УДК 515.12

Е.С. Сухачева, Т.Е. Хмылева

О НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ, ГОМЕОМОРФНЫХ ПРЯМОЙ ЗОРГЕНФРЕЯ

Рассматривается топологическое пространство S_A, которое является модификацией прямой Зоргенфрея S и определяется следующим образом: если точка $x \in A \subset S$, то базой окрестностей точки x является семейство полуинтервалов $\{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}, a < b \text{ и } x \in [a,b)\}$. Если $x \in S \setminus A$, то база окрестностей точки x – $\{(c,d] : c,d \in \mathbb{R}, c < d \text{ и } x \in (c,d]\}$. Доказано, что для счетного подмножества $A \subset \mathbb{R}$, замыкание которого в евклидовой топологии счетно, пространство S_A гомеоморфно пространству S. Кроме того, получено, что пространство S_A гомеоморфно пространству S для любого замкнутого подмножества $A \subset \mathbb{R}$. Подобные вопросы рассматривались в работе V.A. Chatyrko, Y. Hattori, где топология «стрелки» на множестве A заменялась на евклидову топологию.

Ключевые слова: *прямая Зоргенфрея*, *производная множества*, *гомеоморфизм*, *ординал.*

В работе используются следующие обозначения: $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел, наделенное стандартной евклидовой топологией; символом S обозначим *прямую Зоргенфрея* (или «*стрелку»*), представляющую собой множество вещественных чисел, топология в котором порождена базой $\{(a,b] : a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$; символом $S_{\rightarrow}$ обозначается множество вещественных чисел, наделенное топологией, порожденной базой $\{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Очевидно, что S гомеоморфно $S_{\rightarrow}$. Топологическое пространство $S_{\rightarrow} = (\mathbb{R}, \tau_{\rightarrow})$, в отличие от S, будем называть «*правой стрелкой»*.

Пусть множества $X, Y \subset \mathbb{R}$. Обозначим символом X_Y топологическое пространство, в котором база окрестностей точки x определяется следующим образом:

$$x \in X \setminus Y : \{(a,b] : a,b \in \mathbb{R}, a < b \text{ и } x \in (a,b]\};$$

$$x \in Y : \{[c,d) : c,d \in \mathbb{R}, c < d \text{ и } x \in [c,d)\}.$$

В частности, если $X = S$, а $Y = A$, получаем пространство S_A, в котором на множестве A задана топология «правой стрелки». Подпространсво $(a,b) \subset S_A$ обозначается $(a,b)_A$.

Для произвольного подмножества A топологического пространства X и произвольного ординала α производная множество $A^{(\alpha)}$ опредляется по трансфинитной индукции следующими формулами:

A' – множество предельных точек множества A,

$A^{(\alpha)} = \left(A^{(\alpha-1)}\right)'$, если α – непредельный ординал и

$A^{(\alpha)} = \bigcap_{\beta<\alpha} A^{(\beta)}$, если α – предельный ординал.

Если $A \subset \mathbb{R}$, то по теореме Кантора – Бендиксона [1, с. 162] существует наименьший счетный ординал α, такой, что производная α-го порядка $A^{(\alpha)}$ является совершенным множеством. Если замыкание множества A счетно, то совершенное множество $A^{(\alpha)} = \varnothing$. Если множество A счетно и компактно, то ординал α не может быть предельным и, следовательно, существует ординал β, такой, что $A^{(\beta)} \neq \varnothing$ и $A^{(\beta+1)} = A^{(\alpha)} = \varnothing$. Такой ординал β будем называть высотой счетного компакта A.

Определение. Высотой компакта F будем называть наименьший ординал α, такой, что $F^{(\alpha)} = \varnothing$.

Теорема 1. Пусть множество F замкнуто в $\mathbb{R}$. Тогда пространство S_F гомеоморфно S.

