

МАТЕМАТИКА

УДК 517.54

И.А. Александров, О.И. Ежова

МЕТОД ВАРИАЦИЙ ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЙ, ПРЕДСТАВИМЫХ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛОВ СТИЛТЬЕСА

В исследованиях свойств классов аналитических функций и в задачах нахождения экстремумов функционалов на таких классах используются соответствующие вариационные формулы. В данной работе они находятся для классов функций, представимых интегралами Стильтьеса или некоторыми комбинациями таких интегралов. Даны вариационные формулы для классов голоморфных функций с положительной вещественной частью в круге. На их основе получены вариационные формулы для звездных выпуклых однолистных отображений. Получены две вариационные формулы для голоморфных в круговом кольце функций, имеющих в нем положительную вещественную часть.

Ключевые слова: интеграл Стильтьеса, классы голоморфных функций, вариационные формулы.

Имеются классы аналитических функций, в которых функции представляются выражениями, содержащими интегралы Стильтьеса. О таких классах говорят, что они имеют структурную формулу. Г.М. Голузин [1], исследуя экстремальные задачи для звездных отображений, предложил вывод двух удобных вариационных формул и привел примеры применения их к нахождению экстремальных функций для некоторых вещественных функционалов. Во многих других экстремальных задачах завершение исследования встречается с необходимостью определять значения неизвестных постоянных, что составляет индивидуальную трудность в каждой конкретной задаче. Во многих случаях найдены способы преодоления таких трудностей, позволившие получить полное решение экстремальной конкретной задачи с указанием экстремальных функций [2–4]. В работе даются еще две вариационные формулы для классов функций, представимых интегралом Стильтьеса с непрерывно дифференцируемым ядром, усиливающие результаты Н.А. Лебедева и И.А. Александрова [5]. Применение этих формул позволяет записать необходимые условия в форме уравнений и неравенств для экстремальных функций в задачах об областях значений функционалов, а также систем функционалов на рассматриваемом классе функций.

1. Некоторые классы функций, представимые интегралом Стильтьеса

Класс S – множество функций

$$p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n,$$

голоморфных в круге $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и имеющих в нем положительную вещественную часть. Рисс и Герглотц доказали, что для принадлежности функции $p(z)$ классу C необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление интегралом Стильеса

$$p(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{it}z}{1 - e^{it}z} d\mu(t), \quad (1)$$

где $\mu(t)$ – вещественная функция, не убывающая на отрезке $[0, 2\pi]$ и такая, что $\mu(2\pi) - \mu(0) = 1$.

Подкласс $C_r \subset C$ функций $p_r(z)$ с вещественными коэффициентами имеет интегральное представление

$$p_r(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 - z^2}{1 - 2z \cos t + z^2} d\mu(t)$$

и связан с классом T_r типично вещественных функций формулой $zp(z) = (1 - z^2)q(z)$, $p_r(z) \in C_r$, $q(z) \in T_r$. Функция $q(z) \in T_r$ вещественна на промежутке $(-1, 1)$, а в остальных точках круга E удовлетворяет условию $\operatorname{Im} z \operatorname{Im} q(z) > 0$.

Класс S^* – множество функций

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n,$$

голоморфных, однолистных в круге E , конформно отображающих этот круг и таких, что область $D = f(E)$ звездна относительно нуля. Отрезок с концами в точках $0, w_0 \in D$ в силу звездности D лежит в D . Легко видеть, что область $D_r = \{w \in \mathbb{C} : w = f(z), |z| < r\}$, $0 < r < 1$, звездна относительно нуля. Действительно, ее граница является замкнутой аналитической кривой $L(f, r) = \{w \in \mathbb{C} : w = f(z), |z| = r\}$ с параметрическим уравнением $w = f(re^{i\varphi})$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Точке $w_0 \in D_r$ соответствует в круге $E_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$, $0 < r < 1$, точка $z_0 = f^{-1}(w_0)$. Прообразом отрезка $k = \{w \in \mathbb{C} : w = tw_0\}$, $0 \leq t \leq 1$, в круге E является кривая $l = \{z \in E, z = f^{-1}(tw_0)\}$, $0 \leq t \leq 1$.

Функция $\psi(z) = f^{-1}(tf(z))$ удовлетворяет в круге E условиям леммы Шварца, и поэтому $|\psi(z)| = |z|$. Из неравенства $|f^{-1}(tw_0)| \leq |z_0|$ следует, что прообраз отрезка k лежит в области E_r . Значит область D_r звездна относительно нуля.

