ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2011 Математика и механика № 3(15)

УДК 512.553+512.541

Е.А. Тимошенко

О РАДИКАЛАХ В КАТЕГОРИИ МОДУЛЕЙ НАД CSP-КОЛЬЦОМ[1,2]

Получено полное описание кручений и кокручений в категории модулей над произвольным csp-кольцом. Установлено также, что все радикальные классы этой категории замкнуты относительно чистых подмодулей.

Ключевые слова: *модуль*, *радикал*, *кручение*, *кокручение*, *чистый подмодуль*, *csp-кольцо*.

Исторически понятие радикала восходит к работам Ф.Э. Молина, Э.Ж. Картана, Ф.Г. Фробениуса и Дж.Г.М. Веддербёрна, выполненным на рубеже XIX и XX веков (подробнее о вкладе каждого из этих математиков см. [1, 2]). В 1960-е годы понятие радикала было распространено на категории модулей (см. [3]).

Данная статья является продолжением работы [4], в которой было получено полное описание радикалов в категории модулей над csp-кольцом и образуемой этими радикалами решётки. Напомним основные определения и результаты (все остальные договорённости и свойства можно найти в [3, 4]).

Пусть S – кольцо и пусть каждому модулю A_S из категории S-модулей mod-S сопоставлен однозначно определённый подмодуль $\rho(A)$. Будем говорить, что ρ – *идемпотентный радикал* в mod-S, если для всякого S-модульного гомоморфизма $\varphi\colon A \to B$ выполнено $\varphi(\rho(A)) \subset \rho(B)$ и справедливы следующие свойства:

1) $\rho(\rho(A)) = \rho(A)$ для любого S-модуля A;
2) $\rho(A/\rho(A)) = 0$ для любого S-модуля A.

Для идемпотентного радикала (в дальнейшем слово «идемпотентный» часто будет опускаться) ρ, заданного в mod-S, назовём ρ-*радикальным* класс $R(\rho)$ всех модулей A, для которых выполнено $\rho(A) = A$. Всякий радикальный класс замкнут относительно гомоморфных образов, расширений и прямых сумм. Заметим, что идемпотентный радикал ρ однозначно определяется своим радикальным классом. Радикалы можно естественным образом частично упорядочить, условившись, что $\rho \le \sigma$ тогда и только тогда, когда $R(\rho) \subset R(\sigma)$. Относительно указанного порядка совокупность всех идемпотентных радикалов категории mod-S образует полную большую решётку.

Через $\mathbf{Z}$ и $\hat{\boldsymbol{Z}}_p$ обозначим соответственно кольцо целых чисел и кольцо целых p-адических чисел. Далее, введём обозначения $\hat{\boldsymbol{Q}}_p$, $\mathbf{Z}(p)$ и $\mathbf{Z}(p^\infty)$ соответственно для поля p-адических чисел, циклической группы порядка p и квазициклической p-группы (все они естественным образом могут рассматриваться как p-адические модули). Символом ■ будет обозначаться конец доказательства (либо отсутствие доказательства).

[1] Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009 – 2013 годы». Государственный контракт П937 от 20 августа 2009 г.
[2] Работа частично профинансирована Федеральным агентством по науке и инновациям России по контракту № 02.740.11.0238.

Для левого модуля ${}_SF$ класс, определяемый условием $T(F) = \{A_S \mid A \otimes_S F = 0\}$, обладает всеми свойствами замкнутости, которые необходимы для радикального класса. Соответствующий такому классу идемпотентный радикал будем называть Т-*радикалом*, *порождённым модулем* F.

Через $\mathrm{t}(A)$ обозначим периодическую часть p-адического модуля A.

Теорема 1 [4]. Если $S = \hat{\boldsymbol{Z}}_p$, то в mod-$S$ существует ровно шесть радикальных классов:

$R_n = \{0\}$,

R_m – класс всех периодических делимых S-модулей,

R_l – класс всех периодических S-модулей,

R_λ – класс всех делимых S-модулей,

$R_\mu = \{A_S \mid A/\mathrm{t}(A)$ – делимый S-модуль$\}$,

R_ν – класс всех S-модулей.