Доказательство. Так как $S_F \setminus F$ открыто в пространстве $\mathbb{R}$, то $S_F \setminus F = \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(a^k, b^k\right)$, где $\left(a^k, b^k\right)\bigcap\left(a^l, b^l\right) = \varnothing$, если $k \neq l$. В каждом из интервалов $\left(a^k, b^k\right)$ рассмотрим последовательности $a_1^k > a_2^k > \ldots > a_n^k > \ldots$ и $b_1^k < b_2^k < \ldots < b_n^k < \ldots$, такие, что $\inf_n a_n^k = a^k$ и $\sup_n b_n^k = b^k$, причем $a^1 = b^1$. Рассмотрим функции

$$f_n^k : \left(a_{n+1}^k, a_n^k\right] \to \left[a_{n+1}^k, a_n^k\right) \text{ и } g_n^k : \left(b_n^k, b_{n+1}^k\right] \to \left[b_n^k, b_{n+1}^k\right),$$

которые гомеоморфно отображают открыто-замкнутые множества $\left(a_{n+1}^k, a_n^k\right] \subset S_F$ и $\left(b_n^k, b_{n+1}^k\right] \subset S_F$ на открыто-замкнутые множества $\left[a_{n+1}^k, a_n^k\right) \subset S_r$ и $\left[b_n^k, b_{n+1}^k\right) \subset S_r$.

Обозначим через φ отображение $S_F \setminus F$ на $(S \setminus F)_{\to}$, определенное по формуле

$$\varphi(x) = \begin{cases} f_n^k(x), x \in \left(a_{n+1}^k, a_n^k\right], \\ g_n^k(x), x \in \left(b_n^k, b_{n+1}^k\right]. \end{cases}$$

Очевидно, отображение φ является гомеоморфизмом $S_F \setminus F$ на $(S \setminus F)_{\to}$. Заметим, что если точка $x \in \left(a_{n+1}^k, a_n^k\right]$, то $|x - \varphi(x)| \leq \left|a_{n+1}^k - a_n^k\right|$. Аналогично, для $x \in \left(b_n^k, b_{n+1}^k\right]$.

Докажем, что отображение

$$\psi(x) = \begin{cases} x, x \in F, \\ \varphi(x), x \in S_F \setminus F \end{cases}$$

является гомеоморфизмом S_F на $S_{\to}$.

Действительно, на открытом множестве $S_F \setminus F$ отображение ψ совпадает с отображением φ, а значит, является гомеоморфизмом. Пусть теперь $x \in F$, последовательность $x_l \in S_F$ и $\lim\limits_{l\to\infty} x_l = x$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выбирем l_0 так, что $0 < x_{l_0} - x < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Выберем номер $p > l_0$ такой, что при $l > p$ выполняется неравенство $x \le x_l < x_{l_0}$. Более того, если $l > p$ и $x_l \in \left[a_{n_l}^{k_l}, b_{n_l}^{k_l}\right)$, то $b_{n_l}^{k_l} < x_{l_0}$ и, следовательно, $\left|a_{n_l}^{k_l} - b_{n_l}^{k_l}\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда, если $x_l \notin F$, то

$$|\psi(x) - \psi(x_l)| = |x - \psi(x_l)| \le |x - x_l| + |x_l - \psi(x_l)| < |x - x_l| + \left|a_{n_l}^{k_l} - b_{n_l}^{k_l}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Если $x_l \in F$, то при $l > p$ $|\psi(x) - \psi(x_l)| = |x - x_l| < \left|x - x_{l_0}\right| < \varepsilon / 2$. Таким образом, непрерывность отображения ψ доказана. Непрерывность отображения ψ^{-1} доказывается аналогично. ■

Следствие 1. Пусть $x_1, \ldots, x_n \in S$. Тогда $S_{\{x_1,\ldots,x_n\}}$ гомеоморфно *S*.

Следствие 2. Пусть $A \subset S$ – счетное дискретное множество. Тогда S_A гомеоморфно *S*.

Докажем что, если $A \subset \mathbb{R}$ – произвольное счетное множество, замыкание которого также является счетным, то S_A гомеоморфно *S*. Для этого потребуются некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пространства $(a,b]_{(a,b)}$ и $(a,b]$ гомеоморфны, где $a, b \in S$ и $a < b$.

