

ФИЛОСОФИЯ, СОЦИОЛОГИЯ, ПОЛИТОЛОГИЯ

УДК 125; 51:1

К.А. Габрусенко

ФИЛОСОФСКИЕ ОСНОВАНИЯ ТЕОРИЙ МНОЖЕСТВ ГЕОРГА КАНТОРА
И ПЕТРА ВОПЕНКА

Работа выполнена в рамках государственного контракта на выполнение поисковых научно-исследовательских работ для государственных нужд в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», мероприятие 1.1, проект «Онтология в современной философии языка» (2009-1.1-303-074-018).

Проводится историко-философская реконструкция генезиса философских взглядов на бесконечность, анализируются понятия потенциальной, актуальной и естественной бесконечности и выявляется роль философских взглядов Георга Кантора и Петра Вopenка в формировании понимания бесконечности и основных положений созданных ими теорий множеств.

Ключевые слова: теория множеств; бесконечность; нечеткость.

Понятие «бесконечное» в истории философии имеет длительную традицию рассмотрения. В Античности оно впервые упоминается в связи с учением Анаксимандра (αἰτέρου, беспредельное); значительное место его анализу отводится в трудах Аристотеля. В XIX в. предложенная Г. Кантором принципиально новая интерпретация бесконечного привела к созданию теории множеств и перестройке здания математической науки. Значительное развитие это понятие получило в трудах чешского математика П. Вopenка. Очевидно, что различие в определении бесконечного основано на различиях в философских предпосылках авторов, однако до сих пор в отечественной философской традиции этому вопросу не было уделено должного внимания. Цель данной статьи – выявить влияние философских взглядов Г. Кантора и П. Вopenка на определение понятия «бесконечность» и на созданные ими научные теории. Для этого мы рассмотрим различия во взглядах на бесконечное в работах указанных авторов и затем произведем реконструкцию философских предпосылок, определяющих это различие.

Причиной обращения Г. Кантора к проблематике множеств и бесконечности стали его исследования по теории тригонометрических рядов. В 1870–1872 гг. Г. Кантор публикует доказательство теоремы о том, что представления функции в форме тригонометрического ряда является однозначным, в том числе и в случае отсутствия сходимости в *конечном* числе значений на интервале $(0, 2\pi)$, а затем обобщает его до случая отсутствия сходимости в *бесконечном* числе точек данного интервала. Именно необходимость различения *‘отсутствия сходимости ряда вообще’* и *‘отсутствия сходимости ряда в бесконечном числе точек’* явилось причиной, побудившей Г. Кантора заняться анализом бесконечности.

Очевидно, что методы сравнения множеств по количеству элементов, успешно применяемые для конечных множеств, не работают в случае бесконечных: например, последовательный пересчет элементов даже одного бесконечного множества будет продолжаться бесконечно. Сверх того, метод простого пересчета ограничен количеством натуральных чисел, поскольку при пересчете они выступают посредниками в сопоставлении, и, следовательно, сравнение множеств, коли-

чество элементов которых превосходит количество натуральных чисел, не может быть выполнено. Г. Кантор отказывается от посредничества натуральных чисел и предлагает оригинальный метод, основанный на установлении взаимно-однозначного соответствия между элементами двух множеств с помощью некоего закона.

В статье «Об одном свойстве алгебраических чисел» [1. С. 18–22] (1874 г.), пока неявно применяя этот метод, Г. Кантор показывает, что существует как минимум два различных рода бесконечности – бесконечность множества действительных алгебраических чисел, имеющая то же количество элементов, что и множество натуральных чисел, и бесконечность континуума – множества точек интервала $(0, 1)$, количество элементов которого несоизмеримо больше. В последующих работах новый метод широко применяется Г. Кантором в явном виде, в том числе при задании отношений эквивалентности множеств, равенства кардинальных и ординальных чисел и т.д. Метод сравнения бесконечных множеств Г. Кантора сделал бесконечное законным объектом математической науки.

Главными характеристиками множества Г. Кантор полагает его ординальное и кардинальное числа. Ординальное число (ординал) – результат акта абстракции в отношении свойств элементов множества, сохраняющий их взаимный порядок; кардинальное число (кардинал) – результат абстракции в отношении и свойств элементов, и их взаимного порядка. Исследуя свойства кардинальных и ординальных чисел конечных множеств, он приходит к выводу, что они полностью совпадают со свойствами чисел натурального ряда и предлагает использовать одни и те же обозначения как для конечных кардиналов, так и для соответствующих натуральных чисел.