Каждый из этих шести радикальных классов имеет вид $T(F)$, где F совпадает с одним из модулей $F_n = S$, $F_m = \hat{\boldsymbol{Q}}_p \oplus \boldsymbol{Z}(p)$, $F_l = \hat{\boldsymbol{Q}}_p$, $F_\lambda = \mathbf{Z}(p)$, $F_\mu = \mathbf{Z}(p^\infty)$, $F_\nu = 0$ соответственно. ■

Из теоремы 1 получаем, что решётка всех радикалов категории p-адических модулей изоморфна решётке $M = \{l, m, n, \lambda, \mu, \nu\}$, где $n < m < l < \mu < \nu$ и $m < \lambda < \mu$, а элементы l и λ считаются несравнимыми.

Предложение 2 [4]. Если S является полем либо совпадает с кольцом вычетов по модулю p^k (где $k > 0$), то в mod-S есть ровно два радикальных класса: нулевой класс $\{0\}$ и класс всех S-модулей. ■

Таким образом, решётку всех радикалов категории модулей над полем либо кольцом вычетов по модулю p^k можно отождествить с двухэлементной цепью $\{n, \nu\}$. Ясно также, что оба указанных радикальных класса можно представить в виде $T(F)$; достаточно положить F равным модулю $F_n = S$ или $F_\nu = 0$.

Пусть P – некоторое бесконечное множество простых чисел. Допустим также, что для каждого $p \in P$ выбрано кольцо K_p, которое может совпадать либо с $\hat{\boldsymbol{Z}}_p$, либо с некоторым кольцом вычетов по модулю p^k (для разных простых p число k может быть разным). Через K обозначим прямое произведение колец K_p по всем простым $p \in P$. Далее, пусть I есть идеал кольца K, состоящий из всех элементов кольца, для которых почти все p-координаты равны нулю. Подкольцо S кольца K назовём csp-*кольцом*, если $I \subset S$, а факторкольцо $K_0 = S/I$ является полем.

Пусть e_p – это элемент идеала I, у которого на p-м месте находится единичный элемент кольца K_p, а на всех остальных местах – нули. Для модуля A_S обозначим $A_p = Ae_p$ и $A_0 = A/AI$. Если X – это конечное подмножество множества P, то сумму всех идемпотентов e_p, таких, что $p \in X$, назовём *идемпотентом конечного типа с носителем* X (для таких идемпотентов будем использовать обозначение ε). При этом считаем, что $\varepsilon = 0$ – идемпотент с пустым носителем.

Для удобства введём в рассмотрение множество P^*, которое получается из P путём присоединения элемента 0. Далее всюду считаем, что S есть csp-кольцо.

Теорема 3 [4]. Пусть R есть некоторый радикальный класс в mod-S. Модуль A_S содержится в R тогда и только тогда, когда $A_p \in R$ при всех $p \in P^*$. ■

Ясно, что идеал S_p кольца S можно отождествить с кольцом K_p. Поэтому при любом $p \in P^*$ можно рассматривать A_p как модуль не только над S, но и над K_p. Обратно, всякий K_p-модуль можно естественным образом превратить в S-модуль. Это даёт возможность для всякого радикала ρ категории mod-S рассмотреть класс

K_p-модулей, задаваемый условием $R_p = R(\rho) \cap \text{mod-}K_p$. Каждый такой класс будет радикальным в категории mod-K_p; соответствующий ему радикал этой категории обозначим через ρ_p (здесь $p \in P^*$).

Из теоремы 3 следует, что радикал ρ категории mod-S однозначно определён радикалами ρ_p, где $p \in P^*$. С другой стороны, как показано в работе [4], если для каждого $p \in P^*$ задан некоторый радикал категории mod-K_p, то существует такой радикал ρ категории mod-S, что набор $\{\rho_p\}_{p\in P^*}$ в точности совпадает с исходным набором радикалов. Из теоремы 1 и предложения 2 получаем, что решётка всех радикалов категории mod-K_p имеет вид

$$M_p = \begin{cases} M, & \text{если } K_p = \hat{\boldsymbol{Z}}_p; \\ \{n, \nu\}, & \text{если } p = 0 \text{ или } K_p \neq \hat{\boldsymbol{Z}}_p. \end{cases}$$

Отсюда получается следующее утверждение.

Теорема 4 [4]. Решётка идемпотентных радикалов категории модулей mod-S изоморфна прямому произведению решёток M_p, где p пробегает множество P^*. ■

Указанное прямое произведение решёток далее будем обозначать через L.