Вектор с началом в точке $w=0$ и с концом в точке $f(re^{i\varphi})$, $f(z) \in S^*$, при фиксированном $r \in (0, 1)$ и при возрастании φ от 0 до 2π поворачивается против хода часовой стрелки, и поэтому

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \arg f(re^{i\varphi}) = \operatorname{Im} \frac{\partial}{\partial \varphi} \ln f(re^{i\varphi}) = \operatorname{Re} \left(\frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})} re^{i\varphi} \right) \geq 0.$$

Итак, если $f(z) \in S^*$, то функция $zf'(z)/f(z)$ принадлежит классу C .

Пусть $p(z) = 1 + \alpha_1 z + \dots \in C$. Для нахождения голоморфного в E решения уравнения

$$\frac{zw'}{w} = p(z), \quad w(0) = 0,$$

имеющего особенность в точке $z = 0$, представим это уравнение в виде

$$\frac{d}{dz} \ln \frac{w}{z} = \frac{p(z)-1}{z}, \quad w(0) = 0.$$

Интегрируя его по любой простой дуге, соединяющей точку 0 с точкой $z \in E$, получаем при $w'(0) = 1$ решение

$$w(z) = ze^{\int_0^z \frac{p(z)-1}{z} dz},$$

являющееся, как легко проверить, функцией класса S^* . С помощью формулы (1) и простых преобразований находим, что формула

$$f(z) = ze^{-2 \int_0^{2\pi} \ln(1-e^{-it}z) d\mu(t)} \quad (2)$$

дает структурное представление класса S^* интегралом Стильеса.

Класс S^0 – множество функций

$$g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n,$$

голоморфных, однолистных в круге E , конформно отображающих этот круг и таких, что область $D = g(E)$ выпукла. Отрезок с концами в точках $z_1, z_2 \in D$ в силу выпуклости D лежит в D . Убедимся, что область $D_r = \{w \in \mathbb{C} : w = g(z), |z| < r\}$, $0 < r < 1$, выпукла. Пусть w_1, w_2 – различные точки области D_r . Тогда отрезок $k = \{w \in \mathbb{C} : w = tw_1 + (1-t)w_2\}$, $0 \leq t \leq 1$, лежит в D . Обозначим через z_1, z_2 точки, отображаемые функцией $g(z)$ в w_1, w_2 соответственно. Очевидно, $z_k \in E_r$, $k = 1, 2$. Будем считать, что $|z_1| \leq |z_2|$. Функция

$$G(z) = t g\left(\frac{z_1}{z_2} z\right) + (1-t)g(z)$$

голоморфна в E при любом $t \in [0, 1]$. К функции $\psi(z) = g^{-1}(G(z))$ применима лемма Шварца. Неравенство $|\psi(z)| \leq |z|$, $z \in E$, дает при $z = z_2$

$$\left| g^{-1}(t g(z_1) + (1-t)g(z_2)) \right| \leq |z_2| < r.$$

Значит, прообраз отрезка k лежит в E_r и, следовательно, область $g(E_r)$ выпукла.

Касательная к линии $L(g, r)$, являющейся границей области D_r , в точке $g(re^{i\varphi})$ образует с вещественной осью угол

$$\tau = \varphi + \frac{\pi}{2} + \arg g'(re^{i\varphi}).$$

При возрастании φ от 0 до 2π эта касательная вращается против хода часовой стрелки. Поэтому

$$\frac{\partial \tau}{\partial \varphi} = \operatorname{Re} \left(\frac{g''(re^{i\varphi})}{g'(re^{i\varphi})} \right) + 1 \geq 0.$$

Таким образом, если $g(z) \in S^0$, то

$$\operatorname{Re} \left(\frac{zg''(z)}{g'(z)} + 1 \right) \geq 0, \quad z \in E, \quad (3)$$

и, следовательно, существует функция $p(z) \in C$, такая, что

$$\frac{zg''(z)}{g'(z)} = p(z) - 1.$$

Пусть $p(z) \in C$. Интегрируя уравнение

$$\frac{zw''}{w'} = p(z) - 1, \quad w(0) = 0, \quad w'(0) = 1,$$

получаем функцию

$$w(z) = \int_0^z e^{\int_0^{\zeta} \frac{p(\zeta)-1}{\zeta} d\zeta} dz, \quad (4)$$