Доказательство. В интервале (a,b) рассмотрим последовательности $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$ и $b_1 < b_2 < \ldots < b_n < \ldots$, такие, что $\inf\limits_n a_n = a$ и $\sup\limits_n b_n = b$, причем $a^1 = b^1$. Рассмотрим отображение $\psi : (a,b]_{(a,b)} \to (a,b]$, которое гомеоморфно отображает промежутоки $(a_{n+1}, a_n] \subset (a,b]_{(a,b)}$ и $(b_n, b_{n+1}] \subset (a,b]_{(a,b)}$ на открыто-замкнутые подмножества $(a_{n+1}, a_n] \subset (a,b]$, $(b_n, b_{n+1}] \subset (a,b]$ соответственно, и $\psi(b) = b$. Нетрудно видеть, что такое отображения является гомеоморфизмом. ■

Лемма 2. Пространства $(a,b]_{\{p\}}$ и $(a,b]$ гомеоморфны, где $p \in (a,b)$.

Доказательство. В интервале (a,p) рассмотрим последовательности $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$ и $p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots$, такие, что $\inf\limits_n a_n = a$ и $\sup\limits_n p_n = p$, Определим отображение ψ, которое гомеоморфно отображает открыто-замкнутые множества $(a_{n+1}, a_n] \subset (a,p]_{\{p\}}$ и $(p_n, p_{n+1}] \subset (a,p]_{\{p\}}$ в открыто-замкнутые подмножества $[a_{n+1}, a_n) \subset (a,p]_{\rightarrow}$, $[b_n, b_{n+1}) \subset (a,p]_{\rightarrow}$ соответственно. На интервале (p,b) отображение ψ определяется аналогично и $\psi(p) = p$, $\psi(b) = b$. Нетрудно видеть, что отображение $\psi : (a,b]_{\{p\}} \to (a,b]_{(a,b)}$.Тогда, по лемме 1, множество $(a,b]_{\{p\}}$ гомеоморфно $(a,b]$. ■

Следствие 3. Пространства $(a,b]_{\{p_1,\ldots,p_n\}}$ и $(a,b]$ гомеоморфны, где $\{p_1,\ldots,p_n\}\subset(a,b)$.

Теорема 2. Пусть счетное множество $A\subset\mathbb{R}$ такое, что его замыкание $\overline{A}$ относительно $\mathbb{R}$ счетно. Если $\overline{A}\subset(a,b)$, то $(a,b]_A$ гомеоморфно $(a,b]$.

Доказательство. Доказательство проведем, используя метод трансфинитной индукции по высоте компакта $F=\overline{A}$. Напомним, что высотой компакта F называется α, такой, что $F^{(\alpha)}$ – последняя непустая производная компакта F. Очевидно, множество $F^{(\alpha)}$ конечно.

Пусть $\alpha=0$, т.е. множество F конечно. Поскольку в этом случае $A=F$, то по следствию 2 пространство $(a,b]_A$ гомеоморфно $(a,b]$.

Пусть $\alpha=1$, т.е. F' – конечное множество на $(a,b)_A$. Пусть $x_1<x_2<\ldots<x_m$ точки множества F' и точки $a=p_0<p_1<\ldots<p_n=b$ такие, что $p_{i-1}<x_i<p_i$ и $p_i\notin F$, где $i=\overline{1,n}$. Рассмотрим разбиение множества

$$(p_{i-1},p_i)\setminus\{x_i\}=\left(\coprod_{m=1}^{\infty}(a_{m+1},a_m]\right)\bigcup\left(\coprod_{m=1}^{\infty}(b_m,b_{m+1}]\right),$$