Кроме того, произвольный радикал ρ категории mod-S является T-радикалом. Так, для любого $p \in P^*$ можно представить ρ_p как T-радикал категории mod-K_p, порождённый некоторым модулем F_p (последний можно выбрать в виде F_n, F_m, F_l, F_λ, F_μ или F_ν). Тогда ρ – это T-радикал, порождённый S-модулем

$$F = \bigoplus_{p\in P^*} F_p. \tag{1}$$

Перейдём теперь к основному содержанию работы. Рассмотрим следующие возможные свойства идемпотентного радикала ρ категории mod-S:

1') $\rho(B) = B \cap \rho(A)$ для любого S-модуля A и $B \subset A$;

2') $\rho(A/B) = (\rho(A) + B)/B$ для любого S-модуля A и $B \subset A$.

Идемпотентный радикал ρ называется *кручением*, если для него выполнено свойство 1'). Известно [3], что радикал является кручением тогда и только тогда, когда его радикальный класс замкнут относительно подмодулей.

Рассмотрим радикальные классы $R_p \subset \text{mod-}K_p$.

Теорема 5. Пусть ρ – произвольный радикал категории S-модулей. Класс $R(\rho)$ замкнут относительно подмодулей в том и только в том случае, когда при любом $p \in P$ класс $R_p = R(\rho_p)$ замкнут относительно K_p-подмодулей.

Доказательство. Если $R(\rho)$ является замкнутым относительно подмодулей, то замкнутость класса R_p относительно K_p-подмодулей непосредственно следует из равенства $R_p = R(\rho) \cap \text{mod-}K_p$.

Обратно, пусть при всех $p \in P$ класс R_p замкнут относительно K_p-подмодулей. Предположим, что $A \in R(\rho)$, а B – некоторый подмодуль модуля A. В этом случае по теореме 3 имеем $A_p \in R(\rho) \cap \text{mod-}K_p = R_p$. Тогда из $B_p \subset A_p$ (где $p \in P$) следует $B_p \in R_p \subset R(\rho)$. Таким образом, модуль BI, который совпадает с прямой суммой модулей B_p по всем $p \in P$, также входит в класс $R(\rho)$. Рассмотрим два случая.

а) Пусть $R_0 = \text{mod-}K_0$. В этом случае из включений $B/BI \in R_0 \subset R(\rho)$, а также замкнутости $R(\rho)$ относительно расширений следует $B \in R(\rho)$, что и требовалось.

б) Пусть $R_0 = \{0\}$. Вновь применяя теорему 3, получаем, что $A/AI = A_0 \in R(\rho)$; поэтому имеем включение $A/AI \in R(\rho) \cap \text{mod-}K_0 = R_0$. Следовательно, модуль A совпадает с AI, т.е. с прямой суммой модулей A_p по всем $p \in P$. Это означает, что для любого $a \in A$ найдётся идемпотент конечного типа ε, такой, что выполнено $a = a\varepsilon \in aI$. В частности, имеем $B = BI$ и, значит, $B \in R(\rho)$. Теорема доказана. ■

Замечание. В [4] было показано, что для модуля F вида (1) условие $A \otimes_S F = 0$ эквивалентно тому, что при любом $p \in P^*$ справедливо $A_p \otimes_S F_p = 0$ (в последнем равенстве не имеет значения, рассматривается ли тензорное произведение над S или над кольцом K_p). Тогда при любом $p \in P^*$ имеем для класса $T(F_p) \subset \text{mod-}K_p$ равенство $T(F) \cap \text{mod-}K_p = T(F_p)$.

Теорема 6. Радикал ρ категории модулей mod-S является кручением тогда и только тогда, когда в решётке L ему соответствует последовательность $\alpha = (\alpha_p)$, содержащая лишь элементы n, l и ν.

Доказательство. Для всякого $p \in P$, как нетрудно видеть, K_p-модули 0 и K_p являются плоскими. Далее, если $K_p = \hat{\boldsymbol{Z}}_p$, то $\hat{\boldsymbol{Q}}_p$ является плоским K_p-модулем. Как отмечалось в [5], для плоского K_p-модуля F_p класс $T(F_p) \subset \text{mod-}K_p$ является замкнутым относительно подмодулей. Пусть α не содержит элементов, отличных от n, l и ν, тогда модуль F, заданный равенством (1), обладает тем свойством, что для любого $p \in P$ модуль $F_p \in \text{mod-}K_p$ является плоским. С учётом теоремы 5 и сделанного после неё замечания получаем, что ρ – кручение.