которая, как легко проверить, принадлежит классу S^0 . Значит, формула (3) выражает необходимое и достаточное условие принадлежности функции $g(z)$ классу S^0 . С помощью формулы (1) приходим к представлению класса S^0 интегралом

$$g(z) = \int_0^z e^{-2 \int_0^{\zeta} \ln(1-e^{-it}\zeta) d\mu(t)} d\zeta.$$

Между классами S^* и S^0 формулой

$$g(z) = \int_0^z \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta, \quad f(z) = zg'(z),$$

где $g(z) \in S^0$, $f(z) \in S^*$, устанавливается взаимнооднозначное соответствие.

Класс $C(q,1)$ – множество голоморфных в кольце $E(q,1) = \{z \in \mathbb{C} : q < |z| < 1\}$, $0 < q < 1$, функций $f(z)$, удовлетворяющих в нем условиям

$$\operatorname{Re} f(z) > 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\varphi}) d\varphi = 2\pi, \quad q < r < 1.$$

Этот класс представим [6] суммой интегралов Стильеса

$$f(z) = \int_{-\pi}^{\pi} F(ze^{it}) d\mu_{1,f}(t) + \int_{-\pi}^{\pi} F\left(\frac{q}{z}e^{it}\right) d\mu_{2,f}(t) - 1, \quad (5)$$

где $\mu_{k,f}(t)$, $k=1,2$, – вещественная неубывающая на отрезке $[-\pi, \pi]$ функция и такая, что $\mu_{k,f}(\pi) - \mu_{k,f}(-\pi) = 1$ и

$$F(z) = \frac{1+z}{1-z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2q^{2k}z}{1-q^{2k}z} - \frac{2q^{2k}z^{-1}}{1-q^{2k}z^{-1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \frac{1+q^{2k}z}{1-q^{2k}z}. \quad (6)$$

2. Вариационные формулы в классах C , C_r , T_r

Пусть $B \subset \mathbb{C}$ – область и K – некоторый класс голоморфных в области B функций. Если для любой функции $f(z) \in K$ и для любого достаточно малого по модулю вещественного числа h имеется функция $f_h(z) \in K$ вида

$$f_h(z) = f(z) + h\varphi_f(z) + o(z, h), \quad (7)$$

где $\varphi_f(z)$ – голоморфная в B функция и $o(z, h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ равномерно внутри B , то говорят, что (7) есть вариационная формула в классе K . Наличие в классе K вариационной формулы или нескольких вариационных формул, различающихся выбором $\varphi_f(z)$, а также ограничением в выборе знака числа h , облегчает решение экстремальных задач на классе K .

Структурные формулы в классах C , C_r , T_r и некоторых других классах функций имеют схожий вид. Вариационные формулы для них можно получить следующим образом.

Пусть $F(z, t)$ – функция, непрерывная в $B \times [a, b]$, $a < b$, и голоморфная по z в B при любом $t \in [a, b]$. Пусть $M[a, b]$ – класс вещественных функций $\mu(t)$, неубывающих на $[a, b]$ и таких, что $\mu(b) - \mu(a) = 1$. Обозначим через $\mathfrak{M}(F; a, b)$ класс функций

$$f(z) = \int_a^b F(z, t) d\mu_f(t), \quad z \in B, \quad \mu_f(t) \in M[a, b], \quad (8)$$

представимых посредством интеграла Стильеса. Функцию $F(z, t)$ называют ядром класса $\mathfrak{M}(F; a, b)$.

Почти невидны следующие утверждения:

- 1) $F(z, t) \in \mathfrak{M}(F; a, b)$ при любом фиксированном $t \in [a, b]$;
- 2) если $f_0(z)$ и $f_1(z)$ – функции класса $\mathfrak{M}(F; a, b)$ и h , $0 \leq h \leq 1$, – постоянное число, то функция

$$f_h(z) = (1-h)f_0(z) + hf_1(z) \in \mathfrak{M}(F; a, b);$$

- 3) класс $\mathfrak{M}(F; a, b)$ равномерно ограничен внутри B , т.е. для любого замкнутого ограниченного множества $E \subset B$ существует число $M_E > 0$, такое, что для любой функции $f(z) \in \mathfrak{M}(F; a, b)$ имеем $|f(z)| \leq M_E$, $z \in E$;

