученная с помощью алгоритма соответствия Галуа, определяет структуру смысловой функции. Расположение параметров смыслового базиса на пространственной диаграмме аналогично проективному отношению базисных точек в координатном тетраэдре трехмерного проективного пространства, что создает потенциальные

возможности для построения геометрической модели *траектории смысла* как годографа (геометрического места концов радиус-векторов S) смысловой вектор-функции. Каждому ребру тетраэдра соответствует два отображения Γ и Γ^{-1} . Четыре грани соответствуют четырем шагам решения проблемы смысла, по Галуа. Поскольку биекция Галуа между потребностями и удовлетворяющими их возможностями является основой процесса смыслообразования, то ее алгоритмические параметры являются *параметрами смысла*, а их независимая совокупность – *параметрической базой смысла*. Параметры A, B, G, N независимы и принадлежат разным множествам возможностей, которые характеризуются по Гегелю [11], современными отношениями категорий *возможность* и *действительность* [12]: A – множество элементов реальной действительности; B – реальные возможности; G – формальная действительность; N – формальные возможности. Каждому ребру тетраэдра соответствует взаимно однозначное отображение. Четыре грани изображают четыре шага решения проблемы смыслообразования, по Галуа. Плоскости этих граней будем называть, соответственно: (A, B, N) – онтологической, (A, G, N) – феноменологической, (A, B, G) – логической и (B, G, N) – гносеологической. Тогда можно сказать, что постановка проблемы осуществляется последовательно в феноменологической и логической плоскостях, в логической плоскости, кроме того, разрабатывается гипотеза алгоритма решения, а решение проблемы осуществляется в гносеологической (для науки – эпистемологической) и онтологической плоскостях.

Соответствие между множеством полученных *a posteriori* элементов реальной действительности A и множеством формально возможных элементов N устанавливается при выборе **языка теории и обозначений (О)** и закрепляется понятийным аппаратом на всех этапах построения данной теории. На этом этапе возникает и **основное множество теории (ОМ)** как соответствие между формальными возможностями N и элементами формальной действительности G .

Соответствие между A и G определяется **основными отношениями (ОО)** (аксиомами, постулатами, первичными неопределяемыми понятиями и т.п.) между элементами основного множества. Основные отношения являются теоретической базой для выдвижения *гипотезы*, построенной *a priori* на элементах множества реальных возможностей B для описания реальной действительности из A .

Соответствие между B и N дает основное содержание теории в виде **производных отношений (ПО)**. А с помощью соответствия между B и G определяются **инвариантные отношения (ИО)**, т.е. получаются **инварианты теории**. Инвариантные отношения, полученные на этом этапе, далее следует отнести к основным отношениям теории.

Наконец, соответствие между A и B создает **отношение классов (ОК)** на основном множестве теории, или **классификацию** объектов теории по их инвариантным свойствам, что, в целом, и является целью построения теории.

Таким образом, структура теории состоит из шести компонентов: **О** – обозначения (язык теории); **ОМ** – основное множество; **ОО** – основные отношения на

ОМ; ПО – производные отношения на ОМ; ИО – инвариантные отношения между элементами ОМ; ОК – отношения классов, или классы элементов из ОМ. Однако выбором основного множества построение теории не ограничивается. Как правило, при построении одной теории из множества элементов всеопределенности **G** с помощью гипотетических предположений множества предопределенности **B** приходится привлекать инвариантные отношения других теорий. Последние для данной теории входят в множество **ОО**.

Отсюда следует, что с помощью четырех параметров **A, B, G, N** алгоритма смыслообразования построение модели теоретического знания в культурном мире получается за счет: 1) *смысла объектов* формальной действительности **G**; 2) *смыслов предметной деятельности* (методологический аспект), параметризованной реальной возможностью **B** на бесконечном многообразии параметров формальной возможности **N**, и 3) *смысла предмета деятельности* (параметр реальной действительности **A**). Иными словами, **культура знания** – это **культура объекта + культура предмета + предметная культура**.