Обратно, пусть ρ – кручение; допустим, что для некоторого $p \in P$ элемент α_p последовательности α равен m, λ или μ. Тогда ρ – это T-радикал, порождённый модулем F вида (1), причём F_p совпадает с $\hat{\boldsymbol{Q}}_p \oplus \boldsymbol{Z}(p)$, $\mathbf{Z}(p)$ или $\mathbf{Z}(p^\infty)$. В первых двух случаях имеем $\mathbf{Z}(p^\infty) \in T(F_p)$, $\mathbf{Z}(p) \notin T(F_p)$, в третьем случае – $\hat{\boldsymbol{Q}}_p \in T(F_p)$, $\hat{\boldsymbol{Z}}_p \notin T(F_p)$. Поэтому класс $T(F_p) \subset \text{mod-}K_p$ не является замкнутым относительно подмодулей, т.е. ρ не является кручением. Полученное противоречие доказывает теорему. ■

Идемпотентный радикал ρ называется *кокручением*, если для него выполнено свойство 2'). Последнее условие справедливо в том и только в том случае, когда существует идемпотентный идеал J кольца S, для которого при любом $A \in \text{mod-}S$ выполнено $\rho(A) = AJ$ [3].

Для любого $p \in P$ идеал J_p выделяется прямым слагаемым в J. Следовательно, если J – идемпотентный идеал, то каждый идеал J_p тоже идемпотентен, т.е. равен K_p или 0. В [6, 7] показано, что идеалы кольца S бывают двух типов.

а) Если $J \subset I$, то J совпадает с прямой суммой идеалов J_p по всем $p \in P$. Ясно, что такой идеал идемпотентен тогда и только тогда, когда он имеет вид

$$J = \bigoplus_{p \in X} K_p, \tag{2}$$

где X – некоторое подмножество множества P.

б) Если $J \not\subset I$, то для некоторого идемпотента конечного типа ε выполнено

$$J = (1-\varepsilon)S \oplus \Big(\bigoplus_{p \in X} J_p\Big)$$

(где X – это носитель идемпотента ε), причём можно считать, что при всех $p \in X$ имеем $J_p \neq K_p$. Такой идеал идемпотентен в том и только в том случае, когда

$$J = (1-\varepsilon)S. \tag{3}$$

Теорема 7. Идемпотентный радикал ρ категории mod-S является кокручением тогда и только тогда, когда в решётке L ему соответствует последовательность α, содержащая лишь элементы n и ν, причём если выполнено $\alpha_0 = \nu$, то α содержит лишь конечное число элементов, равных n.

Доказательство. Можем считать, что $\rho(A) = AJ$.

а) Если идемпотентный идеал J задан условием (2), то для любого модуля A подмодуль $\rho(A) = AJ$ совпадает с прямой суммой модулей A_p по всем $p \in X$. Легко проверить, что в этом случае равенство $\rho(A) = A$ выполнено тогда и только тогда, когда $A_p = 0$ при всех $p \in P^* \setminus X$. Вспоминая описание идемпотентных радикалов категории mod-S, получаем, что радикалу ρ соответствует последовательность α, для которой $\alpha_p = \nu$ при $p \in X$ и $\alpha_p = n$, если $p \in P^* \setminus X$.

б) Пусть идеал J задан условием (3), тогда для любого S-модуля A выполнено $\rho(A) = AJ = A(1-\varepsilon)$. Покажем, что $\rho(A) = A$ тогда и только тогда, когда $A_p = 0$ при всех $p \in X$ (здесь X – носитель идемпотента ε).

В самом деле, условие «$A_p = 0$ при всех $p \in X$» эквивалентно равенству $A\varepsilon = 0$, из которого сразу следует $A(1-\varepsilon) = A$. И обратно, из $A(1-\varepsilon) = A$ непосредственно вытекает $A\varepsilon = 0$, что и требовалось. Рассматриваемому радикалу ρ соответствует последовательность α, у которой $\alpha_p = n$ для тех простых p, которые принадлежат конечному множеству X, и $\alpha_p = \nu$, если $p \in P^* \setminus X$. Доказательство завершено. ■

Напомним, что для p-адического модуля A *чистым* называют всякий его подмодуль B, такой, что $B \cap At = Bt$ для любого целого p-адического числа t. Заметим также, что в этом определении достаточно ограничиться рассмотрением случая $t = p^k$, где $k > 0$.

Кольцом псевдоалгебраических чисел называют всякое csp-кольцо, такое, что соответствующее поле K_0 является конечным расширением поля рациональных чисел. В [8] для модуля A над некоторым кольцом псевдоалгебраических чисел S *чистым* был назван всякий подмодуль B, удовлетворяющий условию $B \cap As = Bs$ для любого элемента $s \in S$, который не является делителем нуля. Примем данное определение для случая модулей над произвольным csp-кольцом S.