4) функции класса $\mathfrak{M}(F; a, b)$ голоморфны в B , ибо интегральные суммы интеграла (8) голоморфны в B , а последовательность их, сходящаяся к интегралу, равномерно ограничена внутри B ;

5) любая сходящаяся в себе внутри B последовательность $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ функций $f_n(z) \in \mathfrak{M}(F; a, b)$ равномерно сходится внутри B к некоторой функции $f_0(z) \in \mathfrak{M}(F; a, b)$ (это следует из принципа выбора Хелли, теоремы Хелле о предельном переходе под знаком интеграла Стильеса и теоремы Витали);

6) класс $\mathfrak{M}(F; a, b)$ компактен и замкнут.

Из свойств 1) и 2) получаем простейшую вариационную формулу в классе $\mathfrak{M}(F; a, b)$:

$$f_h(z) = f(z) + h(F(z, t) - f(z)), \quad 0 \leq h \leq 1, \quad a \leq t \leq b. \quad (9)$$

Теорема 1. Пусть ядро $F(z, t)$ класса $\mathfrak{M}(F; a, b)$ имеет производную $F'(z, t)$, непрерывную в $B \times [a, b]$. Пусть $\delta > 0$ и $\eta(t)$ – непрерывная на $[a, b]$ вещественная функция, удовлетворяющая условию

$$\frac{a-t}{\delta} \leq \pm \eta(t) \leq \frac{b-t}{\delta}, \quad a \leq t \leq b.$$

Тогда в классе $\mathfrak{M}(F; a, b)$ имеет место вариационная формула

$$f_h(z) = f(z) + h \int_a^b F'(z, t) \eta(t) d\mu_f(t) + o(z, h). \quad (10)$$

Доказательство. Известно [7, с. 161], что если функция $\varphi(t)$ непрерывна на $[a, b]$ и $a \leq \varphi(t) \leq b$ на $[a, b]$, то функция $f_*(z) = \int_a^b F(z, \varphi(t)) d\mu(t) \in \mathfrak{M}(F; a, b)$ при $\mu(t) \in M[a, b]$.

Положим здесь $\varphi(t) = t + h\eta(t)$ и $\mu(t) = \mu_f(t)$ и представим $F(z, \varphi(t))$ в виде

$$F(z, t + h\eta(t)) = F(z, t) + hF'(z, t)\eta(t) + o(z, h).$$

Остается выполнить подстановку в (10) и воспользоваться свойствами интеграла. Теорема доказана.

Заметим, что усиливая требования к дифференциальным свойствам функции $F(z, t)$, можно записать вариации второго и более высокого порядков.

Например, в классе C вариационная формула второго порядка имеет вид

$$f_h(z) = f(z) + h \int_0^{2\pi} \frac{2ie^{it}z}{(1-e^{it}z)^2} \eta(t) d\mu_f(t) - h^2 \int_0^{2\pi} \frac{1+e^{2it}z}{(1-e^{it}z)^3} \eta^2(t) d\mu_f(t) + o(z, h^2).$$

Следствие. Если B – круг или круговое кольцо с центром в точке 0, $a=0$, $b=2\pi$ и $F(z, t) = F(ze^{it})$, где $F(z)$ – функция, регулярная в B , то формула (10) примет вид

$$f_h(z) = f(z) + hz \frac{d}{dz} \int_0^{2\pi} F(z\xi) i\eta(t) d\mu_f(t) + o(z, h), \quad \xi = e^{it}. \quad (11)$$

Действительно, имеем $F'_t(z, t) = F'(ze^{it})ie^{it}$, $F'_z(z, t) = F'(ze^{it})e^{it}$. Значит,

$F'_t(z, t) = zF'(z, t)$. Остается воспользоваться формулой (10).

Теорема 2. В классе C имеет место вариационная формула

$$p_h(z) = p(z) + hz \frac{d}{dz} \left\{ \sum_{k=1}^m \left[A_k \frac{z+z_k}{z-z_k} (p(z) - p(z_k)) - \overline{A_k} \frac{1+z_kz}{1-\overline{z_k}z} (p(z) - \overline{p(z_k)}) \right] + iAp(z) \right\} + o(z, h), \quad (12)$$

где z_k , $k = 1, \dots, m$, $m = 1, 2, \dots$, – точки из круга E , A_k – произвольные комплексные постоянные, A – вещественная постоянная.