В канторовской теории множеств наравне с конечными множествами рассматриваются и множества бесконечные, которые также имеют свои кардиналы и ординалы, но для их обозначения не существует соответствующих натуральных чисел: существование таких чисел противоречило бы аксиоме о несуществовании наибольшего натурального числа. Г. Кантор называет кардинальные и ординальные числа бесконечных множеств трансфинитными. Ординал множества натураль-

ных чисел он обозначает через ω , а кардинал – через $\aleph_0$ и утверждает, что это наименьшие из трансфинитных чисел. Для трансфинитных ординалов и кардиналов задаются те же отношения и операции, что и для конечных чисел. Однако свойства трансфинитных чисел имеют принципиальные отличия от свойств конечных – так, например, на бесконечности в большинстве случаев не выполняется принцип «часть меньше целого», и при прибавлении конечного числа к трансфинитному трансфинитное остается неизменным. Сложение трансфинитных ординалов, к тому же, не обладает свойством коммутативности вследствие принятия во внимание порядка элементов.

Вводя трансфинитные числа как особые объекты математики, Г. Кантор фиксирует бесконечное в качестве собственного понятия математической науки. Более того, разрешая операции над трансфинитными числами, Г. Кантор тем самым позволяет обращаться с бесконечным как вполне определенным объектом – ставшим и совершенным – актуально бесконечным. Имея дело с актуальной бесконечностью, мы рассматриваем бесконечное множество с точки зрения бога, одновременно обозревая все элементы, которые принадлежат, или принадлежали, или будут принадлежать данному множеству когда-либо. До Г. Кантора такое же понимание бесконечности можно встретить у Г.В. Лейбница и его учеников, активно использовавших идею о существовании бесконечно малых величин, отличных от нуля, – актуально бесконечно малых. Изучением актуально бесконечного как особого и вполне законного математического объекта занимался также чешский математик и философ Б. Больцано, который был, вероятно, единственным предшественником Кантора, оперировавшим бесконечными числами, не разделяя их на кардинальные и ординальные.

Большинство математиков XIX в., в числе которых П.Г. Лежен-Дирихле, К. Вейерштрасс, Р. Дедекинд, стремились свести математику к ясному и отчетливому конечному, принимая бесконечное как «простое вспомогательное понятие нашего мышления, понятие отношения, которое <...> включает в себе идею изменчивости и о котором, таким образом, никогда нельзя сказать “datur” в собственном смысле слова» [1. С. 78]. Бесконечное понималось как значение переменной, неограниченно убывающей или растущей, но всегда конечной величины – становящееся и несовершенное потенциально бесконечное.

Такой же позиции придерживались некоторые наиболее влиятельные философы Античности, в том числе Аристотель. В гл. 10 кн. 11 Метафизики [2. С. 306–310] Аристотель проводит доказательство несуществования беспредельного – исток столь любимой формулы схоластов *Infinitum actu non datur*. Однако тезис Аристотеля еще более сильный – он отказывает бесконечному в каком-либо реальном существовании, приводя многочисленные аргументы в свою пользу. Большая их часть сводится к нарушению законов логики при рассмотрении бесконечных объектов и опровергается Г. Кантором в [1. С. 63–104] путем запрета на применение к бесконечному свойств конечного.

Необходимо особо рассмотреть еще один аргумент Аристотеля о том, что «быть беспредельным каждому

телу невозможно, так как тело имеет протяжение во всех направлениях» [2. С. 308]. Мы не можем утверждать ложности этого аргумента, равно как и принять его. Дело в том, что в нем Аристотель использует понятие ‘беспредельное’, на греческом – ‘απειρον’. Значение данного понятия – то, что не имеет границ, что *не может быть* ограничено, и для такой интерпретации тезис Аристотеля аналитически истинен. В то же время канторовское бесконечное, как *правило*, ограничено (например, точки интервала (0, 1) ограничены концами интервала, в то время как их количество континуально), и для него указанный тезис не будет являться истинным а priori.

К несчастью, Г. Кантор не обратил внимания на данное смешение понятий и привел весьма пространное и не слишком убедительное возражение, что дало почву для последующих нападок на канторовское актуально-бесконечное и, к сожалению, именно на основании указанной *ignoratio elenchi* строится основная часть аргументации против теории множеств, способная убедить неподготовленного слушателя в ее алогичности и ложности математики в целом.