Теорема 8. Подмодуль $B \subset A_S$ чист тогда и только тогда, когда для всякого p, такого, что $K_p = \hat{\boldsymbol{Z}}_p$, модуль B_p является чистым подмодулем $\hat{\boldsymbol{Z}}_p$-модуля A_p.

Доказательство. Пусть B есть чистый подмодуль модуля A; зафиксируем p, такое, что $K_p = \hat{\boldsymbol{Z}}_p$. Пусть для $b \in B_p$ выполнено $b = ap^k$, где $a \in A_p$. Аддитивная группа кольца S не может содержать элементов порядка p, т.е. $p^k \in S$ не является делителем нуля. Следовательно, существует элемент $c \in B$, для которого $b = cp^k$. Имеем $b = be_p = (ce_p)p^k$, где $ce_p \in Be_p = B_p$, что и требовалось.

Допустим теперь, что для всякого p, такого, что $K_p = \hat{\boldsymbol{Z}}_p$, подмодуль B_p чист в p-адическом модуле A_p. Пусть $b = as \in B$, где $a \in A$, а элемент $s \in S$ не является делителем нуля. Обозначим через X множество всех простых чисел p, таких, что элемент se_p не является обратимым в кольце K_p. Ясно, что $s \notin I$, поэтому элемент $s + I$ обратим в факторкольце S/I. Отсюда следует конечность множества X. Кроме того, для всех $p \in X$ выполнено равенство $K_p = \hat{\boldsymbol{Z}}_p$ (иначе элемент s оказался бы делителем нуля). Через ε обозначим идемпотент конечного типа с носителем X.

Можно найти элемент $t \in S$, такой, что $st = 1 - \varepsilon$. Имеем $a(1-\varepsilon) = ast = bt \in B$. Рассмотрим произвольное простое $p \in X$. Для элемента $(ae_p)(se_p) = ae_p s = be_p \in B_p$ выполнено $ae_p s \in B_p \cap A_p(se_p) = B_p(se_p)$. Следовательно, найдётся элемент $c_p \in B_p$, для которого $ae_p s = c_p(se_p) = c_p s$. Через c обозначим сумму всех элементов c_p, где $p \in X$. Тогда для элемента $c + a(1-\varepsilon) \in B$ имеем

$$(c + a(1-\varepsilon))s = cs + a(1-\varepsilon)s = a\varepsilon s + a(1-\varepsilon)s = as = b,$$

т.е. подмодуль $B \subset A_S$ действительно является чистым. ■

Замечание. Легко показать, что в категории модулей над csp-кольцом всякий подмодуль, чистый в смысле Кона, будет чистым (обратное утверждение, вообще говоря, неверно).

В статье [9] доказано, что радикальный класс всякого Т-радикала категории абелевых групп является замкнутым относительно взятия сервантных подгрупп. Поскольку в категории модулей над csp-кольцом всякий радикал представим как Т-радикал, то аналог указанного результата для csp-кольца S выглядит так:

Предложение 9. Радикальные классы категории mod-S являются замкнутыми относительно чистых подмодулей.

Доказательство. Как уже известно, всякий радикальный класс в mod-S имеет вид $T(F)$, где F задаётся равенством (1). Пусть B – некоторый чистый подмодуль модуля $A_S \in T(F)$. Последнее включение, как отмечалось перед теоремой 6, эквивалентно тому, что при всех $p \in P^*$ выполнено $A_p \otimes_S F_p = 0$.

а) Предположим сначала, что $p = 0$ или $K_p \neq \hat{\boldsymbol{Z}}_p$. Легко видеть, что модуль B_p вкладывается в A_p; можно считать, что справедливо равенство $F_p = 0$ или $F_p = K_p$. В первом случае условие $B_p \otimes_S F_p = 0$ очевидно, во втором – следует из равенства $A_p \otimes_S F_p = 0$, а также того факта, что K_p-модуль F_p является плоским.

б) Допустим теперь, что выполнено равенство $K_p = \hat{\boldsymbol{Z}}_p$; тогда B_p есть чистый подмодуль p-адического модуля A_p и, значит, чистый подмодуль в смысле Кона. Поэтому из условия $A_p \otimes_S F_p = 0$ следует $B_p \otimes_S F_p = 0$.