Доказательство. Напишем вариационную формулу (11) для ядра

$$F(z, t) = \frac{1 + ze^{it}}{1 - ze^{it}} :$$

$$p_h(z) = p(z) + hz \frac{d}{dz} \int_0^{2\pi} \frac{1 + z\xi}{1 - z\xi} i\eta(t) d\mu_p(t) + o(z, h), \quad \xi = e^{it}, \quad (13)$$

и положим в ней

$$\eta(t) = -2 \operatorname{Im} \sum_{k=1}^m A_k \frac{1 + z_k \xi}{1 - z_k \xi} + A = -i \sum_{k=1}^m \left(A_k \frac{1 + z_k \xi}{1 - z_k \xi} + \overline{A_k} \frac{1 + z_k^{-1} \xi}{1 - z_k^{-1} \xi} \right) + A.$$

Воспользуемся тождеством

$$\frac{1 + z\xi_k}{1 - z\xi_k} = \frac{1 + a\xi}{1 - a\xi} = \frac{z + a}{z - a} \left(\frac{1 + z\xi}{1 - z\xi} - \frac{1 + a\xi}{1 - a\xi} \right) + 1 \quad (14)$$

и при $a = z_k$ и $a = z_k^{-1}$ получим

$$\frac{1 + z\xi}{1 - z\xi} i\eta(t) = \sum_{k=1}^m \left[A_k \frac{z + z_k}{z - z_k} \left(\frac{1 + z\xi}{1 - z\xi} - \frac{1 + z_k \xi}{1 - z_k \xi} \right) - \overline{A_k} \frac{1 + \overline{z_k} z}{1 - \overline{z_k} z} \left(\frac{1 + z\xi}{1 - z\xi} - \frac{1 + z_k^{-1} \xi}{1 - z_k^{-1} \xi} \right) \right] + iA \frac{1 + z\xi}{1 - z\xi}.$$

Подставляя это выражение в (13), получим формулу (12), и теорема доказана.

Теоремы, аналогичные теореме 2, можно доказать для классов C_r , T_r . В качестве функции $\eta(t)$ можно взять мнимую часть какой-нибудь другой рациональной функции, голоморфной в $\overline{E}$, и записать соответствующие вариационные формулы.

Теорема 3. В классе C_r имеет место вариационная формула

$$p_{rh}(z) = p_r(z) + hz \frac{d}{dz} \left\{ \sum_{k=1}^m \left[\frac{A_k}{1 - z_k z} \left(z(1 - z_k^2) p_r(z) - z_k(1 - z^2) p_r(z_k) \right) + \frac{A_k}{(1 - z_k z)(z - z_k)} \left(z(1 - \overline{z_k^2}) p_r(z) - \overline{z_k}(1 - z^2) p_r(\overline{z_k}) \right) \right] + iA p_r(z) \right\} + o(z, h). \quad (15)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2. В качестве $\eta(t)$ нужно взять функцию

$$\eta(t) = -i \sum_{k=1}^m \left(A_k F(z_k, t) + \overline{A_k} F(\overline{z_k}, t) \right) + A.$$

Функция $F(z, t)i\eta(t)$ преобразуется с помощью тождества (14). Теорема доказана.

Сравнивая ядро класса T_r с ядром класса C_r , сразу видим, что справедлива

Теорема 4. В классе T_r имеет место вариационная формула

$$q_h(z) = q(z) + h \frac{z^2}{1 - z^2} \frac{d}{dz} \left\{ \sum_{k=1}^m \left[A_k \frac{(1 - z_k^2)(1 - z^2)}{(1 - z_k z)(z - z_k)} (q(z) - q(z_k)) + \overline{A_k} \frac{(1 - \overline{z_k^2})(1 - z^2)}{(1 - \overline{z_k} z)(z - \overline{z_k})} (q(z) - \overline{q(z_k)}) \right] + iA \frac{1 - z^2}{z^2} q(z) \right\} + o(z, h). \quad (16)$$

3. Вариационные формулы в классах функций, представимых с помощью интегралов Стильтьеса

Пусть $G(u_1, \dots, u_n)$, $n = 1, 2, \dots$, – функция, голоморфная по u_k , $|u_k| < \infty$, $k = 1, \dots, n$, и $\mathfrak{N}$ – класс функций $f(z)$, представимых с помощью интегралов Стильтьеса формулой

$$f(z) = G(u_{1,f(z)}, \dots, u_{n,f(z)}), \quad u_{k,f(z)} \in \mathfrak{M}(F_k; a, b).$$

Легко видеть, что класс $\mathfrak{N}$ равномерно ограничен внутри B . Отсюда и из принципа Монтеля следует компактность класса $\mathfrak{N}$, а из принципа выбора Хелли и теоремы Хелли следует его замкнутость.

