

Ф.Э. Молин

ОБ ОДНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СТРОКИ¹

Переменность радиуса сходимости степенного ряда при переменном начальном аргументе представляется в особо наглядном виде в случае гипергеометрической функции. Результат интересен как единственный нетривиальный случай, в котором теоретический результат проверен.

Гипергеометрическая строка

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha \cdot \beta (\alpha + 1)(\beta + 1)}{1 \cdot \gamma \cdot 2(\gamma + 1)} x^2 + \dots, \quad (1)$$

сходящаяся при $|x| < 1$, ради краткости нами будет написана в виде

$$y = F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x_n, \quad (2)$$

где $C_0 = 1$, $C_{n+1} = \frac{(\alpha + n)(\beta + n)}{(n + 1)(\gamma + n)} C_n$.

Она выполняет дифференциальное уравнение

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0. \quad (3)$$

То же самое дифференциальное уравнение выполняется функцией

$$y = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x). \quad (4)$$

Если её разложить по степеням x , то начальное значение и первый коэффициент строки равны начальному значению и первому коэффициенту строки (1). Отсюда по теоремам о правильных интегралах дифференциальных уравнений вытекает известное тождество

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x). \quad (5)$$

Производные гипергеометрической строки имеют вид

$$F^{(n)}(\alpha, \beta, \gamma, x) = n! C_n F(\alpha + n, \beta + n, \gamma + n, x) \quad (6)$$

и, при помощи формулы (5), могут быть приведены к виду

$$F^{(n)}(\alpha, \beta, \gamma, x) = n! C_n (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-n} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma+n, x). \quad (7)$$

Тогда разложение функции в строку Тейлора с начальным значением x_0 примет вид

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x_0)^{\gamma-\alpha-\beta} \sum_{n=0}^{\infty} C_n F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma+n, x_0) \left(\frac{x-x_0}{1-x_0} \right)^n. \quad (8)$$

Нетрудно доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma+n, x_0) = 1.$$

¹ Ученые записки Томск. пед. ин-та. 1939. № 1. С. 119 – 121; *Molin F.E.* On a transformation of the hypergeometric row // Proceedings of Tomsk Pedagogical Institute. 1939. No. 1. P. 119–121.

Об одном преобразовании гипергеометрической строки

Ф. Ф. Момм.

Переменность радиуса сходимости степенного ряда при пере-
менной начальной аргументе представляется в особой нагляд-
ной форме в случае гипергеометрической функции. Результат
интересен, как единственному не тривиальному случаю, в кото-
ром теоретический результат проверен.

Гипергеометрическая строка

$$(1) \quad F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots$$

сходящаяся при $|x| < 1$, радиус кратности чему будет написана
в виде

$$(2) \quad y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$\text{где } c_0 = 1, \quad c_{n+1} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)} c_n.$$

Она удовлетворяет дифференциальное уравнение

$$(3) \quad x(1-x)y'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)y' - \alpha\beta y = 0.$$

Поскольку это дифференциальное уравнение выполняется
функцией

$$(4) \quad y = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x).$$

Если ее разложить по степеням x , то начальные значения

Поэтому ряд в правой части уравнения (8) сходится при

$$\left| \frac{x-x_0}{1-x_0} \right| < 1. \quad (9)$$

Эта формула делает очевидным, что окружность сходимости ряда (8) прохо-
дит, как это должно быть, через особую точку $x=1$. Начальное значение x_0 заклю-
чается в окружности $|x|=1$. Если оно не вещественно, то окружности сходимости
пересекаются еще в одной точке и часть круга сходимости ряда (8) лежит вне кру-
га сходимости ряда (1). В таком случае формула (8) дает действительно аналитиче-
ское продолжение функции, заданной уравнением (1). В частности, можно от-

метить, что начальное значение x_0 можно выбрать так, чтобы точка $x = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ лежала внутри круга сходимости. Это интересно потому, что во всех разложениях с началом в одной из трех особых точек эта точка находится на границе сходимости.

Разложение в строку Тейлора может быть использовано для вывода Гауссовой формулы, дающей значение $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ в случае его существования.

При замене левой части уравнения (8) равной ей правой частью формулы (5) получается

$$(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x) = (1-x_0)^{\gamma-\alpha-\beta} \sum_0^{\infty} C_n F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma+n, x_0) x_1^n,$$

где x_1 задается уравнением

$$1-x = (1-x_0)(1-x_1). \quad (10)$$

Тогда получится

$$(1-x_1)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x) = \sum_1^{\infty} C_n F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma+n, x_0) x_1^n. \quad (11)$$

Если теперь $F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, 1)$ имеет конечное значение, то и $F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma+n, 1)$ имеет конечное значение. В таком случае можно положить $x_0=1$, а из формулы (10) следует еще $x=1$. Тогда из формулы (11) получается

$$(1-x_1)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma+n, 1) x_1^n. \quad (12)$$

Если левую часть разложить по степеням x_1 :

$$(1-x_1)^{\gamma-\alpha-\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n x_1^n,$$

то сравнение коэффициентов обеих частей дает тождество

$$F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, 1) = \frac{C_n}{D_n} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma+n, 1). \quad (13)$$

Так как и здесь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma+n, 1) = 1,$$

то получается Гауссова формула

$$F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{D_n}. \quad (14)$$