Итак, при любом $p \in P^*$ выполнено $B_p \otimes_S F_p = 0$, т.е. $B \in T(F)$. ■

Через $\wedge$ обозначим решёточную операцию пересечения радикалов. В [9] было показано, что «решёточное» пересечение Т-радикалов категории абелевых групп совпадает с «поточечным». Точнее, справедлив следующий факт:

Теорема 10 [9]. Пусть $\{\rho_i\}_{i \in Y}$ – некоторое семейство Т-радикалов категории абелевых групп. Тогда равенство

$$\Big(\bigwedge_{i \in Y} \rho_i\Big)(A) = \bigcap_{i \in Y} \rho_i(A) \tag{4}$$

выполнено для любой абелевой группы A. ■

Аналогичный факт верен и в категории модулей над csp-кольцом S.

Теорема 11. Пусть $\{\rho_i\}_{i \in Y}$ – некоторое семейство радикалов категории mod-S. Тогда равенство (4) справедливо для любого S-модуля A.

Доказательство. Обозначим через B подмодуль модуля A, стоящий в правой части (4). Пусть простое число p таково, что выполнено $K_p = \hat{\boldsymbol{Z}}_p$. Справедливо равенство $\rho_i(A) = \rho_i(A_p) \oplus \rho_i(A)(1 - e_p)$, поэтому модуль $B_p = Be_p$ есть пересечение модулей $\rho_i(A_p)$ по всем $i \in Y$. Зная все радикалы категории p-адических модулей, отсюда уже нетрудно получить, что имеет место равенство $B_p = \sigma(A_p)$, где σ – это некоторый радикал указанной категории. Из последнего факта, в свою очередь, легко вывести, что B_p есть чистый подмодуль p-адического модуля A_p.

Получили, что подмодуль B чист в A и, значит, в каждом из модулей $\rho_i(A)$. Все классы $R(\rho_i)$ замкнуты относительно чистых подмодулей, поэтому модуль B принадлежит каждому из этих классов. Отсюда следует равенство $\rho(B) = B$ (где ρ – «решёточное» пересечение радикалов ρ_i по всем i) и, далее, включение $B \subset \rho(A)$. Кроме того, $\rho(A)$ содержится в каждом из подмодулей $\rho_i(A)$, так что выполнено $\rho(A) \subset B$. Отсюда следует равенство (4). ■

Замечание. Аналог теоремы 11 для решёточной операции объединения $\vee$ уже, вообще говоря, неверен. Так, если ρ и σ – Т-радикалы, порождённые S-модулями I и S/I соответственно, то имеем $(\rho \vee \sigma)(S) = S \neq I = 0 + I = \rho(S) + \sigma(S)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Parshall K.V.H.* Joseph H. M. Wedderburn and the structure theory of algebras // Arch. Hist. Exact Sci. 1985. V. 32. No. 3-4. P. 223–349.
2. *Бурбаки Н.* Алгебра (Модули, кольца, формы). М.: Наука, 1966.
3. *Кашу А.И.* Радикалы и кручения в модулях. Кишинёв: Штиинца, 1983.
4. *Тимошенко Е.А.* Радикалы в категории модулей над csp-кольцом // Проблемы теоретической и прикладной математики: тезисы 41-й Всероссийской молодёжной конференции. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2010. С. 85–91.
5. *Тимошенко Е.А.* Т-радикалы и Е-радикалы в категории модулей // Сиб. матем. журн. 2004. Т. 45. № 1. С. 201–210.
6. *Крылов П.А.*, *Пахомова Е.Г.*, *Подберезина Е.И.* Об одном классе смешанных абелевых групп // Вестник ТГУ. 2000. № 269. С. 47–51.
7. *Царёв А.В.* Проективные и образующие модули над кольцом псевдорациональных чисел // Мат. заметки. 2006. Т. 80. № 3. С. 437–448.
8. *Зиновьев Е.Г.* Кольца псевдоалгебраических чисел и модули над ними: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Томск, 2009.
9. *Тимошенко Е.А.* Т-радикалы в категории абелевых групп // Фундам. и прикл. матем. 2007. Т. 13. № 3. С. 193–208.

Статья поступила 13.06.2011 г.

Timoshenko E. A. ON RADICALS IN THE CATEGORY OF MODULES OVER A CSP-RING. We obtain a complete description of torsions and cotorsions of the category of modules over an arbitrary csp-ring. It is also proved that all radical classes of this category are closed under pure submodules.

Keywords: module, radical, torsion, cotorsion, pure submodule, csp-ring.

TIMOSHENKO Egor Aleksandrovich (Tomsk State University)
E-mail: tea471@mail.tsu.ru.