По нашему мнению, актуальная бесконечность, как она вводится Кантором, никоим образом не противоречит потенциальной. Аналогично и трансфинитные числа не противоречат даже древним постулатам, согласно которым наибольшего среди них нет. Числа ω и $\aleph_0$ не являются наибольшими числами *класса натуральных чисел*, но представляют собой единицы *нового класса чисел*, объектами которого выступают бесконечные множества, причем ограничение быть уже ставшими, или совершенными, не является необходимым для того, чтобы рассматривать такие множества. Актуальная бесконечность представляется нам методом рассмотрения бесконечного множества как объекта. В математике, хотим мы того или нет, мы постоянно сталкиваемся с ней, поскольку для измерения мы используем единичный отрезок координатной прямой, но интервал (0, 1) содержит бесконечно много (причем здесь даже неважно – счетно или нет) действительных чисел.

У Кантора актуально бесконечное – как характеристика множества – противопоставлено конечному. Бесконечный кардинал $\aleph_0$ – не просто очень большое число: он больше *любого* натурального числа, больше суммы и произведения *всех* натуральных чисел. Числа $\aleph_0$ и ω являются вполне законными объектами *теоретической математики*, поскольку для них строго определенным образом заданы определенные операции и отношения – правила, которым они строго подчинены. Тем не менее хотя для подавляющего большинства математических объектов существует определенная *прикладная* интерпретация в других науках, но ни для числа $\aleph_0$, ни для ω такой интерпретации не существует.

С другой стороны, даже в обыденной жизни мы сталкиваемся с достаточно большими *конечными* совокупностями (песчинки пляжа, видимые звезды и т.п.), проявляющими свойства, характерные для канторовских бесконечных множеств – при условии, что рассматриваемая совокупность достаточно большая и мы прибавляем или отнимаем от нее гораздо меньшее количество элементов. Парадоксальные свойства подобных совокупностей интересовали мыслителей с древ-

нейших времен – парадоксальность их поведения фиксируется в античных парадоксах «Куча» и «Лысый».

Подобного рода совокупности до середины XX в. математикой в качестве объекта не рассматривались. В 50-х гг. прошлого века Л. Заде [3] для описания подобных объектов ввел специальный термин «нечеткое множество» и предложил методы их исследования. Нечеткое множество в рамках этой теории аппроксимируется посредством последовательности четких множеств, давая в результате вместо *пары нечетких* сколь угодно точную *градиацию четких* множеств, причем ограничение на пересечение этих множеств не накладывается. То есть операции над нечеткими множествами Заде представляют собой операции над совокупностями четких множеств, что позволяет применять к ним инструментарий, накопленный классической математикой, но одновременно уничтожает саму специфику таких множеств.

Принципиально иной подход к нечетким совокупностям демонстрирует чехословацкий математик П. Вopenка, рассматривающий подобные совокупности как объект, принципиально отличающийся от других математических объектов, требующий особых методов исследования. Для их описания он вводит новый термин «класс», под которым понимает не обязательно четко выделенную совокупность объектов, обладающую индивидуальностью, целостностью и самостоятельностью, но однозначно определен совокупностью своих элементов (т.е. любой элемент универсума либо принадлежит классу, либо не принадлежит, хотя в некоторых случаях решить, которое из них верно, не представляется возможным).

Понятие «множество» в этой теории имеет принципиально иное значение, нежели во всех предшествующих теориях множеств, причем как «канторовских», так и «неканторовских», и является частным случаем класса, для которого нечеткость полностью устранена. Классы, по своей сути, подобны уже упомянутым нечетким множествам Л. Заде, но если у последнего нечеткость является досадной помехой стандартным методам, которую необходимо устранить, то Вopenка возводит нечеткость во главу угла, делая ее сущностной характеристикой класса. П. Вopenка утверждает, что мы можем из четкой совокупности выделить нечеткую – класс, являющийся подклассом множества, который он называет *полумножеством*. Примеры полумножеств легко найти в парадоксах «Лысый», «Куча», «Брадобрей» и парадоксе Бери.

В основе введенных понятий лежит категория *нечеткости*: и «полумножество», и «класс» выделяются путем нечеткого задания, хотя вполне определены. Нечеткость объявляется вполне легитимной и требует особых методов исследования, принципиально отличных от классических, применяемых к четким множествам. Четкость, с другой стороны, является частным случаем нечеткости и не представляет особого интереса – весь инструментарий классов вполне применим и к множествам без доработок или определенных оговорок.