Ради краткости записи для $f(z) \in \mathfrak{N}$ положим

$$G_{k,f(z)} = G'_{u_k}(u_{1,f(z)}, \dots, u_{n,f(z)}).$$

Легко видеть, что справедлива

Теорема 5. 1) Пусть $A_k, A_k \geq 0$, – постоянные, $a_k \leq t_k \leq b_k$. Пусть $F_k(z, t)$ имеет производную $F'_t(z, t)$. Тогда в классе $\mathfrak{N}$ имеет место вариационная формула

$$f_h(z) = f(z) + h \sum_{k=1}^n A_k G_{k,f(z)} [F_k(z, t) - u_{k,f(z)}] + o(z, h), \quad 0 < h < 1. \quad (17)$$

2) Пусть $\delta > 0$ и $\eta_k(t)$, $k = 1, \dots, n$, – непрерывные на $[a_k, b_k]$ вещественные функции, удовлетворяющие условиям

$$\frac{a_k - t}{\delta} \leq \pm \eta_k(t) \leq \frac{b_k - t}{\delta}, \quad a_k \leq t \leq b_k,$$

A_k – вещественные постоянные. Тогда в классе $\mathfrak{N}$ имеет место вариационная формула

$$f_h(z) = f(z) + h \sum_{k=1}^n A_k G_{k,f(z)} \int_{a_k}^{b_k} \frac{\partial}{\partial t} F_k(z, t) \eta_k(t) d\mu_{k,f}(t) + o(z, h). \quad (18)$$

Теорема 6. Пусть z_k , $k = 1, \dots, m$, $m = 1, 2, \dots$, – точки из кольца $E(q, 1)$, A_k – произвольные комплексные постоянные и A – вещественная постоянная. В классе $C(q, 1)$ имеет место вариационная формула

$$f_h(z) = f(z) + hz \frac{d}{dz} \left\{ \sum_{k=1}^m \left[A_k F\left(\frac{z_k}{z}\right) (f(z) - f(z_k)) + F\left(\frac{z_k z}{q}\right) \left(f(z) - f\left(\frac{q}{z_k}\right) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. \overline{A_k} F\left(\frac{1}{\overline{z_k z}}\right) (f(z) + f(\overline{z_k})) + F\left(\frac{qz}{z_k}\right) \left(f(z) + f\left(\frac{q}{z_k}\right) \right) \right] + i A f(z) \right\} + o(z, h). \quad (19)$$

Доказательство. Опираясь на формулу (11), получаем вариационную формулу

$$f_h(z) = f(z) + hz \frac{d}{dz} \left\{ \int_0^{2\pi} F(z\xi) i \eta_1(t) d\mu_{1,f}(t) + \int_{-\pi}^{\pi} F\left(\frac{q}{z}\xi\right) i \eta_2(t) d\mu_{2,f}(t) \right\} + o(z, h), \\ \xi = e^{it}, \quad (20)$$

где полагаем

$$\begin{aligned}\eta_1(t) &= \eta_2(t) = -2 \operatorname{Im} \sum_{k=1}^m A_k \left(F(z_k \xi) + F\left(\frac{q}{z_k} \xi\right) \right) + A = \\ &= i \sum_{k=1}^m \left\{ A_k \left(F(z_k \xi) - F\left(\frac{q}{z_k} \xi\right) \right) + \overline{A_k} \left(F\left(\frac{1}{z_k} \xi\right) - F\left(\frac{\overline{z_k}}{q} \xi\right) \right) \right\} + A.\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $F(a) = F(\overline{a}) = -F\left(\frac{1}{a}\right)$. Интегралы в (20) вычисляем, пользуясь тождеством

$$\begin{aligned}F(z)[F(a) - F(b)] &= F\left(\frac{a}{z}\right)[F(z) - F(a)] - \\ &- F\left(\frac{b}{z}\right)[F(z) - F(b)] - 2[B(a) - B(b)] - 2\left[B\left(\frac{z}{a}\right) - B\left(\frac{z}{b}\right)\right],\end{aligned}$$

где

$$B(w) = \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{2q^{2k}w}{1-q^{2k}w} + \frac{2q^{2k}w^{-1}}{1-q^{2k}w^{-1}} \right),$$

и тем, что $B(w^{-1}) = B(w)$, $F(w^{-1}) = F(w)$, $F(\overline{w}) = \overline{F(w)}$, $F(q^2w) = F(w) + 2$.