где точки a_m и b_m не принадлежат множеству F, и $\sup\limits_m a_m=\inf\limits_{m\to\infty} b_m=p_i$ при всех $m\in\mathbb{N}$. Поскольку на промежутке $(p_{i-1},p_i]$ точка x_i – единственная предельная точка множества F, то каждый из промежутков $(a_{m+1},a_m]$ и $(b_m,b_{m+1}]$ содержит лишь конечное число точек множества A. Тогда по следствию 2 каждый из промежутков $(a_{m+1},a_m]_A$ и $(b_m,b_{m+1}]_A$ гомеоморфен $(a_{m+1},a_m]$ и $(b_m,b_{m+1}]$ соответственно. Если $x_i\notin A$, то промежуток $(p_{i-1},p_i]_A$ гомеоморфен $(p_{i-1},p_i]$. Если же $x_i\in A$, то промежуток $(p_{i-1},p_i]_A$ гомеоморфен $(p_{i-1},p_i]_{\{x_i\}}$ и по лемме 2 $(p_{i-1},p_i]_{\{x_i\}}$ гомеоморфно $(p_{i-1},p_i]$. Так как промежуток $(a,b]$ есть дизъюнктное объединение открыто-замкнутых прометков $(p_{i-1},p_i]$ и каждый из этих промежутков гомеоморфен $(p_{i-1},p_i]_A$, то промежуток $(a,b]$ гомеоморфен $(a,b]_A$.

Пусть α – произвольный ординал и компакт F высоты α. Предположим, что для всех компактов высоты $\beta<\alpha$ теорема доказана. Поскольку $F^{(\alpha)}$ последняя непустая производная компакта F, то $F^{(\alpha)}$ содержит лишь конечное число точек, то есть $F^{(\alpha)}=\{x_1,\ldots,x_n\}\subset(a,b)$.

Рассмотрим точки $a=p_0<p_1<\ldots<p_n=b$ такие, что $p_{i-1}<x_i<p_i$ и $p_i\notin F$, где $i=\overline{1,n}$. Рассмотрим разбиение множества

$$(p_{i-1},p_i)\setminus\{x_i\}=\left(\coprod_{m=1}^{\infty}(a_{m+1},a_m]\right)\bigcup\left(\coprod_{m=1}^{\infty}(b_m,b_{m+1}]\right),$$

где точки a_m и b_m не принадлежат множеству F, и $\sup\limits_m a_m=\inf\limits_m b_m=p_i$ при всех

$m \in \mathbb{N}$. Поскольку на промежутке $(p_{i-1}, p_i]$ точка x_i – единственная точка множества $F^{(\alpha)}$, то для любого $m \in \mathbb{N}$ компакты $(a_{m+1}, a_m] \bigcap F$ и $(b_m, b_{m+1}] \bigcap F$ имеют высоту $\beta_m < \alpha$. Тогда по предположению индукции каждый из промежутков $(a_{m+1}, a_m]_A$ и $(b_m, b_{m+1}]_A$ гомеоморфен $(a_{m+1}, a_m]$ и $(b_m, b_{m+1}]$ соответственно. Если $x_i \notin A$, то промежуток $(p_{i-1}, p_i]_A$ гомеоморфен $(p_{i-1}, p_i]$. Если же $x_i \in A$, то промежуток $(p_{i-1}, p_i]_A$ гомеоморфен $(p_{i-1}, p_i]_{\{x_i\}}$ и по лемме 2 $(p_{i-1}, p_i]_{\{x_i\}}$ гомеоморфен $(p_{i-1}, p_i]$. Так как промежуток $(a,b]$ есть дизъюнктное объединение открыто-замкнутых промежутков $(p_{i-1}, p_i]$ и каждый из этих промежутков гомеоморфен $(p_{i-1}, p_i]_A$, то промежуток $(a,b]$ гомеоморфен $(a,b]_A$. ■

Теорема 3. Пусть счетное множество $A \subset \mathbb{R}$ таково, что его замыкание $\overline{A}$ относительно $\mathbb{R}$ счетно. Тогда S_A гомеоморфно S.

Доказательство. Рассмотрим возрастающую последовательность $\{a_n\}_{n=}$, такую, что $a_n \notin F$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Положим $A_n = A \bigcap (a_n, a_{n+1}]$. Тогда по теореме 2 множество $(a_n, a_{n+1}]_{A_n}$ гомеоморфно $(a_n, a_{n+1}]$. Поскольку $S_A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (a_n, a_{n+1}]_{A_n}$ и все множества $(a_n, a_{n+1}]_{A_n}$ открыто замкнуты, то S_A гомеоморфно S. ■

Следствие 4. Пусть A – счетное замкнутое подмножество в S. Тогда S_A гомеоморфно S.