Нечеткость объявляется в первую очередь неотъемлемым свойством нашего восприятия: так например, на определенном удалении мы не можем различить травинки на лужайке – они сливаются в единое зеленое пятно с нечеткими границами и оттенками. Но, с другой стороны, даже если бы мы не обладали таким несо-

вершенством и могли бы различать отдельные стебли, то тогда мы не могли бы видеть единство лужайки. Так что, как говорит Вopenка, «‘видеть совершенно’ не означает ‘видеть все’, а только лишь ‘видеть четко’» [4. С. 128]. Отсюда делается вывод, что не совершенством является *причиной* нечеткости, а мы интерпретируем нечеткость как несовершенство. «Однако нечеткость – это скорее незавершенность, потому что нечеткость указывает за пределы себя самой. То, что нечетко, переходит в нечто другое. Напротив, четкость указывает только на себя. Эта самодостаточность четкости является первопричиной того, почему мы склонны приписывать самость только четким явлениям, вернее, мы стараемся представлять объекты как четкие явления, потому что лишь в таком случае чувствуем себя вправе воспринимать их как нечто самостоятельное» [4. С. 128].

На основании идеи нечеткости вводится новое понятие «*естественная бесконечность*» – основное понятие альтернативной теории множеств. Естественная бесконечность является видом актуальной бесконечности и противопоставляется «*абсолютной бесконечности*» – именно тому ее виду, с которым имели дело Больцано и Кантор. Естественная бесконечность является собой взгляд человека на достаточно большую совокупность предметов, в то время как абсолютная представляет собой взгляд бога. Отсюда главной целью альтернативной теории множеств декларируется именно представление бесконечности посредством нечеткости.

Понятие нечеткости у Вopenка тесно связано с понятиями «горизонт» и «неразличимость». Нечеткость возрастает по мере удаления объекта от нас и приближения его к горизонту. Горизонт – то, что ограничивает наш взгляд, направленный вдаль или вглубь, если на его пути не встречается четкого препятствия. Взгляд здесь понимается более широко, нежели обыденно – как «высматривание того, что возможно усмотреть, и рассматривание того, что мы усмотрели» [4. С. 172]. Горизонт может перемещаться, его можно отдалить, и мы полагаем, что за горизонтом что-то есть. Сама нечеткость, растущая к горизонту, указывает на то, что за ним что-то должно быть, и, следовательно, горизонт является границей нашего взгляда на мир. Поэтому зайти за горизонт мы не можем – в результате горизонт сместится, возможно значительно, но, тем не менее, останется. «Поскольку горизонт всегда соотносился с нашим взглядом на мир, а не с самим миром, он не стал прямым предметом европейской науки. Но для альтернативной теории множеств понятие горизонта является ключевым. Наша цель – изучать феномен нечеткости на собраниях, классах и множествах, а как раз именно горизонт является той четкой и определенной границей, в которой заключена одна из самых выразительных форм нечеткости» [4. С. 173].

Второе понятие, тесно связанное с понятиями «горизонт» и «нечеткость», – понятие «неразличимость». Под неразличимостью понимается такое отношение R , в котором находятся два объекта x и y , которые невозможно различить ни по одному критерию. Предельным случаем отношения неразличимости является отношение тождества. Очевидно, что по мере приближения к горизонту все большее количество объектов находятся в этом отношении; и наоборот, по мере отдаления от горизонта это отношение встречается все реже и реже.

Неразличимость более всего интересна в контексте проблемы непрерывности. Многие столетия представление прямой в виде множества точек рассматривалось как недопустимое – такое представление уничтожает целостность, непрерывность прямой. Это происходит потому, что множество не может быть непрерывным. Математика нашла способ обойти это ограничение, склеив точки в единую прямую, постулируя возможность помещения точки между двумя любыми данными (очевидно различными). Альтернативная теория множеств позволяет дать другое представление континуума – как феномена класса, скрывшегося за горизонтом, элементы которого вступают в отношение неразличимости. Это представление является более естественным для континуума и вместе с тем позволяет моделировать его классическое представление. Таким образом, классический континуум становится как бы вторичным по отношению к этому представлению.