В результате получаем формулу (19).

4. Вариационные формулы в классах S^* , S^0

Теорема 7. В классе S^* имеет место вариационная формула

$$\begin{aligned}f_h(z) &= f(z) + hf(z) \sum_{k=1}^n \left\{ A_k \left[\frac{z + z_k}{z - z_k} \frac{zf'(z)}{f(z)} + 1 - \frac{z_k f'(z_k)}{f(z_k)} \frac{2z_k}{z - z_k} \right] - \right. \\ &- \left. \overline{A_k} \left[\frac{1 + \overline{z_k} z}{1 - \overline{z_k} z} \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 + \left(\frac{z_k f'(z_k)}{f(z_k)} \right) \frac{2z_k z}{1 - z_k z} \right] \right\} + ihA(zf'(z) - f(z)) + o(z, h).\end{aligned}\quad (21)$$

Доказательство. Пусть $f(z) \in S^*$. Тогда $zf'(z)/f(z) \in C$. Напишем формулу (13) для этой функции:

$$\frac{zf'_h(z)}{f_h(z)} = \frac{zf'(z)}{f(z)} + hz \frac{d}{dz} \varphi_f(z) + o(z, h), \quad (22)$$

где $\varphi_f(z)$ означает функцию, которую получим, если в выражении, стоящем в фигурных скобках формулы (12), заменим $p(z)$ и $p(z_k)$ на $zf'(z)/f(z)$ и $z_k f'(z_k)/f(z_k)$ соответственно. Интегрируя (22) по z от $z_0 \neq 0$ до z , имеем

$$\ln \frac{f'_h(z)}{f_h(z)} = \ln \frac{f'(z)}{f(z)} + h[\varphi_f(z) - \varphi_f(z_0)] + o(z, h),$$

или

$$f_h(z) = \frac{f_h(z_0)}{f(z_0)} f(z) e^{h[\varphi_f(z) - \varphi_f(z_0)] + o(z, h)}.$$

Устремляя здесь z_0 к нулю, получаем

$$f_h(z) = f(z) \left(1 + h \left[\varphi_f(z) - \varphi_f(0) \right] \right) + o(z, h),$$

или

$$f_h(z) = f(z) + hf(z) \left[\varphi_f(z) - \varphi_f(0) \right] + o(z, h).$$

Это и есть формула (21). Теорема доказана.

Отметим, что вариационные формулы в классе S^* могут быть получены из представления этого класса с помощью интеграла Стильтьеса

$$f(z) = ze^{-2 \int_0^{2\pi} \ln(1 - e^{it}z) d\mu_f(t)}, \quad \mu_f(t) \in M[0, 2\pi].$$

Здесь имеется в виду ветвь логарифма, которая обращается в нуль при $z = 0$. Отсюда имеем

$$\ln \frac{f(z)}{z} = -2 \int_0^{2\pi} \ln(1 - e^{it}z) d\mu_f(t).$$

Далее проводим рассуждения, аналогичные рассуждениям при доказательстве теоремы 2. При этом после потенцирования полученной формулы приходим к вариационной формуле в классе S^* .

Используя формулу $zg'(z) = f(z)$, $g(z) \in S^0$, $f(z) \in S^*$, легко приходим к вариационной формуле в классе S^0 . Её можно получить, интегрируя уравнение

$$\frac{zf_h''(z)}{f_h'(z)} = p_h(z) - 1, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1$$

с функцией $p_h(z)$ вида (12). Окончательная запись вариационной формулы на S^0 получается интегрированием формулы (11), деленной на z с последующей заменой под интегралом $f(z)$ на $zg'(z)$.