Доказательство. Рассмотрим замыкание множества A в евклидовой топологии прямой $\mathbb{R}$. Заметим, что замкнутые множества $A \subset S$ и $\overline{A} \subset \mathbb{R}$ отличаются не более чем счетным числом точек. Это следует из того, что открытое множество на прямой S имеет вид

$$\left(\coprod_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)\right) \bigcup \left(\coprod_{j=1}^{\infty}(c_j, d_j]\right),$$

где $a_i \le b_i$ и $c_j \le d_j$ для всех $i, j \in \mathbb{N}$. Следовательно, множество $\overline{A}$ счетно. Так как множество A является всюду плотным подмножеством множества $\overline{A}$, то по теореме 3 пространство S_A гомеоморфно S. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров П.С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977. 368 с.
2. *Куратовский К.*, *Мостовский А.* Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
3. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986, 752 с.
4. *Chatyrko V.A.*, *Hattori Y.* A poset of topologies on the set of real numbers // Comment. Math. Univ. Carolin. 2013. V. 54. No. 2. P. 189–196.

Статья поступила 23.06.2014 г.

Sukhacheva E.S., *Khmyleva T.E.* ON SOME LINEARLY ORDERED TOPOLOGICAL SPACES HOMEOMORPHIC TO THE SORGENFREY LINE

In this paper, we consider a topological space S_A which is a modification of the Sorgenfrey line *S* and is defined as follows: if a point $x \in A \subset S$, then the base of neighborhoods of the point x is a family of intervals $\{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}, a < b \text{ и } x \in [a,b)\}$. If $x \in S \setminus A$, then the base of neighborhoods of x is $\{(c,d] : c,d \in \mathbb{R}, c < d \text{ и } x \in (c,d]\}$. It is proved that for a countable subset $A \subset \mathbb{R}$ the closure of which in the Euclidean topology is a countable space, the space S_A is homeomorphic to the space *S*. In addition, it was found that the space S_A is homeomorphic to the space *S* for any closed subset $A \subset \mathbb{R}$. Similar problems were considered by V.A. Chatyrko and Y. Hattori in [4], where the "arrow" topology on the set A was replaced by the Euclidean topology. In this paper, we consider two special cases: A is a closed subset of the line in the Euclidean topology and the closure of the set A in the Euclidean topology of the line is countable.

The following results were obtained:

Let a set A be closed in $\mathbb{R}$. Then the space S_A is homeomorphic to the space *S*.

Let a countable set $A \subset \mathbb{R}$ be such that its closure $\overline{A}$ is countable relatively to $\mathbb{R}$. Then S_A is homeomorphic to S.

Let A be a countable closed subset in *S*. Then S_A is homeomorphic to S.

Keywords: Sorgenfrey Line, derivative set, homeomorphism, ordinal.

SUHACHEVA Elena Sergevna (M.Sc., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: Sirius9113@mail.ru

KHMYLEVA Tatiana Evgenievna (Candidate of Physics and Mathematics,
Tomsk State University Russian Federation)
E-mail: TEX2150@yandex.ru

REFERENCES

1. Aleksandrov P.S. *Vvedenie v teoriyu mnozhestv i obshchuyu topologiyu*. Moskow, Nauka Publ., 1977, 368 p. (in Russian)
2. Kuratovskiy K., Mostovskiy A. *Teoriya mnozhestv*. Moskow, Mir Publ., 1970, 416 p. (in Russian)
3. Engel'king R. *Obshchaya topologiya*. Moskow, Mir Publ., 1986, 752 p. (in Russian)
4. Chatyrko V.A., Hattori Y. A poset of topologies on the set of real numbers. *Comment. Math. Univ. Carolin*., 2013, vol. 54, no. 2, pp. 189–196.