Мы установили, что в классической теории множеств Г. Кантора актуальная бесконечность рассматривается с точки зрения бога – как уже ставшая, совершенная и полностью данная. С другой стороны, в альтернативной теории множеств П. Вopenка естественная бесконечность представлена с позиции конечного наблюдателя – также уже ставшая, но данная не полностью, а лишь в границах подвижного горизонта. Далее мы произведем реконструкцию философских предпосылок, на которых, по нашему мнению, основано столь значительное различие в понимании бесконечного у рассматриваемых авторов.

Онтологические установки Г. Кантора возможно реконструировать по работе [1. С. 63–104], где он предлагает свой взгляд на проблему природы математических объектов. Он утверждает, что числа (и понятия вообще) обладают двумя типами реальности: интрасубъективной (имманентной) и транссубъективной (транзгентной). Связь двух типов реальности имеет необходимый характер и имеет *«свой собственный корень в единстве всего, к которому мы сами принадлежим»* [1. С. 79]. Таким образом, из обладания первой реальностью с необходимостью следует обладание и второй. Отсюда следует, что математика *«должна считаться единственно лишь с имманентной реальностью своих понятий и поэтому не обязана вовсе проверять также их транзгентную реальность»* [1. С. 79], что и является источником ее свободы, ограниченной лишь внутренней непротиворечивостью понятий и согласованностью вновь вводимых понятий с ранее введенными. Процесс образования новых понятий Г. Кантор описывает как *«пробуждение дремлющего в нас понятия»* [1. С. 104], что полностью совпадает с теорией познания – анамнезисом Платона. В результате мы с уверенностью можем определить философскую позицию Кантора как позицию классического платонизма.

Во введениях к обеим публикациям Вopenка упоминает о феноменологической перестройке теории множеств и математики в целом на феноменологической основе: *«Для этого необходимо сначала подвергнуть канторовскую теорию множеств феноменологической критике и затем, на этой основе, разработать альтернативную теорию множеств»* [4. С. 32] и *«Один из возможных путей выхода из кризиса современной математики может состоять в попытке перестроить математику на феноменологической основе»* [5. С. 14]. В текстах обеих рассмотренных работ ни имя Э. Гуссерля, ни феноменология не упоминаются; тем не менее в обеих библиографиях присутствует ссылка на его *«Die Krisis der europäischen Wissenschaften und die transzendente Phänomenologie»*. Основным методическим приемом П. Вopenка является смещение точки зрения исследователя на точку зрения конечного наблюдателя – субъекта, в противоположность точке зрения бога в канторовской теории множеств. Также в исследованных текстах значительна частота употребления терминов 'феномен' и 'горизонт' в контекстах и смыслах, характерных для феноменологии. Вышесказанное позволяет нам заключить, что философская позиция Вopenка близка феноменологии.

Развитие этой теории в рамках другой философской концепции, значительно отличной от феноменологической, например платонизма (в рамках которого была создана канторовская теория множеств), мы считаем невозможным, поскольку многие моменты альтернативной теории множеств П. Вopenка – в первую очередь ее проблематика и методология – выразимы только и исключительно в рамках языка феноменологии и в иных концепциях являются бессмысленными. Вопрос о точном соотношении философской концепции Вopenка и гуссерлевской феноменологии пока остается не проясненным и станет темой отдельного исследования.

В настоящей статье мы установили, что в основе канторовской теории множеств и понятия актуальной бесконечности лежат платонистические установки. Множества и бесконечность рассматриваются с точки зрения бога. Актуальная бесконечность представлена в виде абсолютной бесконечности. Альтернативная теория множеств строится на базе гуссерлевской феноменологии. В ней множества и бесконечность рассматриваются с позиции конечного наблюдателя. Актуальная бесконечность представлена в виде естественной бесконечности, ограниченной горизонтом. Хотя в каждой из рассматриваемых теорий возможно построение модели другой теории, но ни одна из позиций не выразима полностью языком другой по причине отсутствия необходимых языковых средств (предложения, описывающие основные положения объектной теории, не имеют смысла в теории, на языке которой происходит построение).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кантор Г. Труды по теории множеств. М.: Наука, 1985. 432 с.
2. Аристотель. Метафизика. М.: Эксмо, 2006. 608 с.
3. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир, 1976. 166 с.
4. Вopenка П. Альтернативная теория множеств: новый взгляд на бесконечность. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2004. 611 с.
5. Вopenка П. Математика в альтернативной теории множеств: Пер. с англ. М.: Мир, 1983. 152 с.

Статья представлена научной редакцией «Философия, социология, политология» 14 июня 2010 г.