Вариационные формулы, аналогичные формуле (10), можно установить для классов функций, представимых в кольце с помощью интеграла Стильтьеса (по аналогии с тем, как это сделано для классов C , C_r , T_r , S^* , S^0 в круге) (см. [6, 8]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Голузин Г.М. Об одном методе вариаций в теории аналитических функций // Уч. зап. Ленингр. ун-та. Серия матем. наук. 1952. Т. 144. Вып. 23. С. 85–101.
2. Александров И.А. Вариационные задачи для звездообразных однолистных в круге функций // Изв. АН АрмССР. 1961. Т. 14. № 5. С. 7–19.
3. Александров И.А., Черников В.В. Экстремальные свойства звездообразных отображений // Сиб. мат. журн. 1963. Т. 4. № 2. С. 241–267.
4. Александров И.А., Гутлянский В.Я. Экстремальные задачи на классах аналитических функций, имеющих структурную формулу // Докл. АН СССР. 1965. Т. 165. № 5. С. 983–986.
5. Лебедев Н.А., Александров И.А. К методу вариаций в классах функций, представимых с помощью интегралов Стильтьеса // Труды Матем. ин-та имени В.А. Стеклова. М.: Наука, 1967. С. 79–89.
6. Зморевич В.А. О некоторых классах аналитических функций, однолистных в круговом кольце // Матем. сб. 1953. Т.32(74). № 3. С. 633–652.
7. Халмош П. Теория меры. М.: ИЛ, 1953.
8. Лит Ен Пир. О типично вещественных функциях в круговом кольце // Докл. АН СССР. Т. 92. № 4. С. 699–702.

Статья поступила 11.08.2014 г.

Aleksandrov I.A., Ezhova O.I. METHOD OF VARIATIONS FOR MAPS REPRESENTABLE BY MEANS OF STIELTJES INTEGRALS

In studying properties of classes of analytic functions and in finding extreme values of functionals on these classes, appropriate variational formulas are used. In this work, they are found for classes of functions that can be represented by a Stieltjes integral or some combination of such integrals. Variational formulas for classes of holomorphic functions with a positive real part in a circle are presented. Based on these formulas, variational formulas for star convex univalent mappings were obtained. Two variational formulas were obtained for functions holomorphic in a circular ring with a positive real part therein.

Keywords: Stieltjes integral, classes of holomorphic functions, variational formulas.

ALEKSANDROV Igor Aleksandrovich (Doctor of Physics and Mathematics, Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: ma@math.tsu.ru

EZHOVA Olga Igorevna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: oezhova@gmail.com

REFERENCES

1. Goluzin G.M. Ob odnom metode variatsiy v teorii analiticheskikh funktsiy. *Uch. zap. Leningr. un-ta. Seriya matem. nauk*, 1952, vol. 144, no. 23, pp. 85–101. (in Russian)
2. Aleksandrov I.A. Variatsionnye zadachi dlya zvezdoobraznykh odnolistnykh v krugе funktsiy. *Izvestiya AN ArmSSR*, 1961, vol. 14, no. 5, pp. 7–19. (in Russian)
3. Aleksandrov I.A., Chernikov V.V. Ekstremal'nye svoystva zvezdoobraznykh otobrazheniy. *Sib. mat. zhurn.*, 1963, vol. 4, no. 2, pp. 241–267. (in Russian)
4. Aleksandrov I.A., Gutlyanskiy V.Ya. Ekstremal'nye zadachi na klassakh analiticheskikh funktsiy, imeyushchikh strukturnuyu formulu. *Dokl. AN SSSR*, 1965, vol. 165, no. 5, pp. 983–986. (in Russian)
5. Lebedev N.A., Aleksandrov I.A. K metodu variatsiy v klassakh funktsiy, predstavimyykh s pomoshch'yu integralov Stilt'esa. *Trudy Matem. in-ta imeni V.A. Steklova*. Moscow, Nauka Publ., 1967, pp. 79–89. (in Russian)
6. Zmorovich V.A. O nekotorykh klassakh analiticheskikh funktsiy, odnolistnykh v krugovom kol'tse. *Matem. sb.*, 1953, vol. 32(74), no. 3, pp. 633–652. (in Russian)
7. Khalmosh P. *Teoriya mery*. Moscow, Izd-vo inostrannoy literatury, 1953. (in Russian)
8. Lit En Pir. O tipichno veshchestvennykh funktsiyakh v krugovom kol'tse. *Dokl. AN SSSR*, vol. 92, no. 4, pp. 699–702. (in Russian)