Геометрические характеристики и условия существования траектории смысла интерпретируются в науке, образовании и других областях культурного мира как условия смысла бытия соответствующих сущностей. Слои над точкой траектории смысла – это многообразия структур различных областей науки или образования, искусства или техники, политики или экологии – всех подпространств культурного пространства. Каждая отдельная структура – сечение слоя. «Философскими сечениями» слоя могут быть, например, и классические системы категорий (Аристотель, Кант, Гегель и др.), и современные схемы (В.С. Степин [13] и др.). Отдельно можно рассматривать сечения как строки и столбцы матрицы-таблицы «периодических элементов смысла», как у С.Б. Чернышева [14], или как какие-либо другие системы. Важно при этом соотносить все структуры с одной и той же «точкой смысла» (рассматривать в одном и том же смысле), чтобы разные представления имели один и тот же смысл, соответствовали одному и тому же набору философских координат-понятий. Поскольку точка смысла зависит от четырех базисных координат (мировосприятия, миропонимания, мировоззрения и мироосвоения), то от них же зависят и «коорди-

натные системы» философии, науки, образования и т.д. Эти системы отличаются друг от друга носителями смысла, например: для математики – это точки, для философии – сущности, для науки – явления, для образования – навыки, для техники – способы и т.д.

Общими для всех областей культурного мира являются свойства отношений на множествах носителей смысла. В частности, определение математики можно сформулировать так: *математика – это отношения точек и чисел на декартовом произведении множеств элементов произвольной природы*. Такое определение не противоречит представлению Ф. Энгельса [15. С. 37] о математике как науке, объектом которой являются «пространственные формы» (в точечной интерпретации) и «количественные отношения» (в числовой интерпретации), принимающие «чрезвычайно абстрактную форму» (декартова произведения) множеств элементов произвольной природы, чье «происхождение из внешнего мира слабо затуманено абстракцией отделения от содержания» как чего-то совершенно «безразличного». Отношение, согласно алгебраическому определению, есть подмножество декартова произведения двух, трех и т.д. множеств элементов произвольной природы. В чистом виде такая парадигма математики – это теория отношений в системе координат.

Предлагаемая здесь парадигма математики – это теория отношений, связывающих различные системы смысловых координат-понятий ее областей. Система смысловых координат является *базой расслоенного пространства* математической теории. С каждой *точкой смысла* этой базы связано декартово произведение всех областей математики: алгебраических, геометрических, функциональных и др. Поскольку явление в одной области математики интерпретируется с помощью отношений в других ее областях (горизонтальные связи), то в целом за счет таких интерпретаций в каждой точке траектории смысла выстраивается *сечение* математического расслоения. Это сечение биективно соответствует траектории смысла изучаемого объекта. В конечном счете, получается, что *моделью математики является расслоенное пространство отношений точек и чисел на декартовом произведении множеств элементов произвольной природы*.

Заметим, что в общем случае расслоение – модель любой теории, а структура теории – замкнутые многообразия соответствующих сечений этого расслоения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чулахин Н.П. Философские аспекты смысла математической культуры // Философия математики: актуальные проблемы: Материалы Междунар. науч. конф. М.: Издатель Савин С.А., 2007. С. 456–458.
2. Светлов В.А. Почему математические истины необходимо истинны // Философия математики: актуальные проблемы: Материалы Междунар. науч. конф. М.: Издатель Савин С.А., 2007. С. 61–63.
3. Сорокин П.А. Моя философия – интегрализм // Социологические исследования. 1992. № 10. С. 134–139.
4. Лосев А.Ф. Миф – Число – Сущность / Сост. А.А. Тахо-Годи; Общ. ред. А.А. Тахо-Годи, И.И. Маханькова. М.: Мысль, 1994.
5. Витгенштейн Л. Философские работы. М.: Гнозис, 1994.
6. Катречко С.Л. Трансцендентальная философия математики // Философия математики: актуальные проблемы: Материалы Междунар. науч. конф. М.: Издатель Савин С.А., 2007. С. 31–33.
7. Кант И. Критика чистого разума. М.: Мысль, 1994.
8. Целищев В.В. Философские проблемы семантики возможных миров. Новосибирск: Наука, 1977.
9. Сагатовский В.Н. Основы систематизации всеобщих категорий. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1973.
10. Радовель М.Р. Категориальная структура исследовательского мышления. Ростов н/Д: Изд-во Ростов. ун-та, 1993.
11. Гегель Г.В.Ф. Наука логики. М.: Мысль, 1999.
12. Книгин А.Н. Учение о категориях: Учеб. пособие. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2002.
13. Степин В.С. Теоретическое знание. М.: Прогресс-Традиция, 2000.
14. Чернышев С.Б. Смысл. Периодическая система его элементов. М.: Мартис, 1993.
15. Энгельс Ф. Соч. 2-е изд. Т. 20.

Статья представлена научной редакцией «Философия, социология, политология» 23 июня 